EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Kovács Sándor

ALKALMAZOTT ANALÍZIS GYAKORLAT

Budapest, 2018

A jegyzet az ELTE IK 2018. évi *Jegyzettámogatási pályázat*án
elnyert forrás felhasználásával készült.

Lektorálta: Dr. Simon Péter egyetemi tanár

ISBN 978-963-489-032-4

Tartalomjegyzék

Előszó

Ebben a jegyzetben egy féléves gyakorlati anyagot mutatunk be, kidolgozott beadható, ill. szorgalmi feladatokkal kiegészítve. A jegyzet első sorban MSc-s informatikus (az alkalmazott matematika egyes fejezeteire erősen támaszkodó, szakirányú képzésekben részt vevő), BSc-s matematikus, ill. fizikus hallgatóság számára íródott, de haszonnal forgathatják más természettudományi képzésben részesülő hallgatók is, mint a megfelelő analízis előadásokon elhangzó ismeretek elmélyítését szolgáló segédanyagot. A jegyzet alapvetően az alábbi tankönyvekben tárgyalt anyagok egy részének (mértékelmélet, differenciálformák) feldolgozásához nyújt segítséget:

- Simon Péter: Mérték és integrál, ELTE Eötvös Kiadó, 2015.
- Simon Péter: Válogatott fejezetek a matematikából (megjelenés alatt), 2018.

A tananyagot a felsőoktatási törvényben megfogalmazott 15 hetes beosztásra terveztük, amelynek részét képezi a házi feladatként feldolgozandó Függelék is.

A kurzust elvégző hallgatók az adott tárgyból gyakorlati jegyet kapnak, amely zárthelyi dolgozat megírásával, pontosabban a következő feltételek teljesítésével nyerhető el. Az 1. zárthely dolgozat alkalmával mutatott teljesítmény alapján gyakorlati jegyet ajánlunk meg. A megajánlott jegy javítására, ill. rontására két lehetőség van:

1. Ha a megajánlott jegy legalább elégséges (2), de legfeljebb jó (4) és a félév során (határidőre beadható) feladatok megoldásának legalább 60%-a hibátlan, akkor

$$\textbf{a gyakorlati jegy} \quad = \quad \textbf{megajánlott jegy} \quad + \quad \mathbf{1}.$$

2. A 2. zh megírása.

Budapest, 2018. augusztus 27.

Kovács Sándor

Fontosabb jelölések és rövidítések

$=$	az egyenlőség jele
$:=$	a definiáló egyenlőség jele
$\leq, <, \geq, >$	egyenlőtlenégek jelei
$A \wedge B$	A és B
$A \vee B$	A vagy B
$\neg A$	nem A
$A \Longrightarrow B$	ha A, akkor B
$A \Longleftrightarrow B$	A egyenértékű B-vel
$\emptyset$	üres halmaz
$a \in A$	a az A halmaz eleme
$a \notin A$	a nem eleme az A halmaznak
$A \subset B$	az A halmaz a B halmaz részhalmaza
$A \cap B$	az A halmaz és a B halmaz közös része
$A \cup B$	az A halmaz és a B halmaz egyesítése
$A \uplus B$	az A halmaz és a B halmaz egyesítése, ahol $A \cap B = \emptyset$
$A \setminus B$	az A halmaz különbsége
$\{a, b, \ldots\}$	az $a, b, \ldots$ elemekből álló halmaz
$\{x \in A : t(x)\}$	az A halmaz $t(x)$ tulajdonságú elemeinek részhalmaza
$A \times B$	az A halmaz a B halmaz direkt (Descartes-féle) szorzata
$\emptyset$	az üres halmaz
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{N}$	$:= \mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$, a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$, a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$-beli komponensű rendezett n-esek (vektorok) halmaza ($n \in \mathbb{N}$)
$+\infty, -\infty, \infty$	plusz végtelen, mínusz végtelen, végtelen
X, Y, Z	lineáris tér

$\\|x\\|$	az $x \in X$ vektor normája
$\|x\|$	$:= \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$: az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hossza (euklideszi normája)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skaláris szorzás
$x \circ y$	$:= [x_i y_j]_{i,j=1}^{n,n}$: az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok diadikus szorzata
f	függvény
$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$f(x)$, f_x	az függvény $x \in \mathcal{D}_f$ helyen felvett értéke
$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény ($D_f = A$)
$f \in A \to B$	azoknak az f függvényeknek a halmaza, amelyekre $\mathcal{D}_f \subset A$, $\mathcal{R}_f \subset B$
$f\|_H$	az f függvénynek a H halmazra való leszűkítése
f^{-1}	az f függvény inverze
$f \circ g$	az f (külső) és a g (belső) függvény összetett vagy közvetett függvénye
$\mathbb{E}_n$	$(n \times n)$-es egységmátrix
$\mathfrak{C}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{C}^r(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, r-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$),
$\mathfrak{D}^r(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, r-szer differenciálható függvények halmaza ($r \in \mathbb{N}_0$),
$(\mathcal{X}, \\| \cdot \\|)$	normált tér
$V(f, \tau)$	az f függvény τ felosztáshoz tartozó megváltozása vagy variációja
$V_a^b(f)$	az f függvény teljes megváltozása vagy totális variációja
$\mathcal{E}_a^v$	az a pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes
$\mathcal{S}_a^n$	az a pontra illeszkedő, n normálvektorú sík
$\int_\varphi f$	az f ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú) függvénynek φ útra vonatkozó vonalintegrálja
$\mathfrak{S}_n$	az n-edrendű permutációk szimmetrikus csoportja
$\mathcal{S}_k(X)$	az $X^k \to \mathbb{R}$ (X valós lineáris tér, $k \in \mathbb{N}_0$) szimmetrikus k-lineáris leképezések halmaza
$\mathcal{A}_k(X)$	az $X^k \to \mathbb{R}$ (X valós lineáris tér, $k \in \mathbb{N}_0$) alternáló k-lineáris leképezések halmaza
$\Lambda_k^r(X)$	a V ($\subset \mathbb{R}^n$) nyílt halmazon értelmezett $\mathfrak{C}^r$-beli k-adrendű differenciálformák halmaza
$\vee$	szimmetrikus szorzás
$\wedge$	külső szorzás (ékszorzás)

$\mathfrak{Lip}([a,b],\mathcal{X})$	az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $\mathcal{X}$-be képező Lipschitz-folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{BV}([a,b],\mathcal{X})$	az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $\mathcal{X}$-be képező korlátos változású függvények halmaza
$\mathfrak{AC}([a,b],\mathcal{X})$	az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $\mathcal{X}$-be képező abszolút folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{F}([a,b])$	az $[a,b]$ intervallum felosztásainak halmaza
$\sigma(f,\alpha,\tau,\xi_\tau)$	az f függvény τ felosztáshoz, illetve a ξ_τ köztes vektorhoz tartozó, α-ra vonatkozó Riemann-Stieltjes-összege
$\mathfrak{R}_\alpha[a,b]$	az $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes-integrálható $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények halmaza
$\int_a^b f\,d\alpha$	az f függvény α-ra vonatkozó Riemann-Stieltjes-integrálja
$L(\varphi)$	a φ út hossza
$\int_\varphi f ds$	az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvénynek a φ útra vonatkozó elsőfajú vonalintegrálja
$\int_\varphi f dr$	az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvénynek a φ útra vonatkozó másodfajú vonalintegrálja
$\int_\Psi f$	az f ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ típusú folytonos) függvénynek Ψ-re vonatkozó elsőfajú felületi integrálja
$\int_\Psi f$	az f ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú folytonos) függvénynek Ψ-re vonatkozó másodfajú felületi integrálja
$\liminf(A_n)$	az (A_n) halmazsorozat limesz inferiorja
$\limsup(A_n)$	az (A_n) halmazsorozat limesz szuperiorja
$\lim(A_n)$	az (A_n) halmazsorozat határhalmaza
$\int f\,d\mu$	az f függvény μ mérték szerinti itegrálja
$\int_A f\,d\mu$	az f függvény A halmazon vett (μ mérték szerinti) itegrálja
$f \otimes g$	az f és a g forma tenzori szorzata
$(\mathcal{T}(X),\otimes)$	tenzoralgebra
$\mathcal{S}_k(X)$	az X-beli szimmetrikus formák tere
$\mathcal{A}_k(X)$	az X-beli alternáló formák tere
$f \vee g$	az f és a g forma szimmetrikus szorzata
$f \wedge g$	az f és a g forma külső szorzata
$\mathcal{S}(f)$	az f forma szimmetrikus része
$\mathcal{A}(f)$	az f forma alternáló része

$d\omega$	az $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ differenciálforma külső deriváltja
$\operatorname{grad} f$	az f ($\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ típusú) függvény gradiense ($d \in \mathbb{N}$)
$\operatorname{rot} f$	az f ($\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ típusú) függvény rotációja ($d \in \{2,3\}$)
$\operatorname{div} f$	az f ($\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ típusú) függvény divergenciája ($d \in \mathbb{N}$)
$\int_\Phi \omega$	az $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ forma integrálja a Φ k-cellára
$\partial\Phi$	a Φ k-cella határa
$\square$	megjegyzés, ill. tétel vége
$\Diamond$	példa, ill. definíció vége
$\blacksquare$	útmutatás, bizonyítás vége

Görög betűk

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ, ϱ	ró
B	β	béta	K	κ, $\varkappa$	kappa	Σ	σ, ς	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε, ϵ	epszilon	N	ν	nű	Φ	ϕ, φ	fí
Z	ζ	(d)zéta	Ξ	ξ	kszí	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszí
Θ	θ, ϑ	théta	Π	π, ϖ	pí	Ω	ω	ómega
						$\digamma$		digamma

Gót betűk

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	a	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	h	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	o	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	v (fau)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	b	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	i	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	p	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	w (vé)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	c	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	j (jot,jé)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	q	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	x
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	d	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	k	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	r	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	y (üpszilon)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	e	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	l	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	s (esz)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	z (cet)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	f	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	m	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	t			
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	g	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	n	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	u			

1. fejezet

A gyakorlatok anyaga

1.1. $\boxed{\text{1. gyakorlat}}$

1.1.1. $\boxed{\text{A gyakorlat anyaga}}$

Emlékeztető. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $a < b$, továbbá $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Legyen továbbá

$$F : [a, b) \to \mathbb{R}, \quad F(\omega) := \int_a^\omega f(x)\, dx.$$

Ha

$$\lim_{\omega \to b} F(\omega) =: A \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

akkor ezt az A számot az f **improprius integráljának** nevezzük, és a következő jelölést használjuk: $\displaystyle\int_a^b f := A$. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**. Ha (1.1) nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**. $\Diamond$

Példa.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx &= \lim_{\omega \to 2-0} \int_0^\omega \frac{1}{2\sqrt{1 - (x/2)^2}}\, dx = \lim_{\omega \to 2-0} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\omega = \\ &= \lim_{\omega \to 2-0} \left(\arcsin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 0\right) = \pi/2. \quad \Diamond\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Milyen $p \in [1, +\infty)$ esetén konvergens az

$$\int_1^\infty \left| \frac{1}{1 + \sqrt[k]{x}} \right|^p dx$$

improprius integrál?

Útm. Lévén, hogy $[1, +\infty) = [1, k] \cup (k, +\infty)$, két eset van:

1. ha $p \in [1, k]$, akkor

$$\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^p \leq \left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sqrt[k]{x^l} \leq \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sqrt[k]{x^k} = 2^k x \quad (x \in [1, +\infty))$$

/ **Megjegyzés.** Mivel $x \geq 1$, ezért $\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^k \leq \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x}\right)^k = 2^k x$./,

ezért

$$\lim_{\omega \to +\infty} \left(\int_1^\omega \frac{1}{\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^p} dx \right) \geq \lim_{\omega \to +\infty} \left(\int_1^\omega \frac{1}{\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^k} dx \right) \geq$$

$$\geq \lim_{\omega \to +\infty} \left(\int_1^\omega \frac{1}{2^k x} dx \right) = \frac{1}{2^k} \lim_{\omega \to +\infty} (\ln(\omega)) = +\infty,$$

azaz az improprius integrál divergens.

2. ha $p \in (k, +\infty)$, akkor $\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^p \geq \sqrt[k]{x^p}$, így

$$\lim \left(\int_1^\omega \frac{1}{\left(1 + \sqrt[k]{x}\right)^p} dx \right) \leq \lim \left(\int_1^\omega \frac{1}{\sqrt[k]{x^p}} dx \right) = \frac{k}{k-p} \lim \left(\left[x^{1-p/k} \right]_1^\omega \right) =$$

$$= \frac{k}{p-k} \cdot \lim \left(1 - \omega^{1-p/k}\right) = \frac{k}{p-k} < +\infty,$$

azaz az improprius integrál konvergens. ■

Emlékeztető. Legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$: $a < b$, továbbá $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, b]$. Legyen továbbá

$$F : (a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(\alpha) := \int_\alpha^b f(x)\, dx.$$

Ha

$$\lim_{\alpha\to a} F(\alpha) =: A \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

akkor ezt az A számot az f **improprius integráljának** nevezzük, és a következő jelölést használjuk: $\displaystyle\int_a^b f := A$. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**. Ha (1.2) nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**. $\lozenge$

Feladat. Milyen $p \in [1, +\infty)$ esetén konvergens az

$$\int_0^{1/2} \left|\frac{1}{x\ln^2(x)}\right|^p dx$$

improprius integrál?

Útm. Ha

$p = 1,$ akkor

$$\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_\alpha^{1/2} = \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(\alpha)} \longrightarrow \frac{1}{\ln(2)} \qquad (\alpha \to 0).$$

$p > 1,$ akkor

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p\ln^{2p}(x)}\,dx &= \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x^p\ln^{2p}(x)}\,dx \geq \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x^p\ln^{2p}(\alpha)}\,dx = \\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln^{2p}(\alpha)}\int_\alpha^{1/2}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln^{2p}(\alpha)}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\alpha^{1/2} \geq \\ &\geq \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{\alpha^{p-1}\cdot\ln^{2p}(\alpha)} = +\infty \quad \boxed{\textbf{HF.}} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Emlékeztető. Legyen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $a < b$, továbbá $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c, d \in (a, b)$: $c < d$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, d]$.

1. Ha valamely $\xi \in (a, b)$ esetén az $\displaystyle\int_a^\xi f$ és az $\displaystyle\int_\xi^b f$ improprius integrál konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**, és

$$\int_a^b f := \int_a^\xi f + \int_\xi^b f\,.$$

2. Ha van olyan $\eta \in (a, b)$, hogy az $\int_a^\eta f$ és az $\int_\eta^b f$ improprius integrálok közül legalább az egyik divergens, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**. ◊

Példa. Legyen $0 < p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{pq}},$$

ui.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{p}\int_\alpha^0 \frac{1}{1+(\sqrt{q/p}x)^2}\,dx =$

  $\displaystyle= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{pq}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\alpha\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}},$

- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{pq}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\omega\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}}.$ ◊

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ (**Dirichlet-integrál**) konvergens,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx$ divergens!

Útm.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \in \mathbb{R}$, ui.

   - minden $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

     $$0 < \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \le \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2} \qquad (\alpha \to 0);$$

   - ha

     $$F(\omega) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \qquad \left(\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right),$$

akkor

$$F(\omega)=\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

és

$$\exists\lim_{+\infty}F\in\mathbb{R},$$

hiszen

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right)=0\qquad\text{és}\qquad\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}\qquad\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)\right),$$

továbbá

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\omega\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\omega\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\omega}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Megjegyzés. Hasonlóan igazolható ($\boxed{\textbf{HF.}}$), hogy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$$

konvergens.

Megjegyzés.

- A Dirichlet-integrál az alsó integrációs határnál csak „pszeudo-improprius”, ui. az

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & (x>0),\\[2ex] 1 & (x=0)\end{cases}$$

függvényre tetszőleges $c>0$ esetén $f\in\mathfrak{R}[0,c]$ teljesül.

- Hasonló a helyzet a beadhatóban lévő

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

integrál esetében, amelynek kiszámításához egy kis segítség:

$$\frac{x^3}{e^x-1}=\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}=x^3e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\qquad(0\neq x\in\mathbb{R}).$$

2. Belátjuk, hogy
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx$$
divergens. Mivel minden $x\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ esetén
$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\geq\frac{\sin^2(x)}{x}=\frac{1-\cos(2x)}{2x},$$
továbbá minden $\omega\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ számra
$$G(\omega):=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx=\frac{\ln(\omega)}{2}-\frac{\ln(\pi)}{2}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{\cos(2x)}{2x}\,dx,$$
és
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$$
konvergens, így
$$\lim_{\omega\to+\infty}G(\omega)=+\infty.\quad\blacksquare$$

Feladat. Adott
$$F(t):=\int_0^1\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,dx,\qquad G(t):=\left(\int_0^t e^{-s^2}\,ds\right)^2\qquad(t\in\mathbb{R})$$
függvények esetén mutassuk, ill. indokoljuk meg, hogy

1. $F\in\mathfrak{C}$, majd számítsuk ki $\lim_{+\infty}F$-et;
2. $F\in\mathfrak{D}$, majd számítsuk ki F'-t;
3. $G\in\mathfrak{D}$, majd számítsuk ki G'-t;
4. $F(t)=\frac{\pi}{4}-G(t)$ $(t\in\mathbb{R})$, ill.
$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
teljesül!

Útm.

1. Az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény folytonossága következtében $F \in \mathfrak{C}$ és
$$\lim_{+\infty} F = \int_0^1 \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} \right) dx = 0.$$

2. Mivel az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény $\mathfrak{C}^1$-beli, ezért $F \in \mathfrak{D}$ és
$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 (-2(1+x^2)t) \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\, dx = \\ &= (-2e^{-t^2}) \int_0^1 t e^{-x^2t^2}\, dx = \quad \left(xt =: s \rightsquigarrow dx = \frac{1}{t} ds \right) \\ &= (-2e^{-t^2}) \int_0^t e^{-s^2}\, ds \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3. Az $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2}$ függvény folytonos, ezért ennek integrálfüggvénye deriválható, és
$$G'(t) = 2 \left(\int_0^t e^{-s^2}\, ds \right) e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $F'(t) = -G'(t)$, így van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy
$$F(t) + G(t) = c \qquad (t \in \mathbb{R}),$$
és mivel $G(0) = 0$, ill.
$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg}(1) - \mathrm{arctg}(0) = \frac{\pi}{4},$$
ezért
$$F(t) = \frac{\pi}{4} - G(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$
A $\lim_{+\infty} F = 0$ a határérték-reláció következtében $\lim_{+\infty} G = \frac{\pi}{4}$, azaz
$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \blacksquare$$

HÁZI FELADAT. Az $\boxed{\text{A}}$ Függelék ismeretanyaga.

1.1.2. $\boxed{\text{Beadható/gyakorló feladatok}}$

1. Milyen $p \in [1, +\infty)$ esetén konvergensek az alábbi improprius integrálok?

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x;$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\ln(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x;$

   (c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \left|\frac{1}{x \cdot \ln(x)^{666}}\right|^p \mathrm{d}x.$

   Útm.

   (a) Ha

   - $p = 1$, akkor az integrál diverges (vö. 1. gyakorlat).
   - $p > 1$, akkor bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén
   $$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^p \leq \frac{1}{x^p},$$
   így
   $$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\omega} = \frac{1}{p-1},$$
   ami azt jelenti, hogy
   $$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

   (b) Ha

   - $p = 1$, akkor tetszőleges $1 \leq \omega$ esetén
   $$\int_1^{\omega} \left|\frac{\ln(x)}{x}\right| \mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^{\omega} = \frac{1}{2}\cdot\ln^2(\omega) \longrightarrow +\infty \qquad (\omega \to +\infty),$$
   azaz
   $$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\ln(x)}{x}\right| \mathrm{d}x \quad \text{divergens.}$$
   - ha $p \in (1, +\infty)$, akkor a $t := \ln(x)$ helyettesítéssel
   $$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\ln(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^{(p-1)t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{c} \frac{t^p}{e^{(p-1)t}}\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} \frac{t^p}{e^{(p-1)t}}\,\mathrm{d}t,$$

ahol $c \in (0, +\infty)$, továbbá a Bernoulli-L'Hospital-szabály miatt

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{p+2}}{e^{(p-1)t}} = 0.$$

Ezért alkalmas c-vel

$$\frac{t^p}{e^{(p-1)t}} \leq \frac{1}{t^2} \qquad (x \in [c, +\infty)),$$

azaz

$$\int_c^{+\infty} \frac{t^p}{e^{(p-1)t}}\,dt \leq \int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty} \int_c^{\omega} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_c^{\omega} = \frac{1}{c}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\ln(x)}{x}\right|^p dx \quad \text{konvergens.}$$

(c) Ha

- $p = 1$, akkor tetszőleges $\alpha \in (0,1/2]$ esetén

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x\cdot(\ln(x))^{666}}\,dx &= -\frac{1}{665}\cdot\left[\frac{1}{(\ln(x))^{665}}\right]_\alpha^{1/2} = \\ &= \frac{1}{665}\cdot\left(\frac{1}{(\ln(2))^{665}} + \frac{1}{(\ln(\alpha))^{665}}\right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{1}{665\cdot(\ln(2))^{665}} \qquad (\alpha \to 0),\end{aligned}$$

azaz

$$\int_0^{1/2} \left|\frac{1}{x\cdot(\ln(x))^{666}}\right| dx \quad \text{konvergens.}$$

- $p \in (1, +\infty)$, akkor tetszőleges $\alpha \in (0,1/2]$ esetén

$$\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x^p\cdot(\ln(x)^{666})^p}\,dx \geq \int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x^p\cdot(\ln(\alpha)^{666})^p}\,dx = \frac{1}{(\ln(\alpha)^{666})^p}\cdot$$

$$\cdot\int_\alpha^{1/2} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{(\ln(\alpha)^{666})^p}\cdot\frac{\alpha^{1-p}-(1/2)^{1-p}}{p-1} \geq$$

$$\geq \frac{\alpha^{1-p}}{(p-1)(\ln(\alpha)^{666})^p} = \frac{1}{(p-1)\alpha^{p-1}(\ln(\alpha)^{666})^p};$$

ez pedig

$$\alpha^{p-1}(\ln(\alpha)^{666})^p \longrightarrow 0 \qquad (\alpha \to 0)$$

következtében azt jelenti, hogy

$$\int_0^{1/2} \left| \frac{1}{x \cdot \ln(x)^{666}} \right|^p \mathrm{d}x$$

divergens. ■

2. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} & (n-1 \leq x < n,\ n \in \mathbb{N}), \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mutassuk meg, hogy

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ konvergens,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ divergens!

Útm.

(a) Mivel

$$f(x) = 0 \quad (x < 0), \qquad \text{ezért} \qquad \int_{-\infty}^{0} f = 0 \in \mathbb{R}.$$

Továbbá tetszőleges $\omega \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \int_0^\omega f &= \sum_{n=1}^{[\omega]} \int_{n-1}^{n} f + \int_{[\omega]}^{\omega} f = \sum_{n=1}^{[\omega]} \int_{n-1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{d}x + \int_{[\omega]}^{\omega} \frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1} \mathrm{d}x = \\ &= \sum_{n=1}^{[\omega]} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1} (\omega - [\omega]) \,. \end{aligned}$$

A Leibniz-kritérium, ill. $0 \leq \omega - [\omega] \leq 1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\in\mathbb{R},\qquad \text{ill.}\qquad \lim_{\omega\to+\infty}\frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1}(\omega-[\omega])=0,$$

így $\int_0^{+\infty} f\in\mathbb{R}$. Következésképpen az $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ improprius integrál konvergens.

(b) Ha

$$f_n(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & (k-1\le x<k,\ k\in\{1,\ldots,n\}),\\[2ex] 0 & (x\in(-\infty,0)\cup[n,+\infty))\end{cases}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

akkor bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n\le|f|$. Így

$$\int_0^{+\infty} f_n\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot(k-(k-1))=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\longrightarrow+\infty\quad(n\to\infty)$$

következtében $\int_0^{+\infty}|f|\notin\mathbb{R}$, azaz $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|$ improprius integrál divergens. ■

3. Számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

integrált!

Útm.

A Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{e^x-1}=0,$$

ui.

$$\frac{x^3}{e^x-1}\sim\frac{3x^2}{e^x}\longrightarrow0\qquad(x\to0).$$

Az

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{x^3}{e^x-1} & (x>0),\\[2ex] 0 & (x=0)\end{cases}$$

függvény tehát folytonos, ezért bármely $\omega\ge0$ számra $f\in\mathfrak{R}[0,\omega]$. Így

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} x^3\cdot\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(x^3\cdot e^{-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\right)dx = \\
&= \int_0^{+\infty}\left(x^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(x^3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\right)dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}x^3\cdot e^{-nx}\,dx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega}x^3\cdot e^{-nx}\,dx\right)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega} x^3\cdot e^{-nx}\,dx &= \left[\frac{x^3e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\omega} + \frac{3}{n}\int_0^{\omega}x^2\cdot e^{-nx}\,dx = \\
&= -\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} + \left[\frac{3x^2e^{-nx}}{-n^2}\right]_0^{\omega} + \frac{6}{n^2}\int_0^{\omega}xe^{-nx}\,dx = \\
&= -\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2e^{n\omega}} + \left[\frac{6xe^{-nx}}{-n^3}\right]_0^{\omega} + \frac{6}{n^3}\int_0^{\omega}e^{-nx}\,dx = \\
&= -\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3e^{n\omega}} + \frac{6}{n^3}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\omega} = \\
&= -\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3e^{n\omega}} + \frac{6}{n^4} - \frac{6}{n^4e^{-n\omega}}
\end{aligned}$$

következtében a Bernoulli-L'Hospital-szabály többszöri felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3e^{n\omega}} + \frac{6}{n^4} - \frac{6}{n^4e^{-n\omega}}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az utóbbi egyenlőség pl. a következő módon látható be. Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan 2π-periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi),$$

akkor – lévén, hogy f páros –, azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f}_s(n) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy

$$\widehat{f}_c(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_c(n) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}(0-0) - \frac{2}{\pi n}\left\{\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\,dx\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left\{[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi n^2}[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - 0 = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(-n\pi)) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Így f Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért a Weierstraß-kritérium felhasználásával látható, hogy

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

Felhasználva a Parseval-egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\frac{4\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5},$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \cdot \left\{ \frac{2\pi^4}{5} - \frac{4\pi^4}{18} \right\} = \frac{1}{16} \cdot \frac{36\pi^4 - 20\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{90}$$

következik. ■

4. Közismert, hogy az **abszolút fekete test** emisszióképességének frekvenciától és hőmérséklettől való függésére

$$E(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \qquad (\nu, T \in (0, +\infty)),$$

ill. (a $c = \lambda\nu$ helyettesítéssel) hullámhossztól és hőmérséklettől való függésére

$$E(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda Tk}\right) - 1} \qquad (\lambda, T \in (0, +\infty))$$

teljesül, ahol

c : a fény sebessége vákuumban,
ν : a sugárzás frekvenciája,
λ : a sugárzás hullámhossza,
k : a Boltzmann-állandó,
T : a sugárzó test abszolút hőmérséklete,
h : a Planck-állandó

(**Planck-féle sugárzási törvény**). Számítsuk ki a sugárzás teljes energiasűrűségét, azaz tetszőlegesen rögzített $T > 0$ esetén az

$$\int_0^{+\infty} E(\nu, T)\, d\nu$$

integrált!

Útm.

$$\int_0^{+\infty} E(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}\, d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx \Big|_{x=\frac{h\nu}{kT}} =$$

$$= \underbrace{\frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}}_{=:\sigma} \cdot T^4 \qquad \text{(\textbf{Stefan-Boltzmann-törvény}).} \quad ■$$

5. Igazoljuk, hogy ha $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor igaz az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

állítás!

Útm.

Mivel bármely

- $0 \leq \omega \in \mathbb{R}$ esetén a $t := \dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ helyettesítéssel

$$\int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$

és

$$\lim_{\omega\to+\infty} \left\{ \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt + \int_0^{\frac{\omega-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} \exp\left(-t^2\right) \sqrt{2}\sigma\, dt \right\} =$$

$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \sqrt{2}\sigma \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2},$$

ezért

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}.$$

- $0 \geq \alpha \in \mathbb{R}$ esetén a $t := \dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ helyettesítéssel

$$\int_{\alpha}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$

és

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \left\{ \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt - \int_{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt \right\} =$$

$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt,$$

ezért

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt$$

ahonnan az állítás már következik. ■

6. Mutassuk meg, hogy ha $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igazak az alábbi állítások!

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \mu$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$.

A valószínűségszámításban és a statisztikában fontos szerepe van az

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$). Az f-et a **standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének**, Φ-t pedig a **standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének** vagy **valószínűségintegrál**nak, ill. **Gauß-féle hibaintegrál**nak nevezik. A fenti f függvény harang alakú grafikonját, Carl Fiedrich Gauß ($1777-1855$) arcképét, valamint Göttingen történelmi épületeit láthatjuk az 1989-ben, a Német Szövetségi Bank által kibocsátott 10 márkás bankjegyen (vö. 1.1. ábra).

1.1. ábra.

Útm.

(a) Ez nem más, mint az előző feladat más formában való felírása (kosnstanssal való átszorzás).

(b) Mivel bármely $0 \leq \omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^\omega x f(x)\,dx &= \int_0^\omega (x-\mu+\mu) f(x)\,dx = \int_0^\omega (x-\mu) f(x)\,dx + \int_0^\omega \mu f(x)\,dx = \\ &= \frac{-\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\omega \frac{\mu - x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\,dx + \mu \int_0^\omega f(x)\,dx,\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty} \left\{ \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\omega + \mu \int_0^\omega f(x)\,dx \right\} = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) + \mu \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\mu}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$\int_{-\infty}^0 x f(x)\,dx = \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\mu}{2}.$$

(c) Mivel bármely $0 \leq \omega \in \mathbb{R}$ esetén a

$$t := \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$

helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int_0^\omega (x-\mu)^2 f(x)\,dx &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} t^2 \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\,dt = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} t \cdot (-2t) \exp\left(-t^2\right)\,dt = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[t \exp(-t^2)\right]_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} - \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-t^2)\,dt \right\},\end{aligned}$$

továbbá a Bernoulli-L'Hospital-szabály következtében

$$\left[t\exp(-t^2)\right]_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \longrightarrow 0+\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\omega\to+\infty),$$

ezért a korábbiak alapján

$$\int_0^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left\{\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)-\int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\,dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}.$$

Mivel bármely $0\geq\alpha\in\mathbb{R}$ esetén a

$$t:=\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$

helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^0(x-\mu)^2 f(x)\,dx &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} t^2\exp\left(-t^2\right)\sigma\sqrt{2}\,dt=\\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} t\cdot(-2t)\exp\left(-t^2\right)\,dt=\\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[t\exp(-t^2)\right]_{-\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}-\int_{-\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp(-t^2)\,dt\right\},
\end{aligned}$$

továbbá a Bernoulli-L'Hospital-szabály következtében

$$\left[t\exp(-t^2)\right]_{-\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \longrightarrow -\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)+0=-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\alpha\to-\infty),$$

ezért a korábbiak alapján

$$\int_0^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left\{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)+\int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\,dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}.$$

Így

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx+\int_0^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=\\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left\{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}=\sigma^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, olyan függvény, amelyre

$$f \in \mathfrak{E}\mathfrak{C}[0, +\infty) \qquad \text{és} \qquad \int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ határértékreláció (**Barbalat-lemma**)![1]

Útm. Mivel $f \in \mathfrak{E}\mathfrak{C}[0, +\infty)$, ezért $f \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, így minden $a > 0$ esetén $f \in \mathfrak{R}[0, a]$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy

$$f(x) \not\to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ és $x : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = +\infty \qquad \text{és} \qquad |f(x_n)| \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az egyenletes folytonosság miatt a fenti ε-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in [0, +\infty)$ esetén

$$|t - x_n| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $t \in [x_n, x_n + \delta]$ esetén

$$|f(t)| = |f(x_n) - (f(x_n) - f(t))| \geq |f(x_n)| - |f(x_n) - f(t)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$\left| \int_0^{x_n+\delta} f - \int_0^{x_n} f \right| = \left| \int_{x_n}^{x_n+\delta} f \right| = \int_{x_n}^{x_n+\delta} |f| > \frac{\varepsilon\delta}{2} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik (a második egyenlőségjel azért jogos, mert f állandó előjelű az $[x_n, x_n + \delta]$ intervallumon). Ez utóbbi pedig ellentmond annak, hogy

$$\int_0^{+\infty} f < +\infty. \quad \blacksquare$$

[1] Ennek az állításnak fontos szerepe van nem-autonóm differenciálegyenletek stabilitásvizsgálata során.

1.2. $\boxed{\text{2. gyakorlat}}$

1.2.1. $\boxed{\text{A gyakorlat anyaga}}$

Definíció. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$, ill. $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása: $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$. A

$$V(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|$$

összeget az f függvény τ felosztáshoz tartozó **megváltozás**ának vagy **variáció**jának nevezzük. $\Diamond$

Definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, ill. $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ függvény esetén a

$$V_a^b(f) := \sup\{V(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\} \in [0, +\infty]$$

(kibővített értelemben vett) valós számot az f függvény **teljes megváltozásá**nak vagy **totális variáció**jának nevezzük. $\Diamond$

Feladat. Számítsuk ki az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény teljes megváltozását az alábbi esetekben!

1. f monoton növekedő;

2. f monoton csökkenő.

Útm.

1. Ha f monoton növekedő és $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$, akkor $V(f, \tau) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \\
&= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\
&= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a),
\end{aligned}$$

   ahonnan
$$V_a^b(f) = \sup\{V(f, \tau) \in \mathbb{R} : \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\} = f(b) - f(a)$$
   következik.

2. Ha f monoton csökkenő, akkor **Házi feladat.** $V_a^b(f) = f(a) - f(b)$. $\blacksquare$

A következő tételben a totális megváltozás **intervallum szerinti additivitás**át vizsgáljuk. Adott $f:[a,b]\to\mathcal{X}$ függvény és tetszőleges $c\in(a,b)$ esetén értelmezzük az

$$f_c:[a,c]\to\mathcal{X},\qquad f_c(x):=f(x),$$

ill.

$$f^c:[c,b]\to\mathcal{X},\qquad f^c(x):=f(x)$$

függvényeket, majd bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$V_a^c(f):=V_a^c(f_c),\qquad V_c^b(f):=V_c^b(f^c),\qquad \text{ill.}\qquad V_c^d(f):=V_c^d(g),$$

ahol valamely $d\in(c,b)$ esetén $g:=f|_{[c,d]}$, azaz

$$g(x):=f(x)\qquad (x\in[c,d]).$$

Tétel. Ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér, $f:[a,b]\to\mathcal{X}$, ill. $c\in(a,b)$, úgy

$$V_a^b(f)<+\infty\qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(V_a^c(f)<+\infty\quad\wedge\quad V_c^b(f)<+\infty\right),$$

és

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

teljesül. □

Megjegyzés. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, és valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén $\tau:=\{c_0,\ldots,c_n\}\in\mathfrak{F}([a,b])$, akkor

$$V_a^b(f)=V_a^{c_1}(f)+V_{c_1}^{c_2}(f)+\ldots+V_{c_{n-2}}^{c_{n-1}}(f)+V_{c_{n-1}}^b(f).$$

teljesül. □

Feladat. Számítsuk ki az

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\sin(x)$$

függvény teljes megváltozását!

Útm. Ha

$$a:=0,\qquad c:=\frac{\pi}{2}\qquad \text{és}\qquad d:=\frac{3\pi}{2},\qquad b:=2\pi,$$

akkor f monoton növekedő $[0,c]$-n, monoton csökkenő $[c,d]$-n és monoton növekedő $[d,b]$-n, így

$$V_a^c(f)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1,\qquad V_c^d(f)=1-(-1)=2,\qquad \text{ill.}\qquad V_d^b(f)=0-(-1)=1.$$

Ez azt jelenti, hogy
$$V_a^b(f) = 1 + 2 + 1 = 4. \quad \blacksquare$$

Definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ függvény **korlátos változású** /jelben $f \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X})$/,[2] ha
$$V_a^b(f) < +\infty$$
teljesül. Az $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ esetben a $\mathfrak{BV}[a, b] := \mathfrak{BV}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést használjuk. $\lozenge$

Példák. Ha az $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ függvény

1. monoton $/\mathcal{X} = \mathbb{R}/$, akkor korlátos változású, hiszen $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
2. korlátos változású, akkor bármely $c, d \in (a, b)$, $c < d$ esetén a $g := f|_{[c,d]}$ függvény is korlátos változású. Ha ui.
$$\sup\{V(f, \tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\} =: r < +\infty,$$
továbbá $\{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathfrak{F}([c, d])$, akkor az $y_0 := a$, $y_{n+1} := b$ pontok hozzávételével $\{y_0, \ldots, y_{n+1}\} \in \mathfrak{F}([a, b])$, és így $y_1 = c$, ill. $y_n = d$ figyelembe vételével
$$\sum_{k=2}^{n} \|f(y_k) - f(y_{k-1})\| \leq \|f(y_1) - f(a)\| + \sum_{k=2}^{n} \|f(y_k) - f(y_{k-1})\| + \|f(b) - f(y_n)\| \leq r.$$
Ez pedig azt jelenti, hogy
$$V_a^b(f) < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad V_c^d(f) < +\infty. \quad \lozenge$$

Megjegyzés. Világos, hogy ha
$$\exists\, (\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a, b]) : \qquad \lim_{n\to\infty} V(f, \tau_n) = +\infty,$$
akkor $V_a^b(f) = +\infty$, azaz f nem korlátos változású. $\square$

[2] A $\mathfrak{BV}$ jelsorozat az angol *bounded variation* szintagma rövidítése.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ **Lipschitz-folytonos** /jelben $f \in \mathfrak{Lip}([a, b], \mathcal{X})$/, azaz van olyan $L \geq 0$ szám, amellyel

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L|x - y| \quad (x, y \in [a, b])$$

teljesül, akkor f korlátos változású!
Útm. Ha $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, akkor

$$V(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n} L|x_k - x_{k-1}| = L \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = L(b - a),$$

ahonnan – $V_a^b(f) = \sup\{\ldots\} \leq L(b - a)$ folytán – $f \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X})$ következik. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ **abszolút folytonos** /jelben $f \in \mathfrak{AC}([a, b], \mathcal{X})$/, azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [a, b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} (b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}} \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon,$$

akkor f korlátos változású!
Útm. Ha $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ abszolút folytonos, akkor az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [a, b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} (b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}} \|f(b_k) - f(a_k)\| < 1.$$

Így bármely olyan $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ intervallum esetén, amelyre $\beta - \alpha < \delta$, fennáll a $V_\alpha^\beta(f) \leq 1$ becslés. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot $I_1, \ldots, I_n$ intervallumokra úgy, hogy $n\delta \leq b - a$, $|I_k| < \delta$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$ legyen. Ekkor

$$V_a^b(f) \leq \sum_{k=1}^{n} V(f|_{I_k}) \leq n \leq \frac{b - a}{\delta},$$

azaz f korlátos változású. ■

Megjegyzés. Nem minden korlátos változású függvény abszolút folytonos (vö. Cantor-függvény: **I3** Függelék).

Tétel. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ korlátos változású, akkor f korlátos:

$$\mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X}) \subset \mathfrak{V}([a, b], \mathcal{X}),$$

továbbá

$$\|f(b) - f(a)\| \leq V_a^b(f).$$

Útm. Ha $x \in [a, b]$ és $\tau := \{a, x, b\}$, akkor $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$ és

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(a) + f(a)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a)\| \leq V_a^b(f) + \|f(a)\|, \tag{1.3}$$

ahonnan $f \in \mathfrak{B}([a, b], \mathcal{X})$, ill. a fenti becslés következik. ■

Megjegyzés. A tételbeli állítás nem megfordítható, ui. pl. a Dirichlet-függvény korlátos ugyan, de nem korlátos változású (vö. 4. beadható feladat). □

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X})$, akkor a

$$V : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad V(x) := \begin{cases} 0 & (x = a), \\ \\ V_a^x(f) & (x \in (a, b]) \end{cases} \tag{1.4}$$

függvény monoton növekedő!

Útm. Ha $x, y \in [a, b]$, $x < y$, akkor

$$V(y) = V_a^y(f) = V_a^x(f) + V_x^y(f) \geq V_a^x(f) = V(x),$$

azaz V monoton növekedő. ■

Tétel (Jordan). Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pontosan akkor korlátos változású, ha alkalmas $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton függvények esetén $f = g - h$. Ha f folytonos, akkor g és h megválasztható úgy, hogy mindegyikük folytonos legyen.

Biz.

1. lépés. Ha $f \in \mathfrak{BV}[a, b]$, akkor a fenti V függvény monoton növekedő. Azt kell tehát már csak megmutatnunk, hogy a $T := V - f$ függvény monoton növekedő. Mivel bármely $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$T(y) - T(x) = (V(y) - V(x)) - (f(y) - f(x)) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x))$$

és $f \in \mathfrak{BV}[x, y]$, ezért (vö. korábban)

$$|f(y) - f(x)| \leq V_x^y(f).$$

Így tehát bármely $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$T(y) - T(x) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T(x) \leq T(y).$$

Ha f folytonos, akkor V is, azaz $T = V - f$ is az (vö. 19. beadható feladat).

2. lépés. Ha $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, akkor $g, h \in \mathfrak{BV}[a, b]$, így bármely $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ felosztás esetén

$$\begin{aligned} V(f, \tau) &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |(g(x_k) - g(x_{k-1})) - (h(x_k) - h(x_{k-1}))| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - g(x_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n} (h(x_k) - h(x_{k-1})) = \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < +\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor

- f-nek csak elsőfajú szakadási helyei lehetnek, és az f szakadási helyeinek halmaza (legfeljebb) megszámlálható.
- $f \in \mathfrak{R}[a, b]$. $\square$

Feladat. Mutassuk meg, hogy a fenti g és h függvényekről feltehető, hogy mindegyikük szigorúan monoton!

Útm. A fenti tétel bizonyításából tudjuk, hogy g és h monoton növekedő. Legyen most

$$\gamma(x) := g(x) + l(x), \quad \chi(x) := h(x) + l(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

ahol $l : [a, b] \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő függvény. Világos, hogy ekkor γ és χ szigorúan monoton növekedő. Ennélfogva

$$f(x) = g(x) - h(x) = (g(x) + l(x)) - (h(x) + l(x)) = \gamma(x) - \chi(x) \qquad (x \in [a, b]). \quad \blacksquare$$

Tétel. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ folytonos,

$$F : [a, b] \to \mathcal{X}, \qquad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

akkor

$$F \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad V_a^b(F) = \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Biz. A Heine-tétel következtében f egyenletesen folytonos, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x, y \in [a, b]$ esetén

$$|x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Ha most $\tau := \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b]) \colon \|\tau\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}
|V(F, \tau) - \sigma(\|f\|, \tau, \xi_\tau)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \|F(x_k) - F(x_{k-1})\| - \sum_{k=1}^{n} \|f(\xi_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1})\right| = \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \{\|F(x_k) - F(x_{k-1})\| - \|f(\xi_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1})\}\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \big|\|F(x_k) - F(x_{k-1})\| - \|f(\xi_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1})\big| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \in [0,1]} \|f(x_{k-1} + t \cdot (x_k - x_{k-1})) - f(\xi_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \\
&= \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mivel $\|f\| \in \mathfrak{R}[a, b]$, ezért

$$V_a^b(F) = \int_a^b \|f(t)\|\,dt, \qquad \text{speciálisan} \qquad F \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

1.2.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények teljes megváltozását!

   (a) $f : [0,10\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := |\sin(x)|$;

   (b) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} -x-1 & (x \in [-1,0]), \\ \\ x - x^2 & (x \in (0,1]). \end{cases}$

   Útm.

   (a) Ha $a := 0$, és $b := 10\pi$, ill.

   $$c_1 := \frac{\pi}{2}, \qquad c_2 := \pi, \qquad c_3 := \frac{3\pi}{2}, \qquad \ldots, \qquad c_{19} := \frac{19\pi}{2},$$

   akkor f monoton növekedő vagy csökkenő a

   $$[0, c_1], \quad [c_1 c_2], \quad \ldots, \quad [c_{19}, b]$$

   intervallumok mindegyikén, továbbá bármely $k \in \{1, \ldots, 20\}$ esetén $V_{c_{k-1}}^{c_k}(f) = 1$. Ennélfogva

   $$V_a^b(f) = 1 + 1 + \ldots + 1 = 20.$$

   (b) Ha

   $$a := -1, \qquad c := 0 \qquad \text{és} \qquad d := \frac{1}{2}, \qquad b := 1,$$

   akkor f monoton csökkenő $[0, c]$-n és $[d, b]$-n, monoton növekedő $[c, d]$-n, így

   $$V_a^c(f) = 1, \qquad V_c^d(f) = \frac{5}{4}, \qquad \text{ill.} \qquad V_d^b(f) = \frac{1}{4}.$$

   Ez azt jelenti, hogy

   $$V_a^b(f) = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}. \quad \blacksquare$$

2. Igazoljuk, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pontosan akkor állandófüggvény, ha teljes megváltozására

   $$V_a^b(f) = 0$$

   teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha f állandófüggvény, akkor alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = c \qquad (x \in [a, b]).$$

Mivel f monoton, ezért

$$V(f, \tau) = |f(b) - f(a)| = |c - c| = 0.$$

2. lépés. Ha $V_a^b(f) = 0$ és f nem állandó, akkor alkalmas $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{azaz} \qquad |f(x_2) - f(x_1)| > 0.$$

Így, ha

- $x_1 = a$, $x_2 \in (a, b)$, akkor a

$$\tau := \{a = x_1, x_2, b\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$

felosztással

$$V_a^b(f) \geq V(f, \tau) = |f(x_2) - f(x_1)| + |f(b) - f(x_2)| > 0,$$

- $x_1 = a$, $x_2 = b$, akkor a

$$\tau := \{a = x_1, x_2 = b\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$

felosztással

$$V_a^b(f) \geq V(f, \tau) = |f(x_2) - f(x_1)| > 0,$$

- $x_1 \in (a, b)$, $x_2 = b$, akkor a

$$\tau := \{a, x_1, x_2 = b\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$

felosztással

$$V_a^b(f) \geq V(f, \tau) = |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| > 0,$$

- $x_1, x_2 \in (a, b)$, akkor a

$$\tau := \{a, x_1, x_2, b\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$

felosztással

$$V_a^b(f) \geq V(f, \tau) = |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(b) - f(x_2)| > 0,$$

ami nem lehetséges. ■

3. Mutassuk meg, hogy $V(f,\cdot)$ „a finomítás monoton növekedő függvénye”, azaz igaz a

$$\tau, \sigma \in \mathfrak{F}([a,b]): \ \ \tau \subset \sigma \qquad \Longrightarrow \qquad V(f,\tau) \leq V(f,\sigma)$$

implikáció!
Útm. Legyen $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$ és $\sigma := \{x_0, \xi, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$. Ekkor

$$\begin{aligned} V(f,\sigma) &= \|f(\xi) - f(x_0)\| + \|f(x_1) - f(\xi)\| + \ldots + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = V(f,\tau). \end{aligned}$$

Ha σ nem egy osztóponttal különbözik τ-tól, akkor az állítás indukcióval bizonyítható. ■

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mutassuk meg, hogy a (korlátos)

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

függvény nem korlátos változású!
Útm. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$,

$$x_0 := a, \quad x_1 \in (a,b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}), \quad x_2 \in (x_1, b) \cap \mathbb{Q}, \quad \ldots$$

$$x_{2k+1} \in (x_{2k}, b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}), \quad x_{2k} \in (x_{2k-1}, b) \cap \mathbb{Q}, \quad \ldots \quad x_{n+2} := b.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &\geq \sum_{k=1}^{n+2} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq \sum_{k=2}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &= |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})| = \\ &= |1 - 0| + |0 - 1| + \ldots + |1 - 0| = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $V_a^b(f) = +\infty$, azaz f nem korlátos változású. ■

5. Adjunk példát olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre, amely az (a, b) minden kompakt részintervallumán korlátos változású, de maga f nem az!
Útm. Világos, hogy az

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & (x \neq 1), \\ \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

függvény a $(0,1)$ intervallum bármely kompakt részén korlátos változású, hiszen f monoton $(0,1)$-en. Viszont f nem korlátos változású, hiszen nem is korlátos. ■

6. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ differenciálható függvény, továbbá

$$M := \sup\{|||f'(x)||| \in \mathbb{R} : \; x \in [a, b]\} < +\infty,$$

akkor f korlátos változású!
Útm. Világos, hogy

$$|||f'(x)||| \leq M \qquad (x \in [a, b]),$$

így a Lagrange-egyenlőtlenség következtében

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M|x - y| \qquad (x, y \in [a, b]).$$

Ez azt jelenti, hogy f Lipschitz-folytonos, ahonnan $f \in \mathfrak{BV}([a, b], \mathcal{X})$ következik. ■

7. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a, b] \to \mathcal{X}$ folytonosan differenciálható, akkor f korlátos változású!
Útm. Az f függvény folytonos differenciálhatósága azt jelenti, hogy f' folytonos, így a Weiertsraß-tétel következményeként van olyan $M > 0$ szám, hogy

$$|||f'(x)||| \leq M \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül. Ennélfogva f korlátos változású. ■

8. Döntsük el, hogy korlátos változásúak-e az alábbi függvények!

   (a) $f(x) := \sin(x)$ $(x \in [0, \pi])$;

   (b) $f(x) := x^3 - 3x + 4$ $(x \in [0,2])$;

(c) $f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1)), \\ 3/2 & (x \in [1,2)), \\ 2 & (x \in [2,3]); \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & (x \in (0,1]), \\ 0 & (x = 0); \end{cases}$

(e) $f(x) := \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \in (0,1]), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$

Útm.

(a) Mivel f deriválható,

$$f'(x) = \cos(x) \quad (x \in [0,\pi]),$$

továbbá

$$\sup\{|\cos(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,\pi]\} = 1 < +\infty,$$

ezért f korlátos változású.

(b) Mivel f deriválható,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad (x \in [0,2]),$$

továbbá

$$\sup\left\{|3x^2 - 3| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,2]\right\} = 9 < +\infty,$$

ezért f korlátos változású.

(c) Mivel f monoton növekedő, ezért korlátos változású.

(d) Legyen

$$\tau_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f(0) = 0$ és bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\cos(k\pi)}{k} = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $n \to \infty$ határesetben

$$V(f,\tau_n) = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| + \ldots + \left|\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| + \left|-1 - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 \longrightarrow \infty,$$

azaz f nem korlátos változású.

Megjegyzés. Ez a példa is mutatja, hogy van olyan folytonos (sőt egyenletesen folytonos) függvény, amely nem korlátos változású.

(e) Mivel f deriválható,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \in (0,1]), \\ \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

továbbá

$$\sup\{|f'(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\} \leq 2 + 1 = 3 < +\infty,$$

ezért f korlátos változású. ■

9. Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \in (0,1]), \\ \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f (egyenletesen) folytonos, de nem korlátos változású!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy f folytonos, ui. $f|_{(0,1]}$ – mint folytonos függvények szorzata – folytonos, továbbá sin korlátossága következtében

$$\lim_{0} f = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$$

azaz $f \in \mathfrak{C}[0]$.

2. lépés. Legyen $\alpha, \beta > 0$. Megmutatjuk, hogy az

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^{\alpha} \cdot \sin\left(x^{-\beta}\right) & (x \in (0,1]), \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény pontosan az $\alpha > \beta$ esetben korlátos változású. Ha most

$$u_n := \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1/\beta} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $u_n \in (0,1)$ és

$$\sin\left(u_n^{-\beta}\right) = (-1)^n, \qquad \text{ill.} \qquad f(u_n) = (-1)^n u_n^\alpha.$$

Így

$$\sum_{k=1}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| = \; = \sum_{k=1}^{n} \left|(-1)^n \left(u_n^\alpha + a_{n-1}^\alpha\right)\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(u_n^\alpha + a_{n-1}^\alpha\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} u_n^\alpha + u_n + u_0 \geq \sum_{k=1}^{n-1} u_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha/\beta}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha/\beta} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > \beta,$$

ezért az $\alpha = \beta$ esetben van olyan $(\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a,b])$ felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} V(f, \tau_n) = +\infty. \quad \blacksquare$$

10. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f : [a,b] \to \mathcal{X}$ **lépcsős függvény**, azaz alkalmas $m \in \mathbb{N}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \in \mathfrak{F}([a,b])$, ill. $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathcal{X}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} c_0 & (x \in [x_0, x_1]), \\ \\ c_k & (x \in (x_k, x_{k+1}]),\ k \in \{1, \ldots, m-1\}), \end{cases}$$

akkor f korlátos változású!

Útm. Ha $\sigma = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$ és a t_{j-1}, t_j osztópontok az $[x_0, x_1]$, ill. $(x_k, x_{k+1}]$ intervallumok valamelyikében vannak, akkor a $V(f, \sigma)$ összeg $\|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$ tagja zérus. Ez azt jelenti, hogy

$$V(f, \sigma) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \|c_k - c_{k-1}\|,$$

ahonnan $f \in \mathfrak{BV}([a,b],\mathcal{X})$ következik. Ha a $\sigma = \{t_0,\ldots,t_{m+1}\} \in \mathfrak{F}([a,b])$ felosztás osztópontjai olyanok, hogy

$$t_0 = a, \qquad t_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \quad (k \in \{1,\ldots,m\}), \qquad t_{m+1} = b,$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{m-1} \|c_k - c_{k-1}\|.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{m-1} \|c_k - c_{k-1}\|. \quad \blacksquare$$

11. Mutassuk meg, hogy ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény deriválható, $f' \in \mathfrak{R}[a,b]$, akkor f korlátos változású, és teljes megváltozására

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'|$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Mivel $f' \in \mathfrak{R}[a,b]$, ezért f' korlátos, azaz alkalmas $K \geq 0$ esetén

$$|f'(x)| \leq K \qquad (x \in [a,b]).$$

Így a Lagrange-egyenlőtlenség következtében bármely $x, y \in [a,b]$ számra

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup\{|f'(z)| \in \mathbb{R} :\ z \in [x,y]\} \cdot |y - x| \leq K|y - x|,$$

azaz $f \in \mathfrak{Lip}[a,b]$, ahonnan $f \in \mathfrak{BV}[a,b]$ következik.

2. lépés. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$. Ekkor a Lagrange-középértéktétel következtében bármely $k \in \{1,\ldots,n\}$ index esetén van olyan $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, hogy

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f'(\xi_k)| \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Ez utóbbi azt jelenti, hogy

$$V(f,\tau) = \sigma(|f'|, \tau, \xi_\tau),$$

ahol $\xi_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

3. lépés. Legyen $I := \int_a^b |f'|$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\tau \in \mathfrak{F}([a,b])$ felosztás, hogy az $|f'|$ függvény bármely τ-hoz tartozó közelítő összege csak ε-nál kevesebbet tér el I-től. Így $V(f,\tau)$ is csak ε-nál kevesebbet tér el I-től, ahonnan $V_a^b(f) \geq I$. Bármely τ felosztásnak van olyan σ finomaítása, hogy az $|f'|$ függvény bármely σ-hoz tartozó közelítős összege csak ε-nál kevesebbet tér el I-től. Ekkor $V(f,\sigma)$ is csak ε-nál kevesebbet tér el I-től, tehát $V(f,\sigma) < I + \varepsilon$. Mivel $V(f,\tau) \leq$ $\leq V(f,\sigma)$, így $V(f,\tau) < I + \varepsilon$. Ez minden τ felosztásra és minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, ezért $V_a^b(f) \leq I$. ■

12. Mutassuk meg, hogy valamely $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja pontosan akkor rektifikálható, ha f korlátos változású!

Útm. Az f grafikonjának rektifikálhatósága azt jelenti, hogy

$$\sup\{l_\tau(f) \in \mathbb{R} :\ \tau \in \mathfrak{F}([a,b])\} =: L < +\infty,$$

ahol

$$l_\tau(f) := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \qquad (\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])).$$

Ha tehát

- $L < +\infty$ és $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \leq L,$$

  ahonnan $f \in \mathfrak{BV}[a,b]$ következik.

- $f \in \mathfrak{BV}[a,b]$ és $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$, akkor a

$$\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v| \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

  elemi egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = b - a + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq b - a + V_a^b(f) < +\infty,$$

  azaz f korlátos változású. ■

13. Lássuk be, hogy igazak az alábbi állítások!

   (a) Ha $f, g \in \mathfrak{BV}[a, b]$, akkor $f \pm g \in \mathfrak{BV}[a, b]$ és $fg \in \mathfrak{BV}[a, b]$.

   (b) Ha $f, g \in \mathfrak{BV}[a, b]$ és $\frac{1}{g} \in \mathfrak{B}[a, b]$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathfrak{BV}[a, b]$.

   (c) Ha $f \in \mathfrak{AC}[a, b]$, akkor $|f| \in \mathfrak{AC}[a, b]$.

   (d) Ha $f, g \in \mathfrak{AC}[a, b]$, akkor $f + g \in \mathfrak{AC}[a, b]$ és $fg \in \mathfrak{AC}[a, b]$.

Útm.

   (a) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$. Ekkor egyrészt

$$\sum_{k=1}^{n} |(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\
&\leq V_a^b(f) + V_a^b(g),
\end{aligned}$$

másrészt pedig alkalmas $K_f, K_g \geq 0$ számokkal $\sum_{k=1}^{n} |(fg)(x_k) - (fg)(x_{k-1})| =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_{k-1})| \cdot |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \\
&\leq K_f \cdot V_a^b(g) + K_g \cdot V_a^b(f) < +\infty.
\end{aligned}$$

(b) Az $\frac{1}{g}$ függvény korlátossága következtében van olyan $K \geq 0$, hogy

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leq K \qquad (x \in [a,b]).$$

Így az előző állítás következményeként már csak azt kell megmutatni, hogy $\frac{1}{g}$ korlátos változású. Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{g(x_{k-1}) - g(x_k)}{g(x_k)g(x_{k-1})}\right| \leq$$

$$\leq K^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}|g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq K^2 \cdot V_a^b(g).$$

(c) Mivel $f \in \mathfrak{AC}[a,b]$, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [a,b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}}\big||f(b_k)| - |f(a_k)|\big| \leq \sum_{k \in \mathcal{N}}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

azaz $|f| \in \mathfrak{AC}[a,b]$.

(d) Legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta_f, \delta_g > 0$ olyan, hogy tetszőleges

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [a,b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l),$$

ill.

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [c_k, d_k] \subset [a,b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (c_k, d_k) \cap (c_l, d_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l),$$

esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta_f \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}}|f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ill.

$$\sum_{k \in \mathcal{N}}(d_k - c_k) < \delta_g \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}}|g(d_k) - g(c_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így, ha $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ és

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [x_k, y_k] \subset [a, b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (x_k, y_k) \cap (x_l, y_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l),$$

olyan, hogy

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} (y_k - x_k) < \delta,$$

akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathcal{N}} |(f+g)(y_k) - (f+g)(x_k)| &\leq \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(y_k) - f(x_k)| + \sum_{k\in\mathcal{N}} |g(y_k) - g(x_k)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

azaz $f+g$ is abszolút folytonos. Ha most f és g korlátosságát kihasználva $\frac{\varepsilon}{2}$ helyébe $\frac{\varepsilon}{2K_f}$-et, ill. $\frac{\varepsilon}{2K_g}$-t írunk, ahol

$$|f(x)| \leq K_f, \quad \text{ill.} \quad |g(x)| \leq K_g \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |(fg)(y_k) - (fg)(x_k)| =$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(y_k)g(y_k) - f(x_k)g(x_k)| = \\ &= \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(y_k)g(y_k) - f(y_k)g(x_k) + f(y_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(y_k)| \cdot |g(y_k) - g(x_k)| + \sum_{k\in\mathcal{N}} |g(x_k)| \cdot |f(y_k) - f(x_k)| \leq \\ &\leq K_f \cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} |g(y_k) - g(x_k)| + K_g \cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(y_k) - f(x_k)| < \\ &< K_f \cdot \frac{\varepsilon}{2K_f} + K_g \cdot \frac{\varepsilon}{2K_g} = \varepsilon,\end{aligned}$$

azaz fg is abszolút folytonos. ■

14. A definíció alapján igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (x \in [0,1])$$

függvény abszolút folytonos!

Útm. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ és

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [0,1]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

olyan, amelyre

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} (b_k - a_k) < \varepsilon^2,$$

továbbá $\alpha := \varepsilon^2$. A

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)|$$

összeget két részre bontjuk:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)| =: \sum_{k \in \mathcal{E}} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k \in \mathcal{M}} |f(b_k) - f(a_k)|,$$

ahol $\mathcal{E}$-be azok az indexek tartoznak, amelyeknek megfelelő osztópontok a $[0, \alpha]$ intervallumba, az $\mathcal{M}$-be pedig pedig azok, amelyekhez tartozó indexek az $[\alpha, 1]$ intervallumba esnek (feltehető, hogy $\alpha < 1$). Ha az α szám épp nem osztópont és valamelyik intervallum belsejébe esik, akkor azt az intervallumot két részintervallumra bontjuk úgy, hogy mindkét rész határán α legyen. Ekkor persze a $\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)|$ összeg növekedni fog. Ebben az esetben $b_m := \alpha$. Így a gyökfüggvény monotonitása következtében

$$\sum_{k \in \mathcal{E}} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{m} |\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}| \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

A másik részösszeg a következő módon számítható:

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{k=m+1}^{|\mathcal{N}|} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=m+1}^{|\mathcal{N}|} |\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}| = \\
&= \sum_{k=m+1}^{|\mathcal{N}|} |\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}| \cdot \frac{\sqrt{b_k} + \sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k} + \sqrt{a_k}} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - a_k}{\sqrt{b_k} + \sqrt{a_k}} \leq \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - a_k}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \sum_{k=m+1}^{|\mathcal{N}|} (b_k - a_k) < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Így tehát

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |f(b_k)-f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{m} |f(b_k)-f(a_k)| + \sum_{k=m+1}^{|\mathcal{N}|} |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

15. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathfrak{C}[a,b] \cap \mathfrak{D}(a,b)$ és f' korlátos az (a,b) intervallumon, akkor $f \in \mathfrak{AC}[a,b]$, azaz f abszolút folytonos!
Útm. Legyen $K>0$ olyan szám, amelyre

$$|f'(x)| \leq K \qquad (x \in (a,b))$$

teljesül. A Lagrange-féle középérték-tétel következtében bármely $k \in \mathcal{N}$ esetén van olyan $\xi_k \in (a_k, b_k)$, hogy

$$\frac{|f(b_k)-f(a_k)|}{|b_k-a_k|} = |f'(\xi_k)| < K.$$

Így, ha $\varepsilon > 0$ és

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k,b_k] \subset [a,b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k,b_k) \cap (a_l,b_l) = \emptyset \quad (k,l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

olyan, amelyre

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} (b_k - a_k) < \frac{\varepsilon}{K},$$

akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathcal{N}} |f(b_k)-f(a_k)| &= \sum_{k\in\mathcal{N}} \frac{|f(b_k)-f(a_k)|}{|b_k-a_k|} \cdot |b_k-a_k| < \sum_{k\in\mathcal{N}} K \cdot |b_k-a_k| = \\ &= K \cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} |b_k-a_k| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

16. Mutassuk meg, hogy az

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 \left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| & (x \in (0,1]), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

függvény abszolút folytonos!

Útm. Ha

$$g:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad g(x):=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x\in(0,1]),\\ \\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

akkor g abszolút folytonos, hiszen bármely $x\in(0,1)$ esetén

$$g'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

így

$$|g'(x)|\le 2|x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 2\cdot 1\cdot 1+1=3.$$

Egy korábbi feladat értelmében tehát $f=|g|$ is abszolút folytonos. ■

17. Igaz-e, hogy két abszolút folytonos függvény kompozíciója is abszolút foytonos?

Útm. A korábbiakból tudjuk, hogy ha $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x):=\sqrt{x},\qquad \text{ill.}\qquad g(x):=\begin{cases} x^2\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| & (x\in(0,1]),\\ \\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

akkor f is és g is abszolút folytonos. Azt fogjuk megmutatni, hogy a

$$h:=f\circ g:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad h(x)=\begin{cases} x\cdot\sqrt{\left|\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|} & (x\in(0,1]),\\ \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

függvény nem abszolút folytonos. Valóban, bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén a h függvény monoton növekedő a

$$[2/(2n+1)\pi),2/((2n)\pi)]$$

intervallumon. Így

$$V_0^1(h)\ge\sum_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}(h)\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\longrightarrow+\infty\qquad(n\to\infty),$$

ahol

$$a_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}, \quad b_k := \frac{2}{(2k)\pi} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ezért f nem korlátos változású, következésképpen nem is abszolút folytonos. ■

18. Igazoljuk, hogy ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, akkor abszolút folytonos is, azaz fenáll a

$$\mathfrak{Lip}[a, b] \subset \mathfrak{BV}[a, b]$$

tartalmazás!

Útm. Ha f Lipschitz-folytonos, akkor alkalmas $L \geq 0$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in [a, b]).$$

Így, ha $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon/L$, továbbá

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ [a_k, b_k] \subset [a, b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (k, l \in \mathcal{N} :\ k \neq l)$$

olyan, amelyre

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} (b_k - a_k) < \delta,$$

akkor

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k \in \mathcal{N}} L\,|b_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{L}. \quad ■$$

19. Mutassuk meg, hogy ha valamely $c \in [a, b]$ esetén $f \in \mathfrak{BV}[a, b] \cap \mathfrak{C}[c]$, akkor az (1.4)-beli V függvény folytonos a c pontban!

Útm.

1. lépés. Legyen $c \in [a, b)$. Ha $\varepsilon > 0$ és $\tau := \{c, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([c, b])$ olyan felosztás, amelyre

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq V(f, \tau)$$

teljesül, akkor – lévén, hogy f jobbról folytonos c-ben – van olyan $0 < \delta < x_2 - c$, hogy bármely $x \in [c, b]$ esetén

$$|x - c| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(c)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen most $x_1 \in (c-\delta, c+\delta) \cap (c, b]$. Ekkor $c < x_1 < x_2$ és a $\sigma := \{c, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ felosztás finomítása τ-nak, aminek következtében

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq V(f, \tau) \leq V(f, \sigma) = \|f(x_1) - f(c)\| + \sum_{k=2}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1}\| < \frac{\varepsilon}{2} + V_{x_1}^b(f),$$

azaz

$$V_c^b(f) - V_{x_1}^b(f) < \varepsilon.$$

Ennélfogva

$$|V(x_1) - V(c)| = V(x_1) - V(c) = V_c^{x_1}(f) = V_c^b(f) - V_{x_1}^b(f) < \varepsilon.$$

2. lépés. Legyen $c \in (a, b]$. Ekkor a fentiekhez hasonlóan megmutatható, hogy V jobbról is folytonos c-ben ($\boxed{\textbf{HF}}$). ■

1.3. 3. gyakorlat

1.3.1. A gyakorlat anyaga

Megjegyzések.

- Legyen
$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) := (x(t), y(t)),$$
ahol az $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan monoton növekedő, az $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény pedig nemnegatív. A φ által paraméterezett
$$\Gamma_\varphi := \mathcal{R}_\varphi = \left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in [a, b]\right\}$$
ponthalmaz alatti területet szeretnénk meghatározni. Ha
$$\tau =: \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$
és
$$\xi_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$
akkor a szóban forgó területet a
$$\sum_{k=1}^{n} y(\xi_k)(x(t_k) - x(t_{k-1}))$$
összeggel közelíthetjük.

- Tegyük fel, hogy az x-tengely mentén az $x_1, \ldots, x_n$ abszcisszájú pontokban $m_1, \ldots, m_n$ tömegű anyagi pontok vannak elhelyezve. Ekkor ennek a pontrendszernek a **tömegközéppont**ja:
$$x_{TKP} = \frac{x_1 m_1 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$
Tegyük fel most, hogy valamely az $[a, b]$ intervallumnak megfelelő szakaszon elhelyezkedő, elhanyagolható vastagságú, de nem elhanyagolható tömegű test tömegközéppontjának meghatározása a feladat. Ha a test folytonos tömegeloszlású,[3] és bármely $x \in [a, b]$ esetén $m(x)$ jelöli a test $[a, x]$ szakaszának tömegét $/m(b) =: M/$, továbbá
$$\tau =: \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$$

[3] Ezen azt értjük, hogy a test minden pontjának tömege zérus.

tetszőleges, akkor a test $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumnak megfelelő szakaszának tömege:

$$m(x_k) - m(x_{k-1}).$$

Ezt az anyagmennyiséget az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallum valamely ξ_k pontjába egyesítve a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pontrendszer tömegközéppontja

$$x_{TKP} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} \xi_k (m(x_k) - m(x_{k-1})),$$

amit az illető test tömegközéppontja egy közelítésének tekinthetünk.

- Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ folytonos függvény (**út**),

  $$\Gamma_\varphi := \mathcal{R}_\varphi$$

  a φ út paraméterezte **görbe**. Tegyük fel, hogy valamely anyagi pont az

  $$f : \Gamma_\varphi \to \mathbb{R}^3$$

  erőtér hatására a Γ_φ görbén mozog. Mekkora a munkavégzés?
  Ötlet: Állandó F erő hatására az $r \in \mathbb{R}^3$ vektorral jellemzett szakaszon a munkavégzés:

  $$W = \langle F, r \rangle.$$

  Közelítsük Γ-t törtöttvonalakkal úgy, hogy felosztjuk az $[a, b]$ intervallumot:

  $$\tau := \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\},$$

  majd a megfelelő $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ köztes pontok esetén a munka közelítőleg:

  $$W \approx \sum_{k=1}^{n} \langle f(\xi_k), \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \rangle.$$

- Valószínűségszámításban is használatosak a Stieltjes-integrálok.

- Alkalmazott funkcionálanalízis (**kvantummechanika**): nemkorlátos operátorok spektrálfelbontása projektormérték szerinti integrálok segítségével történik. Itt is találkozhatunk Stieltjes-integrálokkal. □

Definíció. Legyen $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$, továbbá bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi}_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

ill.

$$\Delta_\alpha x_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}).$$

Ekkor az f függvény τ felosztáshoz, illetve a ξ_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) értékekhez vagy $\boldsymbol{\xi}_\tau$ ún. **köztes vektor**hoz tartozó, α-ra vonatkozó **Riemann-Stieltjes-összeg**ének vagy **Riemann-Stieltjes-féle integrálközelítő összeg**ének nevezzük a

$$\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_\alpha x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

valós számot. $\lozenge$

Megjegyzés. Ha

$$\alpha(x) := x \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor a fenti Riemann-Stieltjes-összeg nem más, mint a

$$\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \sigma(f, \tau, \boldsymbol{\xi})$$

Riemann-összeg. $\square$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-Stieltjes-integrálható az $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre vonatkozóan** (jelben $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$), ha alkalmas $I \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{\|\tau\| \to 0} \sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) = I,$$

azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$, $\|\tau\| < \delta$ és $\boldsymbol{\xi}_\tau$ a fenti definícióbeli tetszőleges ún. köztesvektor, akkor

$$|\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) - I| < \varepsilon$$

teljesül. Az iménti I számot az f függvény α-ra vonatkozó **Riemann-Stieltjes-integrál**jának nevezzük és az

$$\int_a^b f\,d\alpha \qquad \text{vagy} \qquad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. $\lozenge$

Megjegyzések.

1. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb egy ilyen I szám létezik.

2. Világos, hogy ha
$$\alpha(x) := x \qquad (x \in [a, b]),$$
úgy
$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in \mathfrak{R}[a, b],$$
és $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ esetén
$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f.$$

3. Ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$\alpha(x) := c \qquad (x \in [a, b]),$$
akkor bármely $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre
$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b] \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f \, d\alpha = 0.$$

4. Ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) := c \qquad (x \in [a, b]),$$
akkor bármely $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre
$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b] \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f \, d\alpha = c(\alpha(b) - \alpha(a)). \quad \square$$

Példa. Ha $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$: $\alpha(b) \neq \alpha(a)$, továbbá
$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]), \\ \\ 0 & (x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [a, b]), \end{cases}$$
akkor $f \notin \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$. Ha ui. $\tau =: \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ tetszőleges, $\boldsymbol{\xi}_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ahol
$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$\sigma(f,\alpha,\tau,\xi_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 1\cdot(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})) = \alpha(b)-\alpha(a) & (\xi_k\in\mathbb{Q}), \\ \\ \sum_{k=1}^{n} 0\cdot(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})) = 0 & (\xi_k\notin\mathbb{Q}). \end{cases}$$

Így a

$$0<\varepsilon<\frac{|\alpha(b)-\alpha(a)|}{2}$$

választással látszik, hogy nem teljesül a definícióbeli feltétel. $\Diamond$

Feladat. Legyen $a, b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $s\in(a,b)$: $f\in\mathfrak{C}_+[s]$,

$$\alpha(x) := H(x-s) \qquad (x\in[a,b]),$$

ahol

$$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad H(x) := \begin{cases} 0 & (x\le 0), \\ \\ 1 & (x>0) \end{cases}$$ **/Heaviside-függvény/.**

Megjegyzés. Fizikában: **bekapcsolási jelenség**ek. **Disztribúció-elmélet**: disztrubúciós értelemben differenciálható és (disztribúciós) deriváltja: δ /Dirac-delta/.
Mutassuk meg, hogy ekkor $f\in\mathfrak{R}_\alpha[a,b]$ és

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s)$$

teljesül!
Útm. Mivel $f\in\mathfrak{C}_+[s]$, ezért tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy

$$x\in[s,s+\delta)\cap[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-f(s)|<\varepsilon.$$

Megjegyzés. Ha

- $\delta > 0$ olyan, hogy $s+\delta \geq b$, akkor legyen $\tau := \{a, s, b\}$. Ekkor a $\boldsymbol{\xi}_\tau := (\xi_1, \xi_2)$ vektorral, ahol $\xi_1 \in [a, s]$, $\xi_2 \in [s, b]$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) &= f(\xi_1)(\alpha(s) - \alpha(a)) + f(\xi_2)(\alpha(b) - \alpha(s)) = \\ &= f(\xi_1)(0 - 0) + f(\xi_2)(1 - 0) = f(\xi_2),\end{aligned}$$

  azaz

$$|\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) - f(s)| = |f(\xi_2) - f(s)| < \varepsilon$$

  következik.

- $\delta > 0$ olyan, hogy $s + \delta < b$, akkor legyen $\tau := \{a, s, s + \delta, b\}$. Ekkor a $\boldsymbol{\xi}_\tau := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorral, ahol $\xi_1 \in [a, s]$, $\xi_2 \in [s, s+\delta]$, $\xi_3 \in [s+\delta, b]$, azt kapjuk, hogy $\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) =$

$$\begin{aligned}&= f(\xi_1)(\alpha(s) - \alpha(a)) + f(\xi_2)(\alpha(s + \delta) - \alpha(s)) + f(\xi_3)(\alpha(b) - \alpha(s + \delta)) = \\ &= f(\xi_1)(0 - 0) + f(\xi_2)(1 - 0) + f(\xi_3)(1 - 1) = f(\xi_2),\end{aligned}$$

  azaz

$$|\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) - f(s)| = |f(\xi_2) - f(s)| < \varepsilon.$$

Legyen $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ olyan, hogy $\|\tau\| < \delta$. Ekkor alkalmas $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $s \in [x_{i-1}, x_i)$. Így α definíciója következtében

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = \begin{cases} 1 & (k = i), \\ 0 & (k \in \{1, \ldots, i - 1\} \cup \{i + 1, \ldots, n\}), \end{cases}$$

ahonnan

$$|\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) - f(s)| = |f(\xi_i) - f(s)| < \varepsilon$$

következik. ■

Megjegyzés. Világos, hogy az $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha bármely, minden határon túl finomodó

$$(\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a, b])$$

felosztássortozathoz tartozó $(\sigma(f,\alpha,\tau_n,\xi_{\tau_n}))$ Riemann-Stieltjes-féle integrálközelítő sorozat konvergens és határértékére:

$$\lim\left(\sigma(f,\alpha,\tau_n,\xi_{\tau_n})\right)=\int_a^b f\,d\alpha. \quad \square$$

Feladat. Igaz-e az alábbi f, ill. α függvények esetében, hogy f Riemann-Stieltjes-integrálható az α-ra vonatkozóan? Ha igen, akkor számítsuk ki az adott Riemann-Stieltjes-integrált!

1. $$f(x):=\begin{cases}0 & (x=0),\\[2ex] \dfrac{1}{x} & (x\in(0,1)),\\[2ex] 1 & (x\in[1,2]),\end{cases} \qquad \alpha(x):=\begin{cases}1 & (x\in[0,1)),\\[2ex] x & (x\in[1,2]);\end{cases}$$

2. $$f(x):=\begin{cases}1 & (x\in[0,1/2),\\[2ex] 2 & (x\in[1/2,1]),\end{cases} \qquad \alpha(x):=\begin{cases}0 & (x\in[0,1/2),\\[2ex] 1 & (x\in[1/2,1]).\end{cases}$$

Útm.

1. Legyen
$$\tau_n:=\left\{0=x_0^{(n)},x_1^{(n)},\ldots,x_{n_k}^{(n)}=2\right\}\in\mathfrak{F}([0,2]) \qquad (n\in\mathbb{N})$$
minden határon túl finomodó felosztássorozat:
$$\lim_{n\to\infty}\|\tau_n\|=0, \qquad \xi_{\tau_n}:=\left(\xi_0^{(n)},\ldots,\xi_{n_k}^{(n)}\right),$$
ahol
$$\xi_k^{(n)}\in\left[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}\right] \qquad (i\in\{1,\ldots,n_k\},\ n\in\mathbb{N}).$$
Ha valamely $i\in\{1,\ldots,n_k\}$ index esetén $1\in\left[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}\right]$, úgy

$$\begin{aligned}
\sigma(f,\alpha,\tau_n,\xi_{\tau_n}) &= \sum_{k=1}^{n_k} f\left(\xi_k^{(n)}\right)\left(\alpha(x_k^{(n)})-\alpha(x_{k-1}^{(n)})\right)= \\
&= f\left(\xi_1^{(n)}\right)(1-1)+\ldots+f\left(\xi_i^{(n)}\right)(1-1)+f\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)}-1\right)+ \\
&\quad +1\cdot\left(x_{i+2}^{(n)}-x_{i+1}^{(n)}\right)+1\cdot\left(x_{i+3}^{(n)}-x_{i+2}^{(n)}\right)+\ldots+1\cdot\left(2-x_{n_k-1}^{(n)}\right)= \\
&= f\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)}-1\right)-x_{i+1}^{(n)}+2.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n\to\infty}\left(x_{i+1}^{(n)}\right)=1$ és $f\in\mathfrak{C}[1]$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)=f(1)=1,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\alpha,\tau_n,\xi_{\tau_n})=1, \qquad \text{azaz} \qquad \int_0^2 f\,d\alpha=1.$$

2. Ha

$$\tau_n:=\left\{x_k^{(n)}:=\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor $(\tau_n):\mathbb{N}\to\mathfrak{F}([0,1])$ minden határon túl finomodó felosztássorozat. Ha $n=2k$, akkor

$$\frac{1}{2}=\frac{k}{2k}\in\tau_n,$$

ha pedig n páratlan, akkor $\frac{1}{2}\notin\tau_n$, így $n=2k$ esetén

$\sigma(f,\alpha,\tau_{2k},\xi_{\tau_{2k}})=1\cdot(0-0)+\ldots+1\cdot(0-0)+\boxed{1}\cdot(1-0)+2\cdot(1-1)+\ldots+2\cdot(1-1)=1,$

ha $\xi_k^{(n)}\neq\frac{1}{2}$, és hasonlóan

$\sigma(f,\alpha,\tau_{2k},\xi_{\tau_{2k}})=1\cdot(0-0)+\ldots+1\cdot(0-0)+\boxed{2}\cdot(1-0)+2\cdot(1-1)+\ldots+2\cdot(1-1)=2,$

ha $\xi_k^{(n)}=\frac{1}{2}$. Az első, ill. második esetben

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\alpha,\tau_{2k},\xi_{\tau_{2k}})=1, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty}\sigma(f,\alpha,\tau_{2k},\xi_{\tau_{2k}})=2,$$

ahonnan $f\notin\mathfrak{R}_\alpha[0,1]$ következik. ■

1.3.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Igazoljuk, hogy $f \notin \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$, ha valamely $s \in (a,b)$ közös szakadási helye az $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényeknek!

   Útm. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy f jobbról nem foloytonos s-ben: $f \notin \mathfrak{C}_+[s]$. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén bármely $\delta > 0$-hoz vannak olyan $x, y \in [a,b] \cap [s, s+\delta)$ pontok, amelyekre

   $$|f(x) - f(s)| \geq \varepsilon \qquad \text{és} \qquad |\alpha(x) - \alpha(s)| \geq \varepsilon$$

   teljesül. Így bármely $\delta > 0$-hoz van olyan $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$ felosztás, hogy $\|\tau\| < \delta$ és

   $$s = x_{k-1}, \qquad \text{ill.} \qquad |\alpha(x_k) - \alpha(s)| \geq \varepsilon.$$

   Ha most $\xi_i := x_{i-1}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, továbbá bármely $i \neq k$-ra $\eta_i := x_{i-1}$ és $\eta_k \in (x_{k-1}, x_k]$ olyan pont, amelyre

   $$|f(\eta_k) - f(\xi_k)| = |f(\eta_k) - f(s)| \geq \varepsilon.$$

   Ekkor a

   $$\sigma_1 := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right), \qquad \sigma_2 := \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right)$$

   összegek csak a k-adik tagban különböznek, és

   $$|\sigma_1 - \sigma_2| = |(f(\xi_k) - f(\eta_k)) \cdot (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))| \geq \varepsilon^2.$$

   Tehát ε^2-hez nincs olyan $\delta > 0$, amelyre a definícióbeli feltételek teljesülnének, azaz $f \notin \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$. ■

2. Legyen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{C}[0]$ és

   $$\alpha(x) := \begin{cases} A & (x \in [-1,0)), \\ \\ B & (x \in [0,1]). \end{cases}$$

   Igazoljuk, hogy f Riemann-Stieltjes-integrálható a g függvényre vonatkozóan, ill.

   $$\int_{-1}^{1} f \, d\alpha = f(0)(B - A)$$

teljesül!

Útm. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([-1,1])$, $\xi_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ahol

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ekkor pontosan egy olyan $i \in \{1, \ldots, n\}$ index van, amelyre $0 \in (x_{i-1}, x_i]$. Így

$$\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = f(\xi_i)(B - A),$$

hiszen, ha $j \neq i$, akkor $g(x_j) - g(x_{j-1}) = 0$. Világos, hogy a $\|\tau\| \to 0$ határesetben

$$\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) \longrightarrow f(0)(B - A). \quad \blacksquare$$

3. Legyen $a_n \in [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, továbbá tegyük fel, hogy az $(s_n) : \mathbb{N} \to (a, b)$ sorozat injektív. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ és

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \alpha(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(x - s_n),$$

akkor f Riemann-Stieltjes-integrálható az α függvényre vonatkozóan, és

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(s_n)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy α jóldefiniált, azaz bármely $x \in [a, b]$ esetén $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, hiszen

$$|H(x)| \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Sőt az is világos, hogy α monoton növekedő:

$$\mathbb{R} \ni x, y : \; x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(x) \leq \alpha(y),$$

továbbá

$$\alpha(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad \alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, majd $N \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Ha most tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\alpha_1(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n H(x - s_n), \qquad \text{ill.} \qquad \alpha_1(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n H(x - s_n),$$

akkor (vö. 3. gyakorlat)

$$\int_a^b f \, d\alpha_1 = \sum_{n=1}^{N} a_n f(s_n).$$

Mivel $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$, ezért

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha_2 \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon,$$

így $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, ill. a fentiek figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha - \sum_{n=1}^{N} a_n f(s_n) \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon,$$

ahonnan az $N \to \infty$ határesetben a kívánt egyenlőség következik. ■

4. Legyen

$$f(x) := x, \quad \alpha(x) := x + [x] \qquad (x \in [0,10]).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor igaz az

$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[0,10] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{10} f \, d\alpha = 105$$

implikáció!

Útm. Legyen

$$\tau_n := \left\{ x_k^{(n)} := \frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,10n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sigma(f,\alpha,\tau_n,\xi_{\tau_n}) &= \sum_{k=1}^{10n} f(\xi_k)\left(\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \alpha\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{10n} \xi_k \left(\left(\frac{k}{n} + \left[\frac{k}{n}\right]\right) - \left(\frac{k-1}{n} + \left[\frac{k-1}{n}\right]\right)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{10n} \xi_k \left(\frac{1}{n} + \left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{10n} \frac{\xi_k}{n} + \sum_{k=1}^{10n} \xi_k \left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right).
\end{aligned}$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{10n} \frac{\xi_k}{n} \longrightarrow \int_0^{10} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 50 \qquad (n \to \infty),$$

és a $k =: (l+1)n$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10n} \xi_k \left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right) &= \sum_{l=0}^{9} \xi_{(l+1)n}((l+1)-l) = \xi_n + \xi_{2n} + \ldots + \xi_{10n} \longrightarrow \\
&\longrightarrow 1+2+3+\ldots+10 = 55 \qquad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

hiszen

$$\frac{n-1}{n} \leq \xi_n \leq \frac{n}{n}, \qquad \frac{2n-1}{n} \leq \xi_{2n} \leq \frac{2n}{n}, \qquad \ldots, \qquad \frac{10n-1}{n} \leq \xi_{10n} \leq \frac{10n}{n}.$$

Ezért

$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[0,10] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{10} f\,d\alpha = 50 + 55 = 105. \quad \blacksquare$$

1.4. $\boxed{\text{4. gyakorlat}}$

1.4.1. $\boxed{\text{A gyakorlat anyaga}}$

Tétel. Legyen $f, g, \alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ha

1. $f, g \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$, akkor bármely $\mu \in \mathbb{R}$ esetén $f + \mu g \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$ és
$$\int_a^b (f + \mu g)\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha + \mu \int_a^b g\, d\alpha;$$
2. $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b] \cap \mathfrak{R}_\beta[a, b]$, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{R}_{\alpha+\lambda\beta}[a, b]$, és
$$\int_a^b f\, d(\alpha + \lambda\beta) = \int_a^b f\, d\alpha + \lambda \int_a^b f\, d\beta.$$
3. $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$ és $c \in (a, b)$, akkor $f_c \in \mathfrak{R}_{\alpha_c}[a, b]$ és $f^c \in \mathfrak{R}_{\alpha^c}[a, b]$, továbbá a
$$\int_a^c f\, d\alpha := \int_a^c f_c\, d\alpha_c, \qquad \int_c^b f\, d\alpha := \int_c^b f^c\, d\alpha^c$$
jelölések bevezetésével
$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha.$$
4. α monoton növekedő, $f, g \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$: $f \leq g$, akkor
$$\int_a^b f\, d\alpha \leq \int_a^b g\, d\alpha. \quad \square$$

Megjegyzés. Az utolsó előtti állítás megfordítása nem igaz. Legyen ui. $c \in (a, b)$ és

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [a, c]), \\ \\ 1 & (x \in (c, b]), \end{cases} \qquad \alpha(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [a, c)), \\ \\ 1 & (x \in [c, b]). \end{cases}$$

Ekkor nyilvánvalóan
$$\int_a^c f\, d\alpha = 0 = \int_c^b f\, d\alpha.$$

Viszont, ha $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a,b])$ olyan felosztás, hogy valamilyen (egyértelműen létező) $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexszel $x_{i-1} < c < x_i$, akkor tetszőleges $\boldsymbol{\xi}_\tau = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ köztes vektorral

$$\sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = f(\xi_i) = \begin{cases} 1 & (\xi_i < c), \\ \\ 0 & (\xi_i > c), \end{cases}$$

ahonnan $\nexists \lim\limits_{\|\tau\| \to 0} \sigma(f, \alpha, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau)$, azaz $f \notin \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$ következik. $\square$

Definíció. Legyen $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$. Ekkor

$$\int_b^a f \, d\alpha := -\int_a^b f \, d\alpha \qquad \text{és} \qquad \int_a^a f \, d\alpha := 0.$$

Tétel. Legyen $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha α szigorúan monoton növekedő és folytonos, úgy

$$f \in \mathfrak{R}_\alpha[a,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \circ \alpha^{-1} \in \mathfrak{R}[\alpha(a), \alpha(b)],$$

és ez utóbbi esetben

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f \circ \alpha^{-1}. \quad \square$$

Tétel. (**Parciális integrálás.**) Ha $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$, akkor $\alpha \in \mathfrak{R}_f[a,b]$ és

$$\int_a^b \alpha \, df = [f(x)\alpha(x)]_a^b - \int_a^b f \, d\alpha. \quad \square$$

Tétel. Ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$, továbbá $\alpha \in \mathfrak{BV}[a,b]$, akkor $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$ és

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(\alpha). \quad \square$$

Tétel. Ha $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, $\alpha \in \mathfrak{C}^1[a,b]$, akkor $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a,b]$

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f\alpha'. \quad \square$$

Megjegyzés. Ha tehát $h \in \mathfrak{C}[a, b]$ és $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor

$$\int_a^b fh = \int_a^b f\, d\alpha, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha(x) :\equiv \int_a^x h. \quad \square$$

Példák. Legyen $[a, b] := [0, \pi]$. Ekkor

$$\int_0^\pi \cos(x)\, d\sin(x) = \int_0^\pi \cos^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2},$$

ill.

$$\int_0^\pi \cos(x)\, d\cos(x) = -\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\, dx = 0. \quad \lozenge$$

Tétel. Legyen $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$, továbbá $g : [c, d] \to [a, b]$ szigorúan monoton növekedő és folytonos, ill. $g(c) = a$, $g(d) = b$. Ekkor, ha

$$h := f \circ g : [c, d] \to \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \beta := \alpha \circ g,$$

úgy $h \in \mathfrak{R}_\beta[c, d]$ és

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_c^d h\, d\beta = \int_c^d (f \circ g)\, d(\alpha \circ g). \quad \square$$

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy fennáll-e az $f \in \mathfrak{R}_\alpha[a, b]$ tartalmazás! Ha igen, akkor számítsuk ki az

$$\int_a^b f\, d\alpha$$

integrált!

1. $f(x) := x, \quad \alpha(x) := \sin(x) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$;
2. $f(x) := x, \quad \alpha(x) := e^{|x|} \qquad (x \in [-1,1])$;
3. $f(x) := x^5, \quad \alpha(x) := |x|^3 \qquad (x \in [-1,2])$.

Útm.

1. Mivel α monoton, ezért $\alpha \in \mathfrak{BV}[0, \pi/2]$, így $f \in \mathfrak{C}$ következtében $f \in \mathfrak{R}_\alpha[0, \pi/2]$, és parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} x\, d(\sin(x)) = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx = \frac{\pi}{2} + [\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. Mivel $f \in \mathfrak{C}$, továbbá

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^x & (x \in [0,1]), \\ \\ e^{-x} & (x \in [-1,0]) \end{cases}$$

következtében α monoton csökkenő a $[-1,0]$ intervallumon és monoton növekedő a $[0,1]$ intervallumon, így $\alpha \in \mathfrak{BV}[-1,1]$. Ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{R}_\alpha[-1,1]$, továbbá parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\,d(e^{|x|}) &= \left[x \cdot e^{|x|}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{|x|}\,dx = 2e - \left\{\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{x}\,dx\right\} = \\ &= 2e - \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{-1}^{0} - [e^x]_0^1 = 2e + 1 - e - e + 1 = 2.\end{aligned}$$

3. Mivel $f \in \mathfrak{C}$, továbbá α monoton a $[-1,2]$, $[-1,0]$ és $[0,2]$ intervallumokon, így $\alpha \in \mathfrak{BV}[-1,2]$. Ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{R}_\alpha[-1,2]$, továbbá parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^5\,d(|x|^3) &= \int_{-1}^{0} x^5\,d(-x^3) + \int_{0}^{2} x^5\,d(x^3) = \int_{-1}^{0} x^5(-3x^2)\,dx + \int_{0}^{2} x^5(3x^2)\,dx = \\ &= -3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{0}^{2} = \frac{3}{8} + 3\frac{2^8}{2^3} = \frac{3}{8} + 96. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^4 ([\sqrt{x}] + x^2)\,d\sqrt{x}$$

integrált!

Útm. Az $y := \sqrt{x}$ helyettesítéssel $/g(y) := y^2$ $(y \in [0,2])/$ azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 ([\sqrt{x}] + x^2)\,d\sqrt{x} = \int_0^2 ([y] + y^4)\,dy = \int_0^2 [y]\,dy + \int_0^2 y^4\,dy = 1 + \frac{2^5}{5} = \frac{37}{5}. \quad \blacksquare$$

Definíció. Legyen $d, r \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ leképezés

- **út**, ha $\varphi \in \mathfrak{C}$;

- **sima út**, ha $\varphi \in \mathfrak{C}^1$;
- **r-szeresen sima út**, ha $\varphi \in \mathfrak{C}^r$;
- **reguláris út**, ha

  (i) $\varphi \in \mathfrak{C}^1$, **(ii)** $\varphi|_{(a,b)}$ injektív, **(iii)** bármely $t \in [a, b]$ esetén $\dot{\varphi}(t) \neq 0$;

- **rektifikálható** út, ha

$$\varphi \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}^d) \cap \mathfrak{BV}([a, b], \mathbb{R}^d).$$

  Ez utóbbi esetben a φ út **hossz**ának nevezzük az $L(\varphi) := V_a^b(\varphi)$ számot. $\Diamond$

Megjegyzés. Az $r = 2$, ill. $d \in \{2,3\}$ esetben a $\mathfrak{C}^r([a, b], \mathbb{R}^d)$-beli utaknak szemléletes fizikai jelentésük van. Nevezetesen minden pontszerű test (a fizikában szokásos szóhasználattal: **tömegpont** vagy **anyagi pont**) mozgása ilyen függvénnyel írható le, $\varphi(t)$-vel jelölve a tömegpont **helyvektor**át (az origóból a tömegpontba mutató vektort) a t időpontban. Ilyenkor a $\dot{\varphi}(t)$ vektor jelöli a mozgó tömegpont **pillanatnyi sebességét**, a $\ddot{\varphi}(t)$ pedig a **pillanatnyi gyorsulás**át jelenti a t időpontban. A φ út értékkészletét, más szóval azt az $\mathbb{R}^d$-beli

$$\gamma_\varphi := \mathcal{R}_\varphi = \left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^d : \ t \in [a, b]\right\}$$

halmazt, amelyet a mozgó pont befut, a **mozgás pályájának** nevezzük. Ezek szoros kapcsolatban vannak a geometriában használatos görbefogalommal.

Feladat. Határozzuk meg a koordinátatengelyeken lecsúszó $\alpha+\beta$ hosszúságú merev rúd egy pontjának pályáját, majd számítsuk ki a pont pillanatnyi sebességét, ill. gyorsulását!
Útm. Ha a koordinátatengelyeken egy $\alpha + \beta$ hosszúságú merev rúd csúszik, akkor azon pontjának pályája, amelynek a távolsága a rúd egyik végétől α, a másiktól β egy

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (x, y \geq 0)$$

egyenletű negyedellipszis, ui. ha t a rúdnak az első tengellyel bezárt szöge, akkor a pont koordinátái:

$$y = \beta \sin(t), \quad x = \alpha \cos(t) \qquad (t \in [0, \pi/2])\,,$$

azaz $x, y \geq 0$ és $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$. Így a pont pályája a

$$\varphi(t) := (\alpha\cos(t), \beta\sin(t)) \qquad (t \in [0, \pi/2])$$

függvény értékkészlete. A pillanatnyi sebesség, ill. gyorsulás:

$$\dot{\varphi}(t) = (-\alpha\sin(t), \beta\cos(t)), \quad \ddot{\varphi}(t) = (-\alpha\cos(t), -\beta\sin(t)) \qquad (t \in [0, \pi/2]). \quad \blacksquare$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz **görbe**, ha van olyan $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út, amelyre

$$\gamma = \mathcal{R}_\varphi = \left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^d : \ t \in [a, b]\right\}$$

és $\varphi|_{(a,b)}$ injektív[4]. Ilyen kor φ-t a γ görbe egy **paraméterezés**ének nevezzük. $\Diamond$

Megjegyzés. Ha a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út valamely reguláris görbe paraméterezése, akkor $\dot{\varphi}(t)$ az **érintővektor** a görbe $\varphi(t)$ pontjában. $\square$

HÁZI FELADAT. A $\boxed{\text{B}}$ Függelék ismeretanyaga.

Tétel. A $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út esetén igazak az alábbi állítások.

1. φ pontosan akkor rektifikálható, ha bármely $k \in \{1, \ldots, d\})$ esetén $\varphi_k \in \mathfrak{BV}[a, b]$.

2. Ha φ rektifikálható, akkor az

$$s : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \begin{cases} 0 & (t = a), \\ \\ L(\varphi|_{[a,t]}) & (t \in (a, b]) \end{cases}$$

   függvény monoton növő és folytonos. Ha φ még injektív is, akkor s szigorúan monoton növekedő.

3. Ha $\varphi \in \mathfrak{C}^1$, akkor $s \in \mathfrak{C}^1$ és bármely $t \in [a, b]$ esetén $\dot{s}(t) = \|\dot{\varphi}(t)\|_2$, így

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\varphi}(u)\|_2 \, du = \int_a^t \sqrt{[\dot{\varphi}_1(u)]^2 + \ldots + [\dot{\varphi}_d(u)]^2} \, du,$$

   speciálisan

$$L(\varphi) = s(b) = \int_a^b \|\dot{\varphi}(u)\|_2 \, du. \quad \square$$

[4] Ezzel a kikötéssel kizártuk vizsgálataink köréből az önmagukat átmetsző görbéket.

Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $\varphi : [a, b] \to \Omega$ rektifikálható út. Ekkor az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek (folytonos skalármezőnek) a φ útra vonatkozó **elsőfajú vonalintegrál**ján az

$$\int_\varphi f := \int_\varphi f ds := \int_\varphi f(r) ds := \int_a^b f(\varphi(t))\, ds(t)$$

valós számot értjük. ◊

Megjegyzések.

1. Fizikai interpretáció:

   (a) Ha valamely (reguláris) $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út paraméterezte görbe tömeg- vagy töltéseloszlása a $\rho \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénnyel írható le, akkor a görbe tömege vagy össztöltése:

   $$M = \int_\varphi \rho(r) ds.$$

   (b) Ha valamely (reguláris) φ út paraméterezte görbe tömegeloszlása ρ, akkor a görbe tömegközéppontjának k-adik koordinátája

   $$x^k_{TKP} = \frac{1}{M} \int_\varphi x_k \rho(x_1, \ldots, x_d) ds.$$

2. Ha φ sima út, akkor

$$\boxed{\int_\varphi f(r) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \dot{s}(t)\, dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2\, dt}. \quad \square$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$y^2 = 2x \qquad (x \in [1,2])$$

paraboladarab tömegét, ha sűrűségeloszlása a

$$\rho(x, y) := y \qquad ((x, y \in \mathbb{R}^2)$$

függvénnyel írható le!

Útm. A

$$\varphi(t) := (t, \sqrt{2t}) \qquad (t \in [1,2])$$

út a paraboladarab egy sima paraméterezése, így

$$M = \int_\varphi \rho(r) ds = \int_1^2 \sqrt{2t}\sqrt{1 + \frac{1}{2t}}\, dt = \int_1^2 \sqrt{1 + 2t}\, dt = \ldots = \frac{\sqrt{125} - \sqrt{27}}{3}. \quad \blacksquare$$

HÁZI FELADAT. A $\boxed{\text{C}}$ Függelék ismeretanyaga.

1.4.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := x, \quad \alpha(x) := x + [x] \qquad (x \in [0,10]).$$

függvények esetében

$$\int_0^{10} f\, d\alpha = 105$$

teljesül!

Útm. Mivel $\alpha \in \mathfrak{R}[0,1]$ és f az identikus függvény, ezért $\alpha \in \mathfrak{R}_f[0,10]$, így a parciális integrálásra vonatkozó tétel következtében $f \in \mathfrak{R}_\alpha[0,10]$ és

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(x)\, d\alpha(x) &= f(10)\alpha(10) - f(0)\alpha(0) - \int_0^{10} \alpha(x)\, df(x) = \\ &= 200 - 0 - \int_0^{10} (x + [x])\, dx = 200 - 50 - \int_0^{10} [x]\, dx = \\ &= 150 - 45 = 105. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2. Igazoljuk, hogy

(a) ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\int_a^b f^k(x)\, df(x) = \frac{1}{k+1}\left\{f^{k+1}(b) - f^{k+1}(a)\right\}$$

(b) $\int_1^2 x\, d\ln(x) = 1$ telesül!

Útm.

(a) Mivel f folytonosan differenciálható, ezért

$$\int_a^b f^k(x)\, df(x) = \int_a^b f^k(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{k+1}\left\{f^{k+1}(b) - f^{k+1}(a)\right\}.$$

(b) Mivel ln folytonosan differenciálható, ezért

$$\int_1^2 x\, d\ln(x) = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_1^2 1\, dx = 1. \quad \blacksquare$$

3. Legyen $0 < \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \\ 1 - \exp(-\lambda x) & (x > 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Számítsuk ki az

$$\int_1^2 x \, d\alpha(x)$$

Riemann-Stieltjes-integrált!

Útm. Mivel az

$$f(x) := x \qquad (x \in [1,2]),$$

függvényre $f \in \mathfrak{R}[1,2]$, továbbá $\alpha \in \mathfrak{C}^1[1,2]$ és

$$\alpha'(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (x \in [1,2]),$$

így integrálva

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \, d\alpha(x) &= \int_1^2 x\alpha'(x) \, dx = \int_1^2 x\lambda \exp(-\lambda x) \, dx = \ldots = \\ &= \left(-2 - \frac{1}{\lambda}\right) \exp(-2\lambda) + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \exp(-\lambda). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és monoton függvény, akkor igaz az

$$\int_a^b f(x) \, df(x) = \frac{(f(b))^2 - (f(a))^2}{2}$$

állítás!

Útm. Mivel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, ezért $f \in \mathfrak{BV}[a, b]$. Tehát f folytonossága következtében $f \in \mathfrak{R}_f[a, b]$, így parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x) \, df(x) + \int_a^b f(x) \, df(x) = (f(b))^2 - (f(a))^2. \quad \blacksquare$$

5. Az

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha(x) := \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

függvény esetében számítsuk ki az

$$\int_0^t e^{-x^2}\,d\alpha(x) \qquad (t\in\mathbb{R})$$

Riemann-Stieltjes-integrált!

Útm. Mivel tetszőleges $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallum esetén $1/\exp^2\in\mathfrak{R}[a,b]$ és

$$\alpha'(x)=|2x| \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért $\alpha\in\mathfrak{C}^1$, így bármely $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$\int_0^t e^{-x^2}\,d\alpha(x) = \int_0^t e^{-x^2}\alpha'(x)\,dx=\int_0^t |2x|e^{-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\int_0^t 2xe^{-x^2}\,dx & (t\geq 0),\\ \displaystyle\int_0^t -2xe^{-x^2}\,dx & (t<0)\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\left[-e^{-x^2}\right]_0^t & (t\geq 0),\\ \left[e^{-x^2}\right]_t^0 & (t<0)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}1-e^{-t^2} & (t\geq 0),\\ e^{t^2}-1 & (t<0)\end{array}\right\}=$$

$$=\left|1-e^{t^2}\right|. \quad \blacksquare$$

6. Paraméterezzük γ-t, ha

   (a) $\gamma:=\left\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,b]\right\} \quad (f:[a,b]\to\mathbb{R})$;

   (b) γ: annak a pontnak a pályája, amelyet egy sík terepen T ideig csúszásmentesen gördülő R sugarú kör alakú kerék küllőjének a kör középpontjától $r<R$ távolságra lévő pontja ír le!

Útm.

(a) $\varphi(t):=(t,f(t)) \quad (t\in[a,b])$.

(b) Legyen t a pontot a kör középpontjával összekötő szakasznak a függőlegessel bezárt szöge. Ha $t=0$, akkor a pont koordinátái: $(0,R-r)$, t szöggel való elfordulás után a kör középpontjának koordinátái:

$$O(t):=(Rt,R) \quad (t\in[0,T]),$$

így a pont koordinátái:

$$O(t) - (r\sin(t), r\cos(t)) \qquad (t \in [0,T]).$$

Tehát

$$\boxed{\varphi(t) := (Rt - r\sin(t), R - r\cos(t)) \quad (t \in [0,T])}.$$

Megjegyzés. $\gamma = \mathcal{R}_\varphi$ neve: **ciklois**. ∎

7. Számítsuk ki az alábbi utak hosszát!

   (a) $u, v \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(t) := u + t(v - u)$ $(t \in [0,1])$;

   (b) $f \in \mathfrak{C}^1[a,b]$, $\varphi(t) := (t, f(t))$ $(t \in [a,b])$;

   (c) $f \in \mathfrak{C}^1[0,2\pi]$, $\varphi(t) := (f(t)\cos(t), f(t)\sin(t))$ $(t \in [0,2\pi])$, ahol

   α) $f(t) :\equiv t$ /**arkhimédeszi spirál**/,

   β) $f(t) :\equiv \alpha^t$ /$\alpha > 0$, **logaritmikus spirál**/.

Útm.

(a) Mivel

$$\|\dot\varphi(t)\|_2 = \|v - u\|_2 \qquad (t \in [0,1]),$$

ezért

$$L(\varphi) = \int_0^1 \|v - u\|_2 \, dt = \|v - u\|_2.$$

(b) Mivel

$$\|\dot\varphi(t)\|_2 = \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt \qquad (t \in [a,b]),$$

ezért

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

(c) Mivel bármely $t \in [0,2\pi]$ esetén

$$\begin{aligned}\|\dot\varphi(t)\|_2^2 &= (f'(t)\cos(t) - f(t)\sin(t))^2 + (f'(t)\sin(t) + f(t)\cos(t))^2 = \\ &= (f'(t))^2 + (f(t))^2,\end{aligned}$$

ezért

$\alpha)$ $\|\dot{\varphi}(t)\|_2^2 = 1 + t^2$ $(t \in [0,2\pi])$, így

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{\operatorname{arsh}(2\pi)} \sqrt{1+(\operatorname{sh}(x))^2}\operatorname{ch}(x)\,dx = \\
&= \int_0^{\operatorname{arsh}(2\pi)} (\operatorname{ch}(x))^2\,dx = \int_0^{\operatorname{arsh}(2\pi)} \frac{1+\operatorname{ch}(2x)}{2}\,dx = \\
&= \frac{\operatorname{arsh}(2\pi)}{2} + \left[\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4}\right]_0^{\operatorname{arsh}(2\pi)} = \frac{\operatorname{arsh}(2\pi)}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh}(2\pi))}{4} = \\
&= \frac{\operatorname{arsh}(2\pi)}{2} + \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(2\pi))\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(2\pi))}{2} = \\
&= \frac{\operatorname{arsh}(2\pi)}{2} + \pi\sqrt{1+(\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(2\pi)))^2} = \frac{\operatorname{arsh}(2\pi)}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}.
\end{aligned}$$

$\beta)$ $\|\dot{\varphi}(t)\|_2^2 = \alpha^{2t} + \alpha^{2t}\ln^2(\alpha)$ $(t \in [0,2\pi])$, így

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\ln^2(\alpha)}\,\alpha^t\,dt = \frac{\sqrt{1+\ln^2(\alpha)}}{\ln(\alpha)}\left(\alpha^{2\pi}-1\right). \quad \blacksquare$$

8. Számítsuk ki az $\int_\varphi f\,ds$ elsőfajú vonalintegrált az alábbi esetekben!

(a) $\alpha \in \mathbb{R}$ és

$$f(r) := 1 + \alpha xy \quad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \varphi(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad (t \in [0,2\pi]);$$

(b) $\alpha \in \mathbb{R}$ és

$$f(r) := 1 + \alpha\sqrt[3]{xy} \quad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \varphi(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)) \quad (t \in [0,2\pi]).$$

Útm.

(a) $$\int_\varphi f\,ds = \int_0^{2\pi} (1 + \alpha\cos(t)\sin(t))\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt = 2\pi.$$

(b) $\displaystyle\int_{\varphi} f ds = \int_0^{2\pi} (1+\alpha\cos(t)\sin(t))\, 3 \underbrace{\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)\cos^2(t)}}_{=\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)}}\, dt.$

Mivel

$$\begin{aligned}\int (1+\alpha\cos(t)\sin(t))\cos(t)\sin(t)\,dt &= \frac{\sin^2(t)}{2}+\frac{\alpha}{4}\int \sin^2(2t)\,dt = \\ &= \frac{\sin^2(t)}{2}+\frac{\alpha}{8}\int (1-\cos(4t))\,dt = \\ &= \frac{\sin^2(t)}{2}+\frac{\alpha t}{8}-\frac{\alpha}{32}\sin(4t)+c,\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} \nu &= 3\left\{[\ldots]_0^{\pi/2}+[\ldots]_{\pi/2}^{\pi}+[\ldots]_{\pi}^{3\pi/2}+[\ldots]_{3\pi/2}^{2\pi}\right\} = \\ &= 3\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha\pi}{16}\right)-\left(\frac{\alpha\pi}{8}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha\pi}{16}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3\alpha\pi}{16}-\frac{\alpha\pi}{8}\right)-\right. \\ &\quad \left.-\left(\frac{\alpha\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3\alpha\pi}{16}\right)\right\} = 3\cdot 2 = 6. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

9. Egy homogén tömegeloszlású, M tömegű vékony kötelet két végénél fogva lógatunk. Hol van a kötél tömegközéppontja, ha a kötél meghatározta görbe egy paraméterezése a

$$\varphi(t) := (t, \operatorname{ch}(t)) \qquad (t \in [0,1])$$

út?

Útm. A homogén tömegeloszlás következtében

$$\rho(x,y) \equiv \frac{M}{L(\varphi)} = \frac{M}{\displaystyle\int_0^1 \|\dot{\varphi}(t)\|_2\,dt} = \frac{M}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(\operatorname{sh}(t))^2}\,dt} = \frac{M}{\operatorname{sh}(1)}.$$

A tömegközéppont koordináráira így:

$$\begin{aligned} x_{TKP} &= \frac{1}{M}\int_\varphi x\rho(x,y)\,ds = \frac{1}{M}\int_0^1 t\rho(\varphi(t))\|\dot{\varphi}(t)\|_2\,dt = \\ &= \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\int_0^1 t\,\mathrm{sh}(t)\,dt = \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\left\{[t\,\mathrm{ch}(t)]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{ch}(t)\,dt\right\} = \frac{\mathrm{ch}(1)-\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{sh}(1)}, \end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned} y_{TKP} &= \frac{1}{M}\int_\varphi y\rho(x,y)\,ds = \frac{1}{M}\int_0^1 t\rho(\varphi(t))\|\dot{\varphi}(t)\|_2\,dt = \\ &= \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\int_0^1 \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(1)}\left\{\int_0^1 \mathrm{sh}(2t)\,dt\right\} = \\ &= \frac{1}{4\,\mathrm{sh}(1)}[\mathrm{ch}(2t)]_0^1 = \frac{\mathrm{ch}(2)-1}{4\,\mathrm{sh}(1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

10. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $\varphi : [a,b] \to \Omega$ rektifikálható út, továbbá $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor az elsőfajú vonalintegrálra teljesül az

$$\left|\int_\varphi f ds\right| \leq L(\varphi)\cdot\max\{|f(r)| \in \mathbb{R} :\ r \in \mathcal{R}_\varphi\}$$

becslés!

Útm. Világos, hogy

$$\begin{aligned} \left|\int_\varphi f ds\right| &\leq \int_\varphi |f| ds = \int_a^b |f(\varphi(t))| ds(t) \leq \sup\{|f(\varphi(t))| \in \mathbb{R} :\ t \in [a,b]\}\cdot\int_a^b ds(t) = \\ &= \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in \mathcal{R}_\varphi\}\cdot\int_a^b ds(t). \end{aligned}$$

Mivel

- φ folytonos, ezért $\mathcal{R}_\varphi$ kompakt, így

$$\sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in \mathcal{R}_\varphi\} = \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in \mathcal{R}_\varphi\};$$

- az s függvényre

$$s(t)=\begin{cases} 0 & (t=a), \\ \\ L(\varphi|_{[a,t]}) & (t\in(a,b]) \end{cases}$$

teljesül, ezért tetszőleges $\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}\in\mathfrak{F}([a,b])$ felosztás esetén

$$\int_a^b ds(t)=\sum_{k=1}^{n} s(t_k)-s(t_{k-1})=\ldots=s(b)-s(a)=s(b)=L(\varphi). \quad \blacksquare$$

1.5. $\boxed{\text{5. gyakorlat}}$

1.5.1. $\boxed{\text{A gyakorlat anyaga}}$

Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : [a, b] \to \Omega$ rektifikálható út. Ekkor az $f = (f_1, \ldots, f_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ folytonos függvénynek (folytonos vektormezőnek) a φ útra vonatkozó **másodfajú vonalintegrál**ján az

$$\int_\varphi f := \int_\varphi f dr := \int_\varphi \langle f(r), dr\rangle := \sum_{k=1}^{d} \int_a^b f_k(\varphi(t))\, d\varphi_k(t)$$

valós számot értjük. $\diamondsuit$

Megjegyzések.

1. Ha φ zárt út, azaz $\varphi(a) = \varphi(b)$, akkor a vonalintagálra a $\oint_\varphi f$ jelölés is használatos.

2. Fizikai interpretáció. A másodfajú vonalintegrál szoros kapcsolatban van a munka fogalmával. A fizikai erőterek (a tér minden pontjához egy $\mathbb{R}^3$-beli vektort – a szóban forgó pontbeli erőt – rendelve) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényekkel írhatók le. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, akkor az $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ erőtérnek valamely $\varphi : [a, b] \to \Omega$ út mentén végzett W munkáját a
$$W := \int_\varphi f$$
vonalintegrállal szokás értelmezni. Ennek megfelelően az f **erőtér ellenében végzett munkán** a $-W$ számot értjük.

3. Ha φ sima út, akkor
$$\boxed{\int_\varphi \langle f(r), dr\rangle = \sum_{k=1}^{d} \int_a^b f_k(\varphi(t))\dot\varphi_k(t)\, dt = \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\, dt}.$$

4. Az alkalmazásokban leginkább a $d = 3$ eset (spec. $d = 2$) fordul elő. Sok régi tankönyvben a következő jelölés is használatos:
$$\int_\varphi \langle f(x, y, z),\ d(x, y, z)\rangle = \int_\varphi f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz.$$

5. Sok szerző a vonalintegrál helyett egszerűen csak görbe menti integrálról beszél, és az

$$\int_\gamma f, \qquad \text{ill. az} \qquad \oint_\gamma f$$

jelölést használja, ahol $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ adott görbe. Előfordulhat, hogy a γ görbének két különböző paraméterezése, azaz

$$\left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in I\right\} = \gamma = \left\{\psi(t) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in J\right\},$$

esetén

$$\int_\varphi f \neq \int_\psi f.$$

Ezért az

$$\int_\gamma f, \qquad \text{ill. az} \qquad \oint_\gamma f$$

jelölés csak akkor korrekt, ha a „szövegkörnyezetből" egyértelműen kiderül, hogy mely $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ út paraméterezi a γ görbét. □

Példa. Az

$$f(r) := -\frac{c}{|r|^3} r = -\frac{c}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

vektormező az origóba helyezett M tömegű anyagi pontnak az $r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ helyvektorú pontban lévő m tömegű anyagi pontra gyakorolt gravitációs erejét írja le ($c = \gamma M m$). Így az m tömegű pontnak az $\mathcal{R}_\varphi$ sima görbén $/\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $\varphi \in \mathfrak{C}^1/$ történő mozgatásával a gravitációs erő ellenébenvégzett munka:[5]

$$-\int_\varphi f = c \int_a^b \left\langle \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|^3}, \dot{\varphi}(t) \right\rangle dt = c \int_a^b -\frac{d}{dt} \frac{1}{|\varphi(t)|} \, dt = \frac{c}{|\varphi(a)|} - \frac{c}{|\varphi(b)|},$$

ui. tetszőleges $t \in [a, b]$ esetén

[5] $\mathbb{R}^d$-ben $|\cdot| := \|\cdot\|_2$.

$$\begin{aligned}\frac{\langle\varphi(t),\dot\varphi(t)\rangle}{|\varphi(t)|^3} &= \frac{\varphi_1(t)\dot\varphi_1(t)+\varphi_2(t)\dot\varphi_2(t)+\varphi_3(t)\dot\varphi_3(t)}{|\varphi(t)|^3} = \\ &= \frac{2\varphi_1(t)\dot\varphi_1(t)+2\varphi_2(t)\dot\varphi_2(t)+2\varphi_3(t)\dot\varphi_3(t)}{2\left(\sqrt{(\varphi_1(t))^2+(\varphi_2(t))^2+(\varphi_3(t))^2}\right)^3} = \\ &= -\frac{d}{dt}\frac{1}{|\varphi(t)|}. \quad \diamondsuit\end{aligned}$$

HÁZI FELADAT. A D Függelék ismeretanyaga.

A továbbiakban legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum.

Megjegyzés. Ha $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ differenciálható, akkor bármely $(u,v) \in I \times J$ esetén

$$\partial_k\Psi(u,v) := (\partial_k\Psi_1(u,v), \partial_k\Psi_2(u,v), \partial_k\Psi_3(u,v)) \qquad (k \in \{1,2\}). \quad \square$$

Definíció. A $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ halmazt **felület**nek nevezzük, ha alkalmas

$$\Psi = (\Psi_1.\Psi_2, \Psi_3) : I \times J \to \mathbb{R}^3, \qquad \Psi \in \mathfrak{C}^1, \qquad \mathrm{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\Gamma = \mathcal{R}_\Psi = \left\{\Psi(u,v) \in \mathbb{R}^3 : \ (u,v) \in I \times J\right\}.$$

Γ **reguláris felület**, ha még $\Psi|_{\mathrm{int}(I\times J))}$ injektivitása is teljesül. A Ψ függvény az adott Γ felület **paraméterezés**e. $\diamondsuit$

Megjegyzések.

1. Ha a $\Psi = (\Psi_1.\Psi_2, \Psi_3) : I \times J \to \mathbb{R}^3$ függvényre $\Psi \in \mathfrak{C}^1$, akkor

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1\Psi & \partial_2\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1\Psi_1 & \partial_2\Psi_1 \\ \partial_1\Psi_2 & \partial_2\Psi_2 \\ \partial_1\Psi_3 & \partial_2\Psi_3 \end{bmatrix}$$

következtében $\mathrm{rang}(\Psi') = 2$ azt jelenti, hogy a $\partial_1\Psi$, $\partial_2\Psi$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$\partial_1\Psi \nparallel \partial_2\Psi, \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1\Psi \times \partial_2\Psi \neq 0.$$

2. Ha a $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ leképezés valamely felület paraméterezése, akkor az

$$n_\Psi(u,v) := \partial_1\Psi(u,v) \times \partial_2\Psi(u,v) \qquad ((u,v) \in I \times J)$$

vektor az adott felület $\Psi(u,v)$ pontjához tartozó **érintősík**jának normálvektora. □

HÁZI FELADAT. A $\boxed{\textbf{E1}}$ Függelék ismeretanyaga.

Példák.

1. Ha $h \in \mathbb{R}$, $0 < R \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\Psi(u,v) := (u\cos(v), u\sin(v), h) \qquad ((u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi])$$

függvény értékkészlete a $z = h \in \mathbb{R}$ síkban fekvő $(0,0,h)$ középpontú, R-sugarú **körlemez**, továbbá bármely $(u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ esetén

$$n_\Psi(u,v) \equiv (\cos(v), \sin(v), 0) \times (-u\sin(v), u\cos(v), 0) \equiv (0,0,u).$$

2. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{C}^1$, $f \geq 0$, akkor a

$$\Psi(u,v) := (u, f(u)\cos(v), f(u)\sin(v)) \qquad ((u,v) \in [a,b] \times [0,2\pi])$$

leképezés az f függvény grafikonjának az első tengely küröli megforgatásával keletkező **forgásfelület**, továbbá

$$\begin{aligned} n_\Psi(u,v) &\equiv (1, f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v)) \times (0, -f(u)\sin(v), f(u)\cos(v)) \equiv \\ &\equiv (f(u)f'(u), -f(u)\cos(v), -f(u)\sin(v)). \end{aligned}$$

3. Ha $0 < \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$: $\varphi \in \mathfrak{C}^1$ és $\varphi|_{(a,b)}$ injektív, ill.

$$\varphi_1(u) =: x(u) \geq 0, \quad \varphi_2(u) := 0, \quad \varphi_3(u) =: z(u) \qquad (u \in [a,b]),$$

akkor a

$$\Psi(u,v) := (x(u)\cos(v), x(u)\sin(v), z(u)) \qquad ((u,v) \in [a,b] \times [0,\beta])$$

függvény értékkészlete $\mathcal{R}_\varphi$-nek harmadik tengely körüli megforgatásával keletkező **forgásfelület**, ui. ha

$$F_v := \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (v \in [0,\beta]), \quad \text{ahol} \quad \beta \in [0,2\pi],$$

akkor

$$F_v\varphi(u) = \Psi(u,v) \qquad ((u,v) \in [a,b] \times [0,\beta]),$$

továbbá

$$\begin{aligned} n_\Psi(u,v) &\equiv (x'(u)\cos(v), x'(u)\sin(v), z'(u)) \times (-x(u)\sin(v), x(u)\cos(v), 0) \equiv \\ &\equiv (-x(u)x'(u)\cos(v), -x(u)x'(u)\sin(v), x(u)x'(u)). \end{aligned}$$

4. Ha az $f : I \times J \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{C}^1$, akkor az f függvény

$$\text{graph}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in I \times J, \ z = f(x,y)\right\}$$

grafikonja olyan felület, amelyre $\text{graph}(f) = \mathcal{R}_\Psi$, ahol

$$\Psi(u,v) := (u,v,f(u,v)) \in \mathbb{R}^3 \quad ((u,v) \in I \times J)$$

(ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{R}_\Psi$ felület **Euler-Monge-mód**on van megadva az f függvény révén), továbbá

$$\begin{aligned} n_\Psi(u,v) &= \partial_1\Psi(u,v) \times \partial_2\Psi(u,v) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_1 f(u,v) \\ 0 & 1 & \partial_2 f(u,v) \end{bmatrix} = \\ &= (-\partial_1 f(u,v), -\partial_2 f(u,v), 1) \quad ((u,v) \in I \times J). \quad \Diamond \end{aligned}$$

Az első-, ill. másodfajú integrál mintájára bevezetjük az első-, ill. másodfajú felületi integrál fogalmát.

Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány,

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : I \times J \to \Omega, \qquad \Psi \in \mathfrak{C}^1, \qquad \text{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy $\Psi|_{\text{int}(I \times J)}$ injektív. Ekkor

1. ha $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, akor az f függvény Ψ-re vonatkozó **elsőfajú felületi integrál**jának (vagy **felszíni integrál**jának) nevezzük az
$$\int_{\Psi} f := \int_{I\times J} (f \circ \Psi) \cdot \|n_{\Psi}\|_2$$
valós számot,

2. ha $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}$, akkor az f függvény Ψ-re vonatkozó (**másodfajú**) **felületi integrál**jának nevezzük az
$$\int_{\Psi} f := \int_{I\times J} \langle f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle = \int_{I\times J} [f \circ \Psi, \partial_1\Psi, \partial_2\Psi]$$
valós számot,

3. az
$$\mathcal{R}_{\Psi} := \left\{\Psi(u,v) \in \mathbb{R}^3 :\ (u,v) \in I \times J\right\}$$
ponthalmaz (felület) **felszín**ének nevezzük az
$$\mathcal{F}(\Psi) := \int_{I\times J} \|n_{\Psi}\|_2$$
valós számot. $\Diamond$

Megjegyzés. A fenti integrálok motivációja:

1. Ha valamely (reguláris) $\mathcal{R}_{\Psi}$ felület tömeg- vagy töltéseloszlása a $\rho \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénnyel írható le, akkor a felület tömege vagy össztöltése:
$$M = \int_{\Psi} \rho.$$

2. **Fluxus**: a $\mathcal{R}_{\Psi}$ felületen egységnyi idő alatt átáramlott folyadék menyisége (vö. **E2** Függelék).

HÁZI FELADAT. A **E2** Függelék ismeretanyaga.

Megjegyzés. Mivel
$$|n_{\Psi}| = |\partial_1\Psi \times \partial_2\Psi| = |\partial_1\Psi| \cdot |\partial_2\Psi| \cdot \sin\left(\partial_1\Psi, \partial_2\Psi\right),$$
ezért, ha Ψ reguláris, akkor

$$\begin{aligned}
|n_\Psi|^2 &= |\partial_1\Psi|^2 \cdot |\partial_2\Psi|^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\partial_1\Psi, \partial_2\Psi)\right) = \\
&= |\partial_1\Psi|^2 \cdot |\partial_2\Psi|^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle \partial_1\Psi, \partial_2\Psi\rangle^2}{|\partial_1\Psi|^2 \cdot |\partial_2\Psi|^2}\right) = \\
&= |\partial_1\Psi|^2 \cdot |\partial_2\Psi|^2 - \langle \partial_1\Psi, \partial_2\Psi\rangle^2 =: \det\,[g_{i,j}]_{i,j=1}^{2,2},
\end{aligned}$$

ahol a parciális deriváltakból képzett

$$g_{ij} := \langle \partial_i\Psi, \partial_j\Psi\rangle \qquad (i,j \in \{1,2\}),$$

ill.

$$g_{11} =: E, \qquad g_{12} = g_{21} =: F, \qquad g_{22} =: G$$

mennyiségeket az $\mathcal{R}_\Psi$ felület **metrikus alapmennyiség**einek vagy **elsőrendű Gauß-féle főmennyiség**einek nevezzük. Ezzel a jelöléssel a felszínre vonatkozó formula így írható:

$$\boxed{\mathcal{F}(\Psi) = \int_{I\times J} \sqrt{\det\,[g_{i,j}]} = \int_{I\times J} \sqrt{EG - F^2}}. \quad \square$$

Feladat. Valamely $R > 0$ sugarú kör keresztmetszetű, l hosszúságú, vízszintesen elhelyezkedő csőben összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásának a sebességmezejét írja le az

$$f(r) := \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - x^2 - z^2)j \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + z^2 \leq R^2)$$

vektormező, ahol p_1 ill. p_2 a cső két végén levő nyomás: $p_1 > p_2$, $\eta > 0$ pedig a belső súrlódásra jellemző állandó (a koordinátarendszer y-tengelyét a cső tengelyével egybeesőnek választjuk úgy, hogy a cső egyik vége legyen az $y = 0$-nál, ahol a nyomás p_1, a másik vége pedig az $y = l$-nél, ahol a nyomás p_2). A cső merőleges keresztmetszetén az időegység alatt átmenő és egyúttal a cső végén kiáramló folyadéktérfogat nyilvánvalóan ρf-nek erre a keresztmetszetre vett fluxusa, ahol $\rho > 0$ jelöli a folyadék sűrűségét. Számítsuk ki ezt a fluxust!

Útm. Világos, hogy ha

$$\Psi(u,v) := (u\cos(v), l, u\sin(v)) \qquad ((u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi]),$$

akkor a cső kérdéses keresztmetszete $\mathcal{R}_\Psi$. Mivel

$$\partial_1\Psi(u,v)\times\partial_2\Psi(u,v)=\det\begin{bmatrix} i & j & k\\ \cos(v) & 0 & \sin(v)\\ -u\sin(v) & 0 & u\cos(v)\end{bmatrix}=-uj \qquad ((u,v)\in[0,R]\times[0,2\pi]),$$

ezért a kiáramló folyadék mennyisége (a folyadék a cső keresztmetszetén a normális irányával ellenkező irányban lép át):

$$\begin{aligned}\boxed{Q}=-\int_\Psi(\rho f) &= -\rho\cdot\frac{p_1-p_2}{4\eta l}\cdot\int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]}\left\langle(0,R^2-u^2,0),(0,-u,0)\right\rangle\,d(u,v)=\\ &= -\rho\cdot\frac{p_1-p_2}{4\eta l}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R u(u^2-R^2)\,du\right)\,dv=\\ &= -2\pi\rho\cdot\frac{p_1-p_2}{4\eta l}\cdot\left[\frac{u^4}{4}-\frac{R^2u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=R}=\boxed{\frac{\pi\rho(p_1-p_2)}{8\eta l}\cdot R^4}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Tehát a kiömlő folyadék mennyisége adott nyomáskülönbség esetén a cső sugarának negyedik hatványával arányos. Ez a **Hagen-Poiseuille-törvény**, amelyet először (1839-40-ben) kísérleti úton ismertek fel. Ennek a törvénynek gyakorlati szerepe a vízvezetékek, ill. erek mészkövesedése során bekövetkezett keresztmetszet változásában, továbbá folyadékok viszkozitásának mérésében van. Ha a Hagen-Poiseuille-törvényt a

$$p_1-p_2=\frac{8\eta l}{\pi R^4\rho}Q \tag{1.5}$$

alakban írjuk fel, akkor Q nem más, mint a csövön átfolyó folyadékáram erőssége, ezért az (1.5) összefüggés az elektromos áramra vonatkozó

$$U_1-U_2=RI$$

Ohm-törvényre emlékeztet. Emiatt Q szorzótényezőjét, a

$$\frac{8\eta l}{\pi R^4\rho}$$

mennyiséget a **cső ellenállás**ának is szokták nevezni.

1.5.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ másodfajú vonalintegrált!

   (a) $f(r) := \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 > 0),$

   $$\varphi(t) := (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t)) \qquad (t \in [0,1]),$$

   ahol $R > 0$;

   (b) $f(r) := \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{|r|^2 - \langle k, r\rangle^2} \cdot (k \times r) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 > 0),$
   ahol $\mu_0, I > 0$,

   $$\varphi(t) := (R\cos(t), R\sin(t), h) \qquad (t \in [0,2\pi]),$$

   ahol $h > 0$.

   Útm. Mivel

   (a) $\dot\varphi(t) = (-2\pi R\sin(2\pi t), 2\pi R\cos(2\pi t)$ $(t \in [0,1])$, ezért

   $$\oint_\varphi f \;=\; \int_0^1 \left\langle \left(\frac{-R\sin(2\pi t))}{R^2}, \frac{R\cos(2\pi t)}{R^2}\right), (-2\pi R\sin(2\pi t), 2\pi R\cos(2\pi t))\right\rangle dt =$$

   $$= \int_0^1 2\pi\, dt = 2\pi.$$

   (b) $\dot\varphi(t) = (-R\sin(t), R\cos(t)$ $(t \in [0,2\pi])$, ezért

   $$\oint_\varphi f = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\langle(-R\sin(t), R\cos(t), 0), (-R\sin(t), R\cos(t), 0)\rangle}{R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)}\, dt = \mu_0 I.$$

   Ezt az összefüggést **Ampère-törvény**nek vagy más néven **gerjesztési törvény**nek nevezik. (Ez utóbbi elnevezés arra utal, hogy a mágneses mezőt az elektromos áram kelti: „gerjeszti”.) ■

2. Paraméterezzük

   (a) az a **alapkörsugarú,** a_0 **fedőkörsugarú csonkakúp-palást**ot;

(b) a **hengerpalást**ot;

(c) a **gömbfelület**et;

(d) a **tóruszfelület**et,

mint speciális forgásfelületet!

Útm.

(a) $\varphi(u) := [u, 0, b(1 - u/a)]$ $(u \in [a_0, a]) \rightsquigarrow$

$$\boxed{\Psi(u, v) = [u \cos(v), u \sin(v), b(1 - u/a)]}$$

$$((u, v) \in [a_0, a] \times [0, 2\pi]),$$

ahol $0 \leq a_0 < a$;

(b) $\varphi(u) := [R, 0, u]$ $(u \in [z_0, z_1]) \rightsquigarrow$

$$\boxed{\Psi(u, v) = [R \cos(v), R \sin(v), u]}$$

$$((u, v) \in [z_0, z_1] \times [0, 2\pi]),$$

ahol $R > 0$;

(c) $\varphi(u) := [R \sin(u), 0, R \cos(u)]$ $(u \in [0, \pi]) \rightsquigarrow$

$$\boxed{\Psi(u, v) = [R \sin(u) \cos(v), R \sin(u) \sin(v), R \cos(u)]}$$

$$((u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]),$$

ahol $R > 0$;

(d) $\varphi(u) := [R + r \sin(u), 0, r \cos(u)]$ $(u \in [0, 2\pi]) \rightsquigarrow$

$$\boxed{\Psi(u, v) = [(R + r \sin(u)) \cos(v), (R + r \sin(u)) \sin(v), r \cos(u)]}$$

$$((u, v) \in [0, 2\pi]^2),$$

ahol $R, r > 0$ ■

3. Adjunk példát olyan $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}$ sima leképezésre, amelyre

(a) $\mathcal{R}_\Psi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \, x + y + z = 1\right\}$;

(b) $\mathcal{R}_\Psi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\right\}$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$;

(c) $\mathcal{R}_\Psi$ a

$$z = f(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]), \qquad y = 0 \qquad (0 < \alpha < \beta)$$

egyenletű **meridiángörbe** (**profilgörbe**) z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület $/f \in \mathfrak{C}^1/$;

(d) $\mathcal{R}_\Psi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

teljesül, majd számítsuk ki az n_Ψ normálist!

Útm.

(a) Tetszőleges $(u, v) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ esetén legyen

$$\Psi(u,v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j + (1 - u\cos(v) - u\sin(v))k,$$

így

$$n_\Psi(u,v) \equiv \partial_1\Psi(u,v) \times \partial_2\Psi(u,v) = ui + uj + uk.$$

(b) Tetszőleges $(u, v) \in [0, \pi] \times [0,2\pi]$ esetén legyen

$$\Psi(u,v) := \alpha\sin(u)\cos(v)i + \beta\sin(u)\sin(v)j + \gamma\cos(u)k,$$

így

$$n_\Psi(u,v) \equiv \alpha\beta\gamma\sin(u)\left\{\frac{1}{\alpha^2}\Phi_1(u,v)i + \frac{1}{\beta^2}\Phi_2(u,v)j + \frac{1}{\gamma^2}\Phi_3(u,v)k\right\}.$$

(c) Tetszőleges $(u, v) \in [\alpha, \beta] \times [0,2\pi]$ esetén legyen

$$\Psi(u,v) := F_v\varphi(u), \qquad \text{ahol} \qquad \varphi(u) :\equiv (u,0,f(u)),$$

ill. F_v a z-tengely körüli forgatás mátrixa. Ezért

$$\Psi(u,v) = u\cos(v)i + u\sin(v)j + f(u)k \qquad ((u,v) \in [\alpha, \beta] \times [0,2\pi]),$$

$$n_\Psi(u,v) \equiv u\{-f'(u)\cos(v)i - f'(u)\sin(v)j + k\}.$$

(d) Mivel a kérdéses felület nem más, mint a

$$z = x^2 \quad (x \in [0,1]), \qquad y = 0$$

profilgörbe z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, ezért

$$\varphi(u) = (u, 0, u^2) \qquad (u \in [0,1]),$$

ill.

$$\Psi(u,v) = u\cos(v)\mathbf{i} + u\sin(v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k} \qquad ((u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]),$$

$$n_\Psi(u,v) \equiv u\{-2u\cos(v)\mathbf{i} - 2u\sin(v)\mathbf{j} + \mathbf{k}\}. \quad \blacksquare$$

4. Igazoljuk, hogy ha $h \in \mathbb{R}$, $R > 0$,

$$\Psi(u,v) := (u\cos(v), u\sin(v), h) \qquad ((u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi])$$

($\mathcal{R}_\Psi$: a $z = h$ síkban fekvő $(0,0,h)$ középpontú, R sugarú körlemez), akkor

$$\mathcal{F}(\Psi) = R^2\pi$$

teljesül!

Útm.

$$\partial_1\Psi(u,v) \times \partial_2\Psi(u,v) = [0,0,u] \quad ((u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi])$$

következtében

$$\mathcal{F}(\Psi) = \int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} u \, d(u,v) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R u du \right) dv = R^2\pi. \quad \blacksquare$$

5. Számítsuk ki a **gömb** felszínét!

Útm. Az $\mathcal{R}_\Psi$ ponthalmaz felszínét kell tehát kiszámítanunk, ahol

$$\Psi(u,v) := (R\sin(u)\cos(v), R\sin(u)\sin(v), R\cos(u))$$

$$((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]; \ R > 0).$$

Mivel

$$n_\Psi(u,v) = R\sin(u) \cdot \Psi(u,v) \qquad ((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]),$$

ezért

$$\|n_\Psi(u,v)\|_2 = R\sin(u) \cdot |\Psi(u,v)| = R^2\sin(u)((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]).$$

A gömb felszíne tehát

$$\mathcal{F}(\Psi) = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} R^2 \sin(u)\,d(u,v) = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(u)\,du \right) dv = \ldots = 4r^2\pi. \quad \blacksquare$$

6. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{R}_\Psi$ felület Euler-Monge-féle módon van megadva valamely $f \in \mathfrak{C}^1(I \times J, \mathbb{R})$ függvény révén, azaz

$$\Psi(u,v) = (u, v, f(u,v)) \qquad ((u,v) \in I \times J),$$

akkor

$$\boxed{\mathcal{F}(\Psi) = \int_{I\times J} \sqrt{1 + [\partial_1 f]^2 + [\partial_2 f]^2}}$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy

$$|\partial_1\Psi \times \partial_2\Psi| = |(-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1)| = \sqrt{1 + [\partial_1 f]^2 + [\partial_2 f]^2}. \quad \blacksquare$$

7. Számítsuk ki az $\int_\Psi f$ másodfajú felületi integrált!

$$f(r) := (x,0,0) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$\mathcal{R}_\Psi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \right\} \qquad (\alpha, \beta, \gamma > 0).$$

Útm. Ha

$$\Psi(u,v) := \alpha \sin(u)\cos(v)i + \beta \sin(u)\sin(v)j + \gamma \cos(u)k \qquad ((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]),$$

akkor

$$n_\Psi(u,v) \equiv \alpha\beta\gamma \sin(u) \left\{ \frac{1}{\alpha^2}\Psi_1(u,v)i + \frac{1}{\beta^2}\Psi_2(u,v)j + \frac{1}{\gamma^2}\Psi_3(u,v)k \right\},$$

így

$$\begin{aligned}
\int_\Psi f &= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} [f(\Psi(u,v))]_1 \cdot [n_\Psi(u,v)]_1\,d(u,v) = \\
&= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \alpha\beta\gamma \sin^3(u)\cos^2(v)\,d(u,v) = \\
&= \alpha\beta\gamma \left(\int_0^{\pi} \sin^3(u)\,du \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(v)\,dv \right) = \alpha\beta\gamma \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\alpha\beta\gamma\pi}{3}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

8. Számítsuk ki az $\mathbf{f}$ vektormezőnek a Ψ paraméterezte felületre vett fluxusát!

   (a) $f(r) := (xy, xz, -zy)$ $(r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$,
   $\mathcal{R}_\Psi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leq 1\right\};$

   (b) $f(r) := r$ $(r \in \mathbb{R}^3)$,
   $\mathcal{R}_\Psi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 9\right\}.$

Útm.

(a) Ha

$$\Psi(u, v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j + u^2k \qquad ((u, v) \in [0,1] \times [0,2\pi]),$$

akkor

$$n_\Psi(u, v) = u\,(-2u\cos(v)i - 2u\sin(v)j + k) \qquad ((u, v) \in [0,1] \times [0,2\pi]),$$

így

$$\begin{aligned}
\int_\Psi f &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \Big\langle \big(u^2\sin(v)\cos(v), u^3\cos(v), -u^3\sin(v)\big), \\
&\quad \big(-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u\big)\Big\rangle \, d(u, v) = \\
&= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \big(-2u^4\sin(v)\cos^2(v) - 2u^5\sin(v)\cos(v) - u^4\sin(v)\big)\, d(u, v) = \\
&= \left(\int_0^1 2u^4\, du\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} (-\sin(v))\cos^2(v)\, dv\right) + \\
&\quad + \left(\int_0^1 2u^5\, du\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} (-\sin(v))\cos(v)\, dv\right) + \\
&\quad + \left(\int_0^1 u^4\, du\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} (-\sin(v))\, dv\right) = 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(b) Ha tetszőleges $(u, v) \in [0, \pi] \times [0,2\pi]$ esetén

$$\Psi(u, v) := [1 + 3\sin(u)\cos(v)]i + [-2 + 3\sin(u)\sin(v)]j + [5 + 3\cos(u)]k,$$

akkor

$$n_\Psi(u,v) = \ldots = 9\sin(u)[\sin(u)\cos(v)i + \sin(u)\sin(v)j + \cos(u)k],$$

így

$$\begin{aligned}
\int_\Psi f &= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \langle f(\Psi(u,v)), n_\Psi(u,v)\rangle \, \mathrm{d}(u,v) = \\
&= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 9\sin(u)\cdot\{\sin(u)\cos(v)[1+3\sin(u)\cos(v)] + \sin(u)\sin(v)\cdot \\
&\quad \cdot[-2+3\sin(u)\sin(v)] + \cos(u)[5+3\cos(u)]\}\, \mathrm{d}(u,v).
\end{aligned}$$

Mivel

$$\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 9\sin^2(u)\cos(v)\,\mathrm{d}(u,v) = \left(\int_0^1 9\sin^2(u)\,\mathrm{d}u\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos(v)\,\mathrm{d}v\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 27\sin^3(u)\cos^2(v)\,\mathrm{d}(u,v) &= \left(\int_0^\pi 27\sin^3(u)\,\mathrm{d}u\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^2(v)}_{\frac{1+\cos(2v)}{2}}\,\mathrm{d}v\right) = \\
&= 27\pi\int_0^\pi \sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{27\pi}{4}\int_0^\pi\{3\sin(u)-\sin(3u)\}\,\mathrm{d}u = 36\pi,
\end{aligned}$$

$$\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} -18\sin^2(u)\sin(v)\,\mathrm{d}(u,v) = -18\left(\int_0^\pi \sin^2(u)\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin(v)\,\mathrm{d}v\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 27\sin^3(u)\sin^2(v)\,\mathrm{d}(u,v) &= \left(\int_0^\pi 27\sin^3(u)\,\mathrm{d}u\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2(v)}_{\frac{1-\cos(2v)}{2}}\,\mathrm{d}v\right) = \\
&= 27\pi\int_0^\pi \sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{27\pi}{4}\int_0^\pi\{3\sin(u)-\sin(3u)\}\,\mathrm{d}u = 36\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 45\sin(u)\cos(u)\,d(u,v) &= 90\pi\int_0^\pi \sin(u)\cos(u)\,du = \\ &= 90\pi\left[\frac{\sin^2(u)}{2}\right]_0^\pi = 0,\\ \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} 27\sin(u)\cos^2(u)\,d(u,v) &= -54\pi\int_0^\pi (-\sin(u))\cos^2(u)\,du = \\ &= -54\pi\left[\frac{\cos^3(u)}{3}\right]_0^\pi = 0,\end{aligned}$$

ezért

$$\int_\Psi f = 0+36\pi+0+36\pi+0+0 = 72\pi. \quad \blacksquare$$

9. Igazoljuk, hogy ha

$$\boxed{F(r) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{r}{|r|^3}} \qquad (r\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\};\, Q\in\mathbb{R},\, \epsilon_0>0),$$

ill.

$$\boxed{\Psi(u,v) = (R\sin(u)\cos(v), R\sin(u)\sin(v), R\cos(u))} \qquad ((u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi];\ R>0),$$

akkor fennáll az

$$\boxed{\int_\Psi F = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

összefüggés (**az elektrosztatika Gauß-tétele**)!

Útm. Mivel

$$\partial_1\Psi(u,v)\times\partial_2\Psi(u,v) = R\sin(u)\cdot\Psi(u,v) \qquad ((u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]),$$

és mivel a fenti F esetén

$$(F\circ\Psi)(u,v) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\Psi(u,v)}{|\Psi(u,v)|^3} \qquad ((u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]),$$

ezért

$$\begin{aligned}\frac{4\pi\epsilon_0}{Q}\cdot\langle F\circ\Psi, \partial_1\Psi\times\partial_2\Psi\rangle(u,v) &= \frac{R\sin(u)\,|\Psi(u,v)|^2}{|\Psi(u,v)|^3} = \\ &= \frac{R\sin(u)}{|\Psi(u,v)|} = \sin(u) \quad ((u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]).\end{aligned}$$

Így a fluxus a következő:

$$\int_{\Psi} F = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sin(u)\,d(u,v) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(u)\,du\right)dv = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad \blacksquare$$

10. Legyen $f, g \in \mathfrak{C}^1[a,b]\colon f \leq g$,

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \in [a,b],\; f(x) \leq y \leq g(x)\right\},$$

továbbá

$$F = (F_1, F_2) \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Adjunk meg olyan $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ olyan szakaszonként sima utat, amelyre $\mathcal{R}_\varphi = \partial\Omega$ (pozitív körüljárással) teljesül, továbbá az

$$\int_{\Omega}(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1), \qquad \text{ill.} \qquad \oint_{\varphi} F$$

kettős integrál, ill. vonalintegrál kiszámításával igazoljuk, hogy fennáll az

$$\int_{\Omega}(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \oint_{\varphi} F$$

egyenlőség!

Útm. Mivel

$$\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)} \partial_2 F_1(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b (F_1(x,g(x)) - F_1(x,f(x)))\,dx,$$

és (vö. paraméteres integrálról tanultak)

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} F_2(x,y)\,dy = F_2(x,g(x))g'(x) - F_2(x,f(x))f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y)\,dy,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma}(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \;&=\; -\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)} (\partial_2 F_1(x,y) - \partial_1 F_2(x,y))\,dy\right)dx = \\
&-\int_a^b (F_1(x,g(x)) - F_1(x,f(x)))\,dx + \int_{f(b)}^{g(b)} F_2(b,y)\,dy - \\
&-\int_{f(a)}^{g(a)} F_2(a,y)\,dy - \int_a^b (F_2(x,g(x))g'(x) - F_2(x,f(x))f'(x))\,dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_a^b \left(F_1(x, g(x)) + F_2(x, g(x))g'(x)\right)\,dx+\\
&\quad+\int_a^b \left(F_1(x, f(x)) + F_2(x, f(x))f'(x)\right)\,dx+\\
&\quad+\int_{f(b)}^{g(b)} F_2(b, y)\,dy - \int_{f(a)}^{g(a)} F_2(a, y)\,dy =\\
&= -\int_{\mu_3} F + \int_{\mu_1} F + \int_{\mu_2} F - \int_{\mu_4} F,
\end{aligned}$$

ahol

$$\mu_1(t) := (t, f(t)) \quad (t \in [a, b]), \qquad \mu_2(t) := (b, t) \quad (t \in [f(b), g(b)]),$$

ill.

$$\mu_3(t) := (t, g(t)) \quad (t \in [a, b]), \qquad \mu_4(t) := (a, t) \quad (t \in [f(a), g(a)]).$$

Tehát a

$$\varphi := \mu_1 \vee \mu_2 \vee \widetilde{\mu_3} \vee \widetilde{\mu_4}$$

úttal (vö. $\boxed{\mathbf{B}}$ Függelék) azt kapjuk, hogy

$$\int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \oint_\varphi F. \quad \blacksquare$$

1.6. 6. gyakorlat

1.6.1. A gyakorlat anyaga

Tétel (Green). Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, és tegyük fel, hogy $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ olyan rektifikálható út, amelyre igazak az alábbi állítások:

- φ zárt, azaz $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- $\varphi|_{(a,b)}$ injektív;
- $\partial\Omega = \mathcal{R}_\varphi = \big\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in [a, b]\big\}$;
- a
$$J(r) := (-y, x) \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$
vektormezőre
$$\int_\varphi J > 0.$$

Ekkor bármely $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sima $/f \in \mathfrak{C}^1/$ vektormezőre
$$\boxed{\int_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \oint_\varphi f}. \quad \square$$

Megjegyzések.

1. A fenti tételbeli feltétel következtében Ω **Jordan-mérhető** halmaz.
2. Az olyan görbét, amelyet az első két feltételbeli út paraméterez **Jordan-görbé**nek nevezzük.
3. Az $\displaystyle\int_\varphi J > 0$ feltétel azt jelenti, hogy φ pozitív irányítású: a t paraméter növekedtével Ω belseje mindig „balra van $\varphi(t)$-től.”[6] $\square$

[6] Ez reguláris φ esetén azt jelenti, ha $\varepsilon > 0$ elegendően kicsi, akkor
$$\varphi(t) + \varepsilon J(\varphi'(t)) \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \varphi(t) - \varepsilon J(\varphi'(t)) \notin \Omega \qquad (t \in [a, b]).$$

Példa. Az

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

egységkör határa a

$$\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) := (\cos(t), \sin(t))$$

reguláris út képe, továbbá

$$\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \quad (t \in [0,2\pi]).$$

Így az

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := (-x^2 y, xy^2)$$

vektormezőre

$$\begin{aligned}
\oint_\varphi f &= \int_0^{2\pi} \left\langle (-\cos^2(t)\sin(t), \cos(t)\sin^2(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \right\rangle \,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4t)}{4}\,\mathrm{d}t = 2\pi \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos(4t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

ill. – a Green-tétel felhasználásával –

$$\begin{aligned}
\oint_\varphi f &= \int_\Omega [\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1] = \int_\Omega \left[y^2 + x^2\right] \,\mathrm{d}(x, y) = \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[0,1]} \left[r^2\sin^2(\vartheta) + r^2\cos^2(\vartheta)\right] r\,\mathrm{d}(r, \vartheta) = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{2}. \quad \Diamond
\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi \in \mathfrak{C}^1$, és

$$W_\varphi := \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix}$$

(**Wronski-mátrix**), akkor Ω Jordan-mértékére:

$$\boxed{T(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b \det W_\varphi}$$

teljesül (**Leibniz-féle szektorformula**)!
Útm. Ha

$$f := \frac{1}{2}J,$$

akkor $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 1$, így

$$\begin{aligned}
T(\Omega) &= \int\limits_\Omega 1 = \int\limits_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \overset{\boxed{\text{Green-tétel}}}{=} \oint\limits_\varphi f = \int_a^b \langle f\circ\varphi, \varphi'\rangle = \\
&= \int_a^b \langle f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))\rangle \, dt = \\
&= \int_a^b \left\langle \frac{1}{2}(-\varphi_2(t), \varphi_1(t)), (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))\right\rangle dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)\}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{bmatrix} dt. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Példa. Legyen

$$\varphi_1(t) := \alpha\cos(t), \quad \varphi_2(t) := \beta\sin(t) \qquad (t \in [0,2\pi])$$

(Ω: origó középpontú, 2α nagytengelyű, 2β kistengelyű ellipszistartomány). Ekkor

$$T(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\alpha\beta\cos^2(t) + \alpha\beta\sin^2(t)\right\} dt = \alpha\beta\pi. \quad \Diamond$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f : [0,1] \to (0, +\infty)$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,1], \; y \in [0, f(x)]\right\}$$

tartomány területére

$$T(\Omega) = \int_0^1 f$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy ha

$$g(x, y) := (0, x) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor $\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 1$. Így a Green-tétel felhasználásával

$$T(\Omega) = \int\limits_{\Omega} 1 = \int\limits_{\Omega} (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) = \oint\limits_{\gamma} g,$$

ahol $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ és

$$\gamma_1(t) := (t,0), \;\; \gamma_2(t) := (1, f(1)t), \;\; \gamma_3(t) := (t, f(t)), \;\; \gamma_4(t) := (0, f(0)t \qquad (t \in [0,1]).$$

Így

$$\begin{aligned} T(\Omega) \quad &= \quad \int\limits_{\gamma_1} g + \int\limits_{\gamma_2} g - \int\limits_{\gamma_3} g - \int\limits_{\gamma_4} g = \int_0^1 \{\langle(0,t),(1,0)\rangle + \langle(0,1),(0,f(1))\rangle - \\ &\qquad - \langle(0,t),(1,f'(t))\rangle - \langle(0,0),(0,f(0))\rangle\}\,\mathrm{d}t = \\ &= \quad \int_0^1 \{0 + f(1) - tf'(t) - 0\}\,\mathrm{d}t = f(1) - [tf(t)]_0^1 + \int_0^1 f = \int_0^1 f. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tétel (Bendixon-Dulac). Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ csillagtartomány, $f = (f_1, f_2) \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, továbbá alkalmas $h \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ esetén $\mathrm{div}(hf)$ szemidefinit és legfeljebb csak egy nullmértékű halmazon tűnik el, akkor a

$$\dot{z} = f \circ z$$

differenciálegyenletnek nincsen Ω-ban haladó nemtriviális zárt pályája, azaz nincsen nemtriviális periodikus megoldása.

Biz. Ha $\varphi : [0, T] \to \Omega$ ui. egy ilyen megoldás, akkor

$$\begin{aligned}\oint_\varphi (-hf_2, hf_1) &= \int_0^T \langle (-hf_2, hf_1) \circ \varphi, \varphi' \rangle = \\ &= \int_0^T h(\varphi(t))\{-f_2(\varphi(t))\varphi_1'(t) + f_1(\varphi(t))\varphi_2'(t)\}\, dt = \\ &\overset{\boxed{\varphi \text{ megoldás}}}{=} \int_0^T h(\varphi(t))\{-f_2(\varphi(t))f_1(\varphi(t)) + f_1(\varphi(t))f_2(\varphi(t))\}\, dt = 0,\end{aligned}$$

másrészt

$$\oint_\varphi (-hf_2, hf_1) \overset{\boxed{\text{Green-tétel}}}{=} \int_{\mathrm{int}(\varphi)} \{\partial_1(hf_1) + \partial_2(hf_2)\} = \int_{\mathrm{int}(\varphi)} \mathrm{div}(hf) \neq 0,$$

ami nem lehetséges. ■

Tétel (Stokes). Legyen $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}_\Psi =: \Gamma$ olyan reguláris felület, amelynek $\partial\Gamma$ határát a $\varphi : [a, b] \to \Gamma$ reguláris, pozitív irányítású út paraméterezi. Ekkor bármely $f : \Gamma \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}^1$ (sima) vektormezőre

$$\int_{[a,b]} \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle = \boxed{\oint_\varphi f = \int_\Psi \mathrm{rot}\, f} = \int_{I \times J} \langle \mathrm{rot}\, f \circ \Psi, n_\Psi \rangle$$

teljesül. □

Példa. Legyen

$$\Gamma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1,\ z = 0 \right\},$$

ill.

$$f : \Gamma \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) := (4x/3 - 2y, 3y - x, 0).$$

Ekkor a

$$\Psi(u, v) := (3u\cos(v), 2u\sin(v), 0) \qquad ((u, v) \in [0,1] \times [0,2\pi])$$

kétparaméteres vektor-skalár függvény értékkészlete a Γ felület (ellipszislap): $\mathcal{R}_\Psi = \Gamma$, ill. a

$$\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(t) := (3\cos(t), 2\sin(t), 0)$$

út képe a Γ ellipszislap határa: $\mathcal{R}_\varphi = \partial\Gamma$. Mivel

$$\varphi'(t) = (-3\sin(t), 2\cos(t), 0) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

és

$$\operatorname{rot} f(r) = k \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\oint_\varphi f &= \int_0^{2\pi} \langle (4\cos(t) - 4\sin(t), 6\sin(t) - 3\cos(t), 0), (-3\sin(t), 2\cos(t), 0)\rangle \, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{-12\sin(t)\cos(t) + 12\sin^2(t) + 12\sin(t)\cos(t) - 6\cos^2(t)\right\} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{12\sin^2(t) - 6\cos^2(t)\right\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{12 - 18\cos^2(t)\right\} dt = \\
&= 24\pi - 18\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} \, dt = 24\pi - 18\pi + 0 = 6\pi,
\end{aligned}$$

ill.

$$n_\Psi(u, v) \equiv \partial_1\Psi(u, v) \times \partial_2\Psi(u, v) \equiv 6uk$$

következtében a Stokes-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\oint_\varphi f = \int_\Psi \operatorname{rot} f = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} 6u \, d(u, v) = 12\pi \int_0^1 u \, du = 6\pi. \quad \diamond$$

Tétel (Gauß). Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ olyan kompakt halmaz, hogy alkalmas $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ reguláris leképezés esetén, $\mathcal{R}_\Psi = \partial\Omega$ és bármely $(u, v) \in I \times J$ helyen $n_\Psi(u, v)$ kifelé mutat Ω-ból. Ekkor tetszőleges $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}^1$ (sima) vektormezőre

$$\int_{I\times J} \langle f \circ \Psi, n_\Psi \rangle = \boxed{\int_\Psi f = \int_\Omega \operatorname{div} f}$$

teljesül. $\square$

Megjegyzések.

1. A Gauß-tétel akkor is igaz, ha $\partial\Omega$ több, élekben csatlakozó, a feltételeknek megfelelő felületből áll.

2. Ha $\operatorname{div} f = 1$, akkor a Gauß-tétel felhasználásával Ω térfogatára

$$V(\Omega) = \int_\Omega 1 = \int_\Omega \operatorname{div} f = \int_\Psi f.$$

Példa. Ha

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \le 1\right\} \qquad (\alpha,\beta,\gamma > 0)$$

és

$$f(r) := (0,0,z) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

akkor $\operatorname{div} f(r) \equiv 1$, továbbá a

$$\Psi(u,v) := (\alpha\sin(u)\cos(v), \beta\sin(u)\sin(v), \gamma\cos(u)) \qquad ((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi])$$

paraméterezésre $\mathcal{R}_\Psi = \partial\Omega$ (vö. 5. beadható feladatsor, 3/(b) feladat), ezért az ellipszoid térfogata:

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \int_\Omega 1 = \int_\Omega \operatorname{div} f = \int_\Psi f = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} [f(\Psi(u,v))]_3 \cdot [n_\Psi(u,v)]_3 \, d(u,v) = \\
&= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \alpha\beta\gamma \sin(u)\cos^2(u)\, d(u,v) = -2\pi\alpha\beta\gamma \int_0^\pi (-\sin(u))\cos^2(u)\, du = \\
&= 2\pi\alpha\beta\gamma \left[\frac{\cos^3(u)}{3}\right]_\pi^0 = \frac{4\alpha\beta\gamma\pi}{3}. \quad \square
\end{aligned}$$

1.6.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. A szokásos síkbeli r, φ polárkoordinátákkal tekintsük az alábbi $\mathcal{S}$ halmazt:

$$\mathcal{S} := \left\{ P(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq \varphi \right\} .$$

A Green-tételt felhasználva számítsuk ki $\mathcal{S}$ területét!
Útm. Legyen

$$f(x,y) := \frac{1}{2}(-y,x) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor a Green-tétel felhasználásával:

$$T(S) = \int_S 1 = \int_S (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \int_{\partial S} f.$$

Mivel

$$\partial S = \left\{ (t\cos(t), t\sin(t)) \in \mathbb{R}^2 :\ t \in [0,\pi] \right\} \cup \left\{ (\pi(t-1),0) \in \mathbb{R}^2 :\ t \in [0,1] \right\},$$

ezért

$$\int_{\partial S} f = \int_{-\pi \to 0} f + \int_{-\pi \frown 0} f = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle (0, \pi(t-1)), (\pi,0) \rangle \, dt +$$

$$+ \int_0^\pi \frac{1}{2} \langle (-t\sin(t), t\cos(t)), (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t)) \rangle \, dt =$$

$$= 0 + \int_0^\pi \frac{t^2}{2} \, dt = \frac{\pi^3}{6}. \quad \blacksquare$$

2. Számítsuk ki az $\mathcal{R}_\varphi$ által határolt ponthalmaz területét!

   (a) $\varphi(t) := (\cos(pt), \cos(pt)\sin(t)) \quad (t \in [0,\pi])$,
   ahol $3 \leq p \in \mathbb{N}$ prím /$\mathcal{R}_\varphi$: **p-szirmú rózsa** (vö. 1.2 ábra)/;

   (b) $\varphi(t) := (R(1-\cos(t))\cos(t), R(1-\cos(t))\sin(t)) \quad (t \in [0,2\pi])$,
   ahol $0 < R \in \mathbb{R}$ /$\mathcal{R}_\varphi$: **kardioid** (vö. 1.3. ábra)/;

   (c) $\varphi(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)) \quad (t \in [0,2\pi])$ /$\mathcal{R}_\varphi$: **asztrois** (vö. 1.4. ábra)/.

Útm. Mivel bármely

(a) $t \in [0,\pi]$ esetén $\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) =$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(pt)\cos(t)\{-p\sin(pt)\sin(t) + \cos(pt)\cos(t)\} - \\
&\quad - \cos(pt)\sin(t)\{-p\sin(pt)\cos(t) - \cos(pt)\sin(t)\} = \ldots = \\
&= \cos^2(pt)\cos^2(t) + \cos^2(pt)\sin^2(t) = \cos^2(pt),
\end{aligned}
$$

ezért a keresett terület

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2(pt)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+\cos(2pt))\,dt = \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $t \in [0,2\pi]$ esetén $\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) =$

$$
\begin{aligned}
&= R(1-\cos(t))\cos(t)\{R\sin(t)\sin(t) + R(1-\cos(t))\cos(t)\} - \\
&\quad -R(1-\cos(t))\sin(t)\{R\sin(t)\cos(t) - R(1-\cos(t))\sin(t)\} = \ldots = \\
&= R(1-\cos(t))\left\{R(1-\cos(t))\cos^2(t) + \sin^2(t)\right\} = R^2(1-\cos(t))^2,
\end{aligned}
$$

ezért a keresett terület

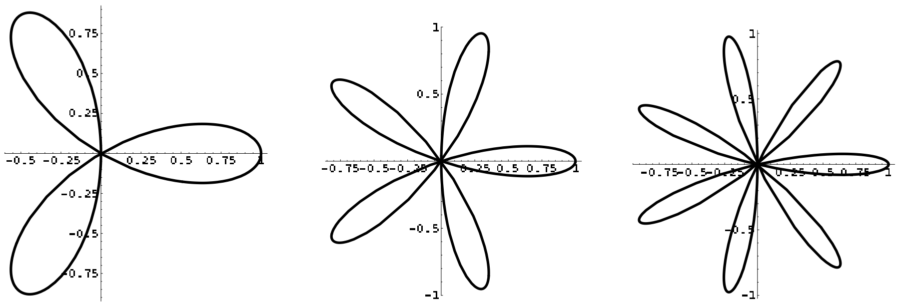
$$
\begin{aligned}
T &= \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos(t)+\cos^2(t))\,dt = \frac{R^2}{2}\left\{2\pi - 2\cdot 0 + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt\right\} = \\
&= \frac{R^2}{2}\{2\pi - 0 + \pi\} = \frac{3R^2\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

(c) $t \in [0,2\pi]$ esetén $\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) =$

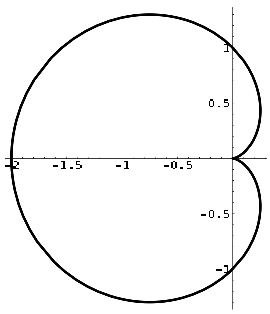
$$
\begin{aligned}
&= \cos^3(t)\cdot 3\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t) - \sin^3(t)\cdot 3\cdot\cos^2(t)\cdot(-\sin(t)) = \\
&= 3\cos^2(t)\sin^2(t)\{\cos^2(t)+\sin^2(t)\} = \ldots = \\
&= \frac{3}{4}\sin^2(2t),
\end{aligned}
$$

ezért a keresett terület

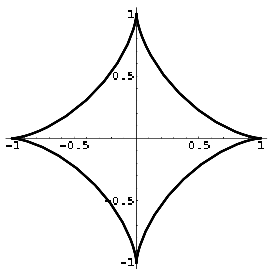
$$T = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt = \ldots = \frac{3\pi}{8}. \quad \blacksquare$$



1.2. ábra. A p-szirmú rózsa $p = 3$, $p = 5$, ill. $p = 7$ esetén.



1.3. ábra. A kardioid (szívgörbe) olyan síkgörbe, amit egy rögzített körön kívül csúszás nélkül legördülő, vele azonos sugarú kör egy rögzített pontja ír le.



1.4. ábra. Az asztroid (asztrois) olyan síkgörbe, amit egy rögzített körön belül csúszás nélkül legördülő 4-szer kisebb sugarú kör egy rögzített pontja ír le.

3. Mutassuk meg, hogy ha a Green-tételben az $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sima $/f \in \mathfrak{C}^1/$ vektormezőre az

$$f(r) = (0, x) \quad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \text{ill.} \qquad f(r) = (-y, 0) \quad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

feltételek valamelyike teljesül, akkor Ω Jordan-mértéke a

$$\boxed{T(\Omega) = \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2'(t)\,dt}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{T(\Omega) = \int_a^b -\varphi_1'(t)\varphi_2(t)\,dt}$$

formulával is számítható!

Útm. Bármely $r \in \Omega$ esetén

$$(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)(r) = 1 + 0 = 1, \qquad \text{ill.} \qquad (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)(r) = 0 + 1 = 1. \quad \blacksquare$$

4. Tegyük fel, hogy $2 \leq n \in \mathbb{N}$, és legyen adott a síkon $n+1$ számú

$$P_1(r_0), \ldots, P_n(r_n) \in \mathbb{R}^2$$

pont. Számítsuk ki annak az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ síkidomnak a területét, amelyet $\partial\Omega$ határa ezen pontok alkotta töröttvonal (**Gauß-féle összegképlet**)!

Útm. Ha

$$r_k = (x_k, y_k) \qquad (k \in \{0, \ldots, n\})$$

és

$$(x_n, y_n) := (x_0, y_0), \qquad \text{ill.} \qquad (x_{n+1}, y_{n+1}) := (x_1, y_1),$$

akkor a k-adik oldal paraméterezése:

$$\varphi(t) := (x_k + t(x_{k+1} - x_k), y_k + t(y_{k+1} - y_k)) \qquad (t \in [0,1]).$$

Így

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_1(t)\varphi_2'(t)\,dt &= \int_0^1 \{(x_k + t(x_{k+1} - x_k))\,(y_{k+1} - y_k)\}\,dt \\
&= x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) = \\
&= \frac{1}{2}x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}x_{k+1}(y_{k+1} - y_k).
\end{aligned}$$

Ezért Ω területére

$$\begin{aligned}
\boxed{T(\Omega)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(y_{k+1}-y_k) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k-y_{k-1}) = \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. Szemléltessük a Stokes-tételt az

$$f(r) := (-y^3, x^3, -z^3) \qquad (r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$$

vektormező, ill. a

$$\varphi(t) := (\cos(t), \sin(t), 1-\sin(t)-\cos(t)) \qquad (t\in[0,2\pi])$$

út felhasználásával!

Útm. Mivel

$$\dot\varphi(t) = -\sin(t)\mathrm{i}+\cos(t)\mathrm{j}+(-\cos(t)+\sin(t))\mathrm{k} \qquad (t\in[0,2\pi]),$$

ezért az $\int_\varphi f$ vonalintegrál a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\,dt &= \int_0^{2\pi}\Big\{\sin^4(t)+\cos^4(t)-(1-\sin(t)-\cos(t))^3\cdot \\
&\qquad \cdot(-\cos(t)+\sin(t))\Big\}\,dt = \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{(1-\cos^2(t))^2+\cos^4(t)\right\}\,dt - \\
&\qquad -\left[\frac{(1-\sin(t)-\cos(t))^4}{4}\right]_0^{2\pi} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left\{2\cos^4(t) - 2\cos^2(t) + 1\right\}\,dt + 0 = \\
&= 2\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\,dt - \int_0^{2\pi} (1+\cos(2t))\,dt + 2\pi = \\
&= 2\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\,dt - 2\pi - 0 + 2\pi = \ldots = \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

A Stokes-tétel felhasználásával

$$\int_{\varphi} f = \int_{\Psi} \langle \operatorname{rot} f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle,$$

ahol

$$\Psi(u,v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j + (1 - u\cos(v) - u\sin(v))k \qquad ((u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]),$$

$$n_{\Psi}(u,v) = ui + uj + uk \qquad ((u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi])$$

(vö. 5. beadható feladatsor 3/(a). feladat útmutatúja). Mivel

$$\operatorname{rot} f(r) = 3(x^2+y^2)k \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

$$
\begin{aligned}
\int_{\Psi} \langle \operatorname{rot} f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} 3u^3\,d(u,v) = 3\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 u^3\,du\right) dv = \\
&= 6\pi \left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{3\pi}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

6. Szemléltessük a Gauß-, ill. a Stokes-tételt az

$$f(r) := (3x - y, zx^2 - y, 2xy + z) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező és az

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le 1,\; 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

ponthalmaz felhasználásával!

Útm. Mivel
$$\partial\Omega = \mathcal{R}_{\Phi_A\cup\Phi_P},$$
ezért
$$\int\limits_{\Phi_A\cup\Phi_P} f = \int\limits_{\Phi_A} f + \int\limits_{\Phi_P} f,$$
ahol
$$\Phi_A(u,v) := (u\cos(v), u\sin(v), 0)\,, \qquad \Phi_P(u,v) := (u\cos(v), u\sin(v), 1-u)$$
$$((u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi])\,.$$
Mivel tetszőleges $(u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]$ esetén
$$\partial_1\Phi_A(u,v)\times\partial_2\Phi_A(u,v) = (0,0,u),$$
ill.
$$\partial_1\Phi_P(u,v)\times\partial_2\Phi_P(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u)$$
és
$$(f\circ\Phi_A)(u,v) = \big(3u\cos(v) - u\sin(v), -u\sin(v), 2u^2\cos(v)\sin(v)\big)\,,$$
ill. $(f\circ\Phi_P)(u,v) =$
$$= \big(3u\cos(v) - u\sin(v), (1-u)u^2\cos^2(v) - u\sin(v), 2u^2\cos(v)\sin(v) + 1 - u\big)\,,$$
ezért
$$\langle f\circ\Phi_A, \partial_1\Phi_A\times\partial_2\Phi_A\rangle(u,v) = u^3\sin(2v),$$
ill.
$$\begin{aligned}
&\langle f\circ\Phi_P, \partial_1\Phi_P\times\partial_2\Phi_P\rangle(u,v) = \\
= \;& 3u^2\cos^2(v) - u^2\sin(v)\cos(v) + (1-u)u^3\cos(v)\sin(v) - u^2\sin^2(v) + \\
& + u^3\sin(2v) + u - u^2 = \\
= \;& 2u^2\cos^2(v) + u^2\cos(2v) + \left(\frac{3u^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\sin(2v) + u - u^2 = \\
= \;& u^2 + u^2\cos(2v) + u^2\cos(2v) + \left(\frac{3u^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\sin(2v) + u - u^2 = \\
= \;& 2u^2\cos(2v) + \left(\frac{3u^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\sin(2v) + u.
\end{aligned}$$

Így a felületi integrál (kifelé mutató normálisok mellett) a következő:

$$\int\limits_{\Phi_A\cup\Phi_P} f = \int\limits_{\Phi_A} f + \int\limits_{\Phi_P} f = -\int_0^1\int_0^{2\pi} u^3\sin(2v)\,dv\,du + \int\limits_{\Phi_P} f =$$

$$= \int_0^1 \left(u^3\int_0^{2\pi}\sin(2v)\,dv\right)\,du + \int\limits_{\Phi_P} f = 0 + \int\limits_{\Phi_P} f =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(2u^2\cos(2v) + \left(\frac{3u^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\sin(2v) + u\right)\,dv\,du =$$

$$= \int_0^1\left(2u^2\int_0^{2\pi}\cos(2v)\,dv + \left(\frac{3u^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\int_0^{2\pi}\sin(2v)\,dv + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} u\,dv\right)\,du =$$

$$= \int_0^1 (0 + 0 + 2\pi u)\,du = \pi.$$

A Gauß-tétel felhasználásával:

$$\int\limits_{\Phi} f = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} f = \int\limits_{\Omega} 3.$$

Mivel

$$\Omega = \left\{(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta), z) \in \mathbb{R}^3 :\ r \in [0,1], \vartheta \in [0,2\pi], z \in [0,1-r]\right\},$$

ezért

$$\int_\Omega 3 = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r} 3r\,dz\right)dr\right)d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 [3rz]_{z=0}^{z=1-r}\,dr = 6\pi\int_0^1 (r-r^2)\,dr = 6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi.$$

Világos, hogy ha

$$\varphi(t) := \cos(t)i + \sin(t)j + 0k \qquad (t \in [0,2\pi]),$$

akkor

$$\int_\varphi f = \int_0^{2\pi}\langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\langle(3\cos(t)-\sin(t), -\sin(t), \sin(2t)), (-\sin(t), \cos(t), 0)\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\{-3\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) - \sin(t)\cos(t)\}\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt = \pi.$$

Mivel

$$\operatorname{rot} f(r) = (2x - x^2)i - 2yj + (2xz+1)k \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

$$\int_{\Phi_A} \operatorname{rot} f = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]}\langle \operatorname{rot} f \circ \Phi_A, n_{\Phi_A}\rangle = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} u\,d(u,v) =$$

$$= \left(\int_0^1 u\,du\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,dv\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi,$$

ill.

$$
\begin{aligned}
\int_{\Phi_P} \operatorname{rot} f &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \langle \operatorname{rot} f \circ \Phi_P, n_{\Phi_P}\rangle = \\
&= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \{2u^2\cos(2v) + (2u^2-2u^3)\cos(v) - u^3\cos^3(v) + u\}\, d(u,v) = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(2u^2\cos(2v) + (2u^2-2u^3)\cos(v) - u^3\cos^3(v) + u\right) dv\right) du = \\
&= \int_0^1 \left(0 + \int_0^{2\pi} \left(u - u^3\cos^3(v)\right) dv\right) du = \int_0^1 \left(2\pi u - u^3\int_0^{2\pi}\cos^3(v)dv\right) du = \\
&= \int_0^1 2\pi u du - \int_0^1 \left(u^3\int_0^{2\pi}(1-\sin^2(v))\cos(v)dv\right) du = \\
&= \pi - \int_0^1 \left(u^3\int_0^{2\pi}\cos(v)dv - u^3\int_0^{2\pi}\sin^2(v)\cos(v)\right) du = \\
&= \pi - \int_0^1 \left(0 - u^3\left[\frac{\sin^3(v)}{3}\right]_0^{2\pi}\right) du = \pi - 0 = \pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7. A Gauß-tétel alapján bizonyítsuk be, hogy egy

$$f : [0,1]\times[0,1] \to (0,+\infty)$$

folytonosan differenciálható függvény grafikonja alatti térrész térfogata az

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f$$

valós szám!

Útm. Legyen

$$\Omega := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x,y\in[0,1],\ 0\le z\le f(x,y)\right\}$$

és

$$g(x,y,z) := (0,0,z) \quad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right).$$

Ekkor a Gauß-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1 = \int_{\Omega} \operatorname{div} g = \int_{\partial\Omega} g.$$

Mivel

$$\partial\Omega = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5 \cup \mathcal{F}_6,$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \mathcal{R}_{\Psi_1}, \quad \Psi_1(u,v) := (u,v,0) \quad ((u,v) \in [0,1] \times [0,1]),\\
\mathcal{F}_2 &= \mathcal{R}_{\Psi_2}, \quad \Psi_2(u,v) := (u,v,f(u,v)) \quad ((u,v) \in [0,1] \times [0,1]),\\
\mathcal{F}_3 &= \mathcal{R}_{\Psi_3}, \quad \Psi_3(u,v) := (u,0,f(u,0)) \quad (u \in [0,1]),\\
\mathcal{F}_4 &= \mathcal{R}_{\Psi_4}, \quad \Psi_4(u,v) := (u,1,f(u,1)) \quad (u \in [0,1]),\\
\mathcal{F}_5 &= \mathcal{R}_{\Psi_5}, \quad \Psi_5(u,v) := (0,v,f(0,v)) \quad (v \in [0,1]),\\
\mathcal{F}_6 &= \mathcal{R}_{\Psi_6}, \quad \Psi_6(u,v) := (1,v,f(1,v)) \quad (v \in [0,1])
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\partial_1\Psi_1(u,v) \times \partial_2\Psi_1(u,v) &= (-1,0,1) \quad ((u,v) \in [0,1] \times [0,1]),\\
\partial_1\Psi_2(u,v) \times \partial_2\Psi_2(u,v) &= (-\partial_1 f(u,v), -\partial_2 f(u,v),1) \quad ((u,v) \in [0,1] \times [0,1]),\\
\partial_1\Psi_3(u,v) \times \partial_2\Psi_3(u,v) &= (0,0,0) \quad (u \in [0,1]),\\
\partial_1\Psi_4(u,v) \times \partial_2\Psi_4(u,v) &= (0,0,0) \quad (u \in [0,1]),\\
\partial_1\Psi_5(u,v) \times \partial_2\Psi_5(u,v) &= (0,0,0) \quad (v \in [0,1]),\\
\partial_1\Psi_6(u,v) \times \partial_2\Psi_6(u,v) &= (0,0,0) \quad (v \in [0,1]).
\end{aligned}$$

ill.

$$(g \circ \Psi_1)(u,v) = (0,0,0), \quad (g \circ \Psi_2)(u,v) = (0,0,f(u,v)) \qquad ((u,v) \in [0,1] \times [0,1]),$$

továbbá

$$\langle g \circ \Psi_1, \partial_1\Psi_1 \times \partial_2\Psi_1 \rangle = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle g \circ \Psi_2, \partial_1\Psi_2 \times \partial_2\Psi_2 \rangle = f,$$

ezért

$$\int\limits_{\partial\Omega} g = -\int\limits_{\mathcal{F}_1} g + \int\limits_{\mathcal{F}_2} g + 0 + 0 + 0 + 0 = -\int\limits_{[0,1]^2} 0 + \int\limits_{[0,1]^2} f = \int\limits_{[0,1]^2} f. \quad \blacksquare$$

1.7. 7. gyakorlat

1.7.1. A gyakorlat anyaga

HÁZI FELADAT. Az **F** Függelék ismeretanyaga.

Definíció. Adott $\mathcal{H}$ halmaz és $\mathcal{H}$-beli (A_n) halmazsorozat $/A_n \subset \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})/$

1. **limesz inferiorja** a

$$\liminf(A_n) := \{x \in \mathcal{H} : \ |\{n \in \mathbb{N} : \ x \notin A_n\}| < \infty\}$$

halmaz;

2. **limesz szuperiorja** a

$$\limsup(A_n) := \{x \in \mathcal{H} : \ |\{n \in \mathbb{N} : \ x \in A_n\}| = \infty\}$$

halmaz. $\diamondsuit$

Az (A_n) halmazsorozat

- limesz inferiorja tehát olyan $\mathcal{H}$-beli elemek halmaza, amelyek véges sok kivétellel a halmazsorozat mindegyik tagjához hozzátartoznak;
- limesz szuperiorja pedig olyan $\mathcal{H}$-beli elemek halmaza, amelyek a halmazsorozat végtelen sok tagjához tartoznak hozzá.

Példa. A $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ halmaz és

$$A_n := (-\infty, (-1)^n/n)\,, \qquad \text{ill.} \qquad B_n := (n, +\infty) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

halmazsorozatok esetén

$$\liminf(A_n) = (-\infty,0), \qquad \limsup(A_n) = (-\infty,0],$$

ill.

$$\liminf(B_n) = \emptyset = \limsup(B_n). \quad \diamondsuit$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{H}$-beli (A_n) halmazsorozat

- **monoton bővülő** vagy **izoton** ($(A_n) \prec$), ha

$$A_n \subset A_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

- **monoton szűkülő** vagy **antiton** ($(A_n) \succ$), ha

$$A_n \supset A_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

- **konvergens**, ha $\liminf(A_n) = \limsup(A_n)$. Ebben az esetben a

$$\lim(A_n) := \liminf(A_n) = \limsup(A_n)$$

jelölést használjuk és az

$$A := \lim(A_n)$$

halmazt az (A_n) halmazsorozat **határhalmaz**ának nevezzük. $\Diamond$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy

1. $(A_n) \prec \quad \Longleftrightarrow \quad (A_n^c) \succ$;
2. $(\limsup(A_n))^c = \liminf(A_n^c)$, és így $(\lim(A_n))^c = \lim(A_n^c)$;
3. $\lim(A_n) = \emptyset$ pontosan akkor igaz, ha minden $\mathcal{H}$-beli x-hez csak véges sok olyan n index van, amelyre $x \in A_n$ /így pl. ha

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j),$$

akkor $\lim(A_n) = \emptyset$/.

4. Ha $(A_n) \prec$, ill. $(A_n) \succ$, akkor

$$\exists \lim(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \qquad \text{ill.} \qquad \exists \lim(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

(vö. 5. beadható feladat). $\square$

Emlékeztető. Adott X halmaz, ill. $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy Ω (X-beli) **szigma-algebra** (**σ-algebra**), ha teljesülnek a következő feltételek:

i) $X \in \Omega$;

ii) $A \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \Omega$;

iii) $A_n \in \Omega \;\; (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega.$

Megjegyzések.

1. $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ tehát pontosan akkor (X-beli) szigma-algebra, ha $X \in \Omega$, továbbá komplementerzárt és zárt a szigma-unióra.

2. A definícióból (és elemi halmazelméleti azonosságokból) rögtön adódik, hogy $\emptyset \in \Omega$, ui. $\emptyset = X^c$, továbbá

$$\mathcal{P}(X), \qquad \{\emptyset, X, A, A^c\} \quad (A \subset X), \qquad \{\emptyset, X\}$$

(X-beli) σ-algebrák.[7]

3. Ω elemeit **mérhető halmaz**oknak, az (X, Ω) rendezett párt pedig **mérhető tér**nek nevezzük.

4. Ha $\Omega_0 \subset \Omega$ és Ω_0 véges, akkor

$$B := \bigcup_{A\in\Omega_0} A \in \Omega$$

ui. $\emptyset \in \Omega$ és

$$B = \left(\bigcup_{A\in\Omega_0} A\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

megszámlálható egyesítés. $\square$

Feladat. Határozzuk meg az összes $X := \{1,2,3\}$-beli σ-algebrát!
Útm. Az ismert

$$\Omega_1 := \{\emptyset, X\}, \quad \text{ill.} \quad \Omega_2 := \mathcal{P}(X)$$

[7] Az utóbbit szokás **triviális σ-algebrának** nevezni.

σ-algebrákon felül még három további található:

$$\Omega_3 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}, \qquad \Omega_4 := \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,3\}\}, \qquad \Omega_5 := \{\emptyset, X, \{3\}, \{1,2\}\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha X legfeljebb megszámlálható halmaz, akkor $\Omega := \mathcal{P}(X)$ az egyetlen olyan (X-beli) szigma-algebra, amelyre teljesül az

$$\omega \in X \quad \Longrightarrow \quad \{\omega\} \in \Omega$$

implikáció!

Útm. Ha Ω olyan (X-beli) szigma-algebra, amelyre teljesül a fenti implikáció, akkor $\mathcal{P}(X) \subset \Omega$, ui. ha $A \in \mathcal{P}(X)$ és

- A végtelen, azaz van olyan $\omega_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat, hogy $A = \{\omega_n \in X : \; n \in \mathbb{N}\}$, akkor
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega_n\} \in \Omega;$$
- A véges, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $\omega_k \in X$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$), hogy
$$A = \{\omega_k \in X : \; k \in \{1, \ldots, n\}\},$$
akkor
$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \{\omega_k\} \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az Ω halmaz σ-algebra X-ben!

1. $\Omega := \left\{A \subset X \,\middle|\, A \text{ vagy } A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}\right\}$ /X kontinuum számosságú/;
2. $X := \mathbb{R}$, $\Omega := \left\{A \subset X \,\middle|\, A \subset [0,1] \text{ vagy } A^c \subset [0,1]\right\}$.

Útm.

1. Könnyen látható, hogy
   - $X \in \Omega$, ui. $X^c = \emptyset$ legfeljebb megszámlálható;
   - ha $A \in \Omega$, akkor A vagy A^c legfeljebb megszámlálható, így
   $$A^c \qquad \text{vagy} \qquad A = (A^c)^c$$
   is ilyen, tehát $A^c \in \Omega$;

- ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor két eset lehetséges:
  - minden $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n legfeljebb megszámlálható, ekkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ is legfeljebb megszámlálható, azaz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$ vagy
  - van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy A_N^c legfeljebb megszámlálható, ekkor

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \subset A_N^c, \qquad \text{azaz} \qquad \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \qquad \text{is}$$

legfeljebb megszámlálható, így $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$.

2. Három tulajdonság teljesülését kell ellenőrizni:

- $X \in \Omega$, ui. $\mathbb{R}^c = \emptyset \subset [0,1]$.
- Ha $A \in \Omega$, akkor két eset lehetséges:
  - ha $A \subset [0,1]$, akkor triviálisan teljesül, hogy $A^c \in \Omega$ /hiszen ekkor $(A^c)^c = A \subset [0,1]$/;
  - ha pedig $A \not\subset [0,1]$, azaz $A^c \subset [0,1]$, akkor $A^c \in \Omega$ automatikusan teljesül.
- ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor ismét két eset lehetséges:
  - minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset [0,1]$, így $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset [0,1]$, ahonnan $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$ következik, vagy
  - van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A_N \not\subset [0,1]$, azaz $A_N^c \subset [0,1]$, ekkor

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset [0,1], \quad \text{azaz} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy

1. ha Ω σ-algebra X-ben, $S \subset X$, akkor

$$\Omega_S := S \cap \Omega := \{S \cap A \subset X : \ A \in \Omega\}$$

σ-algebra S-ben[8];

[8] Ω **nyom**a (**spur**ja) S-ben.

2. ha Y halmaz, Ω σ-algebra Y-ban és $f: X \to Y$, akkor

$$\widetilde{\Omega} := \left\{f^{-1}[A] \subset X : \; A \in \Omega\right\}$$

σ-algebra X-ben;

3. ha Ω σ-algebra X-ben és $f: X \to Y$, akkor

$$\Omega' := \left\{A \subset Y : \; f^{-1}[A] \in \Omega\right\}$$

σ-algebra Y-ban;

4. ha Ω σ-algebra X-ben és $f: X \to Y$, akkor

$$\Omega^* := \{f[A] \subset Y : \; A \in \Omega\}$$

nem feltétlenül σ-algebra Y-ban!

Útm.

1. Ha Ω tetszőleges X-beli σ-algebra, akkor

   - $X \in \Omega$, így $S = S \cap X$ következtében $S \in \Omega_S$;
   - tetszőleges $A \in \Omega$ esetén $A^c \in \Omega$, ezért $S \cap A^c \in \Omega_S$, így ha $B \in \Omega_S$, akkor alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal

     $$B = S \cap A, \qquad \text{továbbá} \qquad B^c \in \Omega_S,$$

     hiszen

     $$S \cap A^c = S \backslash (S \cap A) = S \backslash B;$$

   - $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Omega$, ezért

     $$S \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \in \Omega_S,$$

     így ha $B_n \in \Omega_S$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor alkalmas $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozattal

     $$B_n = S \cap A_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{továbbá} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \Omega_S,$$

     hiszen

     $$S \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S \cap A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

2. Világos, hogy

- $X \in \widetilde{\Omega}$, hiszen $Y \in \Omega$ (Ω σ-algebra Y-ban) és $X = f^{-1}[Y]$;
- tetszőleges $A \in \Omega$ esetén $A^c \in \Omega$ (Ω σ-algebra Y-ban), ezért $f^{-1}[A^c] \in \widetilde{\Omega}$, így ha $B \in \widetilde{\Omega}$, akkor alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal $B = f^{-1}[A]$, továbbá $B^c \in \widetilde{\Omega}$, hiszen

$$f^{-1}[A^c] = f^{-1}[Y \backslash A] = f^{-1}[Y] \backslash f^{-1}[A] = X \backslash f^{-1}[A] = B^c;$$

- tetszőleges $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$ (Ω σ-algebra Y-ban), ezért

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \in \widetilde{\Omega},$$

így ha $B_n \in \widetilde{\Omega}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor alkalmas $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozattal

$$B_n = f^{-1}[A_n] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \widetilde{\Omega}$, hiszen

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

3. Világos, hogy

- $Y \in \Omega'$, ui. $f^{-1}[Y] = X \in \Omega$;
- tetszőleges $A \in \Omega'$ esetén $A^c \in \Omega'$, hiszen Ω szigma-algebra X-ben, így

$$f^{-1}[A^c] = \left(f^{-1}[A]\right)^c \in \Omega;$$

- tetszőleges $A_n \in \Omega'$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega'$, hiszen Ω szigma-algebra X-ben, $f^{-1}[A_n] \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, így

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n] \in \Omega.$$

4. Ha f nem szürjektív, akkor

$$Y \notin \{f[A] \subset Y : A \in \Omega\}. \quad \blacksquare$$

Definíció (algebra). Adott X halmaz, ill. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ (X-beli) **algebra**, ha

$$\text{i) } X \in \mathcal{A}, \qquad \text{ii) } A, B \in \mathcal{A} \implies A \backslash B \in \mathcal{A}, \qquad \text{iii) } A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}. \quad \Diamond$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset X \middle| A \text{ vagy } A^c \text{ véges} \right\}$$

X-beli algebra és pontosan akkor σ-algebra, ha X véges!
Útm.

1. $\mathcal{A}$ algebra, ui.
   - $X^c = \emptyset$ véges, így $X \in \mathcal{A}$.
   - $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \backslash B \in \mathcal{A}$, hiszen ha
     - A, B véges, akkor $A \backslash B$ is véges, így $A \backslash B \in \mathcal{A}$;
     - A és B^c véges, akkor $A \backslash B$ véges, tehát $A \backslash B \in \mathcal{A}$;
     - A^c és B véges, akkor mivel $(A \backslash B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$ véges, ezért $A \backslash B \in \mathcal{A}$;
     - A^c és B^c véges, akkor $A \backslash B = A \cap B^c$ véges, így $A \backslash B \in \mathcal{A}$.
   - $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{A}$, hiszen ha
     - A, B véges, akkor $A \cup B$ is véges, így $A \cup B \in \mathcal{A}$;
     - A és B^c véges, akkor $(A \cup B)^c \subset B^c$, tehát $(A \cup B)^c$ véges, így $A \cup B \in \mathcal{A}$;
     - A^c és B véges, akkor $(A \cup B)^c \subset A^c$, ezért $(A \cup B)^c$ véges, tehát $A \cup B \in \mathcal{A}$;
     - A^c és $X \backslash B$ véges, ekkor az előző két pontban leírt gondolatmenet alapján $A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ pontosan akkor σ-algebra, ha X véges, ui. ha
   - X véges, akkor $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ és $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra.
   - X nem véges, akkor van olyan injektív $x : \mathbb{N} \to X$ sorozat, hogy $\{x_n\} \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$), azonban

     $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{2n}\} \notin \mathcal{A},$$

     így $\mathcal{A}$ nem σ-algebra. $\blacksquare$

1.7.2. $\boxed{\text{Beadható/gyakorló feladatok}}$

1. Adott $\mathcal{H}$ halmaz, $A, B, C \subset \mathcal{H}$ részhalmazai esetén mutassuk meg, hogy fennállnak az alábbi azonosságok![9]

   (a) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$, $A \bigtriangleup B = A^c \bigtriangleup B^c$;

   (b) $A \bigtriangleup \emptyset = A$, $A \bigtriangleup A = \emptyset$;

   (c) $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, ill. $A \cap B = (A \cup B) \backslash (A \bigtriangleup B)$;

   (d) $(A \bigtriangleup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$;

   (e) $A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$.

   Útm.

   (a) Világos, hogy

   - $A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (B \backslash A) \cup (A \backslash B) = B \bigtriangleup A$;
   - továbbá

   $$\begin{aligned} A^c \bigtriangleup B^c &= (A^c \backslash B^c) \cup (B^c \backslash A^c) = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) = \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = (B \backslash A) \cup (A \backslash B =) = B \bigtriangleup A = A \bigtriangleup B. \end{aligned}$$

   (b)
   - $A \bigtriangleup \emptyset = (A \backslash \emptyset) \cup (\emptyset \backslash A) = A \cup \emptyset = A$,
   - $A \bigtriangleup A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

   (c) A De-Morgan-azonosságok felhasználásával azt kapjuk, hogy

   $$\begin{aligned} (A \cup B) \backslash (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \\ &= ((A \cup B) \cap A^c) \cup ((A \cup B) \cap B^c) = \\ &= (A \cap A^c) \cup (B \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = \\ &= \emptyset \cup (B \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup \emptyset = B \bigtriangleup A = A \bigtriangleup B, \end{aligned}$$

[9] Az A és a B halmazok $A \bigtriangleup B$ **szimmetrikus differenciáját** az alábbi módon értelmezzük:

$$A \bigtriangleup B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

ill.

$$\begin{aligned}
(A \cup B)\setminus(A \vartriangle B) &= (A \cup B)\setminus((A \cup B)\setminus(B \cap A)) = \\
&= (A \cup B)\setminus((A \cup B) \cap (B \cap A)^c) = \\
&= (A \cup B) \cap ((A \cup B) \cap (B \cap A)^c)^c = \\
&= (A \cup B) \cap ((A \cup B)^c \cup (B \cap A)) = \\
&= ((A \cup B) \cap (A \cup B)^c) \cup ((A \cup B) \cap (A \cap B)) = \\
&= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.
\end{aligned}$$

(d) A De-Morgan-azonosságok felhasználásával világos, hogy

$$\begin{aligned}
(A \vartriangle B)^c &= ((A \cup B)\setminus(A \cap B))^c = \\
&= ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)^c = ((A \cup B)^c \cup (A \cap B)) = \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c).
\end{aligned}$$

(e) A fentiek következtében

$$\begin{aligned}
(B \vartriangle C)\setminus A &= ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)) \cap A^c = (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C \cap A^c) = \\
&= (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C),
\end{aligned}$$

ill.

$$A\setminus(B \vartriangle C) = A \cap ((B \cap C) \cup (B^c \cap C^c))^c = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c),$$

így

$$A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

Mivel a fenti egyenlőség jobb oldala A, B, ill. C-t illetően szimmetrikus: e három halmaz tetszőleges sorrendjére nem változik, ezért

$$A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$$

következik. ■

2. Bizonyítsuk be, hogy adott $n \in \mathbb{N}$ esetén tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ halmazokhoz vannak olyan $B_1, \ldots, B_n$ halmazok, hogy igazak az alábbi állítások (**diszjunktizációs lemma)**)!

   - $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}: \ i \neq j)$;
   - $B_k \subset A_k$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$;
   - $\biguplus_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

   Útm. Ha
   $$B_1 := A_1, \qquad B_k := A_k \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} A_l\right) \qquad (k \in \{2, \ldots, n\}),$$
   akkor az első két, ill. $n = 1$ esetén a harmadik tulajdonság triviálisan teljesül, továbbá ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
   $$\biguplus_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{és} \qquad B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n} A_l\right),$$
   akkor
   $$\begin{aligned}\biguplus_{k=1}^{n+1} B_k &= \left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) \uplus B_{n+1} = \left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) \uplus \left(A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n} A_l\right)\right) = \\ &= \left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) \uplus \left(A_{n+1} \setminus \left(\biguplus_{l=1}^{n} B_l\right)\right) = \left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) \uplus A_{n+1} = \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \uplus A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3. Határozzuk meg a
   $$\liminf(A_n), \qquad \limsup(A_n)$$
   halmazokat!

   (a) $\mathcal{H} := [0,1)$ és
   $$A_1 := [0,1), \ A_2 := \left[0, \frac{1}{2}\right), \ A_3 := \left[\frac{1}{2}, 1\right), \ A_4 := \left[0, \frac{1}{3}\right), \ A_5 := \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \ldots;$$

(b) $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ és

$$A_n := \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{n}\right] & (n = 2k+1)\ (k \in \mathbb{N}_0), \\ & \\ [0, n] & (n = 2l)\ (l \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

(c) $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ és

$$A_n := \begin{cases} \left[-2 - \dfrac{1}{n}, 1\right) & (n = 2k+1)\ (k \in \mathbb{N}_0), \\ & \\ \left[-1, 2 + \dfrac{1}{n}\right) & (n = 2l)\ (l \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{H}$ halmaz és (A_n) $\mathcal{H}$-beli halmazsorozat, akkor

$$\boxed{\liminf(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{\limsup(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}$$

és

$$\boxed{\liminf(A_n) \subset \limsup(A_n)}$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy

(a) $x \in \liminf(A_n)$ pontosan akkor teljesül, ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in A_m \quad (N \leq m \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad x \in \bigcap_{N \leq m \in \mathbb{N}} A_m,$$

innen pedig

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

következik. Ha pedig

$$y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén $y \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, ahonnan

$$y \in A_m \qquad (n \leq m \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad y \in \liminf(A_n)$$

következik.

(b) Az iménti állítás és a De-Morgan-azonosságok következtében

$$\begin{aligned}(\limsup(A_n))^c &= (\{x \in \mathcal{H}: |\{n \in \mathbb{N}: x \in A_n\}| = \infty\})^c = \\ &= \{x \in \mathcal{H}: |\{n \in \mathbb{N}: x \notin A_n^c\}| < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c = \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)^c.\end{aligned}$$

(c) Ha ui. $x \in \liminf(A_n)$, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \bigcap\limits_{m=N}^{\infty} A_m$, azaz tetszőleges $N \leq m \in \mathbb{N}$ esetén $x \in A_m$. Ennélfogva bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, ahonnan

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} = \limsup(A_n)$$

következik. ■

5. Igazoljuk, hogy ha $(A_n) \prec$, ill. $(A_n) \succ$, akkor fennáll a

$$\lim(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{ill. a} \qquad \lim(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

egyenlőség!

Útm.

(a) $(A_n) \prec$ esetén

- $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, így

$$\liminf(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =: A,$$

és

- $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, így

$$\limsup(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A = A,$$

ill.

(b) $(A_n) \succ$ esetén $(A_n^c) \prec$, így

$$(\lim(A_n))^c = \lim(A_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c. \quad \blacksquare$$

6. Legyen $\mathcal{H} := \mathbb{N}$. Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e az (A_n) halmazsorozat!

   (a) $A_n := \{k \in \mathbb{N} : \; n|k\}$ $(n \in \mathbb{N})$;

   (b) $A_n := \{k \in \mathbb{N} : \; k|n, k \text{ prím}\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

   Útm.

   (a) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n az n többszöröseinek halmaza. Így, ha $\mathbb{N} \ni m < n$, akkor $m \notin A_n$. Ennélfogva

   $$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad \liminf(A_n) = \emptyset.$$

   Ha valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $m \in \limsup(A_n)$, akkor

   $$m \in \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k,$$

   ami nem lehetséges. Így $\limsup(A_n) = \emptyset$, ahonnan (A_n) konvergenciája, ill. $\lim(A_n) = \emptyset$ következik.

   (b) Ha $p \in \mathbb{N}$ prím, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $p \in A_{np}$. Ezért $\limsup(A_n)$ nem más, mint a (pozitív) prímek halmaza. Másrészt, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $p \notin A_{pn+1}$, ezért

   $$p \notin \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

   Így a $\liminf(A_n)$ halmaz nem tartalmaz prímszámot, azaz $\liminf(A_n) = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy (A_n) nem konvergens. $\blacksquare$

7. Legyen

   $$A := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \; f(0) = f(1)\}, \qquad B := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \; f(0) \neq f(1)\},$$

   ill. $\Omega := \{\emptyset, A, B, \mathfrak{C}[0,1]\}$. Igazoljuk, hogy Ω szigma-algebra $\mathfrak{C}[0,1]$-ben!
   Útm.

- Ω definíciójából látható, hogy $\mathfrak{C}[0,1] \in \Omega$.
- Ha $H \in \Omega$, akkor
  - $H = \emptyset$ esetén $H^c = \mathfrak{C}[0,1] \in \Omega$;
  - $H = A$ esetén $H^c = B \in \Omega$;
  - $H = B$ esetén $H^c = A \in \Omega$;
  - $H = \mathfrak{C}[0,1]$ esetén $H^c = \emptyset \in \Omega$.
- Ha $H_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \Omega$, hiszen Ω véges és bármely $K, L \in \Omega$ esetén $K \cup L \in \Omega$, ui.

$$\emptyset \cup K = K \in \Omega \quad (K \in \Omega), \qquad \mathfrak{C}[0,1] \cup K = \mathfrak{C}[0,1] \in \Omega \quad (K \in \Omega),$$

és

$$A \cup B = \mathfrak{C}[0,1] \in \Omega. \quad \blacksquare$$

8. Igazoljuk, hogy ha Ω ($\mathcal{X}$-beli) szigma-algebra, akkor

(a) minden $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega;$$

(b) bármely $A_1, ..., A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Omega;$$

(c) tetszőleges $A, B \in \Omega$ esetén $A \backslash B \in \Omega$ teljesül!

Útm. Ha Ω ($\mathcal{X}$-beli) szigma-algebra, akkor

(a) $A_n \in \Omega \implies A_n^c \in \Omega \quad (n \in \mathbb{N})$, így $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \Omega$; mivel

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \Omega$$

(vö. De-Morgan-azonosságok), ezért

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c\right)^c \in \Omega.$$

(b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_i$, ahol

$$\widetilde{A}_i := \begin{cases} A_i & (i \in \{1, ..., n\}), \\ \\ \emptyset \textbf{ vagy } A_n & (i > n) \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

így

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Omega;$$

hasonlóan

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i,$$

ahol

$$\widetilde{A}_i := \begin{cases} A_i & (i \in \{1, ..., n\}), \\ \\ A_n \textbf{ vagy } \Omega & (i > n) \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

így $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$.

(c) Ha $A, B \in \Omega$, akkor $A, B^c \in \Omega$; mivel $A \backslash B = A \cap B^c \in \Omega$, ezért $A \backslash B \in \Omega$. ■

9. Legyen Ω σ-algebra X-ben, $f : X \to Y$, továbbá

$$\Omega^* := \{f[A] \subset Y : \; A \in \Omega\}.$$

Igazoljuk, hogy ha f bijektív, akkorr Ω^* szigma-algebra Y-ban!
Útm.

1. lépés. f pontosan akkor szürjektív, ha $Y = f[X]$, így mivel Ω szigma-algebra X-ben, $X \in \Omega$, ahonnan $Y \in \Omega^*$ következik.

2. lépés. Mivel Ω szigma-algebra, ezért tetszőleges $A \in \Omega$ esetén $A^c \in \Omega$, ennélfogva $f[A^c] \in \Omega^*$. Ha $B \in \Omega^*$, akkor alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal $B = f[A]$, továbbá $B^c \in \Omega^*$, hiszen f pontosan akkor bijektív, ha

$$f[A^c] = f[Y \backslash A] = Y \backslash f[A] = Y \backslash B = B^c.$$

3. lépés. Mivel Ω szigma-algebra Y-ban, ezért tetszőleges $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$, innen

$$f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \in \Omega^*,$$

így ha $B_n \in \Omega^*$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor alkalmas $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozattal $B_n = f[A_n]$, továbbá $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \Omega^*$, hiszen

$$f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[A_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n. \quad \blacksquare$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, Ω_γ (X-beli) σ-algebra $(\gamma \in \Gamma)$, akkor

(a) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$ σ-algebra X-ben;

(b) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$ nem feltétlenül σ-algebra!

Útm. Ha Ω_γ X-beli σ-algebra $(\gamma \in \Gamma)$, akkor

(a) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$ σ-algebra, ui.

- $X \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$, mivel minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X \in \Omega_\gamma$;
- ha $A \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$, akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A \in \Omega_\gamma$, így

  $$A^c \in \Omega_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  tehát

  $$A^c \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma;$$

- ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

  $$A_n \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma,$$

  akkor

  $$A_n \in \Omega_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

azaz
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma), \qquad \text{így} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma.$$

(b) pl. $\Gamma := \{1,2\}$, $A, B \subset X$: $A \cap B \notin \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\}$ és
$$\Omega_1 := \{\emptyset, X, A, A^c\} \qquad \text{ill.} \qquad \Omega_2 := \{\emptyset, X, B, B^c\}$$
esetén Ω_1 és Ω_2 σ-algebra (vö. a σ-algebra definícióját követő 2. Megjegyzés), de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ nem σ-algebra, mivel
$$A \cap B \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$$
(ez az eset áll fenn, ha pl. $X := \{1,2,3\}$, $A := \{1,2\}$, $B := \{2,3\}$). ■

11. Mutassuk meg, hogy ha $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra, akkor Ω vagy véges vagy nem megszámlálható.
Útm. Ha Ω megszámlálható(an végtelen), akkor tetszőleges $x \in X$ esetén az
$$A_x := \bigcap \{B \in \Omega : \ x \in B\} \neq \emptyset^{10}$$
halmazról a következő mondható el:

(a) $A_x \in \Omega$ $(x \in X)$;

(b) minden $x \in X$ esetén $x \in A_x$ és ha $x, y \in X$, akkor
$$A_x = A_y \quad \text{vagy} \quad A_x \cap A_y = \emptyset,$$
ui.

α) ha $A_x \neq A_y$, akkor $x \notin A_y$ vagy $y \notin A_x$, mivel $x \in A_y$ esetén $A_x \subset A_y$, ill. $y \in A_x$ esetén $A_y \subset A_x$ (tetszőleges $z \in X$ esetén A_z a z-t tartalmazó legszűkebb Ω-beli halmaz),

β) ha pl. $x \notin A_y$, akkor hasonlóan $A_x \backslash A_y = A_x$, azaz $A_y \cap A_x = \emptyset$;

(c) ha $A \in \Omega$, akkor $\bigcup_{x\in A} A_x = A$, ui.

α) $\bigcup_{x\in A} A_x \supset A$, hiszen tetszőleges $x \in A$ esetén $x \in A_x$,

[10] ui. $X \in \Omega$.

β) $\bigcup\limits_{x\in A} A_x \subset A$, hiszen tetszőleges $x \in A$ esetén $A_x \subset A$ (A_x az x-et tartalmazó legszűkebb Ω-beli halmaz).

Mivel a feltételezés szerint Ω végtelen, ezért az a), b), ill. c) tulajdonságok miatt létezik legalább megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt A_x halmaz (alkalmas $x \in X$ elemekkel). Tehát a

$$\varphi : \mathcal{P}\left(\{A_x \in \Omega : \; x \in X\}\right) \to \Omega, \qquad \varphi(\mathcal{H}) := \cup\mathcal{H}$$

leképezés injektív, így

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}\left(\{A_x \in \Omega : \; x \in X\}\right)| \leq |\Omega|. \qquad \blacksquare$$

12. Lássuk be, hogy ha valamely X_i halmaz esetén Ω_i σ-algebra X_i-ben ($i \in \{1,2\}$), akkor

$$\Omega_1 * \Omega_2 := \{A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2 : \; A_1 \in \Omega_1, \; A_2 \in \Omega_2\}$$

nem feltétlenül σ-algebra $X_1 \times X_2$-ben!
Útm. Tudjuk, hogy ha $\emptyset \neq A_i \subsetneqq X_i$ ($i \in \{1,2\}$), akkor

$$\Omega_i := \{\emptyset, X_i, A_i, A_i^c\}$$

σ-algebra X_i-ben ($i \in \{1,2\}$), $A_1 \times A_2 \in \Omega_1 * \Omega_2$ és $A_1^c \times A_2^c \in \Omega_1 * \Omega_2$, de előfordulhat, hogy

$$A_1 \times A_2 \cup A_1^c \times A_2^c \notin \Omega_1 * \Omega_2,$$

ui. pl. ha $X_1 := X_2 := [0,2]$, $A_1 := [0,1]$, $A_2 := (1,2]$, akkor

$$\Omega_1 = \{\emptyset, [0,2], [0,1], (1,2]\} = \Omega_2$$

és konkrétan felírva $\Omega_1 * \Omega_2$ elemeit látható, hogy

$$[0,1] \times (1,2] \cup (1,2] \times [0,1] \notin \Omega_1 * \Omega_2. \quad \blacksquare$$

1.8. $\boxed{\text{8. gyakorlat}}$

1.8.1. $\boxed{\text{A gyakorlat anyaga}}$

Emlékeztető. Adott X halmaz, ill. $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ (X-beli) **gyűrű**, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\text{i) } \mathcal{R} \neq \emptyset, \qquad \text{ii) } A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \backslash B \in \mathcal{R}, \qquad \text{iii) } A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}. \quad \Diamond$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\emptyset \in \mathcal{R}$, ui. tetszőleges $A \in \mathcal{R}$ esetén $\emptyset = A \backslash A \in \mathcal{R}$. $\square$

Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{R} := \left\{ A \subset X \middle| \, A \text{ véges} \right\}$$

X-beli gyűrű és pontosan akkor algebra, ha X véges!
Útm.

1. Világos, hogy $\mathcal{R} \neq \emptyset$, hiszen $\emptyset \in \mathcal{R}$. Ha $A, B \in \mathcal{R}$, akkor A is és B is véges, így $A \backslash B$ és $A \cup B$ is az, azaz $A \backslash B, A \cup B \in \mathcal{R}$.
2. Ha X véges, akkor $X \in \mathcal{R}$, azaz $\mathcal{R}$ algebra. Ha X nem véges, akkor $X \notin \mathcal{R}$, azaz $\mathcal{R}$ nem algebra. $\blacksquare$

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^d$-beli Jordan-mérhető halmazok szintén gyűrűt alkotnak ($\mathbb{R}^d$-ben). Viszont nem alkotnak σ-algebrát, hiszen $\mathbb{R}^d$ nem korlátos. $\square$

Házi feladat. Mutassuk meg, hogy (azonos alaphalmazhoz tartozó) gyűrűk metszete gyűrű (vö. beadható feladatsor)!

Definíció. Adott X halmaz, ill. $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ (X-beli) **félgyűrű**, ha teljesülnek a következő feltételek:
i) $\mathcal{H} \neq \emptyset$, ii) $A, B \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{H}$,

$$\text{iii) } A, B \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} : \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ i \neq j),$$

$$A \setminus B = \biguplus_{k=1}^{n} A_k.$$

Megjegyzések.

1. A félgyűrű tehát olyan $\mathcal{H}$ halmazrendszer, amely metszetzárt ($\cap$-stabil) és bármely két $\mathcal{H}$-beli halmaz különbsége előáll véges sok $\mathcal{H}$-beli halmaz diszjunkt uniójaként.

2. A definícióból (és elemi halmazelméleti azonosságokból) rögtön adódik, hogy

   (a) $\{\emptyset\}$ ill. $\mathcal{P}(X)$ fégyűrű X-ben;

   (b) $\emptyset \in \mathcal{H}$, hiszen $\mathcal{H} \neq \emptyset$, így, ha $C \in \mathcal{H}$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ halmazok esetek esetén $C \setminus C = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, azaz

   $$\emptyset \subset A_1 \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n = C \setminus C = \emptyset, \qquad \text{ill.} \qquad \emptyset = A_1 \in \mathcal{H}.$$

3. Világos, hogy minden gyűrű egyúttal félgyűrű is, továbbá tetszőleges $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer esetében igaz az alábbi „implikáció-lánc”:

   $$\mathcal{M} \text{ szigma-algebra} \implies \mathcal{M} \text{ algebra} \implies \mathcal{M} \text{ gyűrű} \implies \mathcal{M} \text{ félgyűrű.} \quad \square$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$X := \{1,2,3,4,5\},$$

akkor a

$$\mathcal{H} := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4,5\}\}$$

halmazrendszer X-beli félgyűrű!

Útm. Világos, hogy $\mathcal{H}$ metszetzárt, és tetszőleges két $\mathcal{H}$-beli elem különbsége $\mathcal{H}$-beli elemek diszjunkt uniója, pl.

$$X \setminus \{2,3\} = \{1\} \uplus \{4,5\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy félgyűrűk metszete nem feltétlenül lesz félgyűrű!

Útm. Ha pl. $X := \{1,2,3,4\}$ és

$$\mathcal{H}_1 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{H}_2 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}\},$$

akkor $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ félgyűrű X-ben, de

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$$

nem az. ■

Definíció. Adott X halmaz, ill. $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{L}$ (X-beli) **háló**, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\text{i) } \mathcal{L} \neq \emptyset, \qquad \text{ii) } A, B \in \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{L}, \qquad \text{iii) } A, B \in \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{L}. \quad \lozenge$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathcal{L} := \{(-\infty, a) \subset \mathbb{R} : \; a \in \mathbb{R}\}$$

halmazrendszer ($\mathbb{R}$-beli) háló!
Útm. Ha $A, B \in \mathcal{L}$, azaz alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $A = (-\infty, a)$, $B = (-\infty, b)$, akkor

$$A \cup B = (-\infty, a \vee b) \in \mathcal{L} \qquad \text{és} \qquad A \cap B = (-\infty, a \wedge b) \in \mathcal{L},$$

ahol

$$a \vee b := \max\{a, b\} \qquad \text{ill.} \qquad a \wedge b := \min\{a, b\}. \quad ■$$

Emlékeztető (mérték). Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény

1. **előmérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ gyűrű, μ additív és $\mu(\emptyset) = 0$;
2. **kvázimérték**, ha előmérték és σ-additív;
3. **mérték**, ha kvázimérték és $\mathcal{D}_\mu$ σ-algebra. $\lozenge$

Példák.

1. Ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $\omega \in X$: $\{\omega\} \in \mathcal{R}$ és

$$\delta_\omega : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \delta_\omega(A) := \begin{cases} 1 & (\omega \in A), \\ \\ 0 & (\omega \notin A), \end{cases}$$

akkor δ_ω kvázimérték[11], ui.

[11] ω-ra koncentrált Dirac-féle kvázimérték

- $\mathcal{R}_{\delta_\omega} = \{0,1\}$, így $\delta_\omega \geq 0$;
- $\delta_\omega(\emptyset) = 0$, hiszen $\omega \notin \emptyset$;
- ha $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$: $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j : i,j \in \mathbb{N})$ és $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, akkor két eset van:

  1. eset. $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists! N \in \mathbb{N}$: $\omega \in A_N$ $(\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{N\} : \omega \notin A_n)$, így

$$\delta_\omega\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = 1 + 0 = \delta_\omega(A_N) + \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\neq N} \delta_\omega(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_\omega(A_n);$$

  2. eset. $\omega \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $\omega \notin A_n$. Így $\delta_\omega\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \delta_\omega(A_n)$.

2. Ha X legalább kontinuum számosságú és

$$\Omega := \left\{A \in \mathcal{P}(X) \middle| A \text{ vagy } X\backslash A \text{ legfeljebb megszámlálható}\right\},$$

valamint

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ legfeljebb megszámlálható}), \\ \\ 1 & (X\backslash A \text{ legfeljebb megszámlálható}) \end{cases} \qquad (A \in \Omega),$$

akkor μ mérték, ui.

- Ω σ-algebra (lásd: 7. gyakorlat);
- $\mathcal{R}_\mu = \{0,1\}$, így $\mu \geq 0$;
- $\mu(\emptyset) = 0$, ui. $\emptyset$ legfeljebb megszámlálható;
- ha

$$A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j : i,j \in \mathbb{N})$$

  (tudjuk, hogy ekkor $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$), akkor két eset van[12]:

[12] Két diszjunkt X-beli halmaz közül legfeljebb csak az egyiknek lehet a komplementere legfeljebb megszámlálható (legyen ui. $A, B \subset X$ olyan, hogy $A \cap B = \emptyset$ és tegyük fel, hogy A^c és B^c legfeljebb megszámlálható, így

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \emptyset^c = X$$

is az, ami nem lehetséges).

1. eset. A_n legfeljebb megszámlálható ($n \in \mathbb{N}$), így $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ is az, ezért

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

2. eset. $\exists| N \in \mathbb{N}$: $X\backslash A_N$ legfeljebb megszámlálható $\Rightarrow$ $\mu(A_N) = 1$ és minden $n \in \mathbb{N}\backslash\{N\}$ esetén $\mu(A_n) = 0$, valamint $X\backslash \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset X\backslash A_N$, így

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 = 1{+}0 = 1{+}\sum_{n=1,n\neq N}^{\infty} 0 = \mu(A_N){+}\sum_{n=1,n\neq N}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. Ha X megszámlálható,

$$\mathcal{A} := \left\{A \in \mathcal{P}(X) \middle| A \text{ vagy } X\backslash A \text{ véges}\right\}$$

és

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ véges}), \\ & \\ +\infty & (X\backslash A \text{ véges}), \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

akkor μ olyan előmérték, amely nem kvázimérték, ui.

- $\mathcal{A}$ algebra, így gyűrű (lásd: korábban);
- $\mathcal{R}_\mu = \{0, +\infty\}$, így $\mu \geq 0$;
- $\mu(\emptyset) = 0$, ui. $\emptyset$ véges;
- ha $A, B \in \mathcal{A}$: $A \cap B = \emptyset$ (tudjuk, hogy ekkor $A \cup B \in \mathcal{A}$), akkor három eset van[13]:
  - A véges és B véges: ekkor $A \cup B$ véges valamint $\mu(A) = 0$ és $\mu(B) = 0$, tehát

    $$\mu(A \cup B) = 0 = 0 + 0 = \mu(A) + \mu(B);$$

  - A véges és $X\backslash B$ véges: ekkor $X\backslash(A \cup B)$ $/ \subset X\backslash B/$ véges valamint $\mu(A) = 0$ és $\mu(B) = +\infty$, tehát

    $$\mu(A \cup B) = +\infty = 0 + (+\infty) = \mu(A) + \mu(B).$$

[13] Két diszjunkt X-beli halmaz közül legfeljebb csak az egyiknek lehet a komplementere véges (legyen ui. $A, B \subset X$ olyan, hogy $A \cap B = \emptyset$ és tegyük fel, hogy A^c és B^c véges, így

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \emptyset^c = X$$

is az, ami nem lehetséges).

– $X\backslash A$ véges és B véges: ekkor $X\backslash(A\cup B)\,/\subset X\backslash A/$ véges valamint $\mu(A)=+\infty$ és $\mu(B)=0$, tehát

$$\mu\,(A\cup B)=+\infty=(+\infty)+0=\mu(A)+\mu(B);$$

- μ nem kvázimérték, ui. ha $X=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ahol (x_n) injektív sorozat, akkor

$$A_n:=\{x_n\}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

esetén $X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ úgy, hogy $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j: i,j\in\mathbb{N})$, de

$$\mu(X)=+\infty\neq 0=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n).$$

4. Ha az Ω halmazrendszer σ-algebra X-ben, akkor a

$$\mu(A):=\begin{cases}|A| & (A \text{ véges}),\\ \\ +\infty & (A \text{ nem véges})\end{cases}\qquad\qquad (A\in\Omega)$$

leképezés mérték,[14] ui.

- $\mu\geq 0$;
- $\mu(\emptyset)=0$, hiszen $|\emptyset|=0$;
- ha $A_n\in\Omega$ $(n\in\mathbb{N})$ oyan halmazsorozat, amelyre $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i,j\in\mathbb{N}:\ i\neq j)$ (mivel Ω szigma-algebra, ezért $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\Omega$), akkor

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=+\infty=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu\left(A_n\right).$$

Megjegyzés. Ha $X:=\mathbb{N}$, $\Omega:=\mathcal{P}(X)$, akkor

$$\mu(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_A(n)\qquad (A\in\Omega).\quad\blacksquare$$

Emlékeztető. Adott Ω X-beli σ-algebra, ill. $\mu:\Omega\to[0,+\infty]$ mérték esetén azt mondtuk, hogy az

1. (X,Ω) pár **mérhető tér**, ill. az (X,Ω,μ) hármas **mértéktér**;[15]
2. μ mérték, ill. a (X,Ω,μ) mértéktér **teljes**, ha minden $A\in\Omega_0$[16] esetén $\mathcal{P}(A)\subset\Omega_0$. $\lozenge$

[14] **számosságmérték**

[15] $\mu(X)=1$ esetén **valószínűségi mérték(tér)**ről vagy **Kolmogorov-mező**ről beszélünk.

[16] $\Omega_0:=\left\{A\in\Omega\middle|\mu(A)=0\right\}$: μ-nulla-mértékű halmazok rendszere

Megjegyzés. μ pontosan akkor teljes, ha minden $A \in \Omega_0$, $B \subset A$ esetén $B \in \Omega$, ui.

1. ha μ teljes, akkor minden $A \in \Omega_0$, $B \subset A$ esetén $B \in \Omega_0 \subset \Omega$.
2. ha minden $A \in \Omega_0$, $B \subset A$ esetén $B \in \Omega$, akkor $0 \le \mu(B) \le \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$ miatt $B \in \Omega_0$. $\square$

Példák. Világos, hogy ha X halmaz és

1. Ω (X-beli) szigma-algebra, akkor a
$$\mu(A) := 0 \qquad (A \in \Omega)$$
leképezés mérték.
2. $\emptyset \neq A \subset X$, $\Omega := \{\emptyset, X, A, A^c\}$, akkor
$$\mu(X) := \mu(A) := 1, \qquad \mu(A^c) := \mu(\emptyset) := 0$$
leképezés mérték. $\Diamond$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha (X, Ω) mérhető tér, $\omega \in X$, akkor $\{\omega\} \in \Omega$ esetén a
$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 0 & (\omega \notin A), \\ \\ 1 & (\omega \in A) \end{cases} \qquad (A \in \Omega)$$
mérték pontosan akkor teljes, ha
$$\Omega = \mathcal{P}(X)$$
teljesül!

Útm. Fentebb megmutattuk, hogy δ_ω mérték (**Dirac-mérték**), továbbá ha

- $\Omega = \mathcal{P}(X)$, akkor minden Ω-n értelmezett mérték triviálisan teljes.

- δ_ω teljes, azaz
$$\forall A \in \Omega_0,\ \forall B \subset A: \quad B \in \Omega,$$
akkor mivel Ω szigma-algebra, ezért
$$X\backslash\{\omega\} \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \mu_\omega\left(X\backslash\{\omega\}\right) = 0,$$
így a teljesség miatt $B \subset X\backslash\{\omega\}$ esetén $B \in \Omega$. Ha most $A \subset X$, akkor két eset lehetséges:
  - $A \subset X\backslash\{\omega\}$, akkor ismét a teljesség alapján $A \in \Omega$;
  - $\omega \in A$, ebben az esetben
$$A\backslash\{\omega\} \subset X\backslash\{\omega\} \quad \Longrightarrow \quad A\backslash\{\omega\} \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad A = (A\backslash\{\omega\}) \cup \{\omega\} \in \Omega,$$
azaz $\mathcal{P}(X) = \Omega$. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^d$ megszámlálható, akkor $A \in \Omega_d$, és mértékére
$$\mu_d(A) = 0$$
teljesül, ahol Ω_d jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli (Borel-)Lebesgue halmazok szigma-algebráját, μ_d pedig a (Borel-)Lebesgue-mértéket!

Útm. Legyen
$$\mathcal{C}_d := \left\{H \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d): \ H \text{ zárt}\right\},$$
ill.
$$\mathbb{I}_d := \left\{[a, b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d): \ a \leq b\right\}.$$
Ha A egyelemű, azaz alkalmas $a \in \mathbb{R}^d$ esetén $A = \{a\}$ teljesül, akkor A zárt, következésképpen (Borel-)Lebesgue-mérhető: $A \in \mathcal{C}_d \subset \Omega_d$. Mivel
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$
ahol
$$I_n := \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{I}_d \in \Omega_d \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért (vö. EA: kvázimérték ekvivalens tulajdonságai)

$$\mu_d(A) = \lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^d = 0.$$

Innen μ_d σ-additivitása következtében ugyanez minden legfeljebb megszámlálható $A \subset \mathbb{R}^d$ halmazra is adódik. ■

Megjegyzés. Ha $a, b \in \mathbb{R}^d$, akkor az

$$(a,b] := \left\{x \in \mathbb{R}^d:\ a < x \leq b\right\}, \qquad (a,b) := \left\{x \in \mathbb{R}^d:\ a < x < b\right\},$$

ill.

$$[a,b] := \left\{x \in \mathbb{R}^d:\ a \leq x \leq b\right\}$$

intervallumok mindegyike (Borel-)Lebesgue-mérhető (azaz Ω_d-beli), továbbá

$$\mu_d((a,b]) = \mu_d((a,b)) = \mu_d([a,b]) = \mu_d([a,b)) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k).$$

(**Házi feladat** belátni: TK). □

Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmazok esetében $A \in \Omega_p$ és számítsuk ki $\mu_p(A)$ mértéket!

1. $A := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$;
2. $A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sqrt{n} + \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$;
3. $A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{n-1}{n+1}, \dfrac{n}{n+2}\right] \times \left(\dfrac{1}{n}, 1\right] \subset \mathbb{R}^2$.

Útm.

1. Mivel $A \in \mathcal{C}_2 \subset \Omega_2$ és $\mu_2(A) = 1 \cdot 1$.
2. $A \in \Omega_1$, ui. megszámllható, így $\mu_1(A) = 0$.
3. $A \in \Omega_2$, ui. A az

$$A_n := \left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+2}\right] \times \left(\frac{1}{n}, 1\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

négyzetek diszjunkt uniója (**Házi feladat**), így

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n-1}{n} = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n-2}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2\{(n+1)-(n+2)+n\}}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{n(n+2)} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \ldots = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

HÁZI FELADAT. Az **G** Függelék ismeretanyaga.

HÁZI FELADAT. Az **H** Függelék ismeretanyaga.

HÁZI FELADAT. Az **I** Függelék ismeretanyaga.

1.8.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy adott X halmaz esetén az $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer pontosan akkor gyűrű, ha igaz az

$$A, B \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \qquad A \triangle B, A \cap B \in \mathcal{R}$$

implikáció![17]

Útm.

1. lépés. Ha $\mathcal{R}$ gyűrű és $A, B \in \mathcal{R}$, akkor $A \backslash B \in \mathcal{R}$ és $B \backslash A \in \mathcal{R}$, ahonnan

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{R}$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy (vö. 7. beadható feladatsor, $1/(c)$ feladat)

$$A \cap B = (A \cup B) \backslash (A \triangle B) \in \mathcal{R}.$$

2. lépés. Ha az implikáció igaz és $A, B \in \mathcal{R}$, akkor nyilvánvalóan $A \cap B \in \mathcal{R}$ és így

$$B \backslash A = B \triangle (A \cap B) \in \mathcal{R}$$

teljesül. Ha $A, B \in \mathcal{R}$: $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \cup B = A \triangle B$ (vö. 7. beadható feladatsor, $1/(c)$ feladat), azaz $A \cup B \in \mathcal{R}$. Mivel $B \cap (A \backslash B) = \emptyset$, ezért bármely $A, B \in \mathcal{R}$ halmaz esetén

$$A \cup B = B \cup (A \backslash B) \in \mathcal{R}. \quad \blacksquare$$

2. Mutassuk meg, hogy gyűrűk Descartes-szorzata nem feltétlenül gyűrű!
Útm. Ha $X := \{a, b\}$, akkor $\mathcal{P}(X)$ gyűrű, ui. algebra (ti. σ-algebra), de

$$\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X). \quad \blacksquare$$

3. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ gyűrű X-ben, akkor az

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : \; A \cap G \in \mathcal{R}, \; G \in \mathcal{R}\}$$

halmaz X-beli algebra!
Útm. Világos, hogy

[17] Az $\mathcal{R}$ halmazrendszert azért nevezik gyűrűnek, mert ebben az esetben az $(\mathcal{R}; \triangle, \cap)$ algebrai struktúra gyűrű.

(a) $X \in \mathcal{A}$, ui. ha $G \in \mathcal{R}$, akkor $X \cap G = G \in \mathcal{R}$;

(b) ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $G \in \mathcal{R}$, akkor $A \cap G, B \cap G \in \mathcal{R}$, ezért

$$(A \backslash B) \cap G = (A \cap G) \backslash (B \cap G) \in \mathcal{R},$$

ui. $\mathcal{R}$ különbségzárt, így $A \backslash B \in \mathcal{A}$;

(c) ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $G \in \mathcal{R}$, akkor $A \cap G, B \cap G \in \mathcal{R}$, ezért

$$(A \cup B) \cap G = (A \cap G) \cup (B \cap G) \in \mathcal{R},$$

ui. $\mathcal{R}$ uniózárt, így $A \cup B \in \mathcal{A}$. ■

4. Igazoljuk, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, $\mathcal{R}_\gamma$ (X-beli) gyűrű ($\gamma \in \Gamma$), akkor $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}_\gamma$ gyűrű X-ben!

Útm. Világos, hogy

- $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}_\gamma \neq \emptyset$, mivel minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X \in \mathcal{R}_\gamma \neq \emptyset$;
- ha $A, B \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$, akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A, B \in \mathcal{R}_\gamma$, így

$$A \backslash B \in \mathcal{R}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  tehát $A \backslash B \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}_\gamma$;
- ha $A, B \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}_\gamma$, akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A, B \in \mathcal{R}_\gamma$, így

$$A \cup B \in \mathcal{R}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  tehát $A \cup B \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}_\gamma$. ■

5. Bizonyítsuk be hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $m \in \mathbb{N}$, ill. $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{R}$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{R}$, hogy

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ i \neq j)$;
- $\biguplus\limits_{k=1}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$;

- minden $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén van olyan $H \subset \{1, \ldots, n\}$, hogy

  $$A_k = \biguplus_{\substack{l \in H, \\ B_l \subset A_k}} B_l$$

  teljesül!

Útm. Ha

- $m = 1$ és $A_1 \in \mathcal{R}$, akkor legyen $B_1 := A_1$.
- $m = 2$ és $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, akkor legyen

  $$B_1 := A_1 \backslash A_2, \quad B_2 := A_2 \backslash A_1, \quad B_3 := A_1 \cap A_2,$$

  így $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{R}$, diszjunktak:

  $$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset,$$

  továbbá

  $$A_1 = B_1 \uplus B_3 \qquad \text{ill.} \qquad A_2 = B_2 \uplus B_3.$$

- valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén

  $$A_1, \ldots, A_m, A_{m+1} \in \mathcal{R},$$

  és az első m darab $A_1, \ldots, A_m$ halmazhoz léteznek

  $$B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{R},$$

  halmazok, amelyekre az állítás igaz, akkor a

  $$C_i := A_{m+1} \cap B_i, \quad D_i := B_i \backslash C_i, \quad E := A_{m+1} \backslash \biguplus_{i=1}^{n} C_i \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

  jelöléssel a

  $$C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_n, E \in \mathcal{R}$$

  halmazok páronként diszjunktak és egyesítésük megegyezik $\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i$-vel, hiszen

  $$B_i = C_i \uplus D_i \quad (i \in \{1, \ldots, n\}), \qquad A_{m+1} = E \uplus \left(\biguplus_{i=1}^{n} C_i \right).$$

  Továbbá az is látható, hogy minden A_k $(k \in \{1, \ldots, m\})$ előáll néhány ilyen halmaz egyesítéseként. ■

6. Mutassuk meg az alábbi példákban, hogy $\mathcal{H}$ félgyűrű, de nem gyűrű X-ben!

   (a) X legalább kételemű halmaz, $\mathcal{H} := \{\emptyset\} \cup \{\{\omega\} \subset X : \ \omega \in X\}$;

   (b) $X := \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{H} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$.

   Útm.

   (a) Világos, hogy ha $A \in \mathcal{H}$, akkor vagy $A = \emptyset$ vagy $A \subset X$: $|A| = 1$, így triviálisan teljesül mindhárom, a félgyűrű definíciójában szereplő tulajdonság, de tetszőleges $\omega, \omega' \in X$: $\omega \neq \omega'$ esetén $\{\omega\}, \{\omega'\} \in \mathcal{H}$, de

   $$\{\omega\} \cup \{\omega'\} = \{\omega, \omega'\} \notin \mathcal{H}.$$

   (b) Könnyen belátható, hogy $\mathcal{H}$-ra teljesül mindhárom, a félgyűrű definíciójában szereplő tulajdonság, de

   $$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{H}. \quad \blacksquare$$

7. Igazoljuk, hogy ha adott $X \neq \emptyset$, ill. $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén $\mathcal{H}$ metszetzárt, továbbá tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$, $B \subset A$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$, hogy

   $$C_1 = B \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = A$$

   és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $C_k \backslash C_{k-1} \in \mathcal{H}$, ahol $C_0 := \emptyset$, akkor $\mathcal{H}$ félgyűrű X-ben!
   Útm. Ha $A, C \in \mathcal{H}$, akkor a $B := A \cap C$ halmazra $B \in \mathcal{H}$ és $B \subset A$, továbbá

   $$(C_i \backslash C_{i-1}) \cap (C_j \backslash C_{j-1}) = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ i \neq j)$$

   és

   $$A \backslash C = A \backslash B = \biguplus_{k=1}^{n} (C_k \backslash C_{k-1}).$$

   Megjegyzés. Van olyan szerző, aki így definiálja a félgyűrű fogalmát. Sok fontos félgyűrűre teljesül is ez a tulajdonság, nem nehéz azonban példát találni olyan félgyűrűre is, amire ez nem teljesül. $\blacksquare$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\emptyset \neq \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer háló, akkor a

   $$\mathcal{H} := \{A \backslash B \subset X : \ A, B \in \mathcal{L}, \ B \subset A\}$$

   halmazrendszer félgyűrű X-ben!
   Útm. Világos, hogy

- $\mathcal{H} \neq \emptyset$, ui. ha $A \in \mathcal{L}$, akkor $A \subset A$, ahonnan $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{H}$;
- ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor van olyan $C, D, E, F \in \mathcal{L}$, hogy $C \subset D$, $E \subset F$ és

$$A = D \setminus C = D \cap C^c, \qquad B = F \setminus E = F \cap E^c,$$

így

$$\begin{aligned} A \cap B &= (D \cap C^c) \cap (F \cap E^c) = (D \cap F) \cap (C^c \cap E^c) = \\ &= (D \cap F) \cap (C \cup E)^c = \underbrace{(D \cap F)}_{\in \mathcal{L}} \setminus \underbrace{(C \cup E)}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

- ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor van olyan $C, D, E, F \in \mathcal{L}$: $C \subset D$, $E \subset F$ és

$$A = D \setminus C = D \cap C^c, \qquad B = F \setminus E = F \cap E^c,$$

így ha $B \subset A$, azaz $F \setminus E \subset D \setminus C$, akkor $F^c \cap E = \emptyset$,

$$[D \setminus (C \cup F)] \cap [(D \cap E) \setminus C] = [D \setminus (C \cup F)] \cap E = \emptyset$$

és így

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B^c = (D \cap C^c) \cap (F \cap E^c)^c = (D \cap C^c) \cap (F^c \uplus E) = \\ &= [(D \cap C^c) \cap F^c] \uplus [(D \cap (C^c \cap E)] = \\ &= [D \cap (C^c \cap F^c)] \uplus [(D \cap E) \cap C^c] = \\ &= [D \cap (C \cup F)^c]) \uplus [(D \cap E) \cap C^c] = \\ &= \underbrace{[D \setminus (C \cup F)]}_{\in \mathcal{L}} \uplus \underbrace{[(D \cap E) \setminus C]}_{\in \mathcal{L}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Következmény. Az $\mathbb{R}$-beli korlátos, balról zárt, jobbról nyílt intervallumok összessége, azaz az

$$\mathbb{I}_1 := \{[a, b) \subset \mathbb{R} : \ a \leq b\}$$

halmazrendszer félgyűrű, ui. megmutatható, hogy

$$\mathcal{L} := \{(-\infty, a) \subset \mathbb{R} : \ a \in \mathbb{R}\}$$

háló (vö. 8. gyakorlat) és

$$\mathbb{I}_1 = \{A \setminus B \subset X : \; A, B \in \mathcal{L}, \; B \subset A\}.$$

Megjegyzés. Hasonlóan látható be, hogy az $\mathbb{R}$-beli korlátos, balról nyílt, jobbról zárt intervallumok összessége, azaz az

$$\{(a, b] \subset \mathbb{R} : \; a \leq b\}$$

halmazrendszer félgyűrű. Sőt, az összes korlátos intervallumból álló halmazrendszer is félgyűrű $\mathbb{R}$-ben. Nem félgyűrűt viszont a nyílt, ill. a zárt intervallumok rendszere. ■

9. Mutassuk meg, hogy ha valamely $X_1, X_2 \neq \emptyset$ esetén $\mathcal{H}_i$ félgyűrű X_i-ben $(i \in \{1,2\})$, akkor

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 := \{A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2 : \; A_1 \in \mathcal{H}_1, A_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

félgyűrű $X_1 \times X_2$-ben!
Útm. Világos, hogy

- $\mathcal{H} \neq \emptyset$, ui. $\emptyset \in \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, így

$$\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 = \mathcal{H};$$

- ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor van olyan $A_1, B_1 \in \mathcal{H}_1$, ill. $A_2, B_2 \in \mathcal{H}_2$, hogy

$$A = A_1 \times A_2 \qquad \text{és} \qquad B = B_1 \times B_2,$$

így

$$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 = \mathcal{H};$$

- ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor van olyan $A_1, B_1 \in \mathcal{H}_1$ ill. $A_2, B_2 \in \mathcal{H}_2$, hogy

$$A = A_1 \times A_2 \qquad \text{és} \qquad B = B_1 \times B_2,$$

így van olyan $m, n \in \mathbb{N}$ és $\exists\, C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{H}_1$ ill. $\exists\, D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{H}_2$:

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, m\} : \; i \neq j)$$

ill.

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\} : \; i \neq j)$$

és

$$A_1 \backslash B_1 = \biguplus_{k=1}^{m} C_k \qquad \text{és} \qquad A_2 \backslash B_2 = \biguplus_{l=1}^{n} D_l,$$

ezért

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2) &= [(A_1 \backslash B_1) \times A_2] \cup [B_1 \times (A_2 \backslash B_2)] = \\ &= \biguplus_{k=1}^{m} \underbrace{\left((C_k \times A_2) \cup \bigcup_{l=1}^{n} (B_1 \times D_l) \right)}_{\text{páronként diszjunktak } \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2\text{-ben}}.\end{aligned}$$

Megjegyzések.

(a) Indukcióval könnyen belátható, hogy ha adott $d \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{H}_k$ félgyűrű X_k-ban $(k \in \{1, \ldots, d\})$, akkor

$$\mathcal{H}_1 * \ldots * \mathcal{H}_d := \{A_1 \times \ldots \times A_d \subset X_1 \times \ldots \times X_d : \ A_k \in X_k, \ k \in \{1, \ldots, d\}\}$$

félgyűrű $X_1 \times \ldots \times X_d$-ben.

(b) Ha $d \in \mathbb{N}$ rögzített index és

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad b := (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$$

esetén

$$[a, b) := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ a_1 \le x < b_1, \ldots, a_d \le x < b_d\right\}$$

és

$$\mathbb{I}_d := \left\{A \subset \mathbb{R}^d | \ A = [a, b), \ a, b \in \mathbb{R}^d, \ a \le b\right\},$$

akkor $\mathbb{I}_d$ félgyűrű, de nem gyűrű $\mathbb{R}^d$-ben, hiszen

- ha

$$\mathbb{I}_1 = \mathcal{H} := \{[a, b) \subset \mathbb{R} : \ a \le b\},$$

  akkor $\mathcal{H}$ félgyűrű $\mathbb{R}$-ben, ui. (vö. korábban vagy)
  - $\emptyset = [a, a) \in \mathcal{H}$,
  - $[a, b), [c, d) \in \mathcal{H} \Longrightarrow [a, b) \cap [c, d) = \emptyset \in \mathcal{H}$ vagy

$$[a, b) \cap [c, d) = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) \in \mathcal{H}$$

– $[a,b),[c,d)\in\mathcal{H}\Longrightarrow [a,b)\backslash[c,d)=\emptyset\uplus\emptyset$ vagy $[a,b)\backslash[c,d)$ az

$$[a,b)\uplus\emptyset,\quad [c,d)\uplus\emptyset,\quad [a,c)\uplus\emptyset,\quad [a,c)\uplus[d,b)$$

halmazok közül valamelyik.

- $\mathbb{I}_d=\mathcal{H}*\ldots*\mathcal{H}=\mathbb{I}_1*\ldots*\mathbb{I}_1$, hiszen tetszőleges $a,b\in\mathbb{R}^d$ esetén

$$[a,b)=[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_d,b_d).$$

- $\mathbb{I}_d$ nem uniózárt, ui. pl. $d=1$ esetén $[0,1)\cup[2,3)\notin\mathbb{I}_1$.

(c) Ha $\mathcal{M}_1$, ill. $\mathcal{M}_2$ σ-algebra, algebra, gyűrű X_1-ben ill. X_2-ben, akkor

$$\mathcal{M}:=\mathcal{M}_1*\mathcal{M}_2:=\{A_1\times A_2\subset X_1\times X_2:\ A_1\in\mathcal{M}_1,A_2\in\mathcal{M}_2\}$$

félgyűrű $X_1\times X_2$-ben, ui. minden σ-algebra, algebra, gyűrű egyben félgyűrű is. ■

10. Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}^d,\rho_E)$ metrikus térben minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok, páronként diszjunkt, balról zárt, d-dimenziós ($\mathbb{I}_d$-beli) intervallum egyesítéseként, ahol ρ_E jelöli az euklideszi metrikát!
Útm. Ha $0<h\in\mathbb{R}$ és $m\in\mathbb{Z}$, akkor az

$$I_m:=[(m-1)h,mh)$$

intervallumokra egyrészt

$$\biguplus_{m\in\mathbb{Z}} I_m=\mathbb{R},$$

másrészt

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left(\biguplus_{k\in\mathbb{Z}} I_k\right)\times\left(\biguplus_{l\in\mathbb{Z}} I_l\right)=\biguplus_{k\in\mathbb{Z}}\biguplus_{l\in\mathbb{Z}}(I_k\times I_l)=:\biguplus_{k\in\mathbb{Z}}\biguplus_{l\in\mathbb{Z}} I_{kl},$$

ahol $I_{kl}\in\mathbb{I}_2$, így ha $d\in\mathbb{N}$, akkor

$$\mathbb{R}^d=\biguplus_{m_1\in\mathbb{Z}}\ldots\biguplus_{m_d\in\mathbb{Z}}(I_{m_1}\times\ldots I_{m_d})=:\biguplus_{m_1\in\mathbb{Z}}\ldots\biguplus_{m_d\in\mathbb{Z}} I_{m_1\ldots m_d},$$

ahol $I_{m_1\ldots m_d}\in\mathbb{I}_d$. ■

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{H}$ félgyűrű X-ben, akkor minden $n \in \mathbb{N}$, ill. $A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$, ill. $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{H}$, hogy

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, m\}: \ i \neq j)$$

és

$$A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \biguplus_{l=1}^{m} C_l$$

teljesül!

Útm. Ha $n = 1$, akkor $A \cap B_1 \subset A$ miatt

$$A \backslash B_1 = A \backslash (A \cap B_1) = \biguplus_{l=1}^{m} C_l,$$

ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás és $B_{n+1} \in \mathcal{H}$, akkor minden $l \in \{1, \ldots, m\}$ esetén a $C_l \backslash B_{n+1}$ halmaz $\mathcal{H}$-beli elemek diszjunkt uniója, így az

$$A \backslash \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) \backslash B_{n+1} = \left(\biguplus_{l=1}^{m} C_l \right) \backslash B_{n+1} = \biguplus_{l=1}^{m} (C_l \backslash B_{n+1})$$

előállítás miatt az állítás nyílvánvalóan igaz $(n+1)$-re is. ∎

12. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{H}$ félgyűrű X-ben, akkor a

$$\mathcal{K} := \mathcal{H}_{\uplus} = \left\{ \biguplus_{k=1}^{n} C_k \subset X : \ n \in \mathbb{N}, \ C_1, \ldots, C_n \ \mathcal{H}\text{-beli páronként diszjunktak} \right\}$$

$$\mathcal{N} := \mathcal{H}_{\cup} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} D_k \subset X : \ n \in \mathbb{N}, \ D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{H} \right\}$$

halmazokra $\mathcal{K} = \mathcal{N} =: \mathcal{R}$, ahol $\mathcal{R}$ gyűrű!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$. A fordított irányú tartalmazás is igaz, ui. ha $D \in \mathcal{N}$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{H}$, hogy $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$. Így a (nem feltétlenül $\mathcal{H}$-beli) diszjunkt

$$E_1 := D_1, \qquad E_k := D_k \backslash \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} D_l \right) \quad (k \in \{2, \ldots, n\})$$

halmazokra $D = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ (vö. diszjunktizációs lemma). Az előző feladat következményeként vannak olyan $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ indexek, ill. páronként diszjunkt $F_{kl} \in \mathcal{H}$ halmazok ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, m_k\}$), hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $E_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} F_{kl}$, így

$$D = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m_n} F_{kl} \in \mathcal{K},$$

ahonnan $\mathcal{N} = \mathcal{K}$ következik.

2. lépés. $\mathcal{R}$ gyűrű, hiszen

- triviálisan $\mathcal{R} \neq \emptyset$, továbbá
- $\mathcal{R}$ különbségzárt, ui. ha $A, B \in \mathcal{R} = \mathcal{N}$, akkor van olyan $m, n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}$, hogy

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad \text{és} \qquad B = \bigcup_{l=1}^{n} B_k,$$

így ismét az előző feladat következményeként vannak olyan $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$ indexek ill. páronként diszjunkt $C_{kl} \in \mathcal{H}$ halmazok ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in$ $\in \{1, \ldots, s_k\}$), hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l = \bigcup_{l=1}^{s_k} C_{kl},$$

ahonnan

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l \right) = \bigcup_{k=1}^{m} \left(A_k \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{s_k} C_{kl} \in \mathcal{N};$$

- $\mathcal{R}$ uniózárt, ui. ha $A, B \in \mathcal{R} = \mathcal{K}$, akkor van olyan $m, n \in \mathbb{N}$ és páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{H}$ ill. páronként diszjunkt $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}$, hogy

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad \text{és} \qquad B = \bigcup_{l=1}^{n} B_k,$$

így (vö. $\boxed{\textbf{F}}$ függelék)

$$A \cap B = \biguplus_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}} (A_k \cap B_l) \in \mathcal{K} = \mathcal{R}$$

(véges sok $\mathcal{H}$-beli diszjunkt halmazok egyesítése), ahonnan

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) \in \mathcal{R},$$

ahol $A \backslash B, B \backslash A, A \cap B \in \mathcal{R}$ páronként diszjunkt halmazok. ■

Következmény. Tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\mathcal{I}_d := (\mathbb{I}_d)_{\cup} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : \quad n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{I}_d \right\}$$

halmaz gyűrű $\mathbb{R}^d$ ben.

Megjegyzés. Az iménti feladatban megfogalmazott állításból az is következik, hogy ha $\mathcal{H}$ (X-beli) félgyűrű, $m \in \mathbb{N}$, ill. $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{H}$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}$, hogy

- $B_i \cap B_j = \emptyset \ (i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ i \neq j)$;
- $\biguplus_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$;
- minden $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén van olyan $H \subset \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$A_k = \biguplus_{\substack{l \in H, \\ B_l \subset A_k}} B_l. \quad ■$$

13. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, akkor a $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ additív halmazfüggvényre igazak az alábbi állítások:

(i) $(n \in \mathbb{N}, \quad A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R} : \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j)) \quad \Longrightarrow$

$$\varphi\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k);$$

(ii) $(A, B \in \mathcal{R}, \quad B \subset A, \quad \varphi(B) \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(A \backslash B) = \varphi(A) - \varphi(B)$;

(iii) $(\exists\, A \in \mathcal{R} : \varphi(A) \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\emptyset) = 0$;

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ (**szita-formula**);

(v) $(A, B \in \mathcal{R}, \quad B \subset A) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(B) \leq \varphi(A)$ (φ **monotonitás**);

(vi) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ (**Boole-egyenlőtlenség**);

(vii) igaz a

$$\varphi \quad \text{szigma-szubadditív} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \quad \text{szigma-additív}$$

ekvivalencia!

Útm.

(i) Az additivitás triviális következménye.

(ii) $\varphi(A) = \varphi((A \backslash B) \cup B) = \varphi(A \backslash B) + \varphi(B)$.

(iii) $\varphi(\emptyset) = \varphi(A \backslash A) = \varphi(A) - \varphi(A) = 0$.

(iv) $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi((A \cap B) \cup (A \backslash B)) + \varphi(B) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \backslash B) + \varphi(B) =$

$$= \varphi(A \cap B) + \varphi((A \backslash B) \cup B) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B).$$

(v) $\varphi(A) = \varphi((A \backslash B) \uplus B) = \varphi(A \backslash B) + \varphi(B) \geq \varphi(B)$.

(vi) $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

(vii) Ha φ szigma-additív és $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R},$$

akkor a

$$B_1 := A_1, \qquad B_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \in \mathcal{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

halmazokra:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \; i \neq j), \qquad B_n \subset A_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

és
$$A = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$
így
$$\varphi(A) = \varphi\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n),$$
azaz φ szigma-szubadditív.
Ha φ szigma-szubadditív és $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre
$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j) \qquad \text{és} \qquad A := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R},$$
akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\biguplus_{k=n+1}^{\infty} A_k = A \setminus \left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) \in \mathcal{R}$$
és ezért
$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi\left(\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) \uplus \left(\biguplus_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)\right) = \varphi\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) + \varphi\left(\biguplus_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \ge \\ &\ge \varphi\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k). \end{aligned}$$
Így az $n \to \infty$ határesetben kapjuk, hogy
$$\varphi(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n),$$
ami φ szigma-szubadditivitásával együtt φ szigma-additivitását bizonyítja. ■

14. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, akkor a $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ additív halmazfüggvény esetében egyenértékűek az alábbi állítások:

   (a) φ szigma-additív;

   (b) φ **alulról félig folytonos**, azaz minden olyan $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ izoton halmazsorozatra, amelyre $\lim(A_n) \in \mathcal{R}$, igaz, hogy
   $$\lim(\varphi(A_n)) = \varphi(\lim(A_n))$$
   teljesül!

Útm. Ha φ szigma-additív és $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ izoton halmazsorozat, akkor a

$$B_1 := A_1, \qquad B_n := A_n \backslash A_{n-1} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

halmazokra:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$$

és

$$A_n = \biguplus_{k=1}^{n} B_k, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n,$$

így $\lim(A_n) \in \mathcal{R}$ következtében

$$\begin{aligned} \varphi(\lim(A_n)) &= \varphi\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \lim\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(B_k)\right) = \\ &= \lim\left(\varphi\left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right)\right) = \lim(\varphi(A_n)). \end{aligned}$$

Ha pedig $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, hogy

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j) \qquad \text{és} \qquad \biguplus_{k=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R},$$

akkor a

$$B_n := \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat izoton és

$$\lim(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \varphi\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \varphi(\lim(B_n)) = \lim(\varphi(B_n)) = \lim\left(\varphi\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \\ &= \lim\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(A_k\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(A_k\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

15. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű és $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ szigma-additív halmazfüggvény, akkor φ **felülről félig folytonos**, azaz tetszőleges olyan $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ antiton halmazsorozat esetén, amelyre $\lim(A_n) \in \mathcal{R}$, igaz, hogy

$$\lim(\varphi(A_n)) = \varphi(\lim(A_n))$$

teljesül!

Útm. Ha

$$B_n := A_1 \backslash A_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $B_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ és (B_n) izoton halmazsorozat, így

$$\lim(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_n) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \backslash \lim(A_n) \in \mathcal{R}$$

következtében

$$\varphi(\lim(B_n)) = \varphi(A_1) - \varphi(\lim(A_n))$$

(φ véges), és egy korábbi feladat felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(\lim(A_n)) &= \varphi(A_1) - \varphi(\lim(B_n)) = \varphi(A_1) - \lim(\varphi(B_n)) = \\ &= \varphi(A_1) - \lim(\varphi(A_1 \backslash A_n)) = \varphi(A_1) - \lim(\varphi(A_1) - \varphi(A_n)) = \\ &= \lim(\varphi(A_n)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az alulról való félig folytonossággal ellentétben itt eleve véges értékű halmazfüggvényre korlátozódtunk. Könnyen látható, hogy a felülről való félig folytonosság akkor is igaz, ha azt tesszük fel, hogy $\varphi(A_1) \in \mathbb{R}$, ill. $\mathcal{R}_\varphi \subset [0, +\infty]$. $\square$

16. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű és $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ olyan additív halmazfüggvény, hogy tetszőleges $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ antiton és a $\lim(A_n) = \emptyset$ feltételt kielégítő halmazsorozat esetén $\lim(\varphi(A_n)) = 0$, akkor φ szigma-additív!

Útm. Ha $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j) \qquad \text{és} \qquad A := \biguplus_{k=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R},$$

akkor a

$$B_n := \biguplus_{k=n+1}^{\infty} A_k = A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokra

$$B_n \supset B_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim(B_n) = \emptyset \in \mathcal{R}.$$

Így $\lim(\varphi(B_n)) = 0$ és

$$\begin{aligned} 0 &= \lim(\varphi(B_n)) = \lim\left(\varphi\left(\biguplus_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)\right) = \lim\left(\varphi\left(A\setminus\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right)\right)\right) = \\ &= \lim\left(\varphi(A) - \sum_{k=1}^{n}\varphi(A_k)\right) = \varphi(A) - \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k), \end{aligned}$$

azaz $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$. ■

17. Legyen $\mathcal{R}$ gyűrű, $k \in \mathbb{N}$, majd

$$\alpha_k \in (0, +\infty), \qquad \text{ill.} \qquad \mu_k : \mathcal{R} \to [0, +\infty] \quad \text{kvázi-/előmérték.}$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k$$

halmazfüggvény is kvázi-/előmérték $\mathcal{R}$-en![18]

Útm.

- $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\mu_k(A) \geq 0$ $(A \in \mathcal{R})$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\mu_k(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot 0 = 0$.
- A nagy átrendezési tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N}\colon i \neq j)$ és $\bigcup_n A_n \in \mathcal{R}$, akkor

$$\begin{aligned} \mu\left(\biguplus_n A_n\right) &= \sum_k \alpha_k\mu_k\left(\biguplus_n A_n\right) = \sum_k \alpha_k \sum_n \mu_k(A_n) = \\ &= \sum_k\sum_n \alpha_k\mu_k(A_n) = \sum_n\sum_k \alpha_k\mu_k(A_n) = \\ &= \sum_n \mu(A_n). \quad ■ \end{aligned}$$

[18] A σ-additivitás belátásához használjuk a nagy átrendezési tételt!

18. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű,

$$\mu_n : \mathcal{R} \to [0, +\infty] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

előmértékek monoton növekedő sorozata, azaz tetszőleges $A \in \Omega$ esetén

$$\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor a $\mu := \lim(\mu_n)$ szintén előmérték $\mathcal{R}$-en!
Útm. A monotonitás miatt világos, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{R}$ esetén

$$\mu(A) = \sup\{\mu_n(A) \in [0, +\infty] : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ezért $\mu \geq 0$, továbbá $\mu(\emptyset) = 0$. Ha $A, B \in \mathcal{R}$: $A \cap B = \emptyset$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu_n(A \uplus B) = \mu_n(A) + \mu_n(B),$$

így

$$\begin{aligned}
\mu(A \uplus B) &= \sup\{\mu_n(A \uplus B) \in [0, +\infty] : \ n \in \mathbb{N}\} = \\
&= \sup\{\mu_n(A) \in [0, +\infty] : \ n \in \mathbb{N}\} + \sup\{\mu_n(B) \in [0, +\infty] : \ n \in \mathbb{N}\} = \\
&= \mu(A) + \mu(B). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

19. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ előmérték, $n \in \mathbb{N}$, valamint $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, akkor

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \beta_k,$$

ahol

$$\beta_k := \sum_{\substack{H \subset \{1,\ldots,n\},\\ |H|=k}} \mu\left(\bigcap_{l \in H} A_l\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}\right) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

(**Poincaré-Sylvester-féle szitaformula**)![19]

[19] A második szummában az összegzés úgy értendő, hogy $(i_1, \ldots, i_k)$ az $1, \ldots, n$ számok összes k-adrendű ismétlés nélküli kombinációin fut végig.

Útm. Ha

- $n = 1$, akkor nincs mit bizonyítani;
- $n = 2$, akkor az állítás szintén triviális, hiszen μ gyűrűn értelmezett additív és nemnegatív halmazfüggvény;
- $n = 3$, akkor visszavezetve az $n = 2$ esetre azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mu((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = \\
&= \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_3) - \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_3) - \\
&\quad -\mu((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) = \\
&= \sum_{k=1}^{3} \mu(A_k) - \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \\
&\quad -\mu(A_2 \cap A_3) + (-1)^4 \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

- valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_1, \ldots, A_n, \in \mathcal{R}$ olyan halmazok, amelyekre az állítás igaz és $A_{n+1} \in \mathcal{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{H \subset \{1,\ldots,n\}, \\ |H|=k}} \mu\left(\bigcap_{l \in H} A_l\right) + \mu(A_{n+1}) - \\
&\quad -\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n\},\\ |H|=k}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)+\mu(A_{n+1})-\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n\},\\ |H|=k}}\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n}(A_k\cap A_{n+1})\right)=\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n\},\\ |H|=k}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)+\mu(A_{n+1})-\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n\},\\ |H|=k}}\mu\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cap A_{n+1}\right)=\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n+1\},\\ |H|=k\\ n+1\notin H}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+2}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n+1\},\\ |H|=k+1\\ n+1\in H}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)=\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n+1\},\\ |H|=k\\ n+1\notin H}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n+1\},\\ |H|=k\\ n+1\in H}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right)=\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,n+1\},\\ |H|=k}}\mu\left(\bigcap_{l\in H}A_l\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

20. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ előmérték, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, továbbá $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, akkor teljesül a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=2}^{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} (A_i \cap A_j)\right)$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Az $n = 2$ esetben az egyenlőség teljesülését korábban már beláttuk.

2. lépés. Tegyük fel, hogy valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az egyenlőtlenség, majd legyen

$$B := \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = \mu(B) + \mu(A_{n+1}) - \mu(B \cap A_{n+1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) - \sum_{i=2}^{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} (A_i \cap A_j)\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_j)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) - \sum_{i=2}^{n+1} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} (A_i \cap A_j)\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

21. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ előmérték, $n \in \mathbb{N}$, továbbá $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, akkor tetszőleges $m \in \{1, \ldots, n\}$ esetén igaz a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \beta_k + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1 - 1} \left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right]\right)$$

egyenlőség, ahol β_k a Poincaré-Sylveszter-féle szita-formulában szereplő együttható!

Útm. Ha

- $m = 1$, akkor az állítás nem más, mint az előző feladatban megfogalmazott egyenlőség.

- valamely $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ esetén igaz az állítás, akkor figyelembe véve, hogy adott
$$1 \leq l < i_1 < \ldots < i_m \leq n$$
esetén a
$$B_l := \left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l$$
halmazokkal
$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1} B_l\right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(B_l\right) - \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l-1}(B_l \cap B_k)\right)$$
(vö. korábban), így
$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right]\right) = \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right) -$$
$$- \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_k\right]\right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right) - \sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l \cap A_k\right]\right),$$
ahonnan a következő egyenlőséget kapjuk:
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \beta_k + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right]\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \beta_k + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \left(\sum_{l=1}^{i_1-1} \mu\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) \cap A_l\right]\right) -$$

$$-\sum_{l=1}^{i_1-1}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{l-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}\right)\cap A_l\cap A_k\right]\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k+(-1)^m\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}\sum_{l=1}^{i_1-1}\mu\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}\right)\cap A_l\right]+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}\sum_{l=1}^{i_1-1}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{l-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}\right)\cap A_l\cap A_k\right]\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k+(-1)^m\underbrace{\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m<i_{m+1}\le n}\mu\left(\bigcap_{j=1}^{m+1}A_{i_j}\right)}_{\beta_{m+1}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}\mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m+1}A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}\beta_k+(-1)^{m+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m<i_{m+1}\le n}\mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right),$$

amit éppen bizonyítani kellett. ■

22. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{R}$ (X-beli) gyűrű, $\mu:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ előmérték, $n\in\mathbb{N}$, továbbá $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{R}$, akkor a fent definiált β_k együtthatókra:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k,\qquad \text{ha } m\in\{1,\ldots,n\} \text{ páratlan,}$$

ill.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k,\qquad \text{ha } m\in\{1,\ldots,n\} \text{ páros}$$

(**Bonferroni-egyenlőtlenség**), azaz ha a szita-formulában lévő összeget úgy vágjuk le, hogy a legutolsó tag kivonással szerepel, akkor alsó, ha úgy, hogy a legutolsó tag összeadással szerepel, akkor felső korlátot kapunk, ahol β_k a Poincaré-Sylveszter-féle szita-formulában szereplő együttható!

Útm. Mivel μ előmérték, ezért minden $1 \leq i_1 < \ldots < i_m < i_{m+1} \leq n$ esetén

$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right) \geq 0.$$

Ha $m \in \{1, \ldots, n\}$ páratlan, akkor (vö. korábban)

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k + (-1)^m \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k - \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right) \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k,
\end{aligned}$$

ha pedig $m \in \{1, \ldots, n\}$ páros, akkor (vö. korábban)

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k + (-1)^m \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k + \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{i_1-1}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)\cap A_l\right]\right) \geq \\
&\geq \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $m = 1$ esetben a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Boole-egyenlőtlenséget kapjuk vissza. ■

23. Mutassuk meg, hogy adott $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ függvény esetén a

$$\mu_f(A) := \sum_{k\in A} f(k) \quad (A \subset \mathbb{N})$$

halmazfüggvény mérték!

Útm. $\mathcal{D}_{\mu_f}$ szigma-algebra, hiszen $\mathcal{D}_{\mu_f} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, továbbá

- $\mu_f \geq 0$;
- $\mu_f(\emptyset) = 0$;
- ha $A_n \subset \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$ (mivel $\mathcal{D}_{\mu_f}$ szigma-algebra, ezért $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_{\mu_f}$), akkor

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in A_n} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(A_n). \quad \blacksquare$$

24. Adott (X, Ω, μ) mértéktér és

$$\Omega^* := \left\{A \in \Omega \middle| \mu(A) < +\infty\right\}$$

esetén igazoljuk, hgy a

$$\rho(A, B) := \mu(A \triangle B) \qquad (A, B \in \Omega^*),$$

függvény félmetrika![20]
Útm.

- Mivel minden $A, B \in \Omega^*$ esetén $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{R}$ és $A \triangle B \subset A \cup B$, ezért

$$0 \leq \mu(A \triangle B) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) < +\infty,$$

így $A \triangle B \in \Omega^*$, azaz $\rho(A, B) \in [0, +\infty)$.
- $\rho(A, A) = \mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Ha $A, B \in \Omega^*$, akkor

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B) = \mu(B \triangle A) = \rho(B, A).$$

- Mivel

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C) \qquad (A, B \in \Omega^*),$$

így

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &= \mu(A \triangle B) \leq \mu((A \triangle C) \cup (B \triangle C)) \leq \mu(A \triangle C) + \mu(B \triangle C) = \\ &= \rho(A, C) + \rho(B, C). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

[20] **Fréchet-Nikodym-féle félmetrika**

25. Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér esetén van olyan $(\widetilde{X}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu})$ teljes mértéktér, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal!

(a) $\widetilde{\mu}$ kiterjesztése μ-nek, azzaz

$$\Omega \subset \widetilde{\Omega}, \qquad \text{és} \qquad \widetilde{\mu}(A) = \mu(A) \qquad (A \in \Omega);$$

(b) ha (X', Ω', μ') olyan teljes mértéktér, hogy $\Omega \subset \Omega'$ és bármely $A \in \Omega$ esetén $\mu'(A) = \mu(A)$ teljesül, akkor

$$\widetilde{\Omega} \subset \Omega' \qquad \text{és} \qquad \mu'(A) = \widetilde{\mu}(A) \quad (A \in \widetilde{\Omega})$$

teljesül.[21]

Útm.

- Legyen

$$\widetilde{\Omega} := \{A \cup N \in \mathcal{P}(X) : \ A \in \Omega, N \subset B \in \Omega, \ \text{ ahol } \mu(B) = 0\}.$$

Ekkor $\widetilde{\Omega}$ σ-algebra, ui.

– $X = X \cup \emptyset \in \Omega \subset \widetilde{\Omega}$;

– ha $C \in \widetilde{\Omega}$, akkor van olyan $A, B \in \Omega$: $\mu(B) = 0$, hogy $C = A \cup N$, ahol $N \subset B$. De

$$X \backslash C = X \backslash (A \cup N) = (X \backslash A) \backslash N = ((X \backslash A) \backslash B) \cup (B \backslash N) \in \widetilde{\Omega},$$

ui.

$$(X \backslash A) \backslash B \in \Omega \qquad \text{és} \qquad B \backslash N \subset B \in \Omega : \quad \mu(B) = 0;$$

– tegyük fel, hogy $C_n \in \widetilde{\Omega}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor van olyan $A_n, B_n \in \Omega$: $\mu(B_n) = 0$, hogy $C_n = A_n \cup N_n$ ahol $N_n \subset B_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Így

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \right) \in \widetilde{\Omega},$$

ui.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega : \quad \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \right) = 0.$$

[21] $\widetilde{\mu}$ a μ „**teljessé tétel**e”

- Legyen
$$\widetilde{\mu}(A\cup N):=\mu(A)\qquad (A\cup N\in\widetilde{\Omega}).$$
Ekkor $\widetilde{\mu}$ mérték,[22] ui.
  - $\widetilde{\mu}\geq 0$, ui. $\mu\geq 0$;
  - $\widetilde{\mu}(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$;
  - ha $C_n\in\widetilde{\Omega}$ $(n\in\mathbb{N})$: $C_i\cap C_j=\emptyset$ $(i,j\in\mathbb{N}:i\neq j)$, akkor van olyan $A_n,B_n\in$ $\in\Omega$: $\mu(B_n)=0$, hogy $C_n=A_n\cup N_n$ ahol $N_n\subset B_n$ $(n\in\mathbb{N})$ és $A_i\cap A_j=\emptyset$ ill. $N_i\cap N_j=\emptyset$ $(i,j\in\mathbb{N}:i\neq j)$, így
$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n\right) &= \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n\cup N_n)\right)=\widetilde{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}N_n\right)\right)=\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mu}\left(A_n\cup N_n\right),\end{aligned}$$
ui.
$$N_n\subset B_n\in\Omega:\qquad \mu(B_n)=0\qquad (n\in\mathbb{N}),$$
azaz
$$\bigcup_{n=0}^{\infty}N_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n,$$
ahol $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n\right)=0$.
- $\widetilde{\mu}$ teljes, ui. legyen
$$C\subset A\cup N\in\widetilde{\Omega}:\qquad \widetilde{\mu}(A\cup N)=\mu(A)=0,$$

[22] $\widetilde{\mu}$ "jól definiált", azaz, ha
$$A\cup N=A'\cup N'\qquad (A,A'\in\Omega,N\subset B,N'\subset B':B,B'\in\Omega:\mu(B)=\mu(B')=0),$$
akkor $\mu(A)=\mu(A')$, ui.
$$A\subset A\cup N=A'\cup N'\subset A'\cup B',$$
ezért
$$\mu(A)\leq\mu(A'\cup B')=\mu(A')+mu(B')=\mu(A'),$$
ill. hasonlóan kapjuk, hogy $\mu(A')\leq\mu(A)$.

ekkor $C \subset A \cup B$, ahol

$$A \cup B \in \Omega : \qquad \mu(B) = 0,$$

így

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Tehát

$$C = \emptyset \cup (C \cap (A \cup B)) \in \widetilde{\Omega},$$

ui. $\emptyset \in \Omega$ és

$$C \cap (A \cup B) \subset A \cup B : \qquad \mu(A \cup B) = 0.$$

- Ha $C \in \Omega$, akkor

$$C = C \cup \emptyset \in \widetilde{\Omega} \qquad \text{és} \qquad \widetilde{\mu}(C) = \mu(C).$$

- Legyen ha (X', Ω', μ') olyan teljes mértéktér, hogy $\Omega \subset \Omega'$ és $\mu'|_{\Omega} = \mu$, ekkor minden $A \in \Omega$: $\mu(A) = 0$ esetén

$$A \in \Omega', \qquad \mu'(A) = \mu(A) = 0,$$

így a teljesség miatt $\forall B \subset A$: $B \in \Omega'$, azaz $C \cup B \in \Omega'$ $(C \in \Omega)$. Így $\widetilde{\Omega} \subset \Omega'$ és

$$\mu'(C \cup B) = \mu'(C) = \mu(C) = \widetilde{\mu}(C \cup B). \quad \blacksquare$$

26. Mutassuk meg, hogy A Borel-mérhető halmaz, pontosabban $A \in \Omega_1$ teljesül!

$$\text{(a)}\ A := \mathbb{Q} \cap [-1,1], \qquad \text{(b)}\ A := \left\{x \in \mathbb{R} :\ \cos(x) \geq \sqrt{2}/2\right\}.$$

Útm.

(a) A megszámlálható.

(b) $A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$. $\blacksquare$

27. Mutassuk meg, hogy az

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(n, \frac{n^2+1}{n}\right] \times (0,1]$$

halmazra $A \in \Omega_2$ teljesül, majd számítsuk ki a $\mu_2(A)$ mértéket!
Útm. $A \in \Omega_2$, ui. belátható, hogy A az

$$A_n := \left(n, \frac{n^2+1}{n}\right] \times (0,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

négyzetek diszjunkt uniója, így

$$\mu_2(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot 1 = +\infty. \quad \blacksquare$$

28. Legyen

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\right\}.$$

Mutassuk meg, hogy $A \in \Omega_2$, illetve $\mu_2(A) = 0$ teljesül!
Útm. Lévén, hogy $A \subset \mathbb{R}^2$ zárt halmaz, ezért $A \in \Omega_2$. Legyen $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, továbbá

$$A_n := \left([-n, -n+1) \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) \cup \left([n-1, n) \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right).$$

Ekkor $A \subset B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, és így

$$\mu_2(A) \leq \mu_2(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{\varepsilon}{2^n} = 4\varepsilon,$$

ahonnan $\mu_2(A) = 0$ következik. $\blacksquare$

29. Legyen $d \in \mathbb{N}$, valamint $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ sima út. Mutassuk meg, hogy a

$$\gamma := \left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^d : \ t \in [a,b]\right\}$$

sima görbe Lebesgue-nullmértékű halmaz, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan

$$Q_n := \left\{r = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \max_{1\leq i\leq d} |x_i - a_i^{(n)}| \leq \frac{\delta_k}{2}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

– d-dimenziós $a^{(n)} := (a_1^{(n)}, \ldots, a_d^{(n)})$ középpontú és δ_n oldalhosszú kockákból álló – sorozat, amelyre

$$\gamma \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_d(Q_n) < \varepsilon$$

teljesül!

Útm. Mivel φ folytonosan differenciálható, ezért a Lagrange-egyenlőtlenség következtében

$$\|\varphi(t)-\varphi(s)\|_\infty \le M|t-s| \quad (t,s\in[a,b]),$$

ahol

$$M := \sup_{t\in[a,b]} \|\varphi'(t)\|_\infty.$$

Ha $M=0$, akkor γ egyelemű, azaz Lebesgue-nullmértékű halmaz. Ha $M>0$, akkor tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $K\in\mathbb{N}$, hogy $\frac{M^d}{K^{d-1}}<\varepsilon$. Ha

$$I_n := \left[a_n, a_n+\frac{b-a}{K}\right] := \left[a+\frac{n-1}{K}(b-a), a+\frac{n}{K}(b-a)\right] \quad (n\in\mathbb{N}\cap[1,K])$$

akkor $[a,b]=\bigcup_{n=1}^K I_n$ és

$$\varphi[I_n]\subset Q_n := \left\{r=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d:\ \max_{1\le i\le d}|x_i-\varphi_i(a_n)|\le\frac{M}{2K}\right\}.$$

Így

$$\gamma=\bigcup_{n=1}^K \varphi[I_n]\subset\bigcup_{n=1}^K Q_n\subset\mathbb{R}^d$$

és

$$\mu_d(Q_n)=\frac{M^d}{K^d}, \qquad \sum_{n=1}^K \mu_d(Q_k)\le\frac{M^d}{K^{d-1}}<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

30. Legyen (X,Ω) mérhető tér, $\mu_\Omega\to[0,+\infty]$ pedig olyan leképezés, amelyre $\mu(\emptyset)=0$ és

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B) \qquad (A,B\in\Omega:\ A\cap B=\emptyset)$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $A_n\in\Omega$ $(n\in\mathbb{N})$ izoton halmazsorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)$$

teljesül, akkor μ mérték!

Útm. Azt kell megmutatni, hogy μ szigma-additív. Valóban, ha $A_n\in\Omega$ $(n\in\mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre $A_k\cap A_l=\emptyset$ $(k,l\in\mathbb{N}\colon k\ne l)$, akkor indukcióval belátható, hogy

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right)=\sum_{k=1}^m \mu(A_k) \qquad (m\in\mathbb{N});$$

így a

$$B_m := \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad (m \in \mathbb{N})$$

mérhető halmazok izoton sorozata, ahonnan

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

következik. ■

1.9. 9. gyakorlat

1.9.1. A gyakorlat anyaga

Definíció. Legyen (X_i, Ω_i) $(i \in \{1,2\})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy $f : X_1 \to X_2$ **mérhető**, /ill. (Ω_1, Ω_2)**-mérhető**/, ha

$$f^{-1}[B] \in \Omega_1 \quad (B \in \Omega_2). \quad \Diamond$$

Feladat. Legyen (X_i, Ω_i) $(i \in \{1,2\})$ mérhető tér, $\mu_1 : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ mérték, $f : X_1 \to X_2$ mérhető leképezés. Igazoljuk, hogy

$$\mu_2(A) := \mu_1\left(f^{-1}[A]\right) \quad (A \in \Omega_2)$$

mérték!
Útm.

1. $\mu_2 \geq 0$, ui. $\mu_1 \geq 0$;
2. $\mu_2(\emptyset) = \mu_1\left(f^{-1}[\emptyset]\right) = \mu_1(\emptyset) = 0$;
3. ha
$$A_n \in \Omega_2 \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j : i, j \in \mathbb{N}),$$
akkor
   - $f^{-1}[A_n] \in \Omega_1$ $(n \in \mathbb{N})$;
   - $f^{-1}[A_i] \cap f^{-1}[A_j] = f^{-1}[A_i \cap A_j] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N} : i \neq j)$;
   - továbbá
$$\begin{aligned}\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu_1\left(f^{-1}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]\right) = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}[A_n]\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1\left(f^{-1}[A_n]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha (X_1, Ω_1), (X_2, Ω_2) és (X_3, Ω_3) mérhető tér, $f : X_1 \to X_2$ és $g : X_2 \to X_3$ mérhető függvények, akkor $g \circ f : X_1 \to X_3$ is mérhető függvény!
Útm. Ha $A \in \Omega_3$, akkor
$$(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]].$$
Továbbá g mérhetősége következtében
$$B := g^{-1}[A] \in \Omega_2,$$
ill. f mérhetőségét felhasználva
$$f^{-1}[g^{-1}[A]] = f^{-1}[B] \in \Omega_1$$
adódik. ■

Emlékeztető. Azt mondtuk, hogy

- $A \subset \mathbb{R}$ **Borel-halmaz**, ha $A \in \Omega_1$;
- $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ **Borel-halmaz**, ha alkalmas $B \in \Omega_1$ esetén $B \subset A$ és $(A \setminus B) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. ♢

Tétel. Legyen (X, Ω) mérhető tér és $* \in \{<, >, \leq, \geq\}$. Ekkor

1. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor (Borel-) mérhető, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$\{f * \alpha\} := \{x \in X : \ f(x) * \alpha\} \in \Omega$$

2. ha az $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető, úgy
$$\{f * g\} := \{x \in X : \ f(x) \star g(x)\} \in \Omega,$$
ahol $\star \in \{<, >, \leq, \geq, =, \neq\}$.

Biz. (**Házi feladat**: TK) ■

Következmények.

1. Ha $A \subset X$,
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ \\ 0 & (x \notin A) \end{cases} \qquad (x \in X),$$
úgy χ_A pontosan akkor mérhető, ha $A \in \Omega$, hiszen ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor
$$\chi_A^{-1}\left[[\alpha, +\infty]\right] = \begin{cases} \emptyset & (\alpha > 1), \\ \\ A & (0 < \alpha \leq 1), \\ \\ X & (\alpha \leq 0). \end{cases}$$
Ez pl. azt jelenti, hogy a Dirichlet-függvény mérhető (hiszen $\mathbb{Q} \in \Omega_1$).

2. Ha $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ állandófüggvény (értékkészlete egyelemű), akkor triviálisan mérhető, hiszen bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $f^{-1}\left[[\alpha, +\infty]\right]$ vagy az üres halmazzal, vagypedig X-szel egyenlő.

3. Ha valamely $p \in \mathbb{N}$ esetén $X := \mathbb{R}^p$ és $\Omega := \Omega_p$, továbbá az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$\{f \geq \alpha\} = \{x \in X : \ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}_p \subset \Omega_p,$$
azaz f Borel-mérhető.

4. ha $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, akkor minden mérhető $g : X \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ is mérhető.

5. ha $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor minden $p \in (0, +\infty)$ esetén $|f|^p : X \to [0, +\infty]$ is mérhető, ui.
$$\{|f| \geq \alpha\} = \{f \leq -\alpha\} \cup \{f \geq \alpha\}$$
(zárt halmazok véges uniója zárt) miatt $|f|$ is mérhető és minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$\{|f|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} X & (\alpha \leq 0), \\ \\ \left\{|f| \geq \alpha^{1/p}\right\} & (\alpha > 0) \end{cases} \in \Omega.$$

6. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ monoton függvény, akkor f mérhető, ui. pl. a monoton növekedő esetben bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $f^{-1}[[-\infty, \alpha]]$ nívóhalmaz vagy üres, vagypedig olyan intervallum, amelynek baloldali határpontja $\inf(I)$, jobboldali határpontja pedig
$$\sup\{x \in I : \; f(x) \leq \alpha\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $f : X \to \mathbb{R}$: $|f|$ mérhető. Igaz-e, hogy ekkor f is mérhető?[23]

Útm. Nem. Íme két ellenpélda:

1. $X := \{0,1,2\}$, $\Omega := \{\emptyset, X, \{0\}, \{1,2\}\}$ (nyilván X-beli σ-algebra). Az
$$f(0) := f(1) := 1, \quad f(2) := -1$$
függvényre $\{f = -1\} = \{2\} \notin \Omega$, azaz f nem mérhető, de $|f|$ triviálisan az.

2. $X := \mathbb{R}$, $\Omega := \{\emptyset, X\}$ (nyilván X-beli σ-algebra). Az
$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0), \\ & \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvényre $|f| = 1$ mérhető, de f nem, ui. $\{f = -1\} = (-\infty,0) \notin \Omega$. $\blacksquare$

Emlékeztető. Ha (X, Ω, μ) mértéktér, akkor

- az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényre
  1. $f \in L_0 := L_0(\mu)$[24] $:\Longleftrightarrow$ (f mérhető és $\mathcal{R}_f$ véges), továbbá egy $f \in L_0$ kanonikus alakja:
  $$f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}.$$

[23] Ha f mérhető, akkor $|f|$ is mérhető, ui. $|f| = \sup\{f, -f\}$.
[24] f **lépcsősfüggvény**.

2. $f \in L_0^+ := L_0^+(\mu)$[25] $:\Longleftrightarrow$ $(f \in L_0$ és $f \geq 0)$, továbbá egy $f \in L_0^+$ függvény (μ **mérték szerinti**) **integrál**ja:

$$\int f\,d\mu := \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\}) \in [0, +\infty].$$

Megjegyzés. Karakterisztikus függvény integrálja. Legyen $A \subset X$. Így $\chi_A \in L_0^+$ pontosan akkor teljesül, ha $A \in \Omega$, és ekkor

$$\int \chi_A\,d\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \backslash A) = \mu(A).$$

- az $f : X \to [0, +\infty]$ függvényre

1. $f \in L^+ := L^+(\mu) :\Longleftrightarrow \exists\, f_n \in L_0^+ \ (n \in \mathbb{N})\colon (f_n) \nearrow f$;
2. $f \in L^+ \Longleftrightarrow f$ mérhető, továbbá egy $f \in L^+$ függvény (μ **mérték szerinti**) **integrál**ja:

$$\int f\,d\mu := \lim \left(\int f_n\,d\mu \right);$$

3. ha $f \in L^+$, akkor $\displaystyle\int f\,d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ (μ-m.m.). $\Diamond$

Példa. Adott (X, Ω) mérhető tér, $\omega \in X$, $\{\omega\} \in \Omega$, ill.

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1 & (\omega \in A), \\ \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases} \qquad (A \in \Omega)$$

Dirac-mérték esetén

$$f \in L^+ \quad \Longrightarrow \quad \int f\,d\delta_\omega = f(\omega), \quad \text{ui.}$$

- ha $f \in L_0^+$, akkor

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_f} \alpha \cdot \chi_{\{f=\alpha\}},$$

ezért egyetlen olyan $\alpha \in \mathcal{R}_f$ van, amelyre $\omega \in \{f = \alpha\}$. Mivel δ_ω definíciója miatt $\delta_\omega(\{f = \alpha\}) = 1$, ha $\alpha = f(\omega)$, különben $\delta_\omega(\{f = \alpha\}) = 0$, így

$$\int f\,d\delta_\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_f} \alpha \cdot \delta_\omega(\{f = \alpha\}) = f(\omega).$$

[25] f **nemnegatív lépcsősfüggvény**.

- ha $f \in L^+$, akkor van olyan $f_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbb{N})$: $(f_n) \nearrow f$, így

$$\int f\, d\delta_\omega = \lim \left(\int f_n\, d\delta_\omega \right) = \lim \left(f_n(\omega) \right) = f(\omega). \quad \blacksquare$$

Példa. Legyen $X := \mathbb{N}$, $\Omega := \mathcal{P}(X)$, $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték,

$$\alpha_n := \mu(\{n\}) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $L^+ = [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$ és bármely $f \in L^+$ függvényre (azaz az $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ sorozatra)

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \alpha_n.$$

Útm.

- $f \in L^+ \Leftrightarrow f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ és mérhető, azaz minden $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ Borel-halmaz esetén

  $$f^{-1}[A] \in \Omega = \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

  ami triviálisan igaz.

- Legyen $f \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$ és

  $$f_n(k) := \begin{cases} 0 & (k > n), \\ & \\ \min\{n, f(k)\} & (k \leq n) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

  $$\Big/ f_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{\{k\}}, \text{ azaz } f_n = (f(0), \ldots, f(n), 0, 0, \ldots) \Big/,$$

  ekkor

  $$f_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \uparrow f \quad (n \to \infty).$$

  Így

  $$\int f\, d\mu = \lim \left(\int f_n\, d\mu \right) = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}) \right) = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\alpha_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\alpha_n. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha pl. μ a számosságmérték (vö. 8. gyakorlat), akkor

$$\alpha_n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

teljesül. $\square$

Emlékeztető. Ha (X, Ω, μ) mértéktér, akkor

- (B. Levi) $f_n \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén

  1. $(f_n) \nearrow \Longrightarrow f := \lim(f_n) = \sup_n(f_n) \in L^+$ és
  $$\int f \, d\mu = \lim \left(\int f_n \, d\mu \right) = \sup_n \left(\int f_n \, d\mu \right).$$

  2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^+$ és
  $$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

- $f : X \to \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow$

  – f mérhető $\Longleftrightarrow f^{\pm} \in L^+$, ahol
  $$f^+ := \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2}, \qquad f^- := -\min\{f, 0\} = \frac{|f| - f}{2};$$

  – $f \in L :\Longleftrightarrow \left(f \text{ mérhető és } \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \mathbb{R} \right)$[26], továbbá $f \in L$ esetén
  $$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

  Megjegyzés. Ha μ véges mérték: $\mu(X) < +\infty$, akkor bármely korlátos és mérhető $f : X \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f \in L$. $\Diamond$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha (X, Ω, μ) mértéktér, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény és $a, p \in (0, +\infty)$, akkor
$$\mu(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{1}{a^p} \cdot \int |f|^p \, d\mu$$
teljesül (**Markov-egyenlőtlenség**)!

Útm. Ha $A := \{|f| \geq a\}$, akkor $A \in \Omega$ és $|f|^p \geq a^p \chi_A$, így
$$\mu(\{|f| \geq a\}) = \int \chi_A \, d\mu \leq \int \frac{|f|^p}{a^p} \, d\mu = \frac{1}{a^p} \int |f|^p \, d\mu. \blacksquare$$

[26] f (μ-)**integrálható függvény**

Következmények.

1. Ha $\int |f|^p \, d\mu < +\infty$, akkor
$$\lim_{a\to+\infty} \mu\left(\{|f| \geq a\}\right) = 0.$$

2. Ha $\int |f| \, d\mu = 0$, akkor μ folytonossága (vö. $\boxed{\mathbf{J}}$ Függelék) következtében
$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X: \ f(x) \neq 0\}) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} n \int |f| \, d\mu = 0.\end{aligned}$$

3. Ha (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L$, az
$$F := f - \int f \, d\mu$$
függvényre $0 < \|F\|_2 < +\infty$, akkor tetszőleges $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$\mu\left(\{|F| \geq \lambda \|F\|_2\}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$
(**Csebisev-egyenlőtlenség**), ui.
$$\mu\left(\{|F| \geq \lambda \|F\|_2\}\right) = \mu\left(\left\{|F|^2 \geq \lambda^2 \|F\|_2^2\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \|F\|_2^2} \cdot \int |F|^2 \, d\mu = \frac{1}{\lambda^2 \|F\|_2^2} \cdot \|F\|_2^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \blacksquare$$

HÁZI FELADAT. A $\boxed{\mathbf{J}}$ Függelék ismeretanyaga.

1.9.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Legyen (X, Ω) mérhető tér. Határozzuk meg az összes $f : X \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvényt az alábbi esetekben!

   (a) $\Omega := \mathcal{P}(X)$;

   (b) $\Omega := \{\emptyset, X\}$;

   (c) $\Omega := \{\emptyset, X, A, A^c\}$, ahol $A \subset X$.

   Útm.

   (a) Ha $\Omega := \mathcal{P}(X)$, akkor nyilvánvalóan minden függvény mérhető.

   (b) Ha $\Omega := \{\emptyset, X\}$, akkor pontosan az állandó függvények lesznek mérhetők.

   (c) Ha $A \subset X$ és $\Omega := \{\emptyset, X, A, A^c\}$, úgy az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor mérhető, ha f az A, ill. az A^c halmazon állandó, azaz alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

   $$f = a\chi_A + b\chi_{A^c}. \quad \blacksquare$$

2. Mutassuk meg, hogy ha (X_1, Ω_1) és (X_2, Ω_2) mértéktér, $f : X_1 \to X_2$, továbbá valamely $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X_2)$ esetén

   $$\Omega_2 := \sigma(\mathcal{X}),$$

   úgy f pontosan akor mérhető, ha fennáll az

   $$f^{-1}[A] \in \Omega_1 \quad (A \in \mathcal{X})$$

   tartalmazás!

   Útm.

   1. lépés. Mivel $A \in \mathcal{X} \subset \Omega_2$, a szükségesség nyilvánvaló.

   2. lépés. Legyen

   $$\Omega := \left\{A \in \Omega_2 : \ f^{-1}[A] \in \Omega_1\right\}.$$

   Ekkor az Ω halmazrendszer σ-algebra, hiszen

   - $X_2 \in \Omega_2$, ui. $f^{-1}[X_2] = X_1 \in \Omega_1$,
   - ha $A \in \Omega$, akkor

     $$f^{-1}[X_2 \backslash A] = f^{-1}[X_2] \backslash f^{-1}[A] = X_1 \backslash f^{-1}[A] \in \Omega_1,$$

     azaz $X_2 \backslash A \in \Omega$;

- ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor
  - $f^{-1}[A_n] \in \Omega_1$ $(n \in \mathbb{N})$, így $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[A_n] \in \Omega_1$, de
  - $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[A_n] = f^{-1}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right] \in \Omega_1$, így $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega$.

  Világos, hogy
  $$f^{-1}[A] \in \Omega_1 \quad (A \in X)$$
  miatt $X \subset \Omega$, így
  $$\sigma(X) \subset \Omega, \qquad \text{de} \qquad \Omega \subset \Omega_2 \qquad \text{és} \qquad \sigma(X) = \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \Omega_2,$$
  tehát f mérhető. ■

3. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$, majd tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ esetén $(X_\gamma, \Omega_\gamma)$ mérhető tér, $X \neq \emptyset$, $f_\gamma : X \to X_\gamma$, továbbá
$$f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) := \left\{f_\gamma^{-1}[A] \in \mathcal{P}(X) \middle| A \in \Omega_\gamma\right\} \quad (\gamma \in \Gamma).$$
Igazoljuk, hogy ekkor
$$\Omega := \sigma\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma)\right)$$
a legszűkebb X-beli σ-algebra, amelyre az f_γ leképezés (Ω, Ω_γ)-mérhető!
Útm.

- $\forall\gamma \in \Gamma$: f_γ (Ω, Ω_γ)-mérhető, ui. ha $A \in \Omega_\gamma$, akkor
$$f_\gamma^{-1}[A] \in f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) \subset \Omega.$$

- Legyen $\widetilde{\Omega} \subset \wp(X)$ σ-algebra és tegyük fel, hogy
$$\forall\gamma \in \Gamma\ \forall A \in \Omega_\gamma: \ f_\gamma^{-1}[A] \in \widetilde{\Omega} \Rightarrow f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) \subset \widetilde{\Omega}.$$
Ekkor
$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) \subset \widetilde{\Omega} \Rightarrow \Omega \subset \widetilde{\Omega}. \quad ■$$

4. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan mérhető függvényekből álló sorozat, amely pontonként konvergens, és
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Igazoljuk, hogy ekkor az f határfüggvény is mérhető!
Útm. Vö. TK ■

5. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mutassuk meg, hogy f' Borel-mérhető!
Útm. Legyen $x \in H$. Ekkor alkalmas $n_x \in \mathbb{N}$ indexszel

$$x + \frac{1}{n} \in H \qquad (n_x \leq n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy az

$$f_n(x) := n \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \qquad (x \in H,\ n_x \leq n \in \mathbb{N})$$

függvények folytonosak, így mérhetők. Mivel

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in H),$$

ezért f' is mérhető. ■

6. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$, továbbá $X := \{0, 1, \ldots, n\}$, majd tekintsük a

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

mértéket! Számítsuk ki az

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad f(k) := k$$

függvény esetében az

$$\int f \, d\mu$$

integrált!
Útm. Mivel

$$f(k) = \sum_{j=0}^{n} j \cdot \chi_{\{j\}}(k) \qquad (k \in X),$$

ezért

$$\begin{aligned}\int f\,d\mu &= \sum_{j=0}^{n} j\cdot\mu(\{j\}) = \sum_{j=1}^{n} j\cdot\binom{n}{j}\cdot p^j\cdot(1-p)^{n-j} = \\ &= n\cdot p\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!}\cdot p^{j-1}\cdot(1-p)^{(n-1)-(j-1)} = \\ &= n\cdot p\cdot\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\cdot p^{j-1}\cdot(1-p)^{(n-1)-(j-1)} = \\ &= n\cdot p\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot p^{j}\cdot(1-p)^{(n-1)-j} = \\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7. Legyen $X := [0,1]$, Ω az X Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, λ pedig a számegyenesen értelmezett Lebesgue-mérték leszűkítése Ω-ra, továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \in \mathbb{R}$$

reláció!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $x \in [0,1]$ esetén a

$$g : [1,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) := \left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \exp\left(t\cdot\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)\right)$$

függvény monoton növekedő. Valóban,

$$g'(t) = \left(\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}\right)\cdot g(t) > 0 \qquad (t \in [1,+\infty)),$$

hiszen $\dfrac{x}{t} \in [0,1]$, továbbá a

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h(u) := \ln(1+u) - \frac{u}{1+u}$$

függvényre

$$h(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad h'(u) = \frac{u}{(1+u)^2} \geq 0 \quad (u \in [0,1])$$

teljesül.

2. lépés. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in L^+$, és

$$f_n \nearrow 1 \in L^+ \qquad (n \to \infty),$$

így Levi tételének következtében

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int 1 \, d\lambda = 1 \cdot \lambda([0,1]) = 1. \quad \blacksquare$$

8. Legyen $X := [0,1]$, Ω az X Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, λ pedig a számegyenesen értelmezett Lebesgue-mérték leszűkítése Ω-ra. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := 1 - x \qquad (x \in [0,1])$$

függvényre $f \in L$, majd számítsuk ki az $\int f \, d\lambda$ (Lebesgue-)integrált!

Útm. Mivel f folytonos, ezért mérhető, így korlátosságából $f \in L$ következik. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ esetén

$$A_n := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$$

és

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) \chi_{A_n} \qquad (x \in X),$$

akkor (f_n) monotnon növő, továbbá

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (x \in X).$$

Így Levi tételének következtében

$$\begin{aligned}
\int f \, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) \lambda(A_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(2^n - \frac{2^n(2^n+1)}{2 \cdot 2^n}\right) \frac{1}{2^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

9. Legyen $X := [1, +\infty)$, Ω az X Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, λ pedig a számegyenesen értelmezett Lebesgue-mérték leszűkítése Ω-ra, továbbá $f : X \to [0, +\infty)$ nonoton csökkenő függvény. Lássuk be, hogy igaz az

$$f \in L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés. Tegyük fel, hogy $f \in L$, azaz $\int f \, d\lambda < +\infty$. Mivel

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k)\chi_{(k-1,k]}(x) \leq f(x) \qquad (x \in X),$$

ezért Levi tételének következtében

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{(k-1,k]} \, d\lambda = \int \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\chi_{(k-1,k]} \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda < +\infty.$$

2. lépés. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$. Mivel

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\chi_{[k,k+1)}(x) \qquad (x \in X),$$

ezért ismét Levi tételének felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int f \, d\lambda \;\leq\; \int \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\chi_{[k,k+1)} \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{[k,k+1)} \, d\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) < +\infty. \quad \blacksquare$$

10. Igazoljuk, hogy az f függvény mérhető, majd számítsuk ki az $\int f \, d\mu_1$ integrál értékét!

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := [e^x]$;

(b) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := 2^{-\frac{n}{2}}$ $(x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0)$.

Útm.

(a) Bármely $x \in [0, \ln(2)) =: A$ esetén $e^x \in [1,2)$, ill. $x \in [\ln(2),1] =: B$ esetén $e^x \in [2, e]$. Következésképpen, ha $x \in [0,1]$, akkor

$$[e^x] = \chi_A(x) + 2 \cdot \chi_B(x).$$

Az f függvény tehát L_0^+-beli, így

$$\int f \, d\mu_1 = \mu_1(A) + 2 \cdot \mu_1(B) = \ln(2) + 2(1 - \ln(2)) = 2 - \ln(2).$$

(b) Legyen $A_n := [n, n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$, továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} \cdot \chi_{A_k}.$$

Ekkor

$$f_n \nearrow f \qquad (n \to \infty),$$

így

$$\int f \, d\mu_1 = \lim_{n \to \infty\infty} \int f_n d\mu_1 = \lim_{n \to \infty\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} \cdot \mu_1(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}. \qquad \blacksquare$$

1.10. 10. gyakorlat

1.10.1. A gyakorlat anyaga

Emlékeztető.

1. Ha (X, Ω, μ) mértéktér, akkor

   - mérhető $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény esetén jelölje

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & (p \in (0, +\infty)), \\ \\ \inf\{\alpha \geq 0 : \ |f| \leq \alpha \quad (\mu\text{-m.m.})\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

   - $L^p := \{f : X \to \mathbb{R} : \ f$ mérhető és $\|f\|_p < +\infty\}$ $(p \in [1, +\infty])$.
   - $(\mu(X) < +\infty \quad \text{és} \quad 1 \leq p \leq q \leq +\infty) \Longrightarrow L^\infty \subset L^q \subset \ L^p \subset L^1$.

2. Ha $-\infty < a < b < +\infty$, $p \in [1, +\infty]$,

$$X := [a, b], \qquad \Omega := \{A \subset [a, b] : \ A \in \Omega_1\}, \qquad \mu(A) := \mu_1(A) \quad (A \in \Omega),$$

   akkor ezen (X, Ω, μ) (teljes) mértéktér esetében $L^p[a, b] := L^p(\mu)$. Így, ha $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, akkor

$$L^\infty[a, b] \subset L^q[a, b] \subset L^p[a, b] \subset L^1[a, b].$$

3. Ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor $f \in L^\infty[a, b]$ és $\displaystyle\int_a^b f = \int f \, d\mu$.

   Megjegyzés. Ha $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}), \\ \\ 0 & (x \in [a, b] \backslash \mathbb{Q}), \end{cases}$$

   akkor $f \notin \mathfrak{R}[a, b]$ (vö. 3. gyakorlat), de $f \in L^\infty[a, b]$ következtében f (klasszikus értelemben) Lebesgue-integrálható: $f \in L^1[a, b]$, és

$$\int f \, d\mu = \mu([a, b] \cap \mathbb{Q}) = 0. \quad \lozenge$$

Feladat. Adott $X \subset \mathbb{R}$, $\Omega := \left\{A \subset X \middle| A \in \Omega_1\right\}$, $\mu := \mu_1|_\Omega$ és

1. $X := [1, +\infty)$,
$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \in X)$$
esetén mutassuk meg, hogy $f \in L^2$, de $f \notin L^1$!
Útm.

- $f \geq f \cdot \chi_{[1,n]}$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz
$$\int f \, d\mu \geq \int f\chi_{[1,n]} \, d\mu = \int_1^n \frac{1}{x} \, dx = \ln(n) \to +\infty \qquad (n \to \infty),$$
így $\int |f| \, d\mu = +\infty$, azaz $f \notin L^1$.

- $f^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f^2 \cdot \chi_{[n,n+1]}$, így B. Levi tétele miatt
$$\int |f|^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f^2 \cdot \chi_{[n,n+1]} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$
azaz $f \in L^2$.

Megjegyzés. Vegyük figyelembe, hogy itt μ nem véges! ∎

2. $X := (0,1]$,
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x \in X)$$
esetén mutassuk meg, hogy $f \in L^1 \backslash L^2$ teljesül!
Útm.

- $$\int |f| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \cdot \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2,$$
így $f \in L^1$.
- $\int |f|^2 \, d\mu \geq \int f^2\chi_{[\frac{1}{n},1]} \, d\mu = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} \, dx = \ln(n) \to +\infty$ $(n \to \infty)$, így $f \notin L^2$.

Megjegyzés. Tehát az L^p terek közötti fenti tartalmazás valódi. ∎

Feladat. Milyen $p \in [1, +\infty]$ esetén lesz $f \in L^p := L^p[1, +\infty)$, ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$ és

$$f(x) := \frac{1}{1 + \sqrt[k]{x}} \qquad (x \in [1, +\infty))\ ?$$

- Legyen $p = +\infty$. Mivel $\lim_{+\infty} f = 0$, ezért $(0 <)f$ korlátos. f folytonossága következtében f mérhető, tehát $f \in L^\infty$.

- Legyen $p \in [1, +\infty)$. Az

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [1, n+1]), \\ \\ 0 & (x \in (n+1, +\infty)) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatra $f_n^p \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$ és nyilván $(f_n^p) \nearrow f^p$, továbbá Levi tétele miatt

$$\int |f|^p \, d\mu = \lim \left(\int f_n^p \, d\mu \right) = \lim \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{(1 + \sqrt[k]{x})^p} \, dx \right).$$

Lévén, hogy $[1, +\infty) = [1, k] \cup (k, +\infty)$, két eset van:

1. ha $p \in [1, k]$, akkor (vö. 1. gyakorlat)

$$\lim \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{(1 + \sqrt[k]{x})^p} \, dx \right) = +\infty,$$

amiből $f \notin L^p$ következik.

2. ha $p \in (k, +\infty)$, akkor (vö. 1. gyakorlat)

$$\lim \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{(1 + \sqrt[k]{x})^p} \, dx \right) < +\infty,$$

azaz $f \in L^p$. ■

Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (nem egy pontból álló) intervallum, (I, Ω, μ) Lebesgue-stuktúra, azaz

$$\Omega := \left\{ A \in \mathcal{P}(I) \middle| A \in \Omega_1 \right\}, \qquad \mu := \mu_1 | \Omega,$$

továbbá $f : I \to \mathbb{R}$, és minden $J \subset I$ kompakt intervallum esetén $f \in \mathfrak{R}(J)$, akkor a következő mondható:

$$f \in L^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_I |f| \in \mathbb{R} \text{ (improprius Riemann-integrál konvergens).}$$

Bizonyítás. Legyen $J_n \subset I$ olyan kompakt intervallum, hogy

$$J_n \subset J_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim\left(\max(J_n)\right) = \sup(I), \ \ \lim\left(\min(J_n)\right) = \inf(I).$$

Ekkor

$$|f|\chi_{J_n} \nearrow |f| \qquad (n \to \infty),$$

így

$$\int |f|\,d\mu = \lim\left(\int |f|\cdot\chi_{J_n}\,d\mu\right) = \lim\left(\int_{\min(J_n)}^{\max(J_n)} |f|\right) = \int_I |f|$$

(improprius Riemann-integrál). Tehát

$$\int |f|\,d\mu < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_I |f| < +\infty.$$

Megjegyzés. $\int_I |f|$ helyett nem írható $\int_I f$, ui. ha pl.

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad (x \in (0,+\infty) =: I),$$

akkor $\int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$ (vö. 1. gyakorlat), de $f \notin L^1(0,+\infty)$, hiszen a minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{|\sin(x)|}{(n+1)\pi} \quad (x \in [n\pi,(n+1)\pi]),$$

becslés miatt

$$\begin{aligned}
\int |f|\,d\mu \ &\geq \ \int \sum_{n=1}^{\infty} |f|\chi_{[n\pi,(n+1)\pi]}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f|\chi_{[n\pi,(n+1)\pi]}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \geq \\
&\geq \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\,dx = \\
&= \ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$, (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$, $A \in \Omega$. Ekkor az

$$\int_A f \, d\mu := \int f \cdot \chi_A \, d\mu \in [0, +\infty]$$

számot vagy $+\infty$-t az f függvény A **halmazon vett integrálján**ak nevezzük.

Megjegyzés. Ha $A = X$, akkor

$$\int_X f \, d\mu = \int f \cdot \chi_X \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Ezért szokás $\int f \, d\mu$ helyett az $\int_X f \, d\mu$ írásmódot használni. □

Feladat. Igazoljuk, hogy ha (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$, akkor a

$$\mu_f : \Omega \to [0, +\infty], \qquad \mu_f(A) := \int_A f \, d\mu$$

leképezés (az f **súlyfüggvény** által generált) mérték!
Útm.

- Világos, hogy $\mu_f \geq 0$.
- Mivel bármely $f \in L^+$ esetén
$$f \cdot \chi_\emptyset = \chi_\emptyset \in L_0^+,$$
ezért $\mu_f(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N} : i \neq j)$, akkor az $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmazzal
$$f \cdot \chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n}.$$
Így Levi tétele következtében
$$\mu_f(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n). \quad ■$$

Megjegyzés. Ha

$$f(x) := 1 \qquad (x \in X),$$

akkor $\mu_f = \mu$, hiszen

$$\mu_f(A) = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \qquad (A \in \Omega). \quad \square$$

Példa. Ha $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra $(\Omega = \Omega_1, \lambda = \mu_1)$, akkor bármely $A \in \Omega$ (Lebesgue-mérhető) halmaz esetén a

$$P : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad P(A) := \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \, d\lambda(x)$$

leképezés valószínűségi mérték, ui. a fentiek következtében mérték, másrészt pedig

$$\begin{aligned} P(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2) \, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)\sqrt{2} \, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned}$$

Emlékeztető (Lebesgue-tétel.) Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $p \in [1, +\infty)$, $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbb{N})$ pedig olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

- μ-m.m. $x \in X$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;
- alkalmas $F \in L^+$, az $\|F\|_p < +\infty$ feltételnek eleget tévő függvénnyel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$|f_n(x)| \leq F(x) \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor

1. van olyan $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, amelyre $f = \lim(f_n)$ $\quad\mu$-m.m.;
2. minden 1.-beli f függvényre $f \in L^p$ és $\lim(\|f - f_n\|_p) = 0$. $\diamond$

HÁZI FELADAT. Az $\boxed{\text{K}}$ Függelék ismeretanyaga.

Következmények.

1. (**„kis Lebesgue-tétel”.**) Ha μ véges $/\mu(X) < +\infty/$ és valamely $0 \leq c \in \mathbb{R}$ számmal tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x)| \leq c \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X),$$

akkor az $F :\equiv c$ választással olyan majoránst kapunk, amelyre

$$\int F^p \, d\mu = c^p \cdot \mu(X) < +\infty.$$

2. Ha $p = 1$, akkor $/f \in L^1$ és/

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right),$$

hiszen

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, d\mu = \|f - f_n\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. Az F majoránsfüggvénnyel megfogalmazott korlátossági feltétel nélkül nem igaz az állítás. Legyen ui. pl. $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, ill.

$$f_n := n \cdot \chi_{(0,1/n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

(a) ha valamely $F \in L^+$ függvénnyel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n| \leq F \quad (\lambda\text{-m.m.}), \qquad \text{akkor} \qquad F(x) \geq n \quad \left(\lambda\text{-m.m. } x \in I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right),$$

ahonnan

$$F \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{I_n} \quad \lambda\text{-m.m.}$$

következik. Így a Levi-tétel sorokra vonatkozó állítása, ill.

$$\lambda(I_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következtében

$$\begin{aligned}\|F\|_1 &= \int F\,d\lambda \geq \int \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\chi_{I_n}\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int n\cdot\chi_{I_n}\,d\lambda = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty,\end{aligned}$$

azaz $F \notin L^1$.

(b) nem teljesül a felcserélhetőségi állítás, azaz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\,d\mu\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\lambda\left(0,\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 = \\ &= \int 0\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.\end{aligned}$$

2. A $p = +\infty$ esetben nem igaz az állítás. Legyen ui. pl. $(\mathbb{R},\Omega,\lambda)$ Lebesgue-struktúra, ill.

$$f_n := \chi_{(0,1/n)} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

(a) bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n\in L^\infty$, továbbá $\lim_{n\to+\infty} f_n \equiv 0$;

(b) pl. az $F :\equiv 1$ függvény egy L^∞-beli majoránsa az (f_n) függvénysorozatnak, továbbá a tétel 1. részében szereplő f függvény λ-m.m. nulla, de

$$\|f - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \inf\left\{\alpha\geq 0:\ |\chi_{(0,1/n)}| \leq \alpha\ \lambda\text{-m.m.}\right\} = 1 \qquad (n\in\mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\,dx$$

határértéket!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3} \qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in[1,+\infty)),$$

akkor bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{x^3} = x^{-5/2} =: F(x) \qquad (x\in[1,+\infty)).$$

Mivel

$$\|F\|_1 = \int_1^{+\infty} |F| = \int_1^{+\infty} F = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} x^{-5/2}\,dx = \ldots = \frac{2}{3},$$

ezért egyrészt $F \in L^1[1,+\infty)$, másrészt pedig $f_n \in L^1[1,+\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. A tetszőleges $x \in [1,+\infty)$ esetén fenálló

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

határérték-reláció és a Lebesgue-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\,dx = \int_1^{+\infty} 0\,dx = 0. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{1}{1+x^n}\,dx$$

határértéket!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \frac{1}{1+x^n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,2]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[0,2]$,

$$|f_n(x)| \leq 1 =: F(x) \qquad (x \in [0,2]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[0,2]$, továbbá bármely $x \in [0,2]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1)), \\ 1/2 & x = 1, \\ 0 & (x \in (1,2]), \end{cases}$$

azaz (μ_1)-m.m. $x \in [0,2]$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_{[0,2]} \chi_{[0,1]} = \mu_1([0,1]) = 1. \quad \blacksquare$$

1.10.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Mely $c \in (0,+\infty)$ esetén lesz az

$$f(x) := \frac{1}{x^c} \qquad (x \in X)$$

függvény L^1-beli az (X,Ω,λ) Lebesgue-struktúrára[27] vonatkozóan?

(a) $X := [1,+\infty)$;

(b) $X := (0,1]$.

Útm. Mivel f pozitív értékű, azért

(a) $X := [1,+\infty)$ esetén

$$f \in L^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\omega\to+\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x^c}\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad c > 1.$$

(b) $X := (0,1]$ esetén

$$f \in L^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 \frac{1}{x^c}\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad c < 1. \quad \blacksquare$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $((0,1),\Omega,\lambda)$ Lebesgue-struktúra, akkor az

$$f(x) := \frac{\cos(x)}{x^3} \quad (x \in (0,1)),$$

függvényre nem teljesül az $f \in L^1$ tartalmazás!
Útm. Mivel

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left(x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

és

$$(0,1) \ni x \mapsto \frac{1}{x^3}$$

monoton csökkenő, ezért az $4 < n\pi$ feltételnek eleget tévő bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot n^3 \cdot \chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} \leq f,$$

így az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\int f\,d\lambda \geq \int \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot n^3\cdot\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}\,d\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot n^3\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{n^3}{n(n+1)} \longrightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

[27] Ez azt jelenti, hogy $\Omega = \{A \subset X : A \in \Omega_1\}$, $\lambda = \mu_1|_\Omega$.

3. Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $p, q \in [1, +\infty)$: $p < q$, továbbá $f \in L^p \cap L^q$. Igazoljuk, hogy ekkor bármely $r \in [p, q]$ számra $f \in L^r$ teljesül!
Útm. Ha $r \in [p, q]$, akkor

$$|f| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f|^q \leq |f|^p, \qquad \text{ill.} \qquad |f| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |f|^p \leq |f|^q$$

következtében

$$|f|^r \leq |f|^p + |f|^q.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in L^r$. ■

4. Legyen $X := (0,1/2]$, Ω az X Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, μ pedig a számegyenesen értelmezett Lebesgue-mérték leszűkítése Ω-ra, $1 \leq p < +\infty$. Milyen $q \in [p, +\infty]$ esetén teljesül az

$$f(x) := x^{-1/p} \cdot (\ln(1/x))^{-2/p} \qquad (x \in X)$$

függvényre az $f \in L^q$ tartalmazás?
Útm.

- $\boxed{q = +\infty}$:
$\lim_0 f = +\infty$ miatt tetszőleges $0 < K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $0 < \delta < 1/2$, hogy minden $x \in (0, \delta)$ esetén $f(x) > K$, tehát

$$\|f\|_\infty \geq K \qquad ((0, \delta) \subset \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) > K\}),$$

azaz

$$\mu(\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) > K\}) \geq \delta,$$

így $\|f\|_\infty = +\infty$, azaz $f \notin L^\infty(0,1/2]$.

- $\boxed{q \in [p, +\infty)}$:
Legyen $1 < n \in \mathbb{N}$, $f_n := f \cdot \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]}$. Ekkor $f_n^q \in L^+$ $(1 < n \in \mathbb{N})$ és $f_n^q \nearrow f^q$ $(n \to \infty)$. Tehát a Levi-tétel szerint

$$\int f^q \, d\mu = \lim \left(\int f_n^q \, d\mu \right) = \lim \left(\int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x^{q/p} \cdot \ln^{2q/p}(1/x)} \, dx \right).$$

Így

– $\boxed{q = p}$ esetén $\displaystyle\int f^q \, d\mu = \frac{1}{\ln(2)}$, azaz $f \in L^q$, ui.

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x \cdot \ln^2(1/x)} \, dx &= \int_{1/n}^{1/2} \frac{1/x}{\ln^2(1/x)} \, dx = \int_n^2 \frac{y}{\cdot \ln^2(y)} \cdot \frac{-1}{y^2} \, dy = \\
&= \int_2^n \frac{1}{y \cdot \ln^2(y)} \, dy = \left[\frac{-1}{\ln(y)}\right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \\
&\to \frac{1}{\ln(2)} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

– $\boxed{q \in (p, +\infty)}$ esetén $\displaystyle\int f^q \, d\mu = +\infty$, azaz $f \notin L^q$, ui.

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x^{q/p} \cdot \ln^{2q/p}(1/x)} \, dx &\geq \int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x^{q/p} \cdot \ln^{2q/p}(2)} \, dx = \frac{1}{\ln^{2q/p}(n)} \cdot \\
&\cdot \int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x^{q/p}} \, dx = \frac{1}{\ln^{2q/p}(n)} \cdot \left[\frac{x^{1-(q/p)}}{1-(q/p)}\right]_{1/n}^{1/2} = \\
&= \frac{p}{(q-p)\ln^{2q/p}(n)} \cdot \left(n^{(q-p)/p} - 2^{(q-p)/p}\right) \\
&\longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. Legyen (X, Ω, μ) Lebesgue-struktúra. Milyen $1 \leq p \leq +\infty$ esetén teljesül az

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x \in X := (0,1])$$

függvényre az $f \in L^p$ tartalmazás?

Útm.

- $\boxed{p = +\infty}$: $\lim\limits_0 f = +\infty$ miatt tetszőleges $0 < K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $0 < \delta < 1$, hogy minden $x \in (0, \delta)$ esetén $f(x) > K$, azaz

$$\|f\|_\infty \geq K \qquad ((0, \delta) \subset \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) > K\}),$$

tehát

$$\mu\left(\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) > K\}\right) \geq \delta,$$

így $\|f\|_\infty = +\infty$, azaz $f \notin L^\infty(0,1]$;

- $\boxed{p \in [1,+\infty)}$: Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $f_n := f \cdot \chi_{[\frac{1}{n},1]}$. Ekkor $f_n^p \in L^+$ $(1 < n \in \mathbb{N})$ és $f_n^p \nearrow f^p$, így a Levi-tétel szerint $f^p \in L^+$ és

$$\int |f|^p \, d\mu = \lim \left(\int f_n^p \, d\mu \right) = \lim \left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x^p}} \, dx \right).$$

Így

– $\boxed{p = 1}$ esetén $\displaystyle\int |f| \, d\mu = 2$, azaz $f \in L^1$, ui. $\displaystyle\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right] \longrightarrow 2$ $(n \to \infty)$.

– $\boxed{p \in (1,+\infty)}$ esetén $\displaystyle\int |f|^p \, d\mu = \begin{cases} \dfrac{2}{2-p} & (p < 2), \\ +\infty & (p = 2), \\ +\infty & (p > 2) \end{cases}$ $(f \in L^p \iff p < 2)$, ui.

$$\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x^p}} \, dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2}{2-p} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n^{2-p}}} \right) & (p \neq 2) \\ \ln(n) & (p = 2) \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2-p} & (p < 2), \\ +\infty & (p = 2), \\ +\infty & (p > 2) \end{cases} \qquad (n \to \infty).$$

6. Mutassuk meg, hogy ha

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} & (n - 1 \leq x < n, \ n \in \mathbb{N}), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

akkor az $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ improprius integrál konvergens, de nem igaz az $f \in L^1$ tartalmazás!

Útm. Vö. 1. beadható feladatsor! ■

7. Legyen $X := [1, +\infty)$, Ω az X Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, λ pedig a számegyenesen értelmezett Lebesgue-mérték leszűkítése Ω-ra, továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \left(\frac{1}{x + \ln(x)}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty$$

reláció!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén a

$$g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) := \left(\frac{1}{x + \ln(x)}\right)^{1+\frac{1}{t}} = \exp\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{x + \ln(x)}\right)\right)$$

függvény monoton növekedő. Valóban,

$$g'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \ln(x + \ln(x)) \cdot g(t) \geq 0 \qquad (t \in [1, +\infty)).$$

2. lépés. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in L^+$, és tetszőleges $x \in [1, +\infty)$ elemre

$$f_n(x) \nearrow f(x) := \frac{1}{x + \ln(x)} \qquad (n \to \infty),$$

továbbá $f \in L^+$. Így Levi tételének következtében

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x + \ln(x)} \, dx = +\infty,$$

hiszen

$$\frac{1}{x + \ln(x)} \geq \frac{1}{2x} \quad (x \in [1, +\infty)) \qquad \text{és} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} \, dx = +\infty. \quad \blacksquare$$

8. Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $p, q, r \in [1, +\infty)$: $p < r < q$. A Hölder-egyenlőtlenség (vö. EA) felhasználásával mutassuk meg, hogy ekkor $L^p \cap L^q \subset L^r$, továbbá bármely $f \in L^p \cap L^q$ és alkalmas $\Theta \in (0,1)$ esetén fennáll az

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\Theta} \cdot \|f\|_q^{\Theta}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Ha $f \in L^p \cap L^q$ és

$$q_1 := \frac{p}{r(1-\Theta)}, \qquad \text{ill.} \qquad q_2 := \frac{q}{r\Theta}$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség következtében

$$\int |f|^r \, d\mu = \int |f|^{r\Theta} \cdot |f|^{r(1-\Theta)} \, d\mu \leq \left(\int |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{\Theta r}{q}} \cdot \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{r(1-\Theta)}{p}} .$$

Itt

$$\frac{p}{r(1-\Theta)} > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - \Theta < \frac{p}{r},$$

továbbá

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1 = \frac{r(1-\Theta)}{p} + \frac{r\Theta}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \Theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \frac{p-r}{p-q} \cdot \frac{q}{r}. \quad \blacksquare$$

9. Legyen $X := (0,1]$ és (X, Ω, λ) Lebesgue-stuktúra. Mutassuk meg, hogy van olyan $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$f \in \left(\bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p \right) \setminus L^\infty$$

teljesül!

Útm. Ha

$$f(x) := \ln(1/x) \qquad (x \in (0,1]),$$

akkor

- $\lim\limits_{0} f = +\infty$ miatt tetszőleges $0 < K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $0 < \delta < 1$, hogy minden $x \in (0, \delta)$ esetén $f(x) > K$, azaz

  $$\|f\|_\infty \geq K \qquad ((0, \delta) \subset \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) > K\}),$$

  azaz

  $$\lambda \left(\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) > K\} \right) \geq \delta,$$

  így $\|f\|_\infty = +\infty$, azaz $f \notin L^\infty(0,1]$.

- bármely $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\int_0^1 |\ln(x)|^p \, dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \, dt < +\infty,$$

(vö. Γ-függvényről tanultak) következtében $f \in L^p$. ■

10. Legyen

$$f(x) := 1 + x, \quad g(x) := 1 - x \qquad (x \in [-1,1]).$$

(a) Indokoljuk meg, hogy bármely $p \in [1, +\infty]$ esetén $f, g \in L^p[-1,1]$ teljesül!

(b) Számítsuk ki a

$$\|f\|_p, \qquad \|g\|_p, \qquad \|f+g\|_p, \qquad \|f-g\|_p$$

mennyiségeket!

(c) Mutassuk meg, hogy igaz az

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = 2$$

ekvivalencia!

Útm.

(a) Mivel $f, g \in \mathfrak{R}[-1,1]$, ezért bármely $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$f, g \in L^\infty[-1,1] \subset L^p[-1,1].$$

(b) Világos, hogy

- $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_{-1}^1 |f|^p = \int_{-1}^1 |1+x|^p \, dx = \frac{1}{p+1}\left[(1+x)^{p+1}\right]_{-1}^1 = \frac{2^{p+1}}{p+1}, \\
\|g\|_p^p &= \int_{-1}^1 |g|^p = \int_{-1}^1 |1-x|^p \, dx = -\frac{1}{p+1}\left[(1-x)^{p+1}\right]_{-1}^1 = \frac{2^{p+1}}{p+1}, \\
\|f+g\|_p^p &= \int_{-1}^1 |f+g|^p = \int_{-1}^1 2^p \, dx = 2^{p+1}, \\
\|f-g\|_p^p &= \int_{-1}^1 |f-g|^p = \int_{-1}^1 |2x|^p \, dx = 2^p \int_{-1}^1 |x|^p \, dx = \frac{2^{p+1}}{p+1};
\end{aligned}$$

- $p = +\infty$ esetén

$$
\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \max\{|1+x| \in \mathbb{R} :\ x \in [-1,1]\} = 2, \\
\|g\|_\infty &= \max\{|1-x| \in \mathbb{R} :\ x \in [-1,1]\} = 2, \\
\|f+g\|_\infty &= \max\{|2| \in \mathbb{R} :\ x \in [-1,1]\} = 2, \\
\|f-g\|_\infty &= \max\{|2x| \in \mathbb{R} :\ x \in [-1,1]\} = 2.
\end{aligned}
$$

Így

- $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 &= \left(2^{2p+2}\right)^{1/p} + \left(\frac{2^{2p+2}}{(p+1)^2}\right)^{1/p} = \\
&= 4\left(\frac{2^{2p+2}}{(p+1)^2}\right)^{1/p} = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right)
\end{aligned}
$$

  pontosan akkor teljesül, ha

$$
(p+1)^2 = 3^p, \qquad \text{azaz} \qquad p = 2;
$$

- $p = +\infty$ esetén

$$
\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 4+4 = 8 \neq 16 = 2\cdot(4+4) = 2\left(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2\right). \quad \blacksquare
$$

11. Legyen (X, Ω, μ) véges mértéktér. $1 \leq p < q < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor L^q mindenütt sűrű L^p-ben, azaz bármely $f \in L^p$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in L^q$, hogy $\|f-g\|_p < \varepsilon$ teljesül!
Útm. Ha $f \in L^p$, akkor nyilván

$$
f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f \cdot \chi_{\{n-1 \leq |f| < n\}}.
$$

Ha most

$$
f_n := \sum_{k=-\infty}^{n} f \cdot \chi_{\{k-1 \leq |f| < k\}} \qquad (n \in \mathbb{N})
$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n \in L^\infty \subset L^q \subset L^p, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \qquad |f_n| \leq |f| \in L^p.$$

Így a Lebesgue-tétel felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

ezért alkalmas $n \in \mathbb{N}$ index esetén $\|f - f_n\|_p < \varepsilon$. Így a

$$g := f_n \in L^q$$

választással

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

teljesül. ■

12. Legyen $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, $f \in L^1$ olyan függvény, amelyre

$$\int f \, d\lambda = 0$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy a

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \Omega : \int_A f \, d\lambda = 0 \right\}$$

halmaz Dynkin-rendszer (vö. $\boxed{\mathbf{G}}$ Függelék)!
Útm.

- A Lebesgue-tétel következtében

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(-\infty,n)} f \, d\lambda = 0,$$

  így $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$.

- Ha $A \in \mathcal{D}$, akkor

$$0 = \int f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}\setminus A} f \, d\lambda = 0 + \int_{\mathbb{R}\setminus A} f \, d\lambda,$$

  azaz $\mathbb{R}\setminus A \in \mathcal{D}$.

- Ha $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$: $A_k \cap A_l = \emptyset$ $(k, l \in \mathbb{N}: k \neq l)$, akkor az

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{ill.} \qquad B_k := \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

halmazokkal és ismét a Lebesgue-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_A f\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{A_n} f\, d\lambda = 0,$$

azzaz $A \in \mathcal{D}$. ■

13. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 + \sin(x/n) + x^{2n}}\, dx$$

határértéket!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \frac{1}{3 + \sin(x/n) + x^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [-\pi, \pi]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[-\pi, \pi]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{3 - |\sin(x/n)| + x^{2n}} \leq \frac{1}{2} =: F(x) \qquad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[-\pi, \pi]$, továbbá bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1/3 & (|x| < 1), \\ 1/4 & |x| = 1, \\ 0 & (x \in [-\pi, -1) \cup (1, \pi]), \end{cases}$$

így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}. \quad ■$$

14. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, $(\Omega = \Omega_d,\ \lambda = \mu_d)$, $f \in L^1$, továbbá $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény. Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi\left(\frac{x}{n}\right) f(x)\, d\lambda(x) = \phi(0) \int f(x)\, d\lambda(x)$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$f_n(x) := \phi\left(\frac{x}{n}\right) f(x) \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Ekkor ϕ folytonossága következtében bármely $x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$f_n(x) \longrightarrow \phi(0) f(x) \qquad (n \to \infty).$$

A ϕ függvény korlátossága következtében van olyan $K \geq 0$ szám, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $|\phi(x)| \leq K$, azaz

$$|f_n(x)| \leq K|f(x)| =: F(x).$$

Ez egrészt azt jelenti, hogy $F \in L^1$, másrészt pedig azt, hogy $f_n \in L^1$ $(n \in \mathbb{N})$, így teljesülnek a Lebesgue-tétel feltételei, ahonnan a fenti egyenlőség következik. ■

15. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \cdot x^2\right) dx$$

határértéket!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \cdot x^2\right), \quad F(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}),$$

akkor f_n és F folytonos, így (Borel-)mérhető függvények $(n \in \mathbb{N})$, továbbá (vö. $\boxed{\mathbf{K}}$ Függelék)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \sqrt{\frac{1}{2}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

következtében $F \in L^1$. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n}{n+1}$, ezért

$$|f_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \cdot x^2\right)\right| \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = F(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $f_n \in L^1$ $(n \in \mathbb{N})$ is következik. A Lebesgue-tételből így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \cdot x^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{n \cdot x^2}{n+1}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(0) e^{-x^2}\, dx = 0$$

teljesül. ■

16. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_{-3}^{5} \cos\left(\frac{1}{1+nx}\right) dx$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{24} \sqrt[n]{x}\, dx$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \sqrt[n]{\exp(nx)+n^2x}\, dx$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{\exp(-\sin^2(n)x - x)}{n}\, dx$;

(e) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\, dx$;

(f) $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{n\cdot e^x}{\sin(x)}\right) dx$;

(g) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\ln(7)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\, dx$;

(h) $\lim_{n\to\infty} \int_{A} \frac{1}{\|x\|^n}\, dx$, ahol $A := \mathbb{R}^3 \backslash K_1(0)$ és $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$.

Útm.

(a) Ha

$$f_n(x) := \cos\left(\frac{1}{1+nx}\right) \qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in[-3{,}5]),$$

akkor bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[-3{,}5]$,

$$|f_n(x)| \leq 1 =: F(x) \qquad (x\in[-3{,}5]).$$

Vilgágos, hogy $F\in L^1[-3{,}5]$, továbbá bármely $x\in[-3{,}5]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \cos(0) = 1,$$

így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-3}^{5} \cos\left(\frac{1}{1+nx}\right) dx = \int_{-3}^{5} \cos(0)\, dx = 1.$$

(b) Ha

$$f_n(x) := \sqrt[n]{x} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,24]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[0,24]$,

$$|f_n(x)| \leq 24 =: F(x) \qquad (x \in [0,24]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[0,24]$, továbbá bármely $x \in [0,24]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1,$$

így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{24} \sqrt[n]{x}\, dx = \int_0^{24} 1\, dx = 24.$$

(c) Ha

$$f_n(x) := \sqrt[n]{\exp(nx) + n^2 x} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[0,1]$,

$$|f_n(x)| \leq \sqrt[n]{e^n + n^2} \leq \sqrt[n]{2e} \leq 2e =: F(x) \qquad (x \in [0,1]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[0,1]$, továbbá bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x,$$

hiszen ha $x \in [0,1]$, akkor

$$e^x = \sqrt[n]{(e^x)^n} \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{(e^x)^n + n^2 (e^x)^n} = \sqrt[n]{1 + n^2} e^x.$$

Így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{\exp(nx) + n^2 x}\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$

(d) Ha

$$f_n(x) := \frac{\exp(-\sin^2(n)x - x)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,+\infty)),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x)| \leq 1 \cdot e^{0-x} = e^{-x} =: F(x) \qquad (x \in [0,+\infty)).$$

Mivel

$$\|F\|_1 = \int_0^{+\infty} |F| = \int_0^{+\infty} F = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} e^{-x}\,dx = 1,$$

ezért egyrészt $F \in L^1[0,+\infty)$, másrészt pedig $f_n \in L^1[0,+\infty)$. A tetszőleges $x \in$ $\in [0,+\infty)$ esetén fenálló

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

határérték-reláció és a Lebesgue-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sin^2(n)x - x)}{n}\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$

(e) Ha

$$f_n(x) := 2\sin\left(x + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)\cos\left(x - \frac{x^2}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,3\pi]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^[0,3\pi]$,

$$|f_n(x)| \le 2 =: F(x) \qquad (x \in [0,3\pi]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[0,1]$, továbbá bármely $x \in [0,3\pi]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x),$$

így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{3\pi} 2\sin\left(x + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)\cos\left(x - \frac{x^2}{n}\right)\,dx = \int_0^{3\pi} \sin(2x)\,dx = 0.$$

(f) Ha

$$f_n(x) := \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \le \frac{1}{1 + n \cdot \frac{x^2}{n}} = \frac{1}{1+x^2} =: F(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\|F\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F| = \int_{-\infty}^{+\infty} F = [\operatorname{arctg}(x)]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \pi,$$

ezért egyrészt $F \in L^1(\mathbb{R})$, másrészt pedig $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$. A tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennálló

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2}.$$

határérték-reláció és a Lebesgue-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(g) Ha

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0, \ln(7)]),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in L^1[0, \ln(7)]$,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} =: F(x) \qquad (x \in [0, \ln(7)]).$$

Világos, hogy $F \in L^1[0, \ln(7)]$, továbbá bármely $x \in [0, \ln(7)]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \cos(x).$$

Így a Lebesgue-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\ln(7)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,dx = \int_0^{\ln(7)} \cos(x)\,dx = \sin(\ln(7)). \qquad \blacksquare$$

17. Az

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

kettős sorozatról tegyük fel, hogy

i) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = A_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$;

ii) alkalmas

$$b_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$$

sorozat esetén

$$|a_{mn}| \leq b_n \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1}(a_{mn}) \quad (m \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=1}(A_n)$$

sorok abszolút konvergensek, továbbá

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right)$$

teljesül!

Útm. Az $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mértéktér esetében, ahol μ a számosságmérték, bármely $f \in L^1$ függvényre

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

(vö. 9. gyakorlat). Az

$$f_m := (a_{mn})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (m \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill.} \qquad (A_n)_{n\in\mathbb{N}} := \lim_{m\to\infty}(f_m)$$

jelölések bevezetésével teljesülnek a Lebesgue-tétel feltételei az $F := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majoráns-sorozattal. ■

18. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra ($\Omega = \Omega_d$, $\lambda = \mu_d$), továbbá tetszőleges $f \in L^1$ esetén Legyen

$$\mathcal{F}f(x) := \int f(t)\cos(\langle t, x\rangle)\,d\lambda(t) + \imath \cdot \int f(t)\sin(\langle t, x\rangle)\,d\lambda(t) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

(az f függvény **Fourier-transzformált**ja). Igazoljuk, hogy $\mathcal{F}f$ folytonos!

Útm. Ha $a \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges, továbbá $x_n \in \mathbb{R}^d$ $(n \in \mathbb{N})$ az a ponthoz konvergáló vektorsorozat, akkor a koszinusz, ill. a szinusz függvény folytonossága következtében tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$f_n(t) := f(t)\cos(\langle t, x_n\rangle) \longrightarrow f(t)\cos(\langle t, a\rangle) \qquad (n \to \infty),$$

ill.

$$f_n(t) := f(t)\sin(\langle t, x_n\rangle) \longrightarrow f(t)\sin(\langle t, a\rangle) \qquad (n \to \infty),$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f(t)\cos(\langle t, x_n\rangle)| \leq |f(t)| =: F(t) \qquad (t \in \mathbb{R}^d),$$

ill.

$$|f(t)\sin(\langle t, x_n\rangle)| \leq |f(t)| =: F(t) \qquad (t \in \mathbb{R}^d).$$

Alkalmazva a Lebesgue-tételt az f_n ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozatra, ill. az F majoránsfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(a) &= \int \lim_{n\to\infty} f(t)\cos(\langle t, x_n\rangle)\,d\lambda(t) + \imath \cdot \int \lim_{n\to\infty} f(t)\sin(\langle t, x_n\rangle)\,d\lambda(t) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int f(t)\cos(\langle t, x_n\rangle)\,d\lambda(t) + \imath \cdot \int f(t)\sin(\langle t, x_n\rangle)\,d\lambda(t)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f(x_n),
\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{F}f \in \mathfrak{C}[a]$. ■

19. Legyen $I \subset \mathbb{R}^d$ nyílt intervallum, $\tau \in I$, (X, Ω, μ) mértéktér, $f : I \times X \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, amelyre az alábbiak teljesülnek:

i) tetszőleges $t \in I$ esetén $f(t, \cdot) \in L^1$;

ii) bármely $x \in X$ esetén $f(\cdot, x) \in \mathfrak{D}[\tau]$;

iii) alkalmas $0 \leq F \in L^1$ függvényel

$$|\partial_1 f(t, x)| \leq F(x) \qquad (t \in I,\ x \in X).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a

$$\phi(t) := \int f(x, t)\,d\mu(x) \qquad (t \in (a, b))$$

függvény (ún. **paraméteres integrál**) differenciálható τ-ban, $\partial_1(\tau, \cdot) \in L^1$, és igaz a

$$\phi'(\tau) = \int \partial_1 f(\tau, x)\,d\mu(x)$$

egyenlőség!

Útm. Ha a $\tau \neq t_n \in I$ sorozatra $\lim_{n\to\infty}(t_n) = \tau$, és

$$h_n(x) := \frac{f(t_n, x) - f(\tau, x)}{t_n - \tau} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in X)$$

akkor a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ esetén alkalmas (x-től függő) $\xi \in I$ ponttal

$$|h_n(x)| = |\partial_1 f(\xi, x)| \leq F(x).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $h_n \in L^1$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \partial_1 f(\tau, x) \qquad (x \in X).$$

A Lebesgue-tétel következtében így $\partial_1(\tau, \cdot) \in L^1$, és

$$\begin{aligned}\int \partial_1 f(\tau, x)\, d\mu(x) &= \int \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n, x) - f(\tau, x)}{t_n - \tau}\, d\mu(x) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(t_n, x) - f(\tau, x)}{t_n - \tau}\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_n) - \phi(\tau)}{t_n - \tau} = \\ &= \phi'(\tau). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha tehát $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, akkor bármely $f \in L^1$ függvényre

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(xt)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \cos(xt)\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

teljesül. $\square$

20. Lássuk be, hogy a Fréchet-Nikodym-féle félmetrika (vö. 8 gyakorló feladatsor, 24 feladata) teljes!
Útm. Ha $A_n \in \Omega^*$ $(n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat, azaz

$$\begin{aligned}\rho(A_m, A_n) &= \mu(A_m \triangle A_n) = \int \chi_{A_m \triangle A_n}\, d\mu = \\ &= \int |\chi_{A_m} - \chi_{A_n}|\, d\mu = \|\chi_{A_m} - \chi_{A_n}\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),\end{aligned}$$

akkor a Lebesgue-tétel következtében alkalmas $f \in L^1$ függvénnyel, (ν_n) indexsorozattal, valamint egy $N \in \Omega^*$: $\mu(N) = 0$ halmazzal

$$\|f - \chi_{A_n}\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ill.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_{\nu_n}}(x) \qquad (x \in X\backslash N).$$

Világos, hogy bármely $x \in X\backslash N$ esetén

$$\chi_{A_{\nu_n}}(x) \in \{0,1\}, \qquad \text{így} \qquad f(x) \in \{0,1\},$$

sőt az $x \in X$ elemre, ill. a

$$B := \liminf(A_{\nu_n})$$

halmazra

$$x \in B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \chi_{A_{\nu_n}}(x) = 1$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (X\backslash N) \cap B), \\ \\ 0 & (x \in (X\backslash N)\backslash B), \end{cases}$$

így a

$$g := \chi_{(X\backslash N)\cap B}$$

függgvényre

$$g(x) = f(x) \qquad (x \in X\backslash N)$$

teljesül. Így $g = f$ μ-m.m., következésképpen

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu,$$

ahonnan

$$\|f - \chi_{A_{\nu_n}}\|_1 = \|g - \chi_{A_{\nu_n}}\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következik. Így az

$$A := (X\backslash N) \cap B$$

halmazra

$$\rho(A_n, A) = \|\chi_{A_n} - \chi_A\|_{L^1} = \|g - \chi_{A_n}\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz (A_n) konvergens halmazsorozat. ■

1.11. 11. gyakorlat

1.11.1. A gyakorlat anyaga

Tétel (Arzelà). Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f_n \in \mathfrak{R}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan függvénysorozat, amelyre

$$\sup\{|f_n(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty,$$

valamint $\exists\, f := \lim_{n\to+\infty} f_n \in \mathfrak{R}[a,b]$. Ekkor igaz az

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

egyenlőség.
Biz. A tétel feltételeiből következik, hogy $f_n, f \in L^1[a,b]$, így a

$$c := \sup\{|f_n(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}\} \geq 0$$

számmal alkalmazható a kis Lebesgue-tétel, hiszen $\mu_1([a,b]) = b - a < +\infty$. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha (X, Ω, μ) véges mértéktér $/\mu(X) < +\infty/$ és $f_n \in L^1$ $(n \in \in \mathbb{N})$ olyan függvénysorozat, amelyre

$$f_n \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

akkor

$$f \in L^1 \qquad \text{és} \qquad \int f\,d\mu = \lim\left(\int f_n\,d\mu\right)$$

teljesül!
Útm. Mivel (f_n) egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz, így 1-hez is van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x) - f_N(x)| < 1, \quad \text{azaz} \quad |f_n(x)| \leq 1 + |f_N(x)| \qquad (x \in X).$$

Ha tetszőleges $x \in X$ esetén

$$F(x) := 1 + |f_N(x)|, \quad G(x) := \max\{|f_k(x)| : \ k \in \{0,\ldots,N\}\} \quad \text{és} \quad H(x) := \max\{F(x), G(x)\},$$

akkor μ végessége folytán $F, G \in L^1$, így $H \in L^1$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n| \leq H,$$

azaz teljesülnek a Lebesgue-tétel feltételei. ■

Megjegyzések.

1. A μ mérték végessége nem hagyható el, ui. az $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue struktúra, ill. az
$$f_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \chi_{[0,n]} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
függvénysorozat esetén $f_n \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ ugyan, de
$$\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lambda\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \to +\infty \qquad (n \to \infty).$$

2. A konvergencia egyenletessége nem hagyható el. Legyen ui. pl.
$$f_n(x) := nx(1 - x^2)^n \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
   (a) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathfrak{R}[0,1] \subset L^1[0,1]$, továbbá az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ határfüggvényre $f \in \mathfrak{R}[0,1]$, a konvergencia nem egyenletes, ui.
   $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 > 0 \qquad (n \to \infty),$$
   ui. a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy
   $$1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{n}{n^2} \le \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \le 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   (b) ugyan $f \in L^1[0,1]$, de nem teljesül a felcserélhetőségi állítás, azaz
   $$\int_0^1 f = 0 \ne \frac{1}{2} = \lim\left(\frac{n}{2n+2}\right) = \lim\left(\int_0^1 f_n\right). \quad \blacksquare$$

Definíció. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték. Azt mondjuk, hogy ν **abszolút folytonos** μ-re nézve (jelben $\nu \ll \mu$), ha minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ esetén $\nu(A) = 0$.

Példák.

1. Ha $\nu(A) := 0$ $(A \in \Omega)$, akkor ν triviálisan mérték, és nyilvánvaló, hogy bármely $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték esetén $\nu \ll \mu$.

2. Ha X kontinuum számosságú, $\Omega := \mathcal{P}(X)$, $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ pedig a számosságmérték, akkor bármely $\nu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték esetén $\nu \ll \mu$, hiszen

$$A \in \Omega, \quad \mu(A) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(A) = 0.$$

3. Ha $f \in L^+$, akkor $\mu_f \ll \mu$, ui. ha valamely $A \in \Omega$ esetén $\mu(A) = 0$, akkor

$$f \cdot \chi_A = 0 \qquad (\mu\text{-m.m.}),$$

így

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \cdot \chi_A \, d\mu = 0.$$

Megjegyzés. Ha az $f \in L^+$ függvényre $0 < f < +\infty$, és valamely $A \in \Omega$ (mérhető) halmaz esetén $\mu_f(A) = 0$, akkor $f \cdot \chi_A \geq 0$ miatt

$$f \cdot \chi_A = 0 \qquad (\mu\text{-m.m.}),$$

így az f-re teljesülő $f > 0$ feltétel következtében $\mu(A) = 0$, azaz $\mu \ll \mu_f$.

4. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $a, b \in X$, $a \neq b$: $\{a\}, \{b\} \in \Omega$. Ekkor sem $\delta_a \ll \delta_b$, sem pedig $\delta_b \ll \delta_a$ nem teljesül, hiszen ha $A := \{a\}$, ill. $A := \{b\}$, akkor $\delta_b(A) = 0$, de $\delta_a(A) = 1$, ill. $\delta_a(A) = 0$, de $\delta_b(A) = 1$. ■

Feladat. Legyen (X, Ω, μ) és (X, Ω, ν) mértéktér, és tegyük fel, hogy ν véges $/\nu(X) < +\infty/$. Igazoljuk, hogy ekkor igaz a

$$\nu \ll \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0: \ (A \in \Omega, \mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \nu(A) < \varepsilon)$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés $/\Longrightarrow/$. Tegyük fel, hogy $\nu \ll \mu$, és – az állítással ellentétben – alkalmas $\varepsilon > 0$ szám, $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat, ill. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \qquad \text{és} \qquad \nu(A_n) > \varepsilon.$$

Ha most

$$A := \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad /\in \Omega/\,,$$

akkor a bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ tartalmazás következtében

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) < \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ui.

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^m} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1.$$

Így $\mu(A) = 0$, ezért $\nu \ll \mu$ következtében $\nu(A) = 0$. Azonban ν véges, ezért[28]

$$\nu(A) = \nu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon,$$

ez pedig nem lehetséges.

2. lépés $/\Longleftarrow/$. Ha valamely $A \in \Omega$ halmazra $\mu(A) = 0$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz az állításban szereplő feltétel szerint létező $\delta > 0$ esetén $\mu(A) < \delta$ is igaz, tehát $\nu(A) < \varepsilon$ is fennáll. Ez pedig csak úgy lehetséges, hogy ha $\nu(A) = 0$ teljesül. ■

Megjegyzés. A fenti feladatban ν végessége lényeges, ui. pl., ha

- $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, $\Omega_0 := \{A \in \Omega : \lambda(A) = 0\}$, továbbá

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & (A \in \Omega_0), \\ & \\ +\infty & (A \notin \Omega_0) \end{cases} \qquad (A \in \Omega),$$

  akkor könnyen belátható, hogy ν mérték és $\nu \ll \lambda$ (**Házi feladat.**), viszont bármely $\delta > 0$ számra

$$\lambda([0, \delta)) = \delta, \qquad \nu([0, \delta)) = +\infty.$$

- $X := \mathbb{N}$, $\Omega := \mathcal{P}(X)$, továbbá , $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$ olyan mértékek, amelyekre

$$\mu(\{n\}) = 1, \quad \nu(\{n\}) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

[28] Vö. a halmazsorozatokra vonatkozó Fatou-lemma bizonyítása.

akkor valamely $A \in \Omega$ esetén

$$\nu(A) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \emptyset,$$

ahonnan $\nu \ll \mu$ következik. Ha pedig $\varepsilon \in (0,1)$, akkor tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\nu(\{n\}) < \delta \qquad \text{és} \qquad \mu(\{n\}) \geq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény **szigma-véges**, ha alkalmas $A_n \in \mathcal{D}_\mu$ $(n \in \mathbb{N})$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N} : i \neq j)$ halmazsorozat esetén

$$\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad X = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Megjegyzés. Ha (X, Ω, μ) mértéktér, úgy μ pontosan akkor szigma-véges, ha alkalmas $A_n \in \mathcal{D}_\mu$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén

$$\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Biz. BEADHATÓ. $\blacksquare$

Példák.

1. Legyen $\Omega := \mathcal{P}(X)$, $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ pedig a számosságmérték. μ pontosan akkor szigma-véges, ha X legfeljebb megszámlálható.

2. Az $(\mathbb{R}, \Omega_1, \lambda)$ Lebesgue-sturktúra esetén λ szigma-véges, ui. tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén legyen $A_n := [n, n+1]$. Így

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \qquad \text{és} \qquad \lambda(A_n) = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3. Ha (X, Ω, μ) szigma-véges mértéktér, $f : X \to [0, +\infty)$ mérhető függvény, akkor a μ_f mérték is szigma-véges, ui. ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre

$$\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

teljesül, akkor a

$$B_n := A_n \cap \{f \leq n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra nyilván

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X \qquad \text{és} \qquad \mu_f(B_n) \leq n \cdot \mu(A_n) < +\infty$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy μ_f szigma-véges. $\Diamond$

Tétel (Radon-Nikodym). Legyen (X, Ω, μ) és (X, Ω, ν) mértéktér, és tegyük fel, hogy μ szigma-véges. Ekkor

$$\nu \ll \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, f \in L^+ : \ \nu = \mu_f. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A μ mérték szigma-végessége általában nem hagyható el. Ui. pl., ha X kontinuum számosságú halmaz és

$$\Omega := \{A \subset X : \ A \text{ vagy } A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}\},$$

valamint

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ legfeljebb megszámlálható}), \\ \\ +\infty & (A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}), \end{cases}$$

μ pedig a számosságmérték Ω-n, akkor $\nu \ll \mu$, hiszen bármely $A \in \Omega$ esetén igaz a

$$\mu(A) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \emptyset$$

ekvivalencia. Továbbá, ha lenne olyan $f \in L^+$ függvény, amellyel $\nu = \mu_f$, akkor bármely $x \in X$ esetén

$$0 = \nu(\{x\}) = \mu_f(\{x\}) = \int f \cdot \chi_{\{x\}}\, d\mu = f(x) \cdot \mu(\{x\}) = f(x),$$

azaz $f \equiv 0$ teljesülne, amiből $\nu = \mu_f = 0$ következne, ami nem igaz. $\blacksquare$

Megjegyzés. Ha μ és ν véges mérték, akkor fennáll a Radon-Nikodym-tételbeli állítás (vö.

`http://numanal.inf.elte.hu/~alex/hu/anyag/PROGINF/FunkAnal/FunkAnalKS.pdf`,

593. oldal). $\square$

Definíció. Adott (X, Ω) mérhető tér, ill. $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$ mértékek esetén azt nondjuk, hogy μ **ekvivalens** ν-vel (jelben $\mu \sim \nu$), ha $\mu \ll \nu \ll \mu$ teljesül.

Megjegyzés. Világos, hogy

$$\mu \sim \nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{A \in \Omega : \mu(A) = 0\} = \{A \in \Omega : \nu(A) = 0\}. \quad \square$$

Feladat. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $0 \neq \mu : \Omega \to [0, +\infty]$ szigma-véges mérték. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\nu : \Omega \to [0, +\infty]$ valószínűségi mérték, ami ekvivalens μ-vel!
Útm. Legyen $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre

$$\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

teljesül, továbbá

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\chi_{A_n}}{1 + \mu(A_n)}.$$

Ekkor $\mu \neq 0$ következtében van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy $\mu(A_n) \neq 0$, ahonnan $\int g \, d\mu > 0$ következik. Alkalmazva a majoránskritériumot azt kapjuk, hogy $0 < g \leq 1$, továbbá Levi tételének felhasználásával

$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\chi_{A_n}}{1 + \mu(A_n)} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \mu(A_n)} \cdot \int \chi_{A_n} \, d\mu = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\mu(A_n)}{1 + \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty
\end{aligned}$$

adódik. Ha most

$$f := \frac{g}{\displaystyle\int g \, d\mu} : X \to (0, +\infty),$$

akkor $\nu := \mu_f$ valószínűségi mérték, hiszen μ_f mérték és

$$\mu_f(X) = \int f \, d\mu = \frac{\displaystyle\int g \, d\mu}{\displaystyle\int g \, d\mu} = 1.$$

Mivel f olyan mérhető függvény, amelyre $0 < f < +\infty$ teljesül, ezért $\mu \sim \nu$. ■

Megjegyzések.

1. A g függvény definíciójában $\dfrac{1}{2^n}$ helyére írhattunk volna w_n-et, ahol

$$w_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1.$$

2. Ha az A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok páronként diszjunktak, akkor az

$$f := \frac{1}{\mu(X)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} : X \to (0,1].$$

függvény is megfelelő, ui.

$$\mu_f(X) = \int f \, d\mu = 1. \quad \square$$

1.11.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Adjunk példát

   (a) olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1$ függvényre, amely a végtelenben nem korlátos;[29]

   (b) olyan Riemann-integrálható $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatra, amelynek van $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható majoránsa: $|f_n| \le g$ $(n \in \mathbb{N})$, és az

   $$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a, b])$$

   határfüggvényre $f \notin \mathfrak{R}[a, b]$ teljesül;

   (c) olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx \in \mathbb{R}, \qquad \text{de} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f \notin \mathbb{R};$$

   (d) olyan $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L^1$ függvényre, hogy az

   $$F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(t) := \int_{(0,t]} f\,d\lambda$$

   függvény nem deriválható![30]

Útm.

(a) Ha pl.

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{[\frac{2n}{n^3}, \frac{2n+1}{n^3}]},$$

akkor Levi tételének következtében

$$\int f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} < +\infty.$$

Megjegyzés. Az

$$f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény is megfelel.

[29] Valamely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a **végtelenben korlátos**nak nevezünk, ha alkalmas $c, \omega > 0$ számok, ill. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$: $|x| \ge \omega$ esetén $|f(x)| \le c$ teljesül.

[30] Megmutatható, hogy F λ-m.m. deriválható és $F' = f$ λ-m.m.

(b) Ha $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [a, b]$ bijekció és

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{q_k\}} = \chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f = 0$, továbbá $|f_n| \leq \chi_{[a,b]}$. Mivel

$$f_n \to f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} \qquad (n \to \infty),$$

ezért $f \notin \mathfrak{R}[a, b]$.

(c) Ha $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{de} \qquad \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} f(x)\,dx = \infty.$$

(d) Ha pl. $f := \chi_{[1,2]}$, akkor bármely $0 < h < 1$ esetén

$$\frac{F(1) - F(1-h)}{h} = 0 \neq 1 = \frac{1}{h}\int_{[1,1+h]} \chi_{[1,2]}\,d\lambda = \frac{F(1+h) - F(1)}{h},$$

azaz $F \notin \mathfrak{D}[1]$. ■

2. Egyenletesen konvergens-e az

$$f_n(x) := nxe^{-nx^2} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$$

függvénysorozat?

Útm.

Tudjuk, hogy $f_n \in \mathfrak{R}[0,1] \subset L^1[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ és bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Az $f(x) := 0$ $(x \in [0,1])$ határfüggvényre ugyan $f \in \mathfrak{R}[0,1] \subset L^1[0,1]$, de

$$\int_0^1 f = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n\right)$$

miatt a konvergencia nem egyenletes. ■

3. Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $f, g \in L^+(\mu)$. Igazoljuk, hogy ekkor fennáll az

$$\int g \, d\mu_f = \int gf \, d\mu$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Ha

$$g \in L_0^+(\mu) = L_0^+(\mu_f),$$

akkor

$$g = \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \chi_{\{g=y\}},$$

így

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu_f &= \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \mu_f(\{g = y\}) = \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \int f \cdot \chi_{\{g=y\}} \, d\mu = \\ &= \int f \left(\sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \chi_{\{g=y\}} \right) d\mu = \int fg \, d\mu. \end{aligned}$$

2. lépés. Ha $f, g \in L^+(\mu) = L^+(\mu_f)$, akor alkalmas monoton növekedő $g_n \in L^+{}_0$ $(n \in \in \mathbb{N})$ sorozattal $f_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$, amiből az (fg_n) sorozat monoton növekedése miatt

$$fg_n \nearrow fg \qquad (n \to \infty)$$

következik. Így, Levi tételének felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int g \, d\mu_f = \lim_{n\to\infty} \left(\int g_n \, d\mu_f \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int fg_n \, d\mu \right) = \int fg \, d\mu. \quad \blacksquare$$

4. Legyen $p \in \mathbb{N}$ és $(\mathbb{R}^p, \Omega, \mu)$ Lebesgue-struktúra, továbbá

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & (0 \notin A), \\ \\ 1 & (0 \in A) \end{cases} \qquad (A \in \Omega).$$

Mutassuk meg, hogy nincsen olyan $f \in L^+$, hogy $\nu = \mu_f$ teljesül!

Útm.

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $f \in L^+(\mu)$, hogy $\nu = \mu_f$, azaz

$$\mu(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu \qquad (A \in \Omega).$$

Speciálisan az $A := \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ halmazra ekkor

$$0 = \mu(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu,$$

ahonnan $f \cdot \chi_A = 0$ μ-m.m. következik, ez pedig azt jelenti, hogy $\mu = 0$, ami pedig nem igaz. ■

1.12. 12. gyakorlat

1.12.1. A gyakorlat anyaga

Definíció. Ha $k \in \mathbb{N}$, ill. $X_1, \ldots, X_k$, Y vektorterek valamely K testre vonatkozóan (röviden K-vektorterek), akkor azt mondjuk, hogy az

$$f : X_1 \times \ldots \times X_k \to Y$$

leképezés **k-lineáris** (jelben $f \in \mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)$), ha minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ és $a_j \in X_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$, $j \neq i$) esetén a

$$\varphi_i : X_i \to Y, \qquad \varphi_i(x) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

leképezés lineáris $/\varphi_i \in \mathcal{L}(X_i, Y) := \mathcal{L}_1(X_i, Y)/$. A $k = 2$, illetve $k = 3$ speciális esetekben **bilineáris**, illetve **trilineáris** leképezésekről szokás beszélni.[31] Az

$$X := X_1 = \ldots = X_k, \qquad Y := K$$

esetben f neve **k-lineáris funkcionál** vagy **k-forma** ($k = 1$ esetén **lineáris forma** vagy **kovektor**). Ebben az esetben az $f \in \mathcal{L}_k(X^k, K)$ jelölést használjuk. Ha $k := 0$, akkor legyen $\mathcal{L}_0(X^0, K) := K$. $\Diamond$

Megjegyzések.

1. Könnyen belátható, hogy a k-lineáris leképezések halmaza, azaz $\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)$ a „szokásos” műveletekkel alteret alkot az $Y^{X_1 \times \ldots \times X_k}$ függvények vektorterében.

2. A k-formára szokásos a **k-adrendű kovariáns tenzor** elnevezés is. Sőt, ha az $X_1, \ldots, X_k$ vektorterek mindegyike valamely véges dimenziós V vektortérrel vagy $V' = \mathcal{L}(V, K)$-val azonos, pontosabban V r-szer, $\mathcal{L}(V, K)$ s-szer fordul elő ($r + s = k$):

$$f : \overset{\overset{1}{\smile}}{V} \times \ldots \times \overset{\overset{r}{\smile}}{V} \times \overset{\overset{1}{\smile}}{V'} \times \ldots \times \overset{\overset{s}{\smile}}{V'} \to K,$$

akkor az $f \in \mathcal{L}_k(X_1 \times \ldots \times X_k, K)$ k-lineáris leképezést **k-adrendű, r-szeresen kovariáns és s-szeresen kontravariáns** vagy **k-adrendű (r, s)-típusú tenzor**nak

[31] Ha a változók száma érdektelen, akkor f-et szokás **multilineáris leképezés**nek (azaz minden változójában lineáris leképezésnek) is nevezni.

nevezzük, és erre az $f \in \mathcal{T}_r^s(V, K)$ jelölést használjuk. Ha $s = 0$, ill. $r = 0$, akkor a jelölés röviden

$$f \in \mathcal{T}_r(V, K), \qquad \text{ill.} \qquad f \in \mathcal{T}^s(V, K).$$

A *tenzor* kifejezés is a fizikából jön, először a deformálható testek mechanikájában az anyagban fellépő feszültségek leírására használták (**feszültségi tenzor**). Nevét a *tenzió* 'feszültség'-jelentésű (latin eredetű) szóból nyerte. Ott persze sok esetben az $\mathcal{L}(V, V)$ elemeit (a lineáris transzformációkat) értik tenzoron. Ez azonban nem okoz problémát, ui. – lévén V véges dimenziós valós vektortér –, minden $f \in \mathcal{L}(V, V)$ leképezés tekinthető $(1,1)$-típusú tenzornak, hiszen nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben a

$$\varphi : \mathcal{L}(V, V) \to \mathcal{L}_2(V \times V', \mathbb{R}), \qquad \varphi(A)(x, f) := f(A(x))$$

leképezés iromorfizmus: $\mathcal{L}(V, V) \sim \mathcal{T}_1^1(V, \mathbb{R})$.[32]

Példák.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$, ill. $X_1, \ldots, X_k$, Y vektorterek valamely K testre vonatkozóan, akkor

$$f_0 : X_1 \times \ldots \times X_k \to Y, \qquad f_0(a_1, \ldots, a_k) := 0 \in Y$$

triviálisan k-lineáris leképezés.

2. Ha $a \in \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) := \langle a, x \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

leképezés (1-)lineáris forma, ui. tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_a(\alpha x + \beta y) = \langle a, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle a, x \rangle + \beta \langle a, y \rangle = \alpha f_a(x) + \beta f_a(y).$$

[32] Ily módon maguk a vektorok, azaz a V lineáris tér elemei is tekinthetők tenzoroknak, hiszen – ha V véges dimenziós, akkor – $V \sim V'' = \mathcal{T}_0^1(V, \mathbb{R})$. Ez az oka annak a fizikában elterjedt szóhasználatnak, amelyben a „vektorok elsőrendű tenzorok”.

Megjegyzések.

- Világos, hogy

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, a \in \mathbb{R}^n : \ f = f_a,$$

ui. mint láttuk f_a lineáris, ill. ha $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ és $e_1, \ldots, e_n$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, továbbá

$$a := (f(e_1), \ldots, f(e_n)),$$

akkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i = \langle a, x \rangle = f_a(x).$$

- Ha $\{e_1, \ldots, e_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, akkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$f_{e_i}(x) = \langle e_i, x \rangle = x_i \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

(„kiköpőforma"), ezért tetszőleges $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$f_a(x) = \langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_{e_i}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

azaz

$$f_a = \sum_{i=1}^{n} a_i f_{e_i}.$$

$f_{e_1}, \ldots, f_{e_n}$ nem más, mint az $e_1 \ldots, e_n$ vektorokhoz tartozó, $(\mathbb{R}^n)'$-beli $e^1, \ldots, e^n$ duális bázis. Egyes szerzők az

$$e^i = f_{e_i}$$

lineáris formára a dx_i jelölést használják ($i \in \{1, \ldots, n\}$), így

$$\boxed{f_a = a_1 e^1 + \ldots + a_n e^1 = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n}.$$

3. Ha valamely $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{D}[p]$, akkor $f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, és így alkalmas $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal

$$f'(p) = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n.$$

Később (v. ö. 14. gyakorlat) látni fogjuk, hogy $a_i = \partial f_i(p)$.

4. Ha $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér, $K := \mathbb{K}$,

$$f : X \to Y, \quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f): \quad f \in \mathfrak{D}^2[a],$$

akkor $f''(a)$ (folytonos) bilineáris leképezés:

$$f''(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \sim \mathcal{L}_2(X^2, Y).$$

5. Ha $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X := \mathbb{R}^n$, $Y := \mathbb{R}$, akkor az

$$f_A : X^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_A(x, y) := \langle Ax, y\rangle$$

leképezés bilineáris forma (**házi feladat ellenőrizni**).
Megjegyzések.

- Az $A = \mathbb{E}_n$ speciális esetben

$$f_{\mathbb{E}_n}(x, y) = \langle \mathbb{E}_n x, y\rangle = \langle x, y\rangle \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

- Világos, hogy

$$f \in \mathcal{L}_2((\mathbb{R}^n)^2, \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ f = f_A,$$

ui. f_A bilinearitása nyilvánvaló, ill. ha $f \in \mathcal{L}_2((\mathbb{R}^n)^2, \mathbb{R})$ és $e_1, \ldots, e_n$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, továbbá

$$A := [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,n} := [f(e_j, e_i)]_{i,j=1}^{n,n} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

akkor tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j a_{ji} = \sum_{j=1}^n \left\{\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right\} y_j = \langle Ax, y\rangle = f_A(x, y). \end{aligned}$$

6. Ha $X := \mathbb{R}^n$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, akkor

   (a) az
   $$f : X^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (\varphi \wedge \psi)(x,y) := \varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)$$
   leképezés bilineáris forma (**házi feladat ellenőrizni**).[33]

   (b) az
   $$f : X^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (\varphi \vee \psi)(x,y) := \varphi(x)\psi(y) + \psi(x)\varphi(y)$$
   leképezés bilineáris forma (**házi feladat ellenőrizni**).[34]

7. Ha $k, n \in \mathbb{N}$, $N := \{1, \ldots, n\}$, $i = (i_1, \ldots, i_k) \in N^k$, akkor
   $$\Sigma_i^{n,k} : \overset{\overset{1}{\smile}}{\mathbb{R}^n} \times \ldots \times \overset{\overset{k}{\smile}}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}, \qquad \Sigma_i^{n,k}(x_1, \ldots, x_k) := \operatorname{perm} \begin{bmatrix} x_{1i_1} & \ldots & x_{ki_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1i_k} & \ldots & x_{ki_k} \end{bmatrix},$$
   ill.
   $$\Delta_i^{n,k} : \overset{\overset{1}{\smile}}{\mathbb{R}^n} \times \ldots \times \overset{\overset{k}{\smile}}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}, \qquad \Delta_i^{n,k}(x_1, \ldots, x_k) := \det \begin{bmatrix} x_{1i_1} & \ldots & x_{ki_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1i_k} & \ldots & x_{ki_k} \end{bmatrix},$$
   nyilvánvalóan k-forma.
   Megjegyzések.

   - A fenti függvények esetében
   $$\begin{bmatrix} x_{1i_1} & \ldots & x_{ki_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1i_k} & \ldots & x_{ki_k} \end{bmatrix} = [o_{i_1}, \ldots, o_{i_k}],$$
   ahol $[o_1, \ldots, o_n] \in \mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli azt a mátrixot, amelynek j-edik oszlopa az $x_1, \ldots, x_k$ (sor)vektorok j-edik komponenséből álló vektor $(j \in \{1, \ldots, n\})$:
   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = [o_1, \ldots, o_n] \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

[33] $\varphi \wedge \psi$-t szokás φ és ψ **külső szorzat**ának (**Grassmann-szorzat**ának) nevezni.
[34] $\varphi \vee \psi$-t szokás φ és ψ **szimmetrikus szorzat**ának nevezni.

- Ha i nem injektív multiindex, azaz van legalább két azonos komponense:

$$\exists\, r, s \in N,\ r \neq s:\ i_r = i_s,$$

akkor

$$\Delta_i^{n,k} = f_0 \quad /\in \mathcal{L}_k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R})/\,.$$

Például

$$\Delta_{(1,1)}^{n,2} = \Delta_{(2,2)}^{n,2} = \Delta_{(3,3)}^{n,2} = f_0\ /\in \mathcal{L}_2((\mathbb{R}^n)^2, \mathbb{R})/\,, \qquad \Delta_{(1,3,1)}^{n,3} = f_0\ /\in \mathcal{L}_3((\mathbb{R}^n)^3, \mathbb{R})/\,.$$

A determinánsra vonatkozó azonosságok alapján világos, hogy

$$\Delta_i^{n,k} = \pm\Delta_{\widetilde{i}}^{n,k},$$

ha $\widetilde{i}$ az i egy permutációja, sőt ha $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, akkor

$$\Delta_{i\circ\sigma}^{n,k} = (\mathrm{sgn}(\sigma))\Delta_i^{n,k}, \qquad \text{ahol} \qquad i \circ \sigma := \left(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)}\right).$$

Ezért $k \in N$ esetén sokszor az injektív, speciálisan a szigorúan monoton multiindexek halmazára szorítkozunk:

$$N_*{}^k := N_*{}^1 := N \quad (k = 1), \qquad N_*{}^k := \left\{i \in N^k:\ i_1 < \ldots < i_k\right\} \quad (k > 1),$$

kivéve, ha $n := 3$, $k := 2$:

$$N_*{}^2 := 3_*{}^2 := \{(2,3), (3,1), (1,2)\}$$

(vö. következő gyakorlat). Világos, hogy $N_*{}^n = \{(1, \ldots, n)\}$.

- Ha $k > n$, akkor $\Delta_i^{n,k} = f_0$.
- Ha $k = 1$, akkor

$$\Delta_i^{n,1} = f_{e_i} = dx_i \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}),$$

azaz

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, a \in \mathbb{R}^n:\ f = a_1\Delta_1^{n,1} + \ldots + a_n\Delta_n^{n,1}.$$

- A determinánsra vonatkozó kifejtési szabályok alapján könnyen belátható, hogy

$$\Delta_i^{n,k}(x_1, \ldots, x_k) \equiv \det[e_1, \ldots, \underbrace{x_1}^{i_1}, \ldots, \underbrace{x_k}^{i_k}, \ldots, e_n]^{\mathsf{T}}.$$

Innen is látszik, hogy tetszőleges $l \in \mathsf{N}_*{}^k$ esetén

$$\Delta_i^{n,k}(e_{l_1},\ldots,e_{l_k}) = \begin{cases} 1 & (i = l), \\ \\ 0 & (i \neq l), \end{cases}$$

hiszen az első esetben a függvényérték az egységmátrix determinánsa, a második esetben pedig olyan mátrix determinánsa, amelyben van csupa zérusból álló oszlop.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, akkor igaz az

$$(f_a \wedge f_b)(x,y) = \left\langle x, \left(a \circ b - (a \circ b)^\top\right) y \right\rangle \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

egyenlőség, ahol $a \circ b$ jelöli az a és a b vektor diadikus szorzatát!
Megjegyzés. Az

$$a \circ b := ab^\top = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

diadikus szorzatra

- $a \circ b = (b \circ a)^\top$;
- $\mathrm{Sp}(a \circ b) = \langle a, b \rangle$;
- $(a \circ b)x = \langle b, x \rangle\, a \quad (x \in \mathbb{R}^n)$, ui. ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$(a \circ b)x = \left\{ab^\top\right\} x = a \left\{b^\top x\right\} = a \langle b, x \rangle = \langle b, x \rangle\, a.$$

Útm. Világos, hogy $f_a, f_b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,, továbbá tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}
(f_a \wedge f_b)(x,y) &= f_a(x) f_b(y) - f_b(x) f_a(y) = \\
&= \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle - \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle = \langle x, a\rangle\langle b, y\rangle - \langle x, b\rangle\langle a, y\rangle = \\
&= \langle x, \langle b, y\rangle a\rangle - \langle x, \langle a, y\rangle b\rangle = \langle x, \langle b, y\rangle a - \langle a, y\rangle b\rangle = \\
&= \langle x, (a \circ b)y - (b \circ a)y\rangle = \langle x, (a \circ b)y - (a \circ b)^\top y\rangle = \\
&= \langle x, \left(a \circ b - (a \circ b)^\top\right) y\rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Bizonyítsuk be a külső szorzat és a vektoriális szorzat közötti kapcsolatot kifejező állítást, azaz, hogy ha $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ és

$$\begin{aligned} F_a &:= a_1 (f_{e_2} \wedge f_{e_3}) + a_2 (f_{e_3} \wedge f_{e_1}) + a_3 (f_{e_1} \wedge f_{e_2}) = \\ &= a_1 \left(e^2 \wedge e^3\right) + a_2 \left(e^3 \wedge e^1\right) + a_3 \left(e^1 \wedge e^2\right) = \\ &= a_1 (dx_2 \wedge dx_3) + a_2 (dx_3 \wedge dx_1) + a_3 (dx_1 \wedge dx_2), \end{aligned}$$

akkor

$$F_a(x, y) = \langle a, x \times y \rangle \quad (x, y \in \mathbb{R}^3), \qquad \text{ill.} \qquad f_a \wedge f_b = F_{a\times b} \quad (a, b \in \mathbb{R}^3)$$

teljesül!

Útm.

1. Mivel

$$(e_2 \circ e_3) - (e_3 \circ e_2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(e_3 \circ e_1) - (e_3 \circ e_1)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   és

$$(e_1 \circ e_2) - (e_1 \circ e_2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   ezért, ha $y \in \mathbb{R}^3$, akkor

$$\left((e_2 \circ e_3) - (e_3 \circ e_2)^T\right) y = (0, y_3, -y_2),$$

$$\left((e_3 \circ e_1) - (e_3 \circ e_1)^T\right) y = (-y_3, 0, y_1),$$

$$\left((e_1 \circ e_2) - (e_1 \circ e_2)^T\right) y = (y_2, -y_1, 0),$$

ill.

$$\begin{aligned}
F_a(x,y) &= a_1\,(f_{e_2}\wedge f_{e_3})\,(x,y) + a_2\,(f_{e_3}\wedge f_{e_1})\,(x,y) + a_3\,(f_{e_1}\wedge f_{e_2})\,(x,y) = \\
&= a_1\,(x_2y_3 - x_3y_2) + a_2\,(-x_1y_3 + x_3y_1) + a_3\,(x_1y_2 - x_2y_1) = \\
&= \langle a, x\times y\rangle \quad (x,y\in\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

2. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$F_{a\times b}(x,y) = \langle a\times b, x\times y\rangle = \langle a,x\rangle\langle b,y\rangle - \langle b,x\rangle\langle a,y\rangle = (f_a\wedge f_b)(x,y). \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha X valós vektortér, $\varphi_1,\ldots,\varphi_k\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, akkor az

$$f(x_1,\ldots,x_k) := (\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_k)(x_1,\ldots,x_k) := \prod_{i=1}^{k}\varphi_i(x_i) \qquad \big((x_1,\ldots,x_k)\in X^k\big)$$

leképezés k-forma,[35] azaz fenáll az $f\in\mathcal{L}_k(X^k,\mathbb{R})$ tartalmazás!

Útm. Ahhoz, hogy belássuk az $f\in\mathcal{L}_k(X^k,\mathbb{R})$ tartalmazást, azt kell megmutatni, hogy minden $i\in\{1,\ldots,k\}$ és $a_j\in X$ ($j\in\{1,\ldots,k\}$, $j\neq i$) esetén a

$$\psi_i : X\to\mathbb{R}, \qquad \psi_i(x) := f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_k)$$

leképezés lineáris. Valóban, tetszőleges $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $u,v\in X$ esetén

$$\begin{aligned}
\psi_i\,(\alpha u+\beta v) &= \prod_{l=1}^{i-1}\varphi_l(a_l)\cdot\varphi_i(\alpha u+\beta v)\cdot\prod_{l=i+1}^{k}\varphi_l(a_l) = \\
&= \prod_{l=1}^{i-1}\varphi_l(a_l)\cdot\{\alpha\varphi_i(u)+\beta\varphi_i(v)\}\cdot\prod_{l=i+1}^{k}\varphi_l(a_l) = \\
&= \alpha\prod_{l=1}^{i-1}\varphi_l(a_l)\cdot\varphi_i(u)\cdot\prod_{l=i+1}^{k}\varphi_l(a_l) + \\
&\quad +\beta\prod_{l=1}^{i-1}\varphi_l(a_l)\cdot\varphi_i(v)\cdot\prod_{l=i+1}^{k}\varphi_l(a_l) = \\
&= \alpha\psi_i\,(u)+\beta\psi_i\,(v)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[35] Ezt a leképezést szokás a $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ 1-formák **tenzori szorzat**ának nevezni.

Megjegyzés. Világos, hogy az

$$(X')^k \to \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}), \qquad (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \mapsto \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k$$

leképezés k-lineáris. □

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_1, \ldots, b_n$ az X (valós) vektortér egy bázisa, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ formát egyértelműen meghatároznak a

$$(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) \qquad \left(j \in \{1, \ldots, n\}^k\right)$$

vektor k-asokon felvett értékei!
Útm. Lévén, hogy $b_1, \ldots, b_n$ az X egy bázisa, ezért minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén pontosan egy olyan $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \in \mathbb{R}^n$ szám n-es van, hogy

$$x_i = \sum_{j_i=1}^{n} \alpha_{ij_i} b_{j_i},$$

és így

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_k) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1} b_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{kj_k} b_{j_k}\right) = \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1} f\left(b_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{kj_k} b_{j_k}\right) = \ldots = \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1} \ldots \sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{kj_k} f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \\ &= \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_k \le n}^{n} \prod_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i} f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}). \end{aligned}$$

Megfordítva, ha tetszőlegesen választjuk az $f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) \in \mathbb{R}$ skalárokat, akkor az előző összefüggés egy k-formát határoz meg. ■

Megjegyzés.

- Ez azt jelenti, hogy pl. két 1-forma pontosan akkor egyenlő, ha valamely bázison ugyanazt az értéket veszik fel.

- Az f forma adott $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázisban való megadása tehát a bázison felvett $f_{j_1,\ldots,j_k}$ értékekkel is lehetséges, ahol az

$$f_{j_1,\ldots,j_k} := f\,(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k})\,.$$

számot az f forma $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázison vett **kompenensei**nek nevezzük. Hasonló állítás igaz az (r, s)-típusú tenzorok esetében is. Ha $\{b^1, \ldots, b^n\}$ az X' tér $\{b_1, \ldots, b_n\}$-hez tartozó duális bázisa (azaz $b^i(b_j) = \delta_{ij}$) és $f \in \mathcal{L}(X^r \times (X')^s, \mathbb{R})$ akkor minden $i \in \{1, \ldots, r\}$ és $j \in \{1, \ldots, s\}$ esetén pontosan egy olyan $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \in \mathbb{R}^n$ és $(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) \in \mathbb{R}^n$ szám n-es van, hogy az $x_1, \ldots, x_r \in X$, $y_1, \ldots, y_s \in X'$ vektorokra

$$x_i = \sum_{j_i=1}^{n} \alpha_{ij_i} b_{j_i} \qquad \text{és} \qquad y_j = \sum_{i_j=1}^{n} \beta_{ji_j} b^{i_j},$$

ill.

$$f(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = \sum_{1\le j_1,\ldots,j_r\le n} \; \sum_{1\le i_1,\ldots,i_s\le n} \prod_{i=1}^{r} \alpha_{ij_i} \prod_{j=1}^{s} \beta_{ji_j} f^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_r},$$

ahol az

$$f^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_r} := f\left(b_{j_1}, \ldots, b_{j_r}, b^{i_1}, \ldots, b^{i_s}\right)$$

számokat az f **tenzor** $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázison vett **kompenensei**nek nevezzük. Ez az oka annak, hogy egyes szerzők műveikben – különösen fizikai ihletésű irományokban – f-et $f_{j_1,\ldots,j_k}$-val, ill. $f^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_r}$-sel jelölik (amikor is $X = \mathbb{R}^n$ és a bázis a kanonikus bázis).

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ az $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ egy bázisa, akkor a

$$\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k} \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}^k)$$

k-formák bázist alkotnak az $\mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ térben!

Útm.

1. lépés. Legyen $b_1, \ldots, b_n \in X$ olyan bázis, hogy

$$\varphi_r(b_s) = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & (r = s), \\ \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \qquad (r, s \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ekkor tetszőleges $f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ esetén, ha

$$g := \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n} f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) \varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k},$$

akkor bármely $j \in \{1, \ldots, n\}^k$ ún. multiindexre

$$(g - f)(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = 0.$$

Ez azt jelenti (vö. fenti feladat), hogy $g - f = 0 \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$, így $g = f$, azaz

$$\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k} \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}^k)$$

generátorrendszer $\mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$-ben.

2. lépés. Látható, hogy a

$$\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k} \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}^k)$$

rendszer lineárisan független is, ui. ha valamely $\alpha_{j_1, \ldots, j_k} \in \mathbb{R}$ $(j \in \{1, \ldots, n\}^k)$ esetén

$$f_0 = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n} \alpha_{j_1, \ldots, j_k} \varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k},$$

akkor a

$$b_1, \ldots, b_n \in X$$

bázison vett helyettesítési érték

$$0 = f_0(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n} \alpha_{j_1, \ldots, j_k} \left(\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}\right) \left(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}\right) = \alpha_{j_1, \ldots, j_k},$$

így minden $j \in \{1, \ldots, n\}^k$ esetén $\alpha_{j_1, \ldots, j_k} = 0$. ■

Megjegyzés. A fenti állítás azt jelenti, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén X n-dimenziós valós vektortér, akkor az $\mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ vektortér n^k-dimenziós, hiszen n elem k-adrendű ismétléses variációinak száma n^k:

$$\dim\left(\mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})\right) = (\dim(X))^k = n^k.$$

Definíció. Ha X valós vektortér, $k, l \in \mathbb{N}_0$, akkor az $f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$, ill. a $g \in \mathcal{L}_l(X^l, \mathbb{R})$ formák (kovariáns tenzorok) **tenzori szorzat**ának nevezzük az

$$(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{k+l}) := f(x_1, \ldots, x_k) g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \qquad ((x_1, \ldots, x_{k+l}) \in X)$$

leképezést.

Megjegyzés.

1. Speciális esetként kapjuk az 1-formáknak az előző definícióban már értelmezett tenzori szorzatát.

2. Ha $\mathcal{T}(X)$ jelöli ezeknek a vektortereknek a direkt összegét:

$$\mathcal{T}(X) := \mathcal{L}_0(X^0, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_1(X^1, \mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}) \oplus \ldots := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}_m(X^m, \mathbb{R}),$$

   továbbá ha tetszőleges $r, s \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi_r \in \mathcal{L}_r(X^r, \mathbb{R})$, ill. $\psi_s \in \mathcal{L}_s(X^s, \mathbb{R})$, akkor

$$f := \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r \in \mathcal{T}(X), \qquad g := \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \in \mathcal{T}(X),$$

   és így az

$$f \otimes g := \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r+s=l} \varphi_r \otimes \psi_s$$

   tenzori szorzattal képzett $(\mathcal{T}(X), \otimes)$ algebrát szokás **tenzoralgebrának** is nevezni.

1.12.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Igazoljuk, hogy

   (a) ha adott $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén

   $$f(a, b) := a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

   akkor $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 2-lineáris (bilineáris) leképezés;

   (b) ha X_2 tetszőleges $\mathbb{C}$-vektortér, $X_1 := \mathcal{L}(X_2, \mathbb{C})$ és $Y := \mathbb{C}$, akkor

   $$f : X_1 \times X_2 \to Y, \quad f(\varphi, a) := \langle \varphi | a \rangle := \varphi(a)$$

   bilineáris leképezés;[36]

   (c) ha X $\mathbb{K}$-vektortér, akkor

   $$f : \mathcal{L}(X, X) \times \mathcal{L}(X, X) \to \mathcal{L}(X, X), \qquad f(A, B) := [A, B] := A \circ B - B \circ A$$

   2-lineáris (bilineáris) leképezés;[37]

[36] A **kvantummechanikában** a szuperpozíció elve következtében a fizikai rendszerek dinamikai állapotai lineáris terekkel írhatók le. Így ezekhez a dinamikai állapotokhoz valamely vektortér (esetünkben X_2) vektorait, az ún. „**ket-vektor**ok”at rendelik hozzá: $|a\rangle$. A ket-vektorok terén értelmezett $\langle \varphi|$ lineáris formák halmaza alkotja a „**bra-vektor**ok” terét (esetünkben X_1-et). Így a φ lineáris formának az a vektoron felvett helyettesítési értéke a $\langle \varphi | a \rangle$ „**bracket**” (’zárójel’). Megjegyezzük, hogy a kvantummechanikai ket-vektorok halmaza (X_2) **Hilbert-tér**. Az f leképezés $(1,1)$-típusú tenzor: $f \in \mathcal{T}_1^1(X_1, \mathbb{C})$.

[37] Ezt a leképezést szokás **kommutátor**nak (**Lie-zárójel**nek) nevezni. Adott $B \in \mathcal{L}(X)$ esetén e leképezés segítségével értelmezett

$$\mathrm{ad} : \mathcal{L}(X, X) \to \mathcal{L}(X, X), \qquad \mathrm{ad}(A) := [A, B]$$

leképezés pedig lineáris, melyet **adjungált reprezentáció**nak neveznek. Ezek a fogalmak több helyen is előfordulnak a kvantummechanikában. Például

- ha e_k, ill. a_k jelöli a (változó részecskeszámú) sokrészecske-rendszereket leíró (bozonikus) **Fock-tér keltő** (emissziós), ill. **eltüntető** (abszorpciós) **operátor**ait (amelyek a k-adik állapotban található részecskék számát eggyel növelik, ill. csökkentik), akkor a **Boose–Einstein-statisztikával** leírható részecskék (**bozon**ok) esetében

  $$[a_k, e_l] = \delta_{kl}\mathbb{E}, \qquad [a_k, a_l] = [e_k, e_l] = \mathbb{O}.$$

- két **fizikai mennyiség**et (pl. koordináta, impulzus, energia, stb.) **egyidejűleg mérhető**nek neveznek, ha a hozzájuk rendelt **operátor**ok (Hilbert-tér lineáris transzformációi) kommutátora nem tűnik el (ha

(d) ha X $\mathbb{K}$-vektortér, akkor

$$f : \mathcal{L}(X,X) \times \mathcal{L}(X,X) \to \mathcal{L}(X,X), \qquad f(A,B) := \{A,B\} := A \circ B + B \circ A$$

2-lineáris (bilineáris) leképezés;[38]

(e) az

$$f : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}, \qquad f(A,B) := \mathrm{Sp}(A^T B)$$

leképezés bilineáris forma;

(f) az

$$f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - cx_4y_4$$

függvény bilineáris forma;

q_k, ill. p_l $(k,l \in \{1,2,3\})$ jelöli a kvantummechanikai **koordiáta-**, ill. **impulzus-operátor**t, akkor

$$[p_k, q_l] = -\imath\hbar\delta_{kl}\mathbb{E}, \qquad [p_k, q_l] = [q_k, q_l] = \mathbb{O}$$

(**Heisenberg-féle felcserélési törvények**), ill. ha valamely fizikai mennyiséghez redelt O operátor explicite nem függ az időtől, akkor időbeli deriváltjára a

$$\frac{dO}{dt} = \frac{\imath}{\hbar}\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}(O)$$

Heisenberg-összefüggés (az O operátor mozgásegyenlete) teljesül, ahol $\mathcal{H}$ jelöli az adott kvantummechanikai rendszer ún. **Hamilton-operátor**át (a rendszer energiájához rendelt operátorát).

[38] Ezt a leképezést szokás **antikommutátor**nak (**(Dirac-)Poisson-zárójel**nek) nevezni. A kvantummechanikában több helyen is előfordul. Például

- a

$$[\sigma_1] := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\sigma_2] := \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\sigma_3] := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal (**Pauli-mátrix**okkal) reprezentálható **spin-operátor**okra

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{E}_2 \qquad (i,j \in \{1,2,3\}).$$

- ha e_k, ill. a_k jelöli a (változó részecskeszámú) sokrészecske-rendszereket leíró (**bozonikus**) **Fock-tér** keltő (emissziós), ill. eltüntető (abszorpciós) operátorait (amelyek a k-adik állapotban található részecskék számát eggyel növelik ill. csökkentik), akkor a **Fermi-Dirac-statisztikával** leírható részecskék (**fermion**ok) esetében

$$\{a_k, e_l\} = \delta_{kl}\mathbb{E}, \qquad \{a_k, a_l\} = \{e_k, e_l\} = \mathbb{O}.$$

(g) ha $X := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, akkor az

$$f : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad f(\varphi,\psi) := \int_a^b \varphi\psi$$

leképezés bilineáris forma!

Útm.

(a) Ha $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor

- $f(\cdot, b)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ill. $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén

  $$f(\alpha x+\beta y, b) = (\alpha x+\beta y)\times b = \ldots = \alpha(x\times b)+\beta(y\times b) = \alpha f(x, b)+\beta f(y, b).$$

- $f(a, \cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ill. $u, v \in \mathbb{R}^3$ esetén

  $$f(a, \alpha u+\beta v) = a\times(\alpha u+\beta v) = \ldots = \alpha(a\times u)+\beta(a\times v) = \alpha f(a, u)+\beta f(a, v).$$

(b) Ha $a \in X_2$ és $\varphi \in X_1 := \mathcal{L}(X_2, \mathbb{C})$, akkor

- $f(\cdot, a)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ill. $\mu, \nu \in X_1$ esetén

  $$\begin{aligned} f(\alpha\mu + \beta\nu, a) &= \langle\alpha\mu + \beta\nu|a\rangle = (\alpha\mu + \beta\nu)(a) = \alpha\mu(a) + \beta\nu(a) = \\ &= \alpha f(\mu, a) + \beta f(\nu, a). \end{aligned}$$

- $f(\varphi, \cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ill. $u, v \in X_2$ esetén

  $$\begin{aligned} f(\varphi, \alpha u + \beta v) &= \langle\varphi|\alpha u + \beta v\rangle = \varphi(\varphi, \alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) = \\ &= \alpha f(\varphi, u) + \beta f(\varphi, v). \end{aligned}$$

(c) Ha $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$, akkor

- $f(\cdot, B)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ill. $C, D \in \mathcal{L}(X, X)$ esetén

  $$\begin{aligned} f(\alpha C + \beta D, B) &= [\alpha C + \beta D, B] = (\alpha C + \beta D) \circ B - B \circ (\alpha C + \beta D) = \\ &= \alpha C \circ B + \beta D \circ B - \alpha B \circ C - \beta B \circ D = \\ &= \alpha(C \circ B - B \circ C) + \beta(D \circ B - B \circ D) = \\ &= \alpha[C, B] + \beta[D, B] = \alpha f(C, B) + \beta f(D, B). \end{aligned}$$

- $f(A,\cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $E,F\in\mathcal{L}(X,X)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(A,\alpha E+\beta F) &= [A,\alpha E+\beta F] = A\circ(\alpha E+\beta F)-(\alpha E+\beta F)\circ A = \\
&= \alpha A\circ E+\beta A\circ F-\alpha E\circ A-\beta F\circ A = \\
&= \alpha(A\circ E-E\circ A)+\beta(A\circ F-F\circ A) = \\
&= \alpha[A,E]+\beta[A,F] = \alpha f(A,E)+\beta f(A,F).
\end{aligned}$$

(d) Ha $A,B\in\mathcal{L}(X,X)$, akkor

- $f(\cdot,B)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $C,D\in\mathcal{L}(X,X)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(\alpha C+\beta D,B) &= \{\alpha C+\beta D,B\} = (\alpha C+\beta D)\circ B+B\circ(\alpha C+\beta D) = \\
&= \alpha C\circ B+\beta D\circ B+\alpha B\circ C+\beta B\circ D = \\
&= \alpha(C\circ B+B\circ C)+\beta(D\circ B+B\circ D) = \\
&= \alpha\{C,B\}+\beta\{D,B\} = \alpha f(C,B)+\beta f(D,B).
\end{aligned}$$

- $f(A,\cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $E,F\in\mathcal{L}(X,X)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(A,\alpha E+\beta F) &= \{A,\alpha E+\beta F\} = A\circ(\alpha E+\beta F)+(\alpha E+\beta F)\circ A = \\
&= \alpha A\circ E+\beta A\circ F+\alpha E\circ A+\beta F\circ A = \\
&= \alpha(A\circ E+E\circ A)+\beta(A\circ F+F\circ A) = \\
&= \alpha\{A,E\}+\beta\{A,F\} = \alpha f(A,E)+\beta f(A,F).
\end{aligned}$$

(e) Ha $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$, akkor

- $f(\cdot,B)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $C,D\in\mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(\alpha C+\beta D,B) &= \mathrm{Sp}\left((\alpha C+\beta D)^{\mathsf T}B\right) = \mathrm{Sp}\left(\alpha C^{\mathsf T}B+\beta D^{\mathsf T}B\right) = \\
&= \alpha\,\mathrm{Sp}\left(C^{\mathsf T}B\right)+\beta\,\mathrm{Sp}\left(D^{\mathsf T}B\right) = \alpha f(C,B)+\beta f(D,B) = \\
&= \alpha\{C,B\}+\beta\{D,B\} = \alpha f(C,B)+\beta f(D,B).
\end{aligned}$$

- $f(A,\cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $E,F\in\mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$\begin{aligned}f(A,\alpha E+\beta F) &= \mathrm{Sp}\left(A^T(\alpha E+\beta F)\right)=\mathrm{Sp}\left(\alpha A^TE+\beta A^TF)\right)=\\ &= \alpha\,\mathrm{Sp}\left(A^TE\right)+\beta\,\mathrm{Sp}\left(A^TF)\right)=\alpha f(A,E)+\beta f(A,F).\end{aligned}$$

(f) Ha $x,y\in\mathbb{R}^4$, akkor

- $f(\cdot,y)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $a,b\in\mathbb{R}^4$ esetén

$$\begin{aligned}f(\alpha a+\beta b,y) &= (\alpha a+\beta b)_1y_1+(\alpha a+\beta b)_2y_2+(\alpha a+\beta b)_3y_3-\\ &\quad -c(\alpha a+\beta b)_4y_4=\alpha\left(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3-ca_4y_4\right)+\\ &\quad +\beta\left(b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3-cb_4y_4\right)=\\ &= \alpha f(a,y)+\beta f(b,y).\end{aligned}$$

- $f(x,\cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $u,v\in\mathbb{R}^4$ esetén

$$\begin{aligned}f(x,\alpha u+\beta v) &= x_1(\alpha u+\beta v)_1+x_2(\alpha u+\beta v)_2+x_3(\alpha u+\beta v)_3-\\ &\quad -cx_4x_1(\alpha u+\beta v)_4=\alpha\left(x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3-cx_4u_4\right)+\\ &\quad +\beta\left(x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3-cx_4v_4\right)=\\ &= \alpha f(x,u)+\beta f(x,v).\end{aligned}$$

(g) Ha $\varphi,\psi\in\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, akkor

- $f(\cdot,\psi)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $g,h\in\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}f(\alpha g+\beta h,\psi) &= \int_a^b(\alpha g+\beta h)\psi=\alpha\int_a^b g\psi+\beta\int_a^b h\psi=\\ &= \alpha f(g,\psi)+\beta f(h,\psi).\end{aligned}$$

- $f(\varphi,\cdot)$ lineáris, hiszen bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $k,l\in\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}f(\varphi,\alpha k+\beta l) &= \int_a^b\varphi(\alpha k+\beta l)=\alpha\int_a^b\varphi k+\beta\int_a^b\varphi l=\\ &= \alpha f(\varphi,k)+\beta f(\varphi,l).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y) \sim \mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y)\right),$$

azaz az

$$\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y) \qquad \text{és az} \qquad \mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y)\right)$$

terek izomorfak!

Útm. Megmutatjuk, hogy a

$$(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, a_k) := f(a_1, \ldots, a_k)$$

$$(f \in \mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y), \quad a_j \in X_j \quad (j \in \{1, \ldots, k\})$$

leképezés izomorfizmus

$$\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y)\right)$$

között.

1. lépés. Bármely $a_1 \in X_1$ esetén

$$\varphi(f)(a_1) \in \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y),$$

ui. ha valamely $j \in \{2, \ldots, k\}$ esetén $x_j, y_j \in X_j$, akkor f k-linearitása következtében minden $\alpha, \beta \in K$-ra

$$(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, \alpha x_j + \beta y_j, \ldots, a_k) = f(a_1, \ldots, \alpha x_j + \beta y_j, \ldots, a_k) =$$

$$= \alpha f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_k) + \beta f(a_1, \ldots, y_j, \ldots, a_k) =$$

$$= \alpha(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, x_j, \ldots, a_k) + \beta(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, y_j, \ldots, a_k).$$

2. lépés. Tetszőleges $\alpha, \beta \in K$ és $a_1, b_1 \in X_1$ esetén

$$\varphi(f)(\alpha a_1 + \beta b_1) = \alpha\varphi(f)(a_1) + \beta\varphi(f)(b_1),$$

ui. f lineáris az első változójában, azaz ha $\alpha, \beta \in K$, $a_1, b_1 \in X_1$ és $a_j \in X_j$ $(j \in \{2, \ldots, k\})$, akkor

$$f(\alpha a_1 + \beta b_1, a_2, \ldots, a_k) = \alpha f(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \beta f(b_1, a_2, \ldots, a_k).$$

3. lépés. φ lineáris, azaz tetszőleges $\alpha, \beta \in K$, $f, g \in \mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)$ esetén

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g),$$

ui. minden $a_j \in X_j$, $(j \in \{1, \ldots, k\})$ esetén

$$(\alpha f + \beta g)(a_1, \ldots, a_k) = \alpha f(a_1, \ldots, a_k) + \beta g(a_1, \ldots, a_k),$$

így

$$\begin{aligned}((\varphi(\alpha f + \beta g))(a_1))(a_2, \ldots, a_k) &= \alpha(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, a_k)+ \\ &+\beta(\varphi(f)(a_1))(a_2, \ldots, a_k),\end{aligned}$$

ahonnan

$$(\varphi(\alpha f + \beta g))(a_1) = \alpha\varphi(f)(a_1) + \beta\varphi(g)(a_1).$$

4. lépés. φ injektív, ui. ha $f, g \in \mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)$ és $f \neq g$, akkor van olyan

$$(a_1, \ldots, a_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k,$$

hogy

$$f(a_1, \ldots, a_k) \neq g(a_1, \ldots, a_k),$$

tehát

$$(\varphi(f))(a_1) \neq (\varphi(g))(a_1), \qquad \text{azaz} \qquad \varphi(f) \neq \varphi(g).$$

5. lépés. φ szürjektív, ui. ha $g \in \mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y)\right)$ és

$$f(a_1, \ldots, a_k) := (g(a_1))(a_2, \ldots, a_k) \quad ((a_1, \ldots, a_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k),$$

akkor triviális módon $f \in \mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)$, és $\varphi(f) = g$, ui.

$$(\varphi(f))(a_1)(a_2, \ldots, a_k) = f(a_1, \ldots, a_k) = (g(a_1))(a_2, \ldots, a_k)$$

miatt $\varphi(f)(a_1) = g(a_1)$ $(a_1 \in X_1)$. ■

3. Igazoljuk, hogy ha $X_1, \ldots, X_k$ $(k \in \mathbb{N})$, ill. Y véges dimenziós $\mathbb{K}$-vektorterek (mindegyikük $\neq \{0\}$), akkor

$$\dim\left(\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y)\right) = \dim(Y) \cdot \prod_{i=1}^{k} \dim(X_i)$$

teljesül!

Útm. Az $n_i := \dim(X_i)$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ és $m := \dim(Y)$ jelölések bevezetésével

- $k = 1$ esetén $\mathcal{L}(X_1, Y) \sim \mathbb{K}^{m\times n_1}$, így

$$\dim\left(\mathcal{L}(X_1, Y)\right) = m \cdot n_1 = \dim\left(Y\right) \cdot \dim\left(X_1\right);$$

- ha valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a fenti állítás, akkor

$$\mathcal{L}_k(X_1, \ldots, X_k; Y) \sim \mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_{k-1}(X_2, \ldots, X_k; Y)\right)$$

miatt

$$\dim\left(\mathcal{L}_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}; Y)\right) = \dim\left(\mathcal{L}\left(X_1, \mathcal{L}_k(X_2, \ldots, X_{k+1}; Y)\right)\right) =$$

$$= \dim\left(X_1\right) \cdot \dim\left(\mathcal{L}_k(X_2, \ldots, X_{k+1}; Y)\right) = \dim\left(X_1\right) \cdot \dim\left(Y\right) \cdot \prod_{i=2}^{k+1} \dim(X_i) =$$

$$= \dim\left(Y\right) \cdot \prod_{i=1}^{k+1} \dim(X_i). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ez pl. azt jelenti, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén X n-dimenziós valós vektortér, akkor az $\mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ vektortér $1 \cdot n^k = n^k$-dimenziós.

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esetén

   (a) $\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi$, sőt $\varphi \wedge \varphi = f_0 \in \mathcal{L}_2((\mathbb{R}^n)^2, \mathbb{R})$;

   (b) $\varphi \wedge (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \wedge \psi_1 + \varphi \wedge \psi_2$, ill. $(\psi_1 + \psi_2) \wedge \varphi = \psi_1 \wedge \varphi + \psi_2 \wedge \varphi$;

   (c) $(\alpha\varphi) \wedge \psi = \varphi \wedge (\alpha\psi) = \alpha(\varphi \wedge \psi)$

   teljesül!
   Útm.

   (a) Világos, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

   $$\varphi\wedge\psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y) = -\left(\psi(x)\varphi(y) - \varphi(x)\psi(y)\right) = -\psi\wedge\varphi(x, y),$$

   ill.

   $$\varphi \wedge \varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(x)\varphi(y) = 0.$$

   Megjegyzés. Legyen

   $$f(x, y) := (\varphi \wedge \psi)(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

majd tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér $e_1, \dots, e_n$ kanonikus bázisában a φ és ψ lineáris formák mátrixa:

$$[\varphi] = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}, \qquad [\psi] = [b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$/a_i = \varphi(e_i), \qquad b_i = \psi(e_i)/ .$$

Ekkor f mátrixára

$$[f]_{ij} = f(e_i, e_j) = \varphi(e_i)\psi(e_j) - \psi(e_i)\varphi(e_j) = a_i b_j - b_i a_j.$$

(b) Minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}
(\varphi \wedge (\psi_1 + \psi_2))(x, y) &= \varphi(x)(\psi_1(y) + \psi_2(y)) - (\psi_1(x) + \psi_2(x))\varphi(y) = \\
&= \varphi(x)\psi_1(y) + \varphi(x)\psi_2(y) - \psi_1(x)\varphi(y) - \psi_2(x)\varphi(y) = \\
&= \varphi(x)\psi_1(y) - \psi_1(x)\varphi(y) + \varphi(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\varphi(y) = \\
&= (\varphi \wedge \psi_1)(x, y) + (\varphi \wedge \psi_2)(x, y),
\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}
((\psi_1 + \psi_2) \wedge \varphi)(x, y) &= (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))\psi(y) - \psi(x)(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) = \\
&= \varphi_1(x)\psi(y) + \varphi_2(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi_1(y) - \psi(x)\varphi_2(y) = \\
&= \varphi_1(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi_2(y) = \\
&= (\psi_1 \wedge \varphi)(x, y) + (\psi_2 \wedge \varphi)(x, y).
\end{aligned}$$

(c) Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}
((\alpha\varphi) \wedge \psi)(x, y) &= (\alpha\varphi)(x)\psi(y) - \psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\
&= \alpha\varphi(x)\psi(y) - \alpha\psi(x)\varphi(y) = \varphi(x)(\alpha\psi)(y) - \psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\
&= (\varphi \wedge (\alpha\psi))(x, y),
\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}(\alpha(\varphi\wedge\psi))(x,y) &= \alpha(\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)) = \alpha\varphi(x)\psi(y)-\alpha\psi(x)\varphi(y) = \\ &= \varphi(x)(\alpha\psi)(y)-\psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\ &= (\varphi\wedge(\alpha\psi))(x,y). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esetén

   (a) $\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi$;,

   (b) $(\psi_1+\psi_2)\vee\varphi = \psi_1\vee\varphi+\psi_2\vee\varphi$, ill. $\varphi\vee(\psi_1+\psi_2) = \varphi\vee\psi_1+\varphi\vee\psi_2$;

   (c) $(\alpha\varphi)\vee\psi = \varphi\vee(\alpha\psi) = \alpha(\varphi\vee\psi)$

   teljesül!

   Útm.

   (a) Világos, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

   $$\varphi\vee\psi(x,y) = \varphi(x)\psi(y)+\psi(x)\varphi(y) = \psi(x)\varphi(y)+\varphi(x)\psi(y) = \psi\wedge\varphi(x,y).$$

   (b) Minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

   $$\begin{aligned}(\varphi\vee(\psi_1+\psi_2))(x,y) &= \varphi(x)(\psi_1(y)+\psi_2(y))+(\psi_1(x)+\psi_2(x))\varphi(y) = \\ &= \varphi(x)\psi_1(y)+\varphi(x)\psi_2(y)+\psi_1(x)\varphi(y)+\psi_2(x)\varphi(y) = \\ &= \varphi(x)\psi_1(y)+\psi_1(x)\varphi(y)+\varphi(x)\psi_2(y)+\psi_2(x)\varphi(y) = \\ &= (\varphi\vee\psi_1)(x,y)+(\varphi\vee\psi_2)(x,y),\end{aligned}$$

   ill.

   $$\begin{aligned}((\psi_1+\psi_2)\vee\varphi)(x,y) &= (\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\psi(y)+\psi(x)(\varphi_1(y)+\varphi_2(y)) = \\ &= \varphi_1(x)\psi(y)+\varphi_2(x)\psi(y)+\psi(x)\varphi_1(y)+\psi(x)\varphi_2(y) = \\ &= \varphi_1(x)\psi(y)+\psi(x)\varphi_1(y)+\varphi_2(x)\psi(y)+\psi(x)\varphi_2(y) = \\ &= (\psi_1\vee\varphi)(x,y)+(\psi_2\vee\varphi)(x,y).\end{aligned}$$

(c) Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}
((\alpha\varphi) \vee \psi)(x,y) &= (\alpha\varphi)(x)\psi(y) + \psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\
&= \alpha\varphi(x)\psi(y) + \alpha\psi(x)\varphi(y) = \varphi(x)(\alpha\psi)(y) + \psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\
&= (\varphi \vee (\alpha\psi))(x,y),
\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}
(\alpha(\varphi \vee \psi))(x,y) &= \alpha(\varphi(x)\psi(y) + \psi(x)\varphi(y)) = \alpha\varphi(x)\psi(y) + \alpha\psi(x)\varphi(y) = \\
&= \varphi(x)(\alpha\psi)(y) + \psi(x)(\alpha\varphi)(y) = \\
&= (\varphi \vee (\alpha\psi))(x,y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6. Igazoljuk, hogy ha X vektortér valamely K testre vonatkozóan, $k, l \in \mathbb{N}$, továbbá

$$f \in \mathcal{L}_k(X^k, K), \qquad \text{ill.} \qquad g \in \mathcal{L}_l(X^l, K),$$

akkor az

$$f \otimes g : X^{k+l} \to K, \qquad (f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{k+l}) := f(x_1, \ldots, x_k) \cdot g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})$$

leképezésre

$$f \otimes g \in \mathcal{L}_{k+l}(X^{k+l}, K)$$

teljesül!

Útm. Nem nehéz belátni, hogy $f \otimes g$ bármely változójában lineáris. $\blacksquare$

7. Igazoljuk a tenzori szorzat alábbi tulajdonságait!

(a) A

$$\otimes : \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}_l(X^l, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}_{k+l}(X^{k+l}, \mathbb{R})$$

leképezés bilineáris, azaz bármely $k, l \in \mathbb{N}_0$ $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$, $\psi, \widetilde{\psi} \in \mathcal{L}_l(X^l, \mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

α) $(\lambda\varphi) \otimes \psi = \varphi \otimes (\lambda\psi) = \lambda(\varphi \otimes \psi) =: \lambda\varphi \otimes \psi$;

β) $(\varphi + \widetilde{\varphi}) \otimes \psi = \varphi \otimes \psi + \widetilde{\varphi} \otimes \psi$;

γ) $\varphi \otimes (\psi + \widetilde{\psi}) = \varphi \otimes \psi + \varphi \otimes \widetilde{\psi}$.

(b) $\otimes$ asszociatív, azaz ha $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{L}_l(X^l, \mathbb{R})$, továbbá $\omega \in \mathcal{L}_m(X^m, \mathbb{R})$, akkor

$$(\varphi \otimes \psi) \otimes \omega = \varphi \otimes (\psi \otimes \omega) =: \varphi \otimes \psi \otimes \omega.$$

Útm.

(a) A $\otimes$ leképezés multilinearitása, ill. az $(a)-(c)$ tulajdonságok a definíció közvetlen következményei.

(b) **Házi feladat.** ■

1.13. 13. gyakorlat

1.13.1. A gyakorlat anyaga

Definíció. Ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$, ill. $X_1 = \ldots = X_k =: X$, Y vektorterek valamely K testre vonatkozóan, és $\mathrm{char}(K) \neq 2$,[39] akkor azt mondjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_k(X^k, Y)$, ill. $f \in \mathcal{L}_k(X^k, K)$

- **szimmetrikus**, ha helyettesítési értéke két változó cseréjével nem változik,
- **alternáló** vagy **antiszimmetrikus**, ha helyettesítési értéke két változó cseréjével (-1)-szeresébe megy át,

azaz ha minden $i, j \in \{1, \ldots, k\}$: $i < j$ index és minden $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{D}_f$ elem esetén

- $f(a_1, \ldots, a_k) = f(b_1, \ldots, b_k)$,
- $f(a_1, \ldots, a_k) = -f(b_1, \ldots, b_k)$,

ahol

$$b_l := \begin{cases} a_l & (l \notin \{i, j\}), \\ \\ a_i & (l = j), \\ \\ a_j & (l = i). \quad \Diamond \end{cases}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor szimmetrikus, ill. alternáló, ha bármely $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permutáció és $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorok esetén

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right) = f(x_1, \ldots, x_k), \qquad \text{ill.} \qquad f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_k).$$

[39] Adott K test esetén K **karakterisztikájának** nevezzük a

$$\mathrm{char}(K) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : \ nr = 0 \in K (r \in K)\} & (\exists\, m \in \mathbb{N} : \ mr = 0 \in K (r \in K)) \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

természetes számot. (Az olyan testeket, amelyekben „$1 + 1 = 0$” teljesül, kizárjuk a vizsgálatainkból.)

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $\tau \in \mathfrak{S}_k$ transzpozícióra $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$, továbbá bármely $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permutáció $\mathfrak{S}_k$-beli transzpozíciók kompozíciója, ill. tetszőleges $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_k$ esetén

$$\mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma),$$

ezért a feltétel szükségessége nyilvánvaló.

2. lépés. A feltétel elégséges is, ui. ha $x_1, \ldots, x_k \in X$ és $i, j \in \{1, \ldots, k\}$: $i < j$, akkor a $\tau \in \mathfrak{S}_k$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ transzpozícióra

- ha
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(k)}),$$
akkor
$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(k)}) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$$
következtében
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$$
azaz f szimmetrikus;
- ha
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = \mathrm{sgn}(\tau) f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(k)}),$$
akkor
$$\mathrm{sgn}(\tau) f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(k)}) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k),$$
következtében
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k),$$
azaz f alternáló. ■

Megjegyzések.

1. Az $f \in \mathcal{L}_k(X^k, Y)$, ill. $f \in \mathcal{L}_k(X^k, K)$ leképezés tehát pontosan akkor
   - szimmetrikus, ha változóinak bármely átrendezése esetén ugyanazt a helyettesítési értéket veszi fel;
   - antiszimmetrikus, ha változóinak páros permutációjú átrendezése esetén nem változtatja az értékét, páratlan permutációjú átrendezésénél pedig előjelet vált. Ha pl. $f : X^3 \to Y$ alternáló, akkor bármely $x, y, z \in X$ vektor esetén

$$f(x, y, z) = f(z, x, y) = f(y, z, x) = -f(z, y, x) = -f(y, x, z) = -f(x, z, y).$$

2. A kvantummechanika egy rendszer pillanatnyi állapotát $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ hullámfüggvénnyel ábrázolja, ami a mérhető tulajdonságok – másképpen megfigyelhető mennyiségek – valószínűség-eloszlását írja le. Megfigyelhető mennyiség például az energia, térbeli helyzet (a nem relativisztikus elméletben), impulzus, impulzusmomentum stb. Valamely fizikai rendszert alkotó részecskéket azonosnak tekinthetünk, ha a rendszer dinamikai tulajdonságai a részecskék bármely egymás közötti felcserélésekor változatlanok maradnak. A kvantummechanika egyik posztulátuma a **szimmetrizálási posztulátum**: véges számú részecskéből álló rendszer rászecskéinek hullámfüggvényei szimmetrikusak vagy antiszimmetrikusak. A kísérleti megfigyelések szerint a feles spinű azonos részecskékből (elektron, proton, neutron, neutrínó, müon stb.) felépülő rendszereknél a természet csak az antiszimmetrikus álapotokat alakítja ki, azaz az ilyen részecskék hullámfüggvénye antiszimmetrikus (**fermionrendszerek**).[40] Az egész spinű azonos részecskékből (foton, pion, kaon stb.) felépülő rendszerek esetében viszont csak szimmetrikus állapotok léteznek a természetben, azaz az ilyen részecskék hullámfüggvénye szimmetrikus (**bozonrendszerek**).[41]

[40] A **Fermi-Dirac-statisztiká**val leíarható részecskék neve.
[41] A **Bose-Einstein-statisztiká**val leíarható részecskék neve.

3. A szimmetrikus, ill. alternáló formák alteret alkotnak az $\mathcal{L}_k(X^k, K)$ lineáris térben. Az

$$\mathcal{S}_k(X) := \begin{cases} K & (k=0), \\ X' = \mathcal{L}(X,K) & (k=1), \\ \big\{f \in \mathcal{L}_k(X^k,K): \text{ f szimmetrikus}\big\} & (k>1), \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_k(X) := \begin{cases} K & (k=0), \\ X' = \mathcal{L}(X,K) & (k=1), \\ \big\{f \in \mathcal{L}_k(X^k,K): \text{ f alternáló}\big\} & (k>1). \end{cases}$$

jelölések bevezetésével

- a $k \geq 2$ esetben

  $$\mathcal{S}_k(X) \cap \mathcal{A}_k(X) = \{f_0\}.$$

  azaz egyetlen olyan forma van, amely mind szimmetrikus, mind pedig alternáló;
- a $k = 1$ esetben

  $$\mathcal{S}_1(X) = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{A}_1(X).$$

  Speciálisan, $\mathbb{R}^n$ véges dimenziós volta miatt

  $$\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n) \sim \mathbb{R}^n \sim \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n),$$

  hiszen az

  $$\mathbb{R}^n \ni a \mapsto f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

  leképezés izomorfia, továbbá

  $$f_{e_1}, \ldots, f_{e_n}, \qquad \text{azaz} \qquad dx_1, \ldots, dx_n, \qquad \text{ill.} \qquad \Delta_1^{n,1}, \ldots, \Delta_n^{n,1}$$

  bázis $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$-ben, ill. $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$-ben.

Példák.

1. Ha $X := \mathbb{R}^n$, $Y := \mathbb{R}$, akkor az

$$f : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

szimmetrikus bilineáris forma.

2. Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ egyforma, akkor az $f := \varphi \wedge \psi$ alternáló 2-forma (vö. 12. beadható feladatsor).

3. Tetszőleges skalárértékű függvény k-adik deriváltja szimmetrikus k-forma (vö. Young-tétel).

4. f_A pontosan akkor szimmetrikus, ill. alternáló forma, ha A szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus mátrix, azaz $A^T = A$, ill. $A^T = -A$, ui. pl., ha

   - f alternáló és $\{e_1, \ldots, e_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, akkor bármely $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén
   $$a_{ij} = f_A(e_i, e_j) = -f_A(e_j, e_i) = -a_{ji},$$
   - A antiszimmetrikus, akkor tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén
   $$f_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle = \langle x, -Ay\rangle = -\langle x, Ay\rangle = -\langle Ay, x\rangle = -f_A(y, x).$$

Megjegyzés. Ha $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deriválható vektormező és $a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$, akkor az

$$f'(a) - f'(a)^T$$

mátrix antiszimmetrikus, így

$$\mathrm{Rot}(f)(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{Rot}(f)(a)(x, y) := \Big\langle (f'(a) - f'(a)^T)x, y \Big\rangle$$

alternáló bilineáris leképezés. Speciálisan $n = 3$ esetén

$$\mathrm{Rot}(f)(a)(x, y) = \langle \mathrm{rot}(f)(a), x \times y\rangle \qquad (x, y \in \mathbb{R}^3),$$

ui. az $[a, b, c] := \langle a \times b, c\rangle$ szorzatra $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$ (a vegyes szorzat előjele két tényező felcserélésével megváltozik, mindhárom tényező ciklikus felcserélése esetén változatlan marad), továbbá

$$\mathrm{rot}(f)(a) \times r = (f'(a) - f'(a)^T)r \quad (r \in \mathbb{R}^3),$$

hiszen a

$$T := f'(a) - f'(a)^T$$

mátrix antiszimmetrikus, így van olyan $w \in \mathbb{R}^3$ vektor, hogy

$$Tr = w \times r \quad (r \in \mathbb{R}^3) : \qquad w = (-T_{23}, T_{13}, -T_{12}),$$

5. Ha f az a leképezés, ami n darab $\mathbb{R}^n$-beli vektorhoz hozzárendeli ezen vektorokból, mint oszlopvektorokból alkotott mátrix determinánsát, azaz

$$f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, \dots, x_n) := \det[x_1, \dots, x_n],$$

akkor a determináns tulajdonságai miatt $f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n)$.
Megjegyzés. f-et szokás **Levi-Civita-tenzor**nak[42] nevezni, ui. ha $\{e_1, \dots, e_n\}$ jelöli $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, akkor ebben a bázisban f komponensei az ún. **Levi-Civita-szimbólum**ok:

$$f\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}\right) = \epsilon_{j_1,\dots,j_n} := \begin{cases} +1 & (j \in N^n,\ j \text{ az } (1, \dots, n) \text{ páros permutációja}), \\ \\ -1 & (j \in N^n,\ j \text{ az } (1, \dots, n) \text{ páratlan permutációja}), \\ \\ 0 & (j \in N^n,\ j \text{ nem injektív}), \end{cases}$$

ahol $N := \{1, \dots, n\}$. Ezen szimbólumok segítségével tetszőleges

$$M = [M_{rs}]_{r,s=1}^{n,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix determinánsára:

$$\det(M) = \sum_{j \in N^n} \epsilon_{j_1,\dots,j_n} \prod_{l=1}^{n} M_{lj_l}.$$

6. Ha $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, akkor az

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \det[v, x, y]$$

leképezésre: $f \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$.
Megjegyzés. f fizikai jelentése: ha v valamely stacionárius áramlás sebességmezeje, akkor $f(x, y)$ jelentése az x, y vektorok kifeszítette paralelogrammán átáramló folyadék fluxusa. Az x, y vektorok sorrendje adja meg a paralelogramma irányítását, ettől függ, hogy a folyadék pozitív, ill. negatív irányban áramlik-e át a paralelogrammán.

[42] Tullio Levi-Civita (1873 – 1941).

Feladat. Legyen $2 \leq k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}_k(X^k, K)$. Mutassuk meg, hogy egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) $f \in \mathcal{A}_k(X)$.

(2) Ha az $x_1 \ldots, x_k \in X$ vektorok közül bármely kettő megegyezik, akkor $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Ha $f \in \mathcal{A}_k(X)$ és valamely $i, j \in \{1, \ldots, k\}$: $i < j$ indexek, ill. $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorok esetén $x_i = x_j$, akkor

$$f(x_1, \ldots, x_k) = -f(x_1, \ldots, x_k),$$

igy

$$2 \cdot f(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) + f(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

ezért (a $\mathrm{char}(K) \neq 2$ feltétel miatt)

$$f(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. Tegyük fel, hogy bármely $i, j \in \{1, \ldots, k\}$: $i < j$ indexek, ill. $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorok esetén

$$x_i = x_j \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

Ekkor

$$0 = f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j + x_i, \ldots, x_k),$$

ahol az $x_i + x_j$, ill. az $x_j + x_i$ vektor az i-edik, ill. a j-edik változóban van. Így f multilinearitása és alternáló volta következtében

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) + f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_k) + \\ &\quad + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = \\ &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) + 0 + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k) + 0 = \\ &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k), \end{aligned}$$

ahonnan

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$$

következik. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathcal{A}_k(X)$ és az $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor fennáll az $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$ egyenlőség!

Útm. Ha az $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor ezen vektorok valamelyike kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy ez x_1,[43] azaz alkalmas $\lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ esetén

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j x_j.$$

Így, ha $f \in \mathcal{A}_k(X)$, akkor

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_k) &= f\left(\sum_{j=2}^{k} \lambda_j x_j, x_2, \ldots, x_k\right) = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j f(x_j, x_2, \ldots, x_k) = \\ &= f(x_2, x_2, \ldots, x_k) + \ldots + f(x_k, x_2, \ldots, x_k) = 0 + \ldots + 0 = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzések.

1. Ha $2 \le k \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $k > \dim(X)$ és $f \in \mathcal{A}_k(X)$, akkor – lévén, hogy X-ben maximálisan $\dim(X)$ lineárisan független vektor van – bármely $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, így $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$, ahonnan $\mathcal{A}_k(X) = \{f_0\}$ következik.

2. Az előző feladatbeli állítás megfordítottja nem igaz: egy f_0-tól különböző alternáló forma lineárisan független vektorokon is vehet fel nulla értéket (vö. 5. beadható feladat).

Definíció. Ha $k, l \in \mathbb{N}_0$, akkor az

1. $f \in \mathcal{S}_k(X)$ és a $g \in \mathcal{S}_l(X)$ formák **szimmetrikus szorzat**ának nevezzük az

$$(f \vee g)(x_1, \ldots, x_{k+l}) := \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) g(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(k+l)})$$

$$((x_1, \ldots, x_{k+l}) \in X^{k+l})$$

leképezést;

[43] Átszámozással ez mindig megtehető.

2. $f \in \mathcal{A}_k(X)$ és a $g \in \mathcal{A}_l(X)$ formák **külső szorzat**ának (**Grassman-szorzat**ának) nevezzük az

$$(f \wedge g)(x_1, \ldots, x_{k+l}) := \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) g(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(k+l)})$$

$$((x_1, \ldots, x_{k+l}) \in X^{k+l})$$

leképezést. $\Diamond$

Példák. Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(X)$ és $\omega \in \mathcal{A}_2(X)$, akkor

$$(\varphi \wedge \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y) \qquad (x, y \in X)$$

és

$$(\varphi \wedge \omega)(x, y, z) = \varphi(x)\omega(y, z) + \varphi(y)\omega(z, x) + \varphi(z)\omega(x, y) \qquad (x, y, z \in X). \quad \Diamond$$

Definíció. Adott $2 \leq k \in \mathbb{N}$, ill. $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{L}(X, K)$ esetén legyen

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varphi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\sigma(k)},$$

azaz tetszőleges $x_1, \ldots, x_k \in X$ esetén legyen

$$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{j=1}^{k} \varphi_{\sigma(j)}(x_j);$$

illetve

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\sigma(k)},$$

azaz tetszőleges $x_1, \ldots, x_k \in X$ esetén legyen

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} \varphi_{\sigma(j)}(x_j). \quad \Diamond$$

Példa. Mivel

$$\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id} = [123], [231] = (12)(13), [312] = (12)(13), [321] = (13), [213] = (12), [132] = (23)\},$$

ezért

$$\begin{aligned}\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \varphi_{\sigma(3)} = \\ &= \overset{\boxed{\sigma=\mathrm{id}}}{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3} + \overset{\boxed{\sigma=[231]}}{\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_1} + \overset{\boxed{\sigma=[312]}}{\varphi_3 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2} + \\ &\quad + \overset{\boxed{\sigma=[321]}}{\varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1} + \overset{\boxed{\sigma=[213]}}{\varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_3} + \overset{\boxed{\sigma=[132]}}{\varphi_1 \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_2},\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \varphi_{\sigma(3)} = \\ &= \overset{\boxed{\sigma=\mathrm{id}}}{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3} + \overset{\boxed{\sigma=[231]}}{\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_1} + \overset{\boxed{\sigma=[312]}}{\varphi_3 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2} - \\ &\quad - \overset{\boxed{\sigma=[321]}}{\varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1} - \overset{\boxed{\sigma=[213]}}{\varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_3} - \overset{\boxed{\sigma=[132]}}{\varphi_1 \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_2}.\end{aligned}$$

Megjegyzések.

1. Világos, hogy az

$$(X')^k \to \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}), \qquad (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \mapsto \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k,$$

ill. az

$$(X')^k \to \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}), \qquad (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \mapsto \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$$

leképezés k-lineáris és szimmetrikus, ill. alternáló.

2. A permanensre, ill. a determinánsra vonatkozó kifejtési tétel és (k-ra vonatkozó) indukció felhasználásával könnyen megmutatható, hogy tetszőleges $x_1, \ldots, x_k \in X$ esetén

$$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{perm}\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_k)\end{bmatrix} = \mathrm{perm}\,[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1}^k,$$

illetve

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(x_1, \ldots, x_k) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_k) \end{bmatrix} = \det\,[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1}^{k}$$

(ez utóbbi nem más, mint a kvantummechanikai számításokban használatos **Slater-determináns**[44] $\sqrt{n!}$-szorosa), azaz

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k : X^k \to \mathbb{R} \qquad \text{szimmetrikus } k\text{-forma},$$

ill.

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : X^k \to \mathbb{R} \qquad \text{alternáló } k\text{-forma.} \quad \square$$

Példa. Ha

$$\varphi(r) := a + b, \quad \psi(r) := a - b \qquad (r = (a, b) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)(r, s) &= \operatorname{perm} \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix} = (a+b)(c-d) + (c+d)(a-b) = \\ &= -2bd + 2ac \qquad (r = (a, b), s = (c, d) \in \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)(r, s) &= \det \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix} = \\ &= (a+b)(c-d) + (c+d)(a-b) = \\ &= -2ad + 2bc \qquad (r = (a, b), s = (c, d) \in \mathbb{R}^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n$ bázis az X (valós) vektortérben, $k \in \mathsf{N} := \{1, \ldots, n\}$, továbbá

[44] John Clarke Slater (1900 – 1976).

1. $N^k_\sim$ jelöli a **monoton multiindex**ek halmazát, azaz

$$N^k_\sim := \begin{cases} N^1_\sim := N & (k=1), \\ \\ \left\{ i \in N^k : \ i_1 \leq \ldots \leq i_k \right\} & (k>1), \end{cases}$$

akkor

$$\Sigma^{n,k}_i := b^{i_1} \vee \ldots \vee b^{i_k} \qquad (i \in N_\sim{}^k)$$

bázis $\mathcal{S}_k(X)$-ben, azaz

$$\forall\, f \in \mathcal{S}_k(X) \ \ \exists |\, \alpha_i \in \mathbb{R}\ (i \in N^k_\sim) : \qquad f = \sum_{i \in N^k_\sim} \alpha_i \Sigma^{n,k}_i$$

teljesül;

2. N^k_* jelöli a **szigorúan monoton multiindex**ek halmazát, azaz

$$N^k{*} := \begin{cases} N^1{*} := N & (k=1), \\ \\ \left\{ i \in N^k : \ i_1 < \ldots < i_k \right\} & (k>1), \end{cases}$$

akkor

$$\Delta^{n,k}_i := b^{i_1} \wedge \ldots \wedge b^{i_k} \qquad (i \in N^k_*)$$

bázis $\mathcal{A}_k(X)$-ben, azaz

$$\forall\, f \in \mathcal{A}_k(X) \ \ \exists |\, \alpha_i \in \mathbb{R}\ (i \in N^k_*) : \quad f = \sum_{i \in N^k_*} \alpha_i \Delta^{n,k}_i$$

teljesül!

Útm. (Vö. előző gyakorlat, ill. 7. beadható feladat). ■

Megjegyzések.

1. Ha $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ és $b_j = e_j$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ a kanonikus bázis, $k \in N := \{1, \ldots, n\}$, akkor bármely $i = (i_1, \ldots, i_k) \in N^k_*$ (szigorúan monoton) multiindex esetén

$$b^{i_1} \wedge \ldots \wedge b^{i_k} = f_{e_{i_1}} \wedge \ldots \wedge f_{e_{i_k}} = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \Delta^{n,1}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Delta^{n,1}_{i_k} = \Delta^{n,k}_i.$$

2. Ha $f \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$, akkor (vö. előző gyakorlat)

$$f = \sum_{i \in N^k_*} a_i \Delta^{n,k}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_i = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

3. Világos, hogy ha $\mathrm{i}, \mathrm{l} \in \mathrm{N}_*^k$, akkor

$$\Delta_{\mathrm{i}}^{n,k}(e_{l_1},\ldots,e_{l_k}) \;=\; \det\begin{bmatrix} f_{e_{i_1}}(e_{l_1}) & \ldots & f_{e_{i_1}}(e_{l_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{e_{i_k}}(e_{l_1}) & \ldots & f_{e_{i_k}}(e_{l_k}) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e_{l_1 i_1} & \ldots & e_{l_k i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{l_1 i_k} & \ldots & e_{l_k i_k} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mathrm{i} = \mathrm{l}), \\ \\ 0 & (\mathrm{i} \neq \mathrm{l}), \end{cases}$$

hiszen

- $\mathrm{i} = \mathrm{l}$ esetén $\Delta_{\mathrm{i}}^{n,k}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$ nem más, mint az egységmátrix determinánsa:

$$\Delta_{\mathrm{i}}^{n,k}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) = \det(\mathbb{E}_k) = 1;$$

- $\mathrm{i} \neq \mathrm{l}$ esetén van olyan $r \in \{1,\ldots,k\}$, hogy i_r nem fordul elő l komponensei között, ezért bármely $s \in \{1,\ldots,k\}$ esetén $f_{e_{i_r}}(e_{i_s}) = 0$, azaz a mátrix r-edik sora csupa 0-ból áll.

4. Lévén, hogy valamely $\mathrm{i} \in \mathrm{N}_*^k$ multiindex tetszőleges $\widetilde{\mathrm{i}}$ permutációja esetén, ha Δ_{i} báziselem $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$-ben, akkor $\Delta_{\widetilde{\mathrm{i}}}$ is az (hiszen $\Delta_{\mathrm{i}} = \pm\Delta_{\widetilde{\mathrm{i}}}$), ezért pl. $n = 3$, $k = 2$ esetén olykor az $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$-beli

$$\{dx_2 \wedge dx_3,\; dx_1 \wedge dx_3,\; dx_1 \wedge dx_2\} = \left\{\Delta_{(2,3)}^{3,2},\; \Delta_{(1,3)}^{3,2},\; \Delta_{(1,2)}^{3,2}\right\}$$

bázis helyett a

$$\{dx_2 \wedge dx_3,\; dx_3 \wedge dx_1,\; dx_1 \wedge dx_2\} = \left\{\Delta_{(2,3)}^{3,2},\; \Delta_{(3,1)}^{3,2},\; \Delta_{(1,2)}^{3,2}\right\}.$$

bázist fogjuk használni (vö. következő gyakorlat).

5. Elemi kombinatorikai ismeretek felhasználásával – n elem k-adrendű ismétléses kombinációinak, ill. k-adrendű kombinációinak számát tudva – megállapítható, hogy ha $\dim(X) = n$, akkor bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\dim(\mathcal{S}_k(X)) = \binom{n+k-1}{k}, \qquad \text{ill.} \qquad \dim(\mathcal{A}_k(X)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} & (k \leq n), \\ \\ 0 & (k > n). \end{cases}$$

6. Ha $\dim(X) = n$, akkor $\mathcal{S}_k(X)$ izomorf az n-változós k-adrendű polinomok vektorterével.

7. Az $\mathcal{S}(X)$ szimbólum jelöli az $S_k(X)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ vektorterek direktösszegét:

$$\mathcal{S}(X) := \mathcal{S}_0(X) \oplus \mathcal{S}_1(X) \oplus \ldots \oplus \mathcal{S}_n(X) \oplus \ldots := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{S}_m(X).$$

Ha tetszőleges $r, s \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi_r \in \mathcal{S}_r(X)$, ill. $\psi_s \in \mathcal{S}_s(X)$, akkor

$$f := \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r \in \mathcal{S}(X), \qquad g := \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \in \mathcal{S}(X),$$

és így az

$$f \vee g := \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r+s=l} \varphi_r \vee \psi_s$$

szimmetrikus szorzattal képzett $(\mathcal{S}(X), \vee)$ algebrát szokás **szimmetrikus algebrának** is nevezni. Az $\mathcal{S}(X)$ teret a kvantummechanikában (X-re vonatkozó) **bozonikus Fock-tér**nek[45] nevezik, ahol többnyire $X := L^2(\mathbb{R}^3)$ és az alaptest $\mathbb{C}$.

Az $\mathcal{A}(X)$ szimbólum jelöli az $A_k(X)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ vektorterek direktösszegét:

$$\mathcal{A}(X) := \mathcal{A}_0(X) \oplus \mathcal{A}_1(X) \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_n(X) \oplus \ldots := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}_m(X)$$

Világos, hogy ha $\dim(X) = n$, akkor

$$\dim(\mathcal{A}(X)) = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} + 0 + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ha tetszőleges $r, s \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi_r \in \mathcal{A}_r(X)$, ill. $\psi_s \in \mathcal{A}_s(X)$, akkor

$$f := \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r \in \mathcal{A}(X), \qquad g := \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \in \mathcal{A}(X),$$

és így az

$$f \wedge g := \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r+s=l} \varphi_r \wedge \psi_s$$

külső szorzattal képzett $(\mathcal{A}(X), \wedge)$ algebrát szokás **Graßmann-algebrának**[46] is nevezni. Az $\mathcal{A}(X)$ teret a kvantummechanikában (X-re vonatkozó) **fermionikus Fock-tér**nek nevezik, ahol többnyire $X := L^2(\mathbb{R}^3)$ és az alaptest $\mathbb{C}$. ■

[45] Vlagyimir Alexandrovics Fock (1898 – 1974).
[46] Hermann Graßmann (1809 – 1877).

Példák. Legyen $X := \mathbb{R}^n$.

1. Ha $k = 1$, akkor $\binom{n}{1} = n$. Ez az az eset, amikor $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, ill. $dx_i = \Delta_i^{n,1}$ kiszedi az argumentum i-edik komponensét („kiköpőforma”):

$$dx_i(x) = \Delta_i^{n,1}(x) = \det[x_i] = x_i = \langle e_i, x\rangle = f_{e_i}(x) \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)\,,$$

tehát bármely

$$f \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n) \,/\!= \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})/\,,$$

esetén pontosan egy olyan $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ van, hogy ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta_i^{n,1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \langle \alpha, x\rangle = f_\alpha(x).$$

2. Ha $n = 3$, $k = 2$, akkor $\binom{3}{2} = 3$. Ekkor bármely $f \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$ esetén pontosan egy olyan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ van, hogy

$$f = \alpha_1(dx_2 \wedge dx_3) + \alpha_2(dx_3 \wedge dx_1) + \alpha_3(dx_1 \wedge dx_2) = \alpha_1\Delta^{3,2}_{(2,3)} + \alpha_2\Delta^{3,2}_{(3,1)} + \alpha_3\Delta^{3,2}_{(1,2)}.$$

Konkrétan

(a) $i = (1,2)$ esetén

$$\Delta^{3,2}_{(1,2)}(x_1, x_2) = \det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3);$$

(b) $i = (2,3)$ esetén

$$\Delta^{3,2}_{(2,3)}(x_1, x_2) = \det\begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23}\end{bmatrix} = x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3);$$

(c) $i = (3,1)$ esetén

$$\Delta^{3,2}_{(3,1)}(x_1, x_2) = \det\begin{bmatrix} x_{13} & x_{11} \\ x_{23} & x_{21}\end{bmatrix} = x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23} \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3);$$

(d) $i = (2{,}3)$ esetén

$$\Delta^{3,2}_{(2,3)}(e_1, e_2) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \Delta^{2,3}_{(2,3)}(e_1, e_3) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Delta^{3,2}_{(2,3)}(e_2, e_3) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

(e) $i = (1{,}3)$ esetén

$$\Delta^{3,2}_{(1,3)}(e_1, e_2) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \Delta^{2,3}_{(1,3)}(e_1, e_3) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\Delta^{3,2}_{(1,3)}(e_2, e_3) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

3. Mivel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ezért

$$\dim\left(\mathcal{A}_k(X)\right) = \dim\left(\mathcal{A}_{n-k}(X)\right), \qquad \text{így} \qquad \mathcal{A}_k(X) \sim \mathcal{A}_{n-k}(X).$$

A $k = 1$ speciális esetben

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1},$$

ezért

$$\dim(\mathcal{A}_1(X)) = n = \dim(\mathcal{A}_{n-1}(X)) = n, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{A}_1(X) \sim X \sim \mathcal{A}_{n-1}(X).$$

Bizonyos **fizikai mennyiség**ek (mint pl. **impulzus** vagy **mágneses térerősség**), amelyeket vektorokkal írunk le, sokkal jobban modellezhetők, ha 1-formáknak vagy $(n-1)$-formáknak tekintjük őket.

4. Ha $k = n$, akkor $\binom{n}{n} = 1$, így

$$\mathcal{A}_n(X) = \left\{\alpha \cdot \Delta^{n,n}_{(1,\ldots,n)} : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

HÁZI FELADAT. Az $\boxed{\text{L1}}$ Függelék ismeretanyaga.

1.13.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Az alábbi bilineáris leképezések közül melyik szimmetrikus, ill. melyik alternáló?

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(a, b) := a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$;

   (b) $f : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$, $f(A, B) := [A, B] := A \circ B - B \circ A$, ahol X $\mathbb{K}$-vektortér;

   (c) $f : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$, $f(A, B) := \{A, B\} := A \circ B + B \circ A$, ahol X $\mathbb{K}$-vektortér;

   (d) $f : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$, $f(A, B) := \mathrm{Sp}(A^\mathsf{T}B)$;

   (e) $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - cx_4y_4$;

   (f) $f : X \times X \to \mathbb{R}$, $f(\varphi, \psi) := \displaystyle\int_a^b \varphi\psi$, ahol $X := \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$;

   (g) $f : X \times X \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (\varphi \wedge \psi)(x, y)$, ahol $X := \mathbb{R}^n$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$;

   (h) $f : X \times X \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (\varphi \vee \psi)(x, y)$, ahol $X := \mathbb{R}^n$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

   Útm. Mivel

   (a) bármely $a, b \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} f(b, a) &= b \times a = (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2) = \\ &= -(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = -a \times b = \\ &= -f(a, b), \end{aligned}$$

   ezért f alternáló.

   (b) tetszőleges $A, B \in \mathcal{L}(X)$ esetén

$$f(B, A) = [B, A] = B \circ A - A \circ B = -(A \circ B - B \circ A) = -[A, B] = -f(A, B),$$

   ezért f alternáló.

   (c) minden $A, B \in \mathcal{L}(X)$ esetén

$$f(B, A) = \{B, A\} = B \circ A + A \circ B = A \circ B + B \circ A = \{A, B\} = f(A, B),$$

   ezért f szimmetrikus.

(d) bármely $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$f(B, A) = \mathrm{Sp}(B^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} = \mathrm{Sp}(A^T B) = f(A, B),$$

így f szimmetrikus.

(e) tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^4$ esetén

$$f(y, x) = f(x, y) := y_1x_1+y_2x_2+_3x_3y-y_4cx_4 = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-cx_4y_4 = f(x, y),$$

ezért f szimmetrikus.

(f) minden $\varphi, \psi \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ esetén

$$f(\psi, \varphi) = \int_a^b \psi\varphi = \int_a^b \varphi\psi = f(\varphi, \psi),$$

ezért f szimmetrikus.

(g) bármely $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esetén

$$f(\psi, \varphi) = \psi \wedge \varphi = -(\varphi \wedge \psi) = -f(\varphi, \psi),$$

ezért f alternáló.

(h) tetszőleges $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esetén

$$f(\psi, \varphi) = \psi \vee \varphi = \varphi \wedge \psi = f(\varphi, \psi),$$

ezért f szimmetrikus. ■

2. Mutassuk meg, hogy ha $2 \le k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ és X n-dimenziós valós vektortér, továbbá ha $f \in \mathcal{S}_k(X)$ és tetszőleges $x \in X$ esetén $f(x, \ldots, x) = 0$, akkor $f = f_0$ teljesül!
Útm.

- Ha $k = 2$, akkor tetszőleges $x, y \in X$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = \\ &= f(x, y) + f(y, x) = 2f(x, y), \end{aligned}$$

így $f(x, y) = 0$.

- Ha valamely $2 \leq k \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x,\dots,x)=0 \quad (x\in X) \qquad \Longrightarrow \qquad f=f_0\in\mathcal{S}_k(X),$$

továbbá $\lambda\in\mathbb{R}$, ill. $x,y\in X$, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+\lambda y,\dots,x+\lambda y) = \\ &= f(x,\dots,x)+\sum_{l=1}^{k-1}\lambda^l\binom{k}{l}f(\underbrace{x,\dots,x}_{(k-l)\text{ darab}},\underbrace{y,\dots,y}_{l\text{ darab}})+\lambda^k f(y,\dots,y)=:p(\lambda). \end{aligned}$$

Így tehát a p polinom minden együtthatója zérus, ahonnan

$$f(\underbrace{x,\dots,x}_{(k-1)\text{ darab}},y)=0 \qquad (x,y\in X).$$

Ezért tetszőleges $y\in X$ esetén a

$$\varphi(x_1,\dots,x_{k-1}):=f(x_1,\dots,x_{k-1},y)$$

nyilvánvalóan szimmetrikus multilineáris forma kielégíti a feladat feltételeit, Az indukciós feltevés értelmében bármely $x_1,\dots,x_{k-1}\in X$ esetén $\varphi(x_1,\dots,x_{k-1}) = = 0$, ahonnan $f=f_0$ következik, hiszen y teszőleges volt. ■

3. Igazoljuk, hogy $F\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$ pontosan akkor áll fenn, ha alkalmas $a\in\mathbb{R}^3$ esetén $F=F_a$ teljesül!
Útm.

1. lépés. Tudjuk, hogy $F_a\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$. F_a alternáló volta egyébként onnan is látszik, hogy bármely $x,y\in\mathbb{R}^3$ esetén

$$F_a(y,x)=\langle a,y\times x\rangle=\langle a,-x\times y\rangle=-\langle a,x\times y\rangle=-F_a(x,y).$$

2. lépés. Ha $x,y\in\mathbb{R}^3$, akkor pontosan egy olyan $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ van, hogy

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3, \qquad \text{ill.} \qquad y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3.$$

Így, ha $F\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$, ill.

$$\begin{aligned} a &:= \begin{bmatrix} F(e_2,e_3) & F(e_3,e_1) & F(e_1,e_2)\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F(e_2,e_3) & -F(e_1,e_3) & F(e_1,e_2)\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

akkor bármely $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j F(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq 3} F(e_i, e_j)(x_i y_j - x_j y_i) = \langle a, x \times y\rangle = F_a(x,y). \end{aligned}$$

Ui. F alternáló volta miatt

$$F(e_i, e_i) = -F(e_i, e_i), \quad \text{azaz} \quad F(e_i, e_i) = 0 \quad \text{és} \quad F(e_i, e_j) = -F(e_j, e_i).$$

Megjegyzés. Ha $\{e_1, e_2, e_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa, akkor

$$F_{e_1}(x,y) = \langle e_1, x \times y\rangle = x_2 y_3 - x_3 y_2 = (f_{e_2} \wedge f_{e_3})(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^3),$$

$$F_{e_2}(x,y) = \langle e_2, x \times y\rangle = x_3 y_1 - x_1 y_3 = (f_{e_3} \wedge f_{e_1})(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

és

$$F_{e_3}(x,y) = \langle e_3, x \times y\rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 = (f_{e_1} \wedge f_{e_3})(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^3),$$

ezért tetszőleges $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$F_a(x,y) = \langle a, x \times y\rangle = \sum_{l=1}^{3} a_l (x \times y)_l = \sum_{l=1}^{3} a_l F_{e_l}(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

azaz

$$F_a = \sum_{l=1}^{3} a_l F_{e_l}. \quad \blacksquare$$

4. Mutassuk meg, hogy

$$2 \leq k, n \in \mathbb{N}, \quad k \leq n \quad \text{és} \quad f \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R})$$

esetén $f \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$ pontosan akkor teljesül, ha minden olyan $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$ esetén, amikor valamilyen $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ indexre

$$y_i = y_{i+1}, \qquad \text{akkor} \qquad f(y_1, \ldots, y_k) = 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Legyen $f \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$. Cseréljük fel y_i-t és y_{i+1}-et! Ekkor

$$f(y_1, \ldots, y_k) = -f(y_1, \ldots, y_k),$$

ahonnan $2 \cdot f(y_1, \ldots, y_k) = 0$, azaz ($\mathrm{char}(\mathbb{R}) = 0$ miatt) $f(y_1, \ldots, y_k) = 0$ következik.

2. lépés. Tegyük fel, hogy igaz az állításban megfogalmazott feltétel. Ha $y_1, \ldots, y_k \in \in \mathbb{R}^n$, és τ az i-edik és az $(i+1)$-edik elem transzpozíciója:

$$\tau := \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{bmatrix},$$

akkor f linearitása miatt

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + y_{i+1}, y_i + y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_k) = \ldots = \\ &= f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_k) + \\ &\quad + f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_k) = \\ &= f(y_1, \ldots, y_k) + f(y_{\tau(1)}, \ldots, y_{\tau(k)}), \end{aligned}$$

ahonnan

$$f(y_{\tau(1)}, \ldots, y_{\tau(k)}) = -f(y_1, \ldots, y_k)$$

következik. Ha σ tetszőleges permutáció, akkor előállítható páratlan számú

$$\tau_i := \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{bmatrix} \qquad (i \in \{1, \ldots, p-1\})$$

típusú transzpozíció (szomszédcsere) kompozíciójaként. Innen már következik, hogy f alternáló. ■

5. Tegyük fel, hogy $2 \leq k \in \mathbb{N}$, $k < n \in \mathbb{N}$ és X n-dimenziós valós vektortér, továbbá $\varphi_1, \ldots \varphi_k \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ olyan, hogy

$$f_0 \neq \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $0 \neq x \in X$ vektorra bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $\varphi_i(x) = 0$ teljesül, majd adjunk meg olyan lineárisan független $x_1, \ldots, x_k \in X$ vektorokat, hogy fennálljon a

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

egyenlőség!

6. Lássuk be, hogy ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$, $\dim(X) = k$, $f_0 \neq f \in \mathcal{A}_k(X)$, továbbá $x_1, \ldots, x_k \in X$ lineárisan független vektorok (tehát bázist alkotnak), akkor $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ teljesül!
Útm. Tegyük fel, hogy $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Az $f \in \mathcal{A}_k(X)$ feltételezés miatt az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok bármely $z_1, \ldots, z_k$ permutációjára is $f(z_1, \ldots, z_k) = 0$. Mivel $x_1, \ldots, x_k$ bázis X-ben, ezért bármely $v_1, \ldots, v_k \in X$ vektor ezeknek a bázisvektoroknak a lineáris kombinációja:
$$v_i = \sum_{j_i=1}^{k} \alpha_{ij_i} x_{j_i} \qquad (i \in \{1, \ldots, k\}).$$
Tehát
$$f(v_1 \ldots, v_k) = \sum_{i_1=1}^{k} \ldots \sum_{i_k=1}^{k} \alpha_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{kj_k} f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}).$$
Ha a jobb oldali összeg valamelyik tagjában f két változója megegyezik, akkor az a tag nulla. Ha viszont $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ mind különböző vektorok, azaz az $x_1, \ldots, x_k$ egy permutációja, akkor az előbb mondottak miatt $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = 0$. Így a feltevésünk következtében bármely $v_1, \ldots, v_k \in X$ vektor esetén $f(v_1, \ldots, v_k) = 0$, ami nem lehetséges. ■

7. Mutassuk meg, hogy ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$, akkor bármely $f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ esetén az
$$\mathcal{S}(f)(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right) \qquad (x_1, \ldots, x_k \in X)$$
k-forma szimmetrikus, ill. az
$$\mathcal{A}(f)(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right) \qquad (x_1, \ldots, x_k \in X)$$
k-forma alternáló!

Útm. Ha $\tau \in \mathfrak{S}_k$, akkor bármely $x_1, \ldots, x_k \in X$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f)(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} f\left(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(k))}\right) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho := \sigma \circ \tau \in \mathcal{S}_k} f\left(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(k)}\right) = \\ &= \mathcal{S}(f)(x_1, \ldots, x_k),\end{aligned}$$

ill. felhasználva a permutációk kompozíciójának előjelére vonatkozó azonosságokat:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f)(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} f\left(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(k))}\right) = \\ &= \frac{1}{k!} \operatorname{sgn}(\rho \circ \tau^{-1}) \cdot \sum_{\rho := \sigma \circ \tau \in \mathcal{S}_k} f\left(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(k)}\right) = \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \mathcal{A}(f)(x_1, \ldots, x_k).\end{aligned}$$

Megjegyzések.

- $\mathcal{S}(f)$-et, ill. $\mathcal{A}(f)$-et f **szimmetrikus, ill. alternáló rész**ének nevezzük.
- Ha f szimmetrikus, akkor $\mathcal{S}(f) = f$ és $\mathcal{A}(f) = f_0$, ill. ha f alternáló, akkor $\mathcal{S}(f) = f_0$ és $\mathcal{A}(f) = f$, ui. az $\mathfrak{S}_k$ k-adrendű szimmetrikus csoport elemszámára $|\mathfrak{S}_k| = k!$ teljesül. Ez azt (is) jelenti, hogy az

  $$\mathcal{S} : \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}_k(X), \qquad \text{ill. az} \qquad \mathcal{A} : \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}) \to \mathcal{A}_k(X)$$

  leképezés **idempotens**:

  $$\mathcal{S}^2 := \mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{A}^2 := \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

- Az

  $$\mathcal{S}, \mathcal{A} : \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$$

  leképezések triviálisan lineárisak, így a fentiek következtében mindkettőjük **projektor**.

- $k = 2$ esetén $\mathfrak{S}_k = \{\tau_1, \mathrm{id}\}$, így bármely $x_1, x_2 \in X$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f)(x_1,x_2) + \mathcal{A}(f)(x_1,x_2) &= \frac{f\left(x_{\tau_1(1)}, x_{\tau_1(2)}\right) + f\left(x_{\mathrm{id}(1)}, x_{\mathrm{id}(2)}\right)}{2} + \\ &\quad + \frac{-f\left(x_{\tau_1(1)}, x_{\tau_1(2)}\right) + f\left(x_{\mathrm{id}(1)}, x_{\mathrm{id}(2)}\right)}{2} = \\ &= f\left(x_{\mathrm{id}(1)}, x_{\mathrm{id}(2)}\right) = f(x_1, x_2),\end{aligned}$$

  azaz

$$\mathcal{S}(f) + \mathcal{A}(f) = f.$$

- Ha tetszőleges $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permutáció esetén $\sigma_X : \mathcal{A}_k(X) \to \mathcal{A}_k(X)$ jelöli azt a lineáris leképezést, amelyre

$$\sigma_X(f)(x_1, \ldots, x_k) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) \qquad (x_1, \ldots, x_k \in X),$$

  akkor teteszőleges $f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$ esetén

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma_X(f).$$

  Látható, hogy bármely $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$ permutációra és $f \in \mathcal{A}_k(X)$ alternáló k-formára

$$(\sigma \circ \tau)_X(f) = \sigma_X(\tau_X(f))$$

  teljesül.

- Világos, hogy ha $f \in \mathcal{S}_k(X)$ és a $g \in \mathcal{S}_l(X)$, akkor

$$\boxed{f \vee g = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \cdot \mathcal{S}(f \otimes g)},$$

  ill. ha $f \in \mathcal{A}_k(X)$ és a $g \in \mathcal{A}_l(X)$, akkor

$$\boxed{f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \cdot \mathcal{A}(f \otimes g)} = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma_X (f \otimes g).$$

  Így $f \vee g$, ill. $f \wedge g$ szimmetrikus, ill. alternáló $(k+l)$-forma. Az $f, g \in \mathcal{S}_1(X)$, ill. az $f, g \in \mathcal{A}_1(X)$ esetben például bármely $x_1, x_2 \in X$ esetén

$$(f \vee g)(x_1, x_2) = \frac{2!}{1!\,1!} \frac{1}{2!} \{f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)\} = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1),$$

ill.

$$(f \wedge g)(x_1, x_2) = \frac{2!}{1!\,1!}\frac{1}{2!}\{f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)\} = f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1). \quad \blacksquare$$

8. Igazoljuk a szimmetrikus szorzás alábbi tulajdonságait (X legyen valós vektortér)!

   (a) Az
   $$\vee : \mathcal{S}_k(X) \times \mathcal{S}_l(X) \to \mathcal{S}_{k+l}(X)$$
   leképezés bilineáris, azaz bármely $k, l \in \mathbb{N}_0$ $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}_k(X)$, $\psi, \widetilde{\psi} \in \mathcal{S}_l(X)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

   α) $(\lambda\varphi) \vee \psi = \varphi \vee (\lambda\psi) = \lambda(\varphi \vee \psi) =: \lambda\varphi \vee \psi$;

   β) $(\varphi + \widetilde{\varphi}) \vee \psi = \varphi \vee \psi + \widetilde{\varphi} \vee \psi$;

   γ) $\varphi \vee (\psi + \widetilde{\psi}) = \varphi \vee \psi + \varphi \vee \widetilde{\psi}$.

   (b) $\vee$ asszociatív, azaz ha $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{S}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{S}_l(X)$ és $\omega \in \mathcal{S}_m(X)$, akkor
   $$(\varphi \vee \psi) \vee \omega = \varphi \vee (\psi \vee \omega) =: \varphi \vee \psi \vee \omega.$$

   (c) $\vee$ kommutatív, azaz ha $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{S}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{S}_l(X)$, akkor
   $$\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi.$$

   (d) Tetszőleges $p \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N}_0$, ill. $\varphi_i \in \mathcal{S}_{m_i}(X)$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ esetén
   $$\boxed{\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_p = \frac{(k_1 + \ldots + k_p)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_p!} \cdot \mathcal{S}\left(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p\right)}.$$

9. Igazoljuk a külső szorzás alábbi tulajdonságait (X legyen valós vektortér)!

   (a) A
   $$\wedge : \mathcal{A}_k(X) \times \mathcal{A}_l(X) \to \mathcal{A}_{k+l}(X)$$
   leképezés bilineáris, azaz bármely $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi, \widetilde{\psi} \in \mathcal{A}_l(X)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

   α) $(\lambda\varphi) \wedge \psi = \varphi \wedge (\lambda\psi) = \lambda(\varphi \wedge \psi) =: \lambda\varphi \wedge \psi$;

   β) $(\varphi + \widetilde{\varphi}) \wedge \psi = \varphi \wedge \psi + \widetilde{\varphi} \wedge \psi$;

γ) $\varphi \wedge (\psi + \widetilde{\psi}) = \varphi \wedge \psi + \varphi \wedge \widetilde{\psi}$.

(b) $\wedge$ asszociatív, azaz ha $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{A}_l(X)$ és $\omega \in \mathcal{A}_m(X)$, akkor

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \omega = \varphi \wedge (\psi \wedge \omega) =: \varphi \wedge \psi \wedge \omega.$$

(c) $\wedge$ antikommutatív, azaz ha $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{A}_l(X)$, akkor

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi.$$

(d) Tetszőleges $p \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N}_0$, ill. $\varphi_i \in \mathcal{A}_{m_i}(X)$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ esetén

$$\boxed{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p = \frac{(k_1 + \ldots + k_p)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_p!} \cdot \mathcal{A}\left(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p\right)}.$$

Útm.

(a) Az ékszorzat definícióját követő megjegyzés alapján $f \wedge g$ alternáló, az $(\alpha) - (\gamma)$ tulajdonságok pedig a definíció közvetlen következményei.

(b) Ez az 5. állítás egy speciális esete (lásd ott).

(c) Mivel az $\wedge$ leképezés bilineáris, elég az állítást olyan $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{A}_l(X)$ formákra igazolni, amelyekre alkalmas $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l \in \mathcal{A}_1(X)$ esetén

$$\varphi = f_1 \wedge \ldots \wedge f_k, \qquad \text{ill.} \qquad \psi = g_1 \wedge \ldots \wedge g_l.$$

Így

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &= (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) \wedge (g_1 \wedge \ldots \wedge g_l) = \\
&= (-1)^k g_1 \wedge (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) \wedge (g_2 \wedge \ldots \wedge g_l) = \\
&= (-1)^{kl} (g_1 \wedge \ldots \wedge g_l) \wedge (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) = \\
&= (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi.
\end{aligned}$$

(d) p-szerinti indukcióval bizonyítunk. $p = 1$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy valamely $p \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, továbbá $m_i \in \mathbb{N}_0$, ill.

$$\varphi_i \in \mathcal{A}_{m_i}(X) \qquad (i \in \{1, \ldots, p + 1\}),$$

és

$$K_p := k_1 + \ldots + k_p, \qquad K_{p+1} := K_p + k_{p+1},$$

valamint $\tau \in \mathfrak{S}_{K_p}$, ill.

$$\widetilde{\tau} := \begin{bmatrix} 1 & \ldots & K_p & K_p + 1 & \ldots & K_{p+1} \\ \tau(1) & \ldots & \tau(K_p) & K_p + 1 & \ldots & K_{p+1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{p+1},$$

teljesül. Ekkor $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\widetilde{\tau})$ és

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p \wedge \varphi_{p+1} = \left(\frac{(k_1 + \ldots + k_p)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_p!} \mathcal{A}(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p) \right) \wedge \varphi_{p+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_p!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{K_p}} \mathrm{sgn}(\tau) \tau_X(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p) \right) \wedge \varphi_{p+1} =$$

$$= \frac{1}{K_p! \, k_{p+1}!} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_p!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{K_{p+1}}} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{K_p}} \mathrm{sgn}(\sigma) \, \mathrm{sgn}(\tau) \sigma_X \left((\tau_X(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p)) \otimes \varphi_{p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{K_p!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{K_p}} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{p+1}!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{K_{p+1}}} \mathrm{sgn}(\sigma \circ \widetilde{\tau})(\sigma \circ \widetilde{\tau})_X(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{p+1}) =$$

$$= \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{p+1}!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{K_{p+1}}} \mathrm{sgn}(\pi) \pi_X(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{p+1}).$$

A fentiekből következik, hogy ($p = 2$, azaz) bármely $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{A}_l(X)$ és $\omega \in \mathcal{A}_m(X)$ esetén

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) \wedge \omega &= \frac{(k + l + m)!}{k! \, l! \, m!} \mathcal{A}\left(\varphi \otimes \psi \otimes \omega\right) = \\ &= \frac{1}{k! \, l! \, m!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{k+l+m}} \mathrm{sgn}(\pi) \pi_X \left(\varphi \otimes \psi \otimes \omega\right). \end{aligned}$$

Hasonlóan látható be, hogy ennek az egyenlőségnek a „jobb oldala” megegyezik $\varphi \wedge (\psi \wedge \omega)$-val.

Megjegyzés. Ha k páratlan és $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, akkor $\varphi \wedge \varphi = f_0 \in \mathcal{A}_{2k}(X)$, ui.

$$\varphi \wedge \varphi = (-1)^{k^2} \varphi \wedge \varphi = -\varphi \wedge \varphi. \quad \blacksquare$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n$ bázis az X (valós) vektortérben, $k \in N := \{1, \ldots, n\}$, akkor

(a) bármely $f \in \mathcal{S}_k(X)$ szimmetrikus forma esetén pontosan egy olyan $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in N_{\smile}{}^k)$ szám van, amelyre

$$f = \sum_{i \in N_{\smile}{}^k} \alpha_i \Sigma_i^{n,k}$$

teljesül;

(b) bármely $f \in \mathcal{A}_k(X)$ alternáló forma esetén pontosan egy olyan $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in N_*^k)$ szám van, amelyre

$$f = \sum_{i \in N_*^k} \alpha_i \Delta_i^{n,k}$$

teljesül!

Útm.

(a) **Házi feladat** (vö. 12. gyakorlat, ill. b)).

(b) Több lépésben bizonyítunk.

1. lépés. $\Delta_i^{n,k}$ $(i \in N_*^k)$ lineárisan függetlenek, ui. ha valamely $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in N_*^k)$ esetén

$$f_0 = \sum_{i \in N_*^k} \alpha_i \Delta_i^{n,k}$$

és $l \in N_*^k$, akkor

$$0 = f_0(b_{l_1}, \ldots, b_{l_k}) = \sum_{i \in N_*^k} \alpha_i \Delta_i^{n,k}(b_{l_1}, \ldots, b_{l_k}) = \alpha_l,$$

hiszen

$$\Delta_i^{n,k}(b_{l_1}, \ldots, b_{l_k}) = \delta_{il}$$

($i = l$ esetén ez az egységmátrix determinánsa, $i \neq l$ esetén pedig lesz egy csupa 0-ából álló sor). Így minden $i \in N_*^k$ esetén $\alpha_i = 0$ (minden α_i csak egyszer szerepel).

2. lépés. Mivel tetszőleges $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, ill. $l \in \{1, \ldots, k\}$ esetén pontosan egy olyan $(\beta_{l1}, \ldots \beta_{lk}) \in \mathbb{R}^k$ szám k-as van, hogy

$$x_1 = \sum_{j_1=1}^{n} \beta_{1j_1} b_{j_1}, \qquad \ldots, \qquad x_k = \sum_{j_k=1}^{n} \beta_{kj_k} b_{j_k},$$

ezért, ha $f \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_k \le n} \prod_{l=1}^{k} \beta_{lj_l} \underbrace{f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k})}_{= 0, \text{ ha } j \text{ nem inkektív}} = \\ &= \sum_{\substack{j \in N^k, \\ j \text{ injektív}}} \prod_{l=1}^{k} \beta_{lj_l} f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) =: \boxed{*}. \end{aligned}$$

Ez az összeg felbontható $\binom{n}{k}$ alakú részletösszegre:

$$\sum_{\substack{j \in N^k, \\ j \text{ injektív}}} \ldots = \sum_{i \in N_*^k} \left(\sum_{\substack{j = i \circ \sigma, \\ \sigma \in \mathfrak{S}_k}} \cdots \right).$$

Tekintsük ennek az összegnek a rögzített $i \in N_*^k$ multiindexhez és $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permutációhoz tartozó

$$\prod_{l=1}^{k} \beta_{li_{\sigma(l)}} f(b_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, b_{i_{\sigma(k)}})$$

tagját. Ha f változóit $\pi := \sigma^{-1}$ szerint permutáljuk, akkor ezt a tagot a

$$\prod_{l=1}^{k} \beta_{li_{\sigma(l)}} \operatorname{sgn}(\pi) f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$$

alakba írhatjuk át. Ebben a tagban az $\beta_{li_{\sigma(l)}}$ tényezők szorzatát tetszőleges sorrenben kiszámítjuk, ezért vehetjük az eredeti sorrend π permutáció szerinti átrendezését. Így a fenti tag nem más, mint

$$\prod_{l=1}^{k} \beta_{\pi(l) i_l} \operatorname{sgn}(\pi) f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}).$$

Ezért, ha $\alpha_i := f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$, akkor

$$\boxed{*} = \sum_{i \in N_*^k} f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \sum_{\pi \in \mathcal{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{l=1}^{k} \beta_{\pi(l) i_l} = \sum_{i \in N_*^k} \alpha_i \Delta_i^{n,k}(x_1, \ldots, x_k). \quad \blacksquare$$

11. Legyen X valós vektortér, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0 \colon k \leq n$, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$, továbbá tetszőleges $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \varphi(x_j) \cdot \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{k+1}).$$

Igazoljuk, hogy ekkor $f \in \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ teljesül!
Útm. Az f leképezés triviálisan $(k+1)$-lineáris: $f \in \mathcal{L}_{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, továbbá f alternáló, ui. ha valamely $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i = x_{i+1}$, akkor

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} \ldots = \\ &= (-1)^i \varphi(x_i) \cdot \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k, x_{k+1}) + \\ &= (-1)^{i+1} \varphi(x_{i+1}) \cdot \psi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Látható, hogy $f = \varphi \wedge \psi$. $\blacksquare$

12. Számítsuk ki az $f \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^3)$, ill. a $g \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$ formák $f \wedge g$ ékszorzatát!
Útm. Mivel alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, ill. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ esetén

$$f = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 \qquad \text{ill.} \qquad g = \beta_1(e^2 \wedge e^3) + \beta_2(e^3 \wedge e^1) + \beta_3(e^1 \wedge e^2),$$

ezért

$$\begin{aligned}
f\wedge g &= \left\{\alpha_1 e^1+\alpha_2 e^2+\alpha_3 e^3\right\}\wedge\left\{\beta_1(e^2\wedge e^3)+\beta_2(e^3\wedge e^1)+\beta_3(e^1\wedge e^2)\right\}= \\
&= \alpha_1\beta_1(e^1\wedge e^2\wedge e^3)+\alpha_1\beta_2(e^1\wedge e^3\wedge e^1)+\alpha_1\beta_3(e^1\wedge e^1\wedge e^2)+ \\
&\quad +\alpha_2\beta_1(e^2\wedge e^2\wedge e^3)+\alpha_2\beta_2(e^2\wedge e^3\wedge e^1)+\alpha_2\beta_3(e^2\wedge e^1\wedge e^2)+ \\
&\quad +\alpha_3\beta_1(e^3\wedge e^2\wedge e^3)+\alpha_3\beta_2(e^3\wedge e^3\wedge e^1)+\alpha_3\beta_3(e^3\wedge e^1\wedge e^2)= \\
&= \alpha_1\beta_1(e^1\wedge e^2\wedge e^3)+\alpha_2\beta_2(e^2\wedge e^3\wedge e^1)+\alpha_3\beta_3(e^3\wedge e^1\wedge e^2)= \\
&= (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\,(e^1\wedge e^2\wedge e^3). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

13. Legyen $n\in\mathbb{N}$ és

$$a\in\mathbb{R}^{2n} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n).$$

Mutassuk meg, hogy ha

$$\omega := dx_1\wedge dy_1+\ldots+dx_n\wedge dy_n\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^{2n})$$

akkor

$$\overset{1}{\breve{\omega}}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\breve{\omega}}=(-1)^{n(n-1)/2}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n$$

teljesül!

14. Ha X valós vektortér, akkor a $B\in\mathcal{L}_4(X^4,\mathbb{R})$ 4-formát (4-edrendű tenzort) **Bianchi-tenzor**nak[47] nevezzük, ha teljesíti a

(B1) $B(x,y,z,w)=-B(y,x,z,w)\ (x,y,z,w\in X)$,

(B2) $B(x,y,z,w)=-B(x,y,w,z)\ (x,y,z,w\in X)$,

(B3) $B(x,y,z,w)=B(z,w,x,y)\in(x,y,z,w\in X)$,

(B4) $B(x,y,z,w)+B(y,z,x,w)+B(z,x,y,w)=0\ (x,y,z,w\in X)$,

(B5) $B(x,y,z,w)+B(x,w,y,z)+B(x,z,w,y)=0\ (x,y,z,w\in X)$

[47] Luigi Bianchi (1856 – 1928).

Bianchi-azonosságok közül az első háromból legalább kettőt, valamint az utolsó kettőből legalább egyet. Igazoljuk, hogy ha $B \in \mathcal{L}_4(X^4, \mathbb{R})$ Bianchi-tenzor, akkor B a fenti definícióban lévő mind az öt (B1)-(B5) tulajdonságot teljesíti!
Útm.

1. lépés. (B1)&(B2)&(B4) $\Longrightarrow$ (B3), ui. (B4) alapján

$$\begin{aligned} 0 &= B(x,y,z,w) + B(y,z,x,w) + B(z,x,y,w) \quad (x,y,z,w \in X), \\ 0 &= B(y,z,w,x) + B(z,w,y,x) + B(w,y,z,x) \quad (x,y,z,w \in X), \\ 0 &= B(z,w,x,y) + B(w,x,z,y) + B(x,z,w,y) \quad (x,y,z,w \in X), \\ 0 &= B(w,x,y,z) + B(x,y,w,z) + B(y,v,x,z) \quad (x,y,z,w \in X). \end{aligned}$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$0 = 2B(x,y,z,w) + 2B(y,z,x,w) + 2B(z,x,y,w) \in \quad (x,y,z,w \in X)$$

((B2) következtében az első két oszlop elemei kinullázódnak, az utolsó oszlopban pedig (B4) kétszerese lesz).

2. lépés. A fentihez hasonlóan igazolható, hogy (B1)&(B2)&(B5) $\Longrightarrow$ (B3).

3. lépés. (B1)&(B3)&(B4) $\Longrightarrow$ (B5), ui. (B4) alapján

$$0 = B(x,y,z,w) + 2B(y,z,x,w) + B(y,z,x,w) + B(z,x,y,w) \quad (x,y,z,w \in X).$$

Az összeg minden tagjára alkalmazva (B3)-at, majd (B1)-et,

$$0 = -B(w,z,x,y) + 2B(y,z,x,w) - B(w,x,y,z) - B(w,y,z,x) \quad (x,y,z,w \in X)$$

adódik.

4. lépés. Hasonlóan igazolható, hogy (B1)&(B3)&(B5) $\Longrightarrow$ (B4).

5. lépés. A (B1)&(B3) $\Longrightarrow$ (B3) és a (B2)&(B3) $\Longrightarrow$ (B1) implikációk teljesülése magától értetődő. ■

Megjegyzések.

- Világos, hogy

$$B(x,x,x,y) = 0 = B(x,y,y,y) \qquad (x,y \in X),$$

hiszen, ha $x, y \in X$, akkor (B1), ill. (B2) miatt $B(x,y,y,y) = -B(x,y,y,y)$.

- Ennek a tenzornak a **relativitáselmélet**ben van fontos szerepe.

15. Igazoljuk, hogy ha $n = 3$ és $B \in \mathcal{L}_4((\mathbb{R}^3)^4, \mathbb{R})$ Bianchi-tenzor, akkor

$$\kappa(x,y) := \begin{cases} \dfrac{B(x,y,x,y)}{\langle x \times y, x \times y \rangle} & (x \text{ és } y \text{ függetlenek}), \\ \\ 0 & (x \text{ és } y \text{ egyirányú}) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

bilineáris formára teljesülnek az

(a) $\kappa(x,y) \equiv \kappa(y,x)$ (κ szimmetrikus);

(b) $\kappa(x + \alpha y, y) \equiv \kappa(x,y)$;

(c) $\kappa(\beta x, \gamma y) \equiv \kappa(x,y)$

tulajdonságok $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \ \beta\gamma \neq 0)$!
Útm. Ha $x, y \in \mathbb{R}^3$ független vektorok és $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \ \beta\gamma \neq 0$, akkor

(a) y és x is független, továbbá

$$\kappa(y,x) = \frac{B(y,x,y,x)}{\langle y \times x, y \times x \rangle} = \frac{(-1)(-1)B(x,y,x,y)}{(-1)(-1)\langle x \times y, x \times y \rangle} = \kappa(x,y);$$

(b) $x + \alpha y$ és y is független, továbbá B 4-linearitása, ill. a (B3) tulajdonság következtében

$$\begin{aligned} B(x+\alpha y, y, x+\alpha y, y) &= B(x,y,x+\alpha y,y) + \alpha B(y,y,x+\alpha y,y) = \\ &= B(x,y,x,y) + \alpha B(x,y,y,y) + \alpha B(y,y,x,y) + \\ & \quad +\alpha^2 B(y,y,y,y) = B(x,y,x,y) + 0 - \\ & \quad -\alpha B(y,y,y,x) + 0 = B(x,y,x,y), \end{aligned}$$

továbbá (vö. $\boxed{\mathbf{A}}$ Függelék)

$$\langle (x+\alpha y) \times y, (x+\alpha y) \times y \rangle = \langle x \times y + \alpha(y \times y), x \times y + \alpha(y \times y) \rangle = \langle x \times y, x \times y \rangle$$

így

$$\kappa(x + \alpha y, y) = \kappa(x,y);$$

(c) βx és γy is független, továbbá B

$$\kappa(\beta x, \gamma y) = \frac{B(\beta x, \gamma y, \beta x, \gamma y)}{\langle \beta x \times \gamma y, \beta x \times \gamma y\rangle} = \frac{\beta^2\gamma^2 B(x, y, x, \gamma y)}{\langle x \times y, x \times y\rangle} = \kappa(x, y). \quad \blacksquare$$

16. Lássuk be, hogy a fenti feladatbeli κ bilineáris formát egyértelműen meghatározza az argumentumaiban lévő vektorok által kifeszített sík!

Útm. Ha $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$|u| = |v| = 1 \qquad \text{és} \qquad u \perp v,$$

akkor u és v függetlenek, továbbá ha $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \text{és} \qquad x := \alpha u + \beta v, \quad y := \gamma u + \delta v,$$

akkor a Lagrange-azonosság (vö. $\boxed{\mathbf{A}}$ Függelék) felhasználásával

$$\begin{aligned}
\kappa(x, y) &= \frac{B(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)}{\langle(\alpha u + \beta v) \times (\gamma u + \delta v), (\alpha u + \beta v) \times (\gamma u + \delta v)\rangle} = \\
&= \frac{B(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)}{\langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle \langle \gamma u + \delta v, \gamma u + \delta v\rangle - \langle \alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v\rangle^2} = \\
&= \frac{\alpha\delta(\alpha\delta - \beta\gamma)B(u, v, u, v)\beta\gamma(\beta\gamma - \alpha\delta)B(v, u, v, u)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2} = \\
&= \frac{(\alpha^2\delta^2 - 2\alpha\delta\beta\gamma + \beta^2\gamma^2)B(v, u, v, u)}{\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta} = \\
&= B(v, u, v, u). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.14. 14. gyakorlat

1.14.1. A gyakorlat anyaga

Emlékeztető.

1. Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt (tartó)halmaz, akkor bármely

$$\omega : V \to \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$$

leképezés – ún. **k-adrendű differenciálforma** – esetén minden $x \in V$ vektorhoz egyértelműen megadhatók olyan

$$\omega_i(x) \in \mathbb{R} \qquad (i \in \mathsf{N}_*^k)$$

számok, hogy

$$\omega(x) = \sum_{i \in \mathsf{N}_*^k} \omega_i(x) \Delta_i^{n,k}$$

teljesüljön. Az így értelmezett

$$\omega_i : V \to \mathbb{R} \qquad (i \in \mathsf{N}_*^k)$$

leképezéseket az ω differenciálforma **koordinátafüggvény**einek nevezzük. A fentieket röviden az

$$\omega = \sum_{i \in \mathsf{N}_*^k} \omega_i \Delta_i^{n,k}$$

módon jelöljük (**kanonikus alak**), továbbá

$$\Lambda_k^r(V) := \{\omega : V \to \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) : \ \omega \in \mathfrak{C}^r\}.$$

2. Ha $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, úgy

$$\omega \in \mathfrak{C}^r \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, i \in \mathsf{N}_*^k : \ \ \omega_i \in \mathfrak{C}^r.$$

3. Ha $f : V \to \mathbb{R}$ skalármező (többváltozós függvény), $\omega, w \in \Lambda_k^r(V)$, továbbá $\sigma \in \Lambda_l^r(V)$, akkor bármely $x \in V$ esetén legyen

$$(f\omega)(x) := f(x)\omega(x) \qquad \text{és} \qquad (\omega + w)(x) := \omega(x) + w(x),$$

illetve

$$(\omega \wedge \sigma)(x) := \omega(x) \wedge \sigma(x). \quad \Diamond$$

Megjegyzések.

1. A $k = 0$ esetben $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, így a differenciálforma nem más, mint az
$$\omega : V \to \mathbb{R}$$
skalármező (többváltozós függvény).

2. A $k = 1$ esetben, azaz amikor
$$\omega : V \to (\mathbb{R}^n)'$$
szokás ω-t **Pfaff-féle differenciálformá**nak nevezni.[48]

3. A $k > n$ esetben $\mathcal{R}_\omega = \{f_0\}$.

4. Világos, hogy ha $\alpha : V \to \mathbb{R}$ skalármező,[49] $\omega, w \in \Lambda^r_k(V)$, továbbá $\sigma \in \Lambda^r_l(V)$, akkor
$$\alpha\omega = \sum_{i \in N^k_*} (\alpha\omega_i)\Delta^{n,k}_i \in \Lambda^r_k(V) \qquad \text{és} \qquad \omega + w = \sum_{i \in N^k_*} (\omega_i + w_i)\Delta^{n,k}_i \in \Lambda^r_k(V),$$
ill.
$$\omega \wedge \sigma = \sum_{i,j \in N^k_*} (\omega_i \sigma_j)\Delta^{n,k}_i \wedge \Delta^{n,l}_j := \sum_{i \in N^k_*} \sum_{j \in N^k_*} (\omega_i \sigma_j)\Delta^{n,k}_i \wedge \Delta^{n,l}_j \in \Lambda^r_{k+l}(V).$$

5. Ha $k \in \{1, \ldots, n\}$, akkor az
$$\omega(x; x_1, \ldots, x_k) := \omega(x)(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i \in N^k_*} \omega_i(x)\Delta^{n,k}_i(x_1, \ldots, x_k)$$
$$(x \in V,\ x_1 \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n)$$
jelölés bevezetésével az
$$\omega : V \to \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$$
differenciálformát lényegében az
$$\omega : V \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$$
leképezésnek is tekinthetjük:
$$\Lambda^r_k(V) := \{\omega : V \to \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) :\ \omega \in \mathfrak{C}^r\} \simeq \left\{\omega : V \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R} :\ \omega \in \mathfrak{C}^r\right\}.$$

[48] Johann Friedrich Pfaff (1765 – 1825).
[49] Így értelmeztük a differenciálforma $c\omega$ skalárszorosát is, ha $\alpha(x) \equiv c$ állandófüggvény.

Világos, hogy ekkor az $\omega, w \in \Lambda_k^r(V)$ differenciálformákra

$$\omega = w \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in V: \ \omega(x) = w(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in V, \ \forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n: \ \omega(x; x_1, \ldots, x_k) = w(x; x_1, \ldots, x_k) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in V, \ \forall i \in N_*^k: \ \omega(x; e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = w(x; e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}). \quad \square$$

Emlékeztető. Differenciálforma **külső** vagy **Cartan-derivált**ja:[50]

$$d: \Lambda_k^r(V) \to \Lambda_{k+1}^{r-1}(V), \qquad d\omega := d(\omega) := \begin{cases} \sum_{j \in N} \partial_j \omega \Delta_j^{n,1} & (k = 0), \\ \sum_{j \in N} \sum_{i \in N_*^k} \partial_j \omega_i \Delta_{(j,i)}^{n,k+1} & (k > 0), \end{cases}$$

ahol $(j, i) := (j, i_1, \ldots, i_k) \in N \times N_*^k$. $\Diamond$

Megjegyzések.

1. Ha $k = 0$, azaz $\omega: V \to \mathbb{R}$, akkor, ha $\omega \in \mathfrak{C}^1$, úgy bármely $x \in V$, ill. $\xi \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d\omega(x)(\xi) = d\omega(x; \xi) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \omega(x) \Delta_j^{n,1}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \omega(x) \xi_j = \langle \operatorname{grad} \omega(x), \xi \rangle.$$

A szokásos

$$\partial_j \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \qquad \text{ill.} \qquad \Delta_j^{n,1} = dx_j$$

jelölésekkel tehát

$$\boxed{d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx_j}.$$

Tetszőleges $x \in V$ esetén a

$$d\omega(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d\omega(x)(\xi) := \langle \operatorname{grad} \omega(x), \xi \rangle$$

lineáris leképezést, 1-formát szokás az ω skalármező x-hez tartozó **differenciál**jának nevezni.

[50] Élie Cartan (1869 – 1951).

2. Ha $k \in N = \{1, \ldots, n\}$, akkor a nyilvánvaló

$$\Delta^{n,k+1}_{(j,i)} = \Delta^{n,1}_j \wedge \Delta^{n,k}_i$$

egyenlőség[51] miatt

$$d\omega = \sum_{j\in N}\sum_{i\in N^k_*} \partial_j\omega_i\Delta^{n,1}_j \wedge \Delta^{n,k}_i = \sum_{j\in N}\sum_{i\in N^k_*} \partial_j\omega_i\Delta^{n,1}_j \wedge \Delta^{n,1}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Delta^{n,1}_{i_k},$$

továbbá

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in N^k_*} \partial_j\omega_i\Delta^{n,k}_j \wedge \Delta^{n,k}_i = \sum_{i\in N^k_*}\sum_{j\in N} \partial_j\omega_i\Delta^{n,k}_j \wedge \Delta^{n,k}_i$$

következtében

$$d\omega = \sum_{i\in N^k_*} d\omega_i \wedge \Delta^{n,k}_i. \quad \square$$

Feladat: Számítsuk ki az alábbi differenciálformák deriváltját!

1. $\omega \in \Lambda^\infty_1(\mathbb{R}^3)$, $\omega := f \cdot \Delta^{3,1}_1 + g \cdot \Delta^{3,1}_3$, ahol
   $f(x,y,z) := xyz$, $g(x,y,z) := x + yz$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$;
2. $\omega \in \Lambda^\infty_2(\mathbb{R}^3)$, $\omega := f \cdot \Delta^{3,2}_{(1,3)}$, ahol $f(x,y,z) := \cos(xy^2)$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$;
3. $\omega \in \Lambda^\infty_2(\mathbb{R}^3)$, $\omega := f_1 \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3 \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)}$,
   ahol $f_1(x,y,z) := x$, $f_2(x,y,z) := y$, $f_3(x,y,z) := z$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$.

Útm.:

1. $n = 3$, $k = 1$, $\mathcal{I} := N = \{1,2,3\}$, így

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in\mathcal{I}} \partial_j\omega_i \cdot \Delta^{3,2}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j f \cdot \Delta^{3,2}_{(j,1)} + 0 \cdot \Delta^{3,2}_{(j,2)} + \partial_j g \cdot \Delta^{3,2}_{(j,3)}\right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{3} \partial_j f \cdot \Delta^{3,2}_{(j,1)} + f_0 + \sum_{j=1}^{3} \partial_j g \cdot \Delta^{3,2}_{(j,3)}. \end{aligned}$$

[51] Sőt, általában az is igaz, hogy ha $j \in N^l_*$, $i \in N^k_*$, akkor a

$$(j,i) := (j_1, \ldots, j_l, i_1, \ldots, i_k) \in N^{k+l}$$

jelöléssel

$$\Delta^{n,k+l}_{(j,i)} = \Delta^{n,l}_j \wedge \Delta^{n,k}_i.$$

Tehát $d\omega(x,y,z) =$

$$= (yz)\cdot\Delta^{3,2}_{(1,1)} + (xz)\cdot\Delta^{3,2}_{(2,1)} + (xy)\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)} + 0 + 1\cdot\Delta^{3,2}_{(1,3)} + z\cdot\Delta^{3,2}_{(2,3)} + y\cdot\Delta^{3,2}_{(3,3)} =$$

$$= (xz)\cdot\Delta^{3,2}_{(2,1)} + (xy)\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)} + \Delta^{3,2}_{(1,3)} + z\Delta^{3,2}_{(2,3)} =$$

$$= (xz)\cdot\Delta^{3,2}_{(2,1)} + (xy-1)\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)} + z\cdot\Delta^{3,2}_{(2,3)} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

2. $n=3$, $k=2$, $\mathcal{I} := \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, így

$$d\omega = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in\mathcal{I}} \partial_j\omega_i\cdot\Delta^{3,3}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{3}\left\{0\cdot\Delta^{3,3}_{(j,1,2)} + \partial_j f\cdot\Delta^{3,3}_{(j,1,3)} + 0\cdot\Delta^{3,3}_{(j,2,3)}\right\} = \sum_{j=1}^{3}\partial_j f\cdot\Delta^{3,3}_{(j,1,3)}.$$

Tehát bármely $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ esetén $d\omega(x,y,z) =$

$$= (-\sin(xy^2)y^2\cdot\Delta^{3,3}_{(1,1,3)} + (-\sin(xy^2)2xy\cdot\Delta^{3,3}_{(2,1,3)} + 0\cdot\Delta^{3,3}_{(3,1,3)} = -2xy\sin(xy^2)\cdot\Delta^{3,3}_{(2,1,3)}.$$

3. $n=3$, $k=2$, $\mathcal{I} := \{(2,3),(3,1),(1,2)\}$, így

$$d\omega = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in\mathcal{I}} \partial_j\omega_i\cdot\Delta^{3,3}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j f_1\cdot\Delta^{3,3}_{(j,2,3)} + \partial_j f_2\cdot\Delta^{3,3}_{(j,3,1)} + \partial_j f_3\cdot\Delta^{3,3}_{(j,1,2)}\right\}.$$

Tehát bármely $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} d\omega(x,y,z) &= \underbrace{1\cdot\Delta^{3,3}_{(1,2,3)} + 0 + 0}_{i=(2,3)} + \underbrace{0 + 1\cdot\Delta^{3,3}_{(2,3,1)} + 0}_{i=(3,1)} + \underbrace{0 + 0 + 1\cdot\Delta^{3,3}_{(3,1,2)}}_{i=(1,2)} = \\ &= \Delta^{3,3}_{(1,2,3)} + \Delta^{3,3}_{(2,3,1)} + \Delta^{3,3}_{(3,1,2)} = 3\cdot\Delta_{(1,2,3)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Legyen $n\in\mathbb{N}$, $\emptyset\neq V\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f=(f_1,\ldots,f_n): V\to\mathbb{R}^n$, $f\in\mathfrak{C}^1$ és

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} f_i\Delta^{n,1}_i \in \Lambda^1_1(V).$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$d\omega(x;x_1,x_2) = \mathrm{Rot}\, f(x)(x_1,x_2) \qquad (x\in V,\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^n)$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i \Delta^{n,2}_{(j,i)} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \partial_j f_i \Delta^{n,2}_{(j,i)},$$

így

$$\begin{aligned}
d\omega(x)(x_1,x_2) &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \partial_j f_i(x)\cdot \det\begin{bmatrix} x_{1j} & x_{1i}\\ x_{2j} & x_{2i}\end{bmatrix} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \partial_j f_i(x)\cdot (x_{1j}x_{2i} - x_{1i}x_{2j}) = \\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \partial_j f_i(x) x_{1j}x_{2i} - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \partial_j f_i(x) x_{1i}x_{2j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x) x_{1j}\right)}_{[f'(x)\cdot x_1]_i} x_{2i} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x) x_{2j}\right)}_{[f'(x)x_2]_i} x_{1i} = \\
&= \langle f'(x)\cdot x_1, x_2\rangle - \langle f'(x)\cdot x_2, x_1\rangle = \langle f'(x)\cdot x_1, x_2\rangle - \langle x_1, f'(x)\cdot x_2\rangle = \\
&= \langle f'(x)\cdot x_1, x_2\rangle - \left\langle f'(x)^T x_1, \cdot x_2\right\rangle = \left\langle (f'(x) - f'(x)^T) x_1, x_2\right\rangle = \\
&= \mathrm{Rot}\, f(x)(x_1,x_2) \qquad (x\in V,\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^n)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $V\subset\mathbb{R}^3$ olyan nyílt tégla, amelynek élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, továbbá $(a,b,c)\in V$,

$$f_k \in \mathfrak{C}^1(V,\mathbb{R}) \qquad (k\in\{1,2,3\}),$$

ill. tegyük fel, hogy az

$$\omega\in\Lambda^1_2(V), \qquad \omega := f_1\cdot\Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3\cdot\Delta^{3,2}_{(1,2)}$$

differenciálformára $d\omega = 0\in\Lambda^0_3(V)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ha

$$\eta := g_1\cdot\Delta^{3,1}_1 + g_2\cdot\Delta^{3,1}_2 \in \Lambda^2_1(V),$$

ahol tetszőleges $(x,y,z)\in V$ esetén

$$g_1(x,y,z):=\int_c^z f_2(x,y,s)\,ds-\int_b^y f_3(x,t,c)\,dt,\quad g_2(x,y,z):=-\int_c^z f_1(x,y,s)\,ds,$$

akkor igaz a $d\eta=\omega$ állítás!

Útm. Világos, hogy

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in N_*^2}\partial_j\omega_i\cdot\Delta^{3,3}_{(j,i)}=\sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j f_1\cdot\Delta^{3,3}_{(j,2,3)}+\partial_j f_2\cdot\Delta^{3,3}_{(j,3,1)}+\partial_j f_3\cdot\Delta^{3,3}_{(j,1,2)}\right\}=\ldots= \\ &= (\partial_1 f_1+\partial_2 f_2+\partial_3 f_3)\cdot\Delta^{3,3}_{(1,2,3)}, \end{aligned}$$

azaz

$$\partial_3 f_3=-(\partial_1 f_1+\partial_2 f_2),$$

továbbá

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in N_*^1}\partial_j\eta_i\cdot\Delta^{3,2}_{(j,i)}=\sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j g_1\cdot\Delta^{3,2}_{(j,1)}+\partial_j g_2\cdot\Delta^{3,2}_{(j,2)}+\partial_j g_3\cdot\Delta^{3,2}_{(j,3)}\right\}=\ldots= \\ &= (\partial_2 g_3-\partial_3 g_2)\cdot\Delta^{3,2}_{(2,3)}+(\partial_3 g_1-\partial_1 g_3)\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)}+(\partial_1 g_2-\partial_2 g_1)\cdot\Delta^{3,2}_{(1,2)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\partial_2 g_3-\partial_3 g_2=0-\partial_3 g_2=-(-f_1)=f_1,$$

$$(\partial_3 g_1-\partial_1 g_3)(x,y,z)=f_2(x,y,z)-0-0=f_2(x,y,z)\qquad((x,y,z)\in V),$$

és bármely $(x,y,z)\in V$ esetén

$$\begin{aligned} (\partial_1 g_2-\partial_2 g_1)(x,y,z) &= -\int_c^z \partial_1 f_1(x,y,s)\,ds-\int_c^z \partial_2 f_2(x,y,s)\,ds+f_3(x,y,c)= \\ &= -\int_c^z \{\partial_1 f_1(x,y,s)+\partial_2 f_2(x,y,s)\}\,ds+f_3(x,y,c)= \\ &= \int_c^z \partial_3 f_3(x,y,s)\,ds+f_3(x,y,c)= \\ &= f_3(x,y,z)-f_3(x,y,c)+f_3(x,y,c)=f_3(x,y,z), \end{aligned}$$

ezért $d\eta=\omega$. ■

Emlékeztető. Ha

$$f_i : V \to \mathbb{R} \qquad (i \in N_*^k),$$

ill.

$$f := (f_i,\, i \in N_*^k) : V \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}},$$

akkor az f **generált**a **differenciálformá**nak nevezzük az

$$\omega_f := \sum_{i \in N_*^k} f_i \Delta_i^{n,k},$$

azaz az

$$\omega_f(x; x_1, \ldots, x_k) := \sum_{i \in N_*^k} f_i(x) \Delta_i(x_1, \ldots, x_k) \qquad ((x; x_1, \ldots, x_k) \in V \times (\mathbb{R}^n)^k)$$

differenciálformát. □

Megjegyzés. Ha

1. $k = 0$, akkor $f : V \to \mathbb{R}$, így

$$\omega_f = f \in \Lambda_0^r(V), \qquad \text{azaz} \qquad \Lambda_0^r(V) = \mathfrak{C}^r(V, \mathbb{R}).$$

2. $k = 1$, akkor $f = (f_1, \ldots, f_n) : V \to \mathbb{R}^n$, így

$$\omega_f = \sum_{i \in N} f_i \Delta_i^{n,1} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_i^{n,1} \in \Lambda_1^r(V)$$

$$/\forall x \in V : \quad \omega_f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{lineáris}/\,.$$

3. $k = n$, akkor $f : V \to \mathbb{R}$, így

$$\omega_f = f \Delta_{(1,\ldots,n)}^{n,n} \in \Lambda_n^r(V),$$

   ahol

$$\Delta_{(1,\ldots,n)}^{n,n}(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \qquad (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n)\,.$$

4. $n = 3$, $k = 2$, akkor $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$, így

$$\omega_f = f_1 \Delta_{(2,3)}^{3,2} + f_2 \Delta_{(3,1)}^{3,2} + f_3 \Delta_{(1,2)}^{3,2} \in \Lambda_2^r(V). \quad \square$$

Feladat. Legyen

$$f_i \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}) \quad (i \in N_*^k), \qquad \text{majd} \qquad f := (f_i,\, i \in N_*^k),$$

azaz

$$f : V \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}, \qquad f \in \mathfrak{C}^1.$$

Az

$$\omega_f := \sum_{i \in N_*^k} f_i \Delta_i^{n,k}$$

differenciálforma deriváltjának kiszámításával mutassuk meg, hogy ha

1. $k = 0$, akkor
$$\boxed{d\omega_f = \omega_{\operatorname{grad} f}};$$
2. $n = 2$, $k = 1$, akkor
$$\boxed{d\omega_f = \omega_{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1}};$$
3. $n = 3$, $k = 1$, akkor
$$\boxed{d\omega_f = \omega_{\operatorname{rot} f}};$$
4. $n = 3$, $k = 2$, akkor
$$\boxed{d\omega_f = \omega_{\operatorname{div} f}}$$

teljesül!
Útm. Vö. 3. gyakorló feladat. ■

Feladat. Számítsuk ki $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$-et, ill. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$-et az

$$f(r) := ze^{x^2 y} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény esetében!
Útm. Mivel bármely $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\operatorname{grad} f(r) = (2xyze^{x^2y}, x^2ze^{x^2y}, e^{x^2y}),$$

így

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = 2yze^{x^2y} + 4x^2y^2ze^{x^2y} + x^4ze^{x^2y} + 0$$

és

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(r) &= (x^2e^{x^2y} - x^2e^{x^2y}, 2xye^{x^2y} - 2xye^{x^2y} = \\
&= 2xze^{x^2y} + 2x^3yze^{x^2y} - 2xze^{x^2y} - 2x^3yze^{x^2y}) = 0 \in \mathbb{R}^3. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}^2$, ill. $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $f \in \mathfrak{D}^2$, akkor

1. $\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = \varphi \cdot \operatorname{div}(f) + \langle f, \operatorname{grad}(\varphi)\rangle$;
2. $\operatorname{rot}(\varphi \cdot f) = \varphi \cdot \operatorname{rot}(f) - f \times \operatorname{grad}(\varphi)$;
3. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$;
4. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$;
5. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi$;
6. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta f$;
7. $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi) = \varphi\Delta\psi + \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle$

teljesül!
Útm.

1. Mivel
$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \varphi f_3),$$
ezért
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi f) &= \partial_1(\varphi f_1) + \partial_2(\varphi f_2) + \partial_3(\varphi f_3) = \\
&= \partial_1\varphi f_1 + \varphi\partial_1 f_1 + \partial_2\varphi f_2 + \varphi\partial_2 f_2 + \partial_3\varphi f_3 + \varphi\partial_3 f_3 = \\
&= \varphi(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) + \partial_1\varphi f_1 + \partial_2\varphi f_2 + \partial_3\varphi f_3 = \\
&= \varphi \operatorname{div} f + \langle \operatorname{grad}\varphi, f\rangle.
\end{aligned}$$

2. Mivel

$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \varphi f_3)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(\varphi f) &= (\partial_2(\varphi f_3) - \partial_3(\varphi f_2), \partial_3(\varphi f_1) - \partial_1(\varphi f_3), \partial_1(\varphi f_2) - \partial_2(\varphi f_1)) = \\
&= (\partial_2\varphi f_3 + \varphi\partial_2 f_3 - \partial_3\varphi f_2 - \varphi\partial_3 f_2, \partial_3\varphi f_1 + \varphi\partial_3 f_2 - \partial_1\varphi f_3 - \varphi\partial_1 f_3, \\
&\quad \partial_1\varphi f_2 + \varphi\partial_1 f_2 - \partial_2\varphi f_2 - \varphi\partial_2 f_1) = \\
&= \varphi\,(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) + \\
&\quad + (\partial_2\varphi f_3 - \partial_3\varphi f_2, \partial_3\varphi f_1 - \partial_1\varphi\nu f_3, \partial_1\varphi f_2 - \partial_2\varphi f_1) = \\
&= \varphi \cdot \mathrm{rot}\, f + \mathrm{grad}\,\varphi \times f.
\end{aligned}$$

3. Mivel

$$\mathrm{grad}\,\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) &= \partial_1(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) + \partial_2(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) + \partial_3(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \\
&= \partial_{21} f_3 - \partial_{31} f_2 + \partial_{32} f_1 - \partial_{12} f_3 + \partial_{13} f_2 - \partial_{23} f_1 = \\
&= \partial_{32} f_1 - \partial_{23} f_1 + \partial_{13} f_2 - \partial_{31} f_2 + \partial_{21} f_3 - \partial_{12} f_3 = \\
&= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Vö. 5. beadható feladat: $d(d\omega) = 0$.

4. Mivel

$$\mathrm{rot}\, f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) &= \partial_1(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) + \partial_2(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) + \partial_3(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \\
&= \partial_{21} f_3 - \partial_{31} f_2 + \partial_{32} f_1 - \partial_{12} f_3 + \partial_{13} f_2 - \partial_{23} f_1 = \\
&= \partial_{32} f_1 - \partial_{23} f_1 + \partial_{13} f_2 - \partial_{31} f_2 + \partial_{21} f_3 - \partial_{12} f_3 = \\
&= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Vö. 5. beadható feladat: $\mathbf{d}(\mathbf{d}\omega) = 0$.

5. Világos, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) &= \operatorname{div}(\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi) = \partial_1(\partial_1 \varphi) + \partial_2(\partial_2 \varphi) + \partial_3(\partial_3 \varphi) = \\
&= \partial_{11} \varphi + \partial_{22} \varphi + \partial_{33} \varphi = \Delta \varphi.
\end{aligned}$$

6. Mivel

$$\operatorname{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) &= \operatorname{rot}(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \\
&= (\partial_2(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) - \partial_3(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3), \partial_3(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) - \partial_1(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1), \\
&\quad \partial_1(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) - \partial_2(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)) = \\
&= (\partial_{21} f_2 - \partial_{22} f_1 - \partial_{33} f_1 + \partial_{31} f_3, \partial_{32} f_3 - \partial_{33} f_2 - \partial_{11} f_2 + \partial_{12} f_1), \\
&\quad \partial_{13} f_1 - \partial_{11} f_3 - \partial_{22} f_3 + \partial_{23} f_2) = \\
&= (\partial_1(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3), \partial_2(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3), \partial_3(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)) - \\
&\quad - (\partial_{11} f_1 + \partial_{22} f_1 + \partial_{33} f_1, \partial_{11} f_2 + \partial_{22} f_2 + \partial_{33} f_2, \partial_{11} f_3 + \partial_{22} f_3 + \partial_{33} f_3) = \\
&= \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta f.
\end{aligned}$$

7. Mivel

$$\operatorname{grad}\psi = (\partial_1\psi, \partial_2\psi, \partial_3\psi),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi) &= \partial_1\varphi\partial_1\psi + \varphi\partial_{11}\psi + \partial_2\varphi\partial_2\psi + \varphi\partial_{22}\psi + \partial_3\varphi\partial_3\psi + \varphi\partial_3\psi = \\
&= \varphi(\partial_{11}\psi + \partial_{22}\psi + \partial_{33}\psi) + \partial_1\varphi\partial_1\psi + \partial_2\varphi\partial_2\psi + \partial_3\varphi\partial_3\psi = \\
&= \varphi\Delta\psi + \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha a Gauß-tételben

$$f =: \varphi \cdot \operatorname{grad}\psi, \qquad \text{ill.} \qquad f =: \psi \cdot \operatorname{grad}\varphi,$$

ahol $\varphi, \psi \in \mathfrak{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, akkor

$$\operatorname{div} f = \varphi \cdot \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle, \qquad \text{ill.} \qquad \operatorname{div} f = \psi \cdot \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + \langle \operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi\rangle,$$

így

$$\boxed{\int_\Psi \varphi \operatorname{grad}\psi} = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi) \boxed{= \int_\Omega \{\varphi \cdot \Delta\psi + \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle\}}$$

(**antiszimmetrikus Green-formula**), ill. φ és ψ cseréjével

$$\int_\Psi \psi \cdot \operatorname{grad}\varphi = \int_\Omega \{\psi \cdot \Delta\varphi + \langle \operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi\rangle\}.$$

A fenti két formulát egymásból kivonva kapjuk a **szimmetrikus Green-formulát**:

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\Phi}} \{\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi - \psi \cdot \operatorname{grad}\varphi\} = \int_\Omega \{\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi\}}. \quad \square$$

1.14.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi differenciálformák deriváltját!

(a) $\omega \in \Lambda_0^\infty(\mathbb{R})$, $\omega := f$, ahol

$$f(x) := \frac{\sin^3(x^2)}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(b) $\omega \in \Lambda_1^1(I)$, $\omega := f'\Delta_1^{1,1}$, ahol $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in \mathfrak{C}^2$;

(c) $\omega \in \Lambda_1^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\omega := f \cdot \Delta_1^{2,1} + g \cdot \Delta_2^{2,1}$, ahol

$$f(x,y) := x^2 - y^2, \quad g(x,y) := x^3y^3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big);$$

(d) $\omega \in \Lambda_1^\infty(V)$, $\omega := f \cdot \Delta_1^{2,1} + g \cdot \Delta_2^{2,1}$, ahol $V := \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ és

$$f(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in V);$$

(e) $\omega \in \Lambda_1^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\omega := f \cdot \Delta_1^{3,1} + g \cdot \Delta_2^{3,1} + h \cdot \Delta_3^{3,1}$, ahol

α) $f(x,y,z) := xy^2$, $g(x,y,z) := yz$, $h(x,y,z) := x^3$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$,

β) $f(x,y,z) := yz$, $g(x,y,z) := xz$, $h(x,y,z) := xy$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$,

γ) $f(x,y,z) := x$, $g(x,y,z) := x^2y^2$, $h(x,y,z) := yz$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$;

(f) $\omega \in \Lambda_2^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\omega := f \cdot \Delta_{(2,3)}^{3,2} + g \cdot \Delta_{(3,1)}^{3,2} + h \cdot \Delta_{(1,2)}^{3,2}$, ahol

α) $f(x,y,z) := 2xy^2$, $g(x,y,z) := z$, $h(x,y,z) := 0$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$,

β) $f(x,y,z) := x$, $g(x,y,z) := xy^2z$, $h(x,y,z) := xe^y$ $\big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$;

(g) $\omega \in \Lambda_2^\infty(V)$, $\omega := f \cdot \Delta_{(2,3)}^{3,2} + g \cdot \Delta_{(3,1)}^{3,2} + h \cdot \Delta_{(1,2)}^{3,2}$, ahol $V := \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ és

$$f(r) := \frac{x}{|r|^3}, \quad g(r) := \frac{y}{|r|^3}, \quad h(r) := \frac{z}{|r|^3} \qquad (r = (x,y,z) \in V).$$

Útm.

(a) $d\omega = f' \cdot \Delta_1^{1,1}$, azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$d\omega(x) = \frac{3\sin^2(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x\cdot(1+x^2) - (1+x^2)\cdot 2x\cdot\sin^2(x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\Delta_1^{1,1}.$$

(b) Világos, hogy

$$d\omega = \sum_{j=1}^{1} \sum_{i \in N_*{}^1} \partial_j f' \cdot \Delta^{1,2}_{(j,i)} = f'' \cdot \Delta^{1,2}_{(1,1)} = f'' \cdot f_0.$$

(c) Mivel

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{2} \left\{ \partial_j f \cdot \Delta^{2,2}_{(j,1)} + \partial_j g \cdot \Delta^{2,2}_{(j,2)} \right\} = \\ &= \partial_1 f \cdot \Delta^{2,2}_{(1,1)} + \partial_2 f \cdot \Delta^{2,2}_{(2,1)} + \partial_1 g \cdot \Delta^{2,2}_{(1,2)} + \partial_2 g \cdot \Delta^{2,2}_{(2,2)} = \\ &= \partial_2 f \cdot \Delta^{2,2}_{(2,1)} + \partial_1 g \cdot \Delta^{2,2}_{(1,2)} = (\partial_1 g - \partial_2 f) \cdot \Delta^{2,2}_{(1,2)}, \end{aligned}$$

továbbá

$$(\partial_1 g - \partial_2 f)(x, y) = 3x^2y^3 + 2y \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

$$d\omega(x, y) = (3x^2y^3 + 2y) \cdot \Delta^{2,2}_{(1,2)} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

(d) Mivel

$$(\partial_1 g - \partial_2 f)(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{[x^2 + y^2]^2} = 0 \qquad ((x, y) \in V),$$

ezért (vö. előző feladat)

$$d\omega(x, y) = 0 \cdot \Delta^{2,2}_{(1,2)} = f_0 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^2) \qquad ((x, y) \in V).$$

(e) Mivel

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{3} \left\{ \partial_j f \Delta^{3,2}_{(j,1)} + \partial_j g \Delta^{3,2}_{(j,2)} + \partial_j h \Delta^{3,2}_{(j,3)} \right\} = \\ &= \partial_1 f \Delta^{3,2}_{(1,1)} + \partial_1 g \Delta^{3,2}_{(1,2)} + \partial_1 h \Delta^{3,2}_{(1,3)} + \\ &\quad + \partial_2 f \Delta^{3,2}_{(2,1)} + \partial_2 g \Delta^{3,2}_{(2,2)} + \partial_2 h \Delta^{3,2}_{(2,3)} + \\ &\quad + \partial_3 f \Delta^{3,2}_{(3,1)} + \partial_3 g \Delta^{3,2}_{(3,2)} + \partial_3 h \Delta^{3,2}_{(3,3)} = \\ &= (\partial_2 h - \partial_3 g)\, \Delta^{3,2}_{(2,3)} + (\partial_3 f - \partial_1 h)\, \Delta^{3,2}_{(3,1)} + (\partial_1 g - \partial_2 f)\, \Delta^{3,2}_{(1,2)}, \end{aligned}$$

ezért tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

α) $d\omega(x,y,z) = -y \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} - 3x^2 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} - 2xy \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)}$;

β) $d\omega(x,y,z) = 0 \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + 0 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} + 0 \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)} = f_0 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$;

γ) $d\omega(x,y,z) = z \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + 0 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} + 2xy^2 \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)}$;

δ) $d\omega(x,y,z) = -y \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} - 3x^2 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} - 2xy \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)}$.

(f) Mivel

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^{3} \left\{ \partial_j f \cdot \Delta^{3,3}_{(j,2,3)} + \partial_j g \cdot \Delta^{3,3}_{(j,3,1)} + \partial_j h \cdot \Delta^{3,3}_{(j,1,2)} \right\} = \\
&= \left\{ \partial_1 f \cdot \Delta^{3,3}_{(1,2,3)} + 0 + 0 \right\} + \left\{ 0 + \partial_2 g \cdot \Delta^{3,3}_{(2,3,1)} + 0 \right\} + \left\{ 0 + 0 + \partial_3 h \cdot \Delta^{3,3}_{(3,1,2)} \right\} = \\
&= (\partial_1 f + \partial_2 g + \partial_3 h) \cdot \Delta^{3,3}_{(1,2,3)},
\end{aligned}$$

ezért tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

α) $d\omega(x,y,z) = 2y^2 \cdot \Delta^{3,3}_{(1,2,3)}$;

β) $d\omega(x,y,z) = (1 + 2xyz) \cdot \Delta^{3,3}_{(1,2,3)}$.

(g) Mivel bármely $(x, y, z) \in V$ esetén

$$(\partial_1 f + \partial_2 g + \partial_3 h)(x,y,z) = \frac{3\sqrt{[x^2+y^2+z^2]^3} - 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}{[x^2+y^2+z^2]^3} = 0,$$

ezért

$$d\omega(x,y,z) = 0 \cdot \Delta^{3,3}_{(1,2,3)} = f_0 \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

2. Legyen $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^4$ nyílt halmaz. Írjuk fel a

$$\Lambda^r_k(V) \qquad (k \in \{0,1,2,3,4\})$$

függvénytér elemeit!

Útm.

- $k = 0$ esetén bármely $f : V \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \Lambda^r_0(V)$ $/= \mathfrak{C}^r(V, \mathbb{R})/$,
- $k = 1$ esetén

$$\Lambda^r_1(V) = \{\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 + \omega_4 dx_4 : \ \omega_i \in \mathfrak{C}^r(V, \mathbb{R}),\ i \in \{1,2,3,4\}\};$$

- $k=2$ esetén $\Lambda_2^r(V)$ elemei $\omega_{(1,2)}dx_1\wedge dx_2+\omega_{(1,3)}dx_1\wedge dx_3+$

$$+\omega_{(1,4)}dx_1\wedge dx_4+\omega_{(2,3)}dx_1\wedge dx_3+\omega_{(2,4)}dx_2\wedge dx_4+\omega_{(3,4)}dx_3\wedge dx_4,$$

  alakúak, ahol

$$\omega_i\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}),\qquad i\in\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}).$$

- $k=3$ esetén $\Lambda_3^r(V)$ elemei $\omega_{(1,2,3)}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+$

$$\omega_{(1,2,4)}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+\omega_{(1,3,4)}dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+\omega_{(2,3,4)}dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$$

  alakúak, ahol

$$\omega_i\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}),\qquad i\in\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}).$$

- $k=4$ esetén

$$\Lambda_4^r(V)=\left\{\omega_{(1,2,3,4)}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4:\ \omega_i\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}),\ i=(1,2,3,4)\right\}. \quad\blacksquare$$

3. Legyen

$$f_i\in\mathfrak{C}^1(V,\mathbb{R})\quad (i\in N_*^k),\qquad \text{majd}\qquad f=(f_i,\ i\in N_*^k).$$

Számítsuk ki az

$$\omega_f:=\sum_{i\in N_*^k} f_i\Delta_i^{n,k}$$

differenciálforma deriváltját!
Útm. Ha

(a) $k=0$, akkor $f:V\to\mathbb{R}$, így $\omega_f=f$, ahonnan

$$\boxed{d\omega_f}=\sum_{j\in N}\partial_j f\Delta_j^{n,1}=\boxed{\omega_{\mathrm{grad}\,f}}$$

következik, azaz az f generálta 0-adrendű differenciálforma deriváltja a $\mathrm{grad}\,f$ által generált 1-rendű differenciálforma.

(b) $n = 2$, $k = 1$, akkor $f : V \to \mathbb{R}^2$, így $\omega_f = f_1\Delta_1^{2,1} + f_2\Delta_2^{2,1}$, ahonnan

$$\begin{aligned}
\boxed{d\omega_f} &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \partial_j f_i \Delta^{2,2}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{2}\left\{\partial_j f_1 \Delta^{2,2}_{(j,1)} + \partial_j f_2 \Delta^{2,2}_{(j,2)}\right\} = \\
&= \partial_1 f_1 \Delta^{2,2}_{(1,1)} + \partial_1 f_2 \Delta^{2,2}_{(1,2)} + \partial_2 f_1 \Delta^{2,2}_{(2,1)} + \partial_2 f_2 \Delta^{2,2}_{(2,2)} = \\
&= 0 + \partial_1 f_2 \Delta^{2,2}_{(1,2)} - \partial_2 f_1 \Delta^{2,2}_{(1,2)} + 0 = \\
&= (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,\Delta^{2,2}_{(1,2)} = \boxed{\omega_{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1}}
\end{aligned}$$

következik, azaz az f generálta 1-rendű differenciálforma deriváltja a $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ által generált 2-odrendű differenciálforma.

(c) $n = 3$, $k = 1$, akkor $f : V \to \mathbb{R}^3$, így $\omega_f = f_1\Delta_1^{3,1} + f_2\Delta_2^{3,1} + f_3\Delta_3^{3,1}$, ahonnan

$$\begin{aligned}
\boxed{d\omega_f} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \partial_j f_i \Delta^{3,2}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j f_1 \Delta^{3,2}_{(j,1)} + \partial_j f_2 \Delta^{3,2}_{(j,2)} + \partial_j f_3 \Delta^{3,2}_{(j,3)}\right\} = \\
&= \partial_1 f_1 \Delta^{3,2}_{(1,1)} + \partial_1 f_2 \Delta^{3,2}_{(1,2)} + \partial_1 f_3 \Delta^{3,2}_{(1,3)} + \\
&\quad + \partial_2 f_1 \Delta^{3,2}_{(2,1)} + \partial_2 f_2 \Delta^{3,2}_{(2,2)} + \partial_2 f_3 \Delta^{3,2}_{(2,3)} + \\
&\quad + \partial_3 f_1 \Delta^{3,2}_{(3,1)} + \partial_3 f_2 \Delta^{3,2}_{(3,2)} + \partial_3 f_3 \Delta^{3,2}_{(3,3)} = \\
&= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\,\Delta^{3,2}_{(2,3)} + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\,\Delta^{3,2}_{(3,1)} + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,\Delta^{3,2}_{(1,2)} = \\
&= \boxed{\omega_{\mathrm{rot}(f)}}
\end{aligned}$$

következik, azaz az f generálta 1-rendű differenciálforma deriváltja a $\operatorname{rot} f$ által generált 2-odrendű differenciálforma.

(d) $n = 3$, $k = 2$, akkor $f : V \to \mathbb{R}^3$, így $\omega_f = f_1\Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2\Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3\Delta^{3,2}_{(1,2)}$, így

$$\boxed{d\omega_f} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in N_*{}^2} \partial_j f_i \Delta^{3,3}_{(j,i)} = \sum_{j=1}^{3}\left\{\partial_j f_1 \Delta^{3,3}_{(j,2,3)} + \partial_j f_2 \Delta^{3,3}_{(j,3,1)} + \partial_j f_3 \Delta^{3,3}_{(j,1,2)}\right\} =$$

$$= \left\{\partial_1 f_1 \Delta^{3,3}_{(1,2,3)} + 0 + 0\right\} + \left\{0 + \partial_2 f_2 \Delta^{3,3}_{(2,3,1)} + 0\right\} + \left\{0 + 0 + \partial_3 f_3 \Delta^{3,3}_{(3,1,2)}\right\} =$$

$$= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\,\Delta^{3,3}_{(1,2,3)} = \boxed{\omega_{\mathrm{div}(f)}}$$

következik, azaz az f generálta 2-odrendű differenciálforma deriváltja a $\operatorname{div} f$ által generált 3-adrendű differenciálforma. ■

4. Legyen $f, g : V \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{C}^1$, majd számítsuk ki a $d(fg)$ deriváltat!

Útm.

$$d(fg) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(fg)\cdot\Delta^{n,1}_j = \sum_{j=1}^{n}(g\cdot\partial_j f + f\cdot\partial_j g)\cdot\Delta^{n,1}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\cdot\partial_j f\cdot\Delta^{n,1}_j + \sum_{j=1}^{n} f\cdot\partial_j g\cdot\Delta^{n,1}_j = g\cdot\sum_{j=1}^{n}\partial_j f\cdot\Delta^{n,1}_j + f\cdot\sum_{j=1}^{n}\partial_j g\cdot\Delta^{n,1}_j =$$

$$= g\cdot(df) + f\cdot(dg).\quad ■$$

5. Legyen $r \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $f \in \Lambda^1_0(V)$, ill. $\omega \in \Lambda^r_k(V)$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$d(f\cdot\omega) = (df)\wedge\omega + f\cdot(d\omega)$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $x \in V$ esetén

$$(f\cdot\omega)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{\omega(x)}_{\in\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i\in N^k_*} f(x)\omega_i(x)\cdot\Delta^{n,k}_i,$$

ezért

$$(d(f\cdot\omega))(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in N_*^k}(\partial_j(f\cdot\omega_i))(x)\cdot\Delta_{(j,i)}^{n,k+1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in N_*^k}\partial_j f(x)\cdot\omega_i(x)\cdot\Delta_{(j,i)}^{n,k+1}}_{=:(*)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in N_*^k}f(x)\cdot\partial_j\omega_i(x)\cdot\Delta_{(j,i)}^{n,k+1}}_{f(x)\cdot(d\omega)(x)},$$

továbbá

$$((df)\wedge\omega)(x) = (df)(x)\wedge\omega(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j f(x)\cdot\Delta_j^{n,1}\right)\wedge\left(\sum_{i\in N_*^k}\omega_i(x)\cdot\Delta_i^{n,k}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in N_*^k}\partial_j f(x)\cdot\omega_i(x)\cdot\Delta_{(j,i)}^{n,k+1} = (*). \quad \blacksquare$$

6. Legyen $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, továbbá $\emptyset\neq V\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be a

$$d:\Lambda_k^r(V)\to\Lambda_{k+1}^{r-1}(V)$$

operátor alábbi tulajdonságait!

(a) A d operátor lineáris, azaz ha $\omega, w\in\Lambda_k^r(V)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor

$$d(\omega+w) = d\omega + dw \qquad \text{és} \qquad d(\alpha\omega) = \alpha d\omega$$

teljesül.

(b) Bármely $\omega\in\Lambda_k^r(V)$, ill. $\sigma\in\Lambda_l^r(V)$ esetén

$$d(\omega\wedge\sigma) = d\omega\wedge\sigma + (-1)^k\omega\wedge(d\sigma).$$

(c) Ha $\omega\in\Lambda_k^2(V)$, akkor $d(d\omega) = 0\,\big(\in\Lambda_{k+2}^0(V)\big)$.

Útm.

(a) Ha $\omega, w \in \Lambda_k^r(V)$ és

- $k = 0$, akkor

$$\begin{aligned} d(\omega + w) &= \sum_{j\in N} \partial_j(\omega + w)\cdot \Delta_j^{n,1} = \sum_{j\in N}(\partial_j\omega + \partial_j w)\cdot \Delta_j^{n,1} = \\ &= \sum_{j\in N} \partial_j\omega\cdot \Delta_j^{n,1} + \sum_{j\in N} \partial_j w\cdot \Delta_j^{n,1} = d\omega + dw. \end{aligned}$$

- $k \in N$, akkor

$$\begin{aligned} d(\omega + w) &= \sum_{j\in N}\sum_{i\in N_*^k} \partial_j(\omega_i + w_i)\cdot \Delta_{j,i}^{n,k+1} = \\ &= \sum_{j\in N}\sum_{i\in N_*^k} (\partial_j\omega_i + \partial_j w_i)\cdot \Delta_{j,i}^{n,k+1} \\ &= \sum_{j\in N}\sum_{i\in N_*^k} \partial_j\omega_i\cdot \Delta_{j,i}^{n,k+1} + \sum_{j\in N}\sum_{i\in N_*^k} \partial_j w_i\cdot \Delta_{j,i}^{n,k+1} = \\ &= d\omega + dw. \end{aligned}$$

Ha $\omega \in \Lambda_k^r(V)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor a

$$d(\alpha\omega) = \alpha d\omega$$

tulajdonság belátása a fenti számoláshoz hasonló (**Házi feladat**).

(b) Ha $\omega \in \Lambda_k^r(V)$, ill. $\sigma \in \Lambda_l^r(V)$, akkor a d operátor linearitásának következtében

$$\begin{aligned} d(\omega\wedge\sigma) &= d\left(\sum_{i,j\in N_*^k} (\omega_i\sigma_j)\Delta_i^{n,k}\wedge \Delta_j^{n,l}\right) = \sum_{i,j\in N_*^k} d(\omega_i\sigma_j)\wedge \Delta_i^{n,k}\wedge\Delta_j^{n,l} = \\ &= \sum_{i,j\in N_*^k} (\sigma_j\cdot d\omega_i + \omega_i\cdot d\sigma_j)\wedge \Delta_i^{n,k}\wedge \Delta_j^{n,l} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j\in N_*^k} (\sigma_j \cdot d\omega_i) \wedge \Delta_i^{n,k} \wedge \Delta_j^{n,l} + \sum_{i,j\in N_*^k} (\omega_i \cdot d\sigma_j) \wedge \Delta_i^{n,k} \wedge \Delta_j^{n,l} = \\
&= \left(\sum_{i\in N_*^k} d\omega_i \wedge \Delta_i^{n,k} \right) \wedge \left(\sum_{j\in N_*^l} \sigma_j \cdot \Delta_j^{n,l} \right) + \\
&\quad + \sum_{j\in N_*^l} \omega_i \left(\sum_{i\in N_*^k} d\sigma_j \wedge \Delta_i^{n,k} \right) \wedge \Delta_j^{n,l} = \\
&= (d\omega \wedge \sigma) + \sum_{j\in N_*^l} \sum_{i\in N_*^k} \omega_i \left(d\sigma_j \wedge \Delta_i^{n,k} \right) \wedge \Delta_j^{n,l} = \\
&= (d\omega \wedge \sigma) + \sum_{j\in N_*^l} \sum_{i\in N_*^k} \omega_i \left((-1)^k \Delta_i^{n,k} \wedge d\sigma_j \right) \wedge \Delta_j^{n,l} = \\
&= (d\omega \wedge \sigma) + (-1)^k \left(\sum_{i\in N_*^k} \omega_i \Delta_i^{n,k} \right) \wedge \left(\sum_{j\in N_*^l} d\sigma_j \wedge \Delta_j^{n,l} \right) = \\
&= d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (d\sigma).
\end{aligned}
$$

(c) Ha $\omega \in \Lambda_k^2(V)$, akkor a d operátor linearitásának következtében

- $k = 0$ esetén a Young-tétel felhasználásával

$$
\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_{j\in N} \partial_j \omega \cdot \Delta_j^{n,1} \right) = \sum_{j\in N} d(\partial_j \omega) \wedge \Delta_j^{n,1} = \\
&= \sum_{j\in N} \left\{ \sum_{i\in N} \partial_i(\partial_j \omega) \wedge \Delta_i^{n,1} \right\} \wedge \Delta_j^{n,1} = \sum_{i,j\in N} \partial_{ij}\omega \cdot \Delta_i^{n,1} \wedge \Delta_j^{n,1} = \\
&= \sum_{i<j} (\partial_{ij}\omega - \partial_{ij}\omega) \cdot \Delta_i^{n,1} \wedge \Delta_j^{n,1} = 0 \in \Lambda_2^0(V).
\end{aligned}
$$

- $k \in \mathbb{N}$ esetén a d operátor linearitásának, ill. az ékszorzat deriváltjára vonatkozó állításnak a felhasználásával

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_{i\in N_*^k} d\omega_i \wedge \Delta_i^{n,k}\right) = \sum_{i\in N_*^k} d\left(d\omega_i \wedge \Delta_i^{n,k}\right) = \\ &= \sum_{i\in N_*^k} \left\{d(d\omega_i) \wedge \Delta_i^{n,k} + (d\Delta_i^{n,k}) \wedge (d\omega_i)\right\} = 0 \in \Lambda_{k+2}^0(V), \end{aligned}$$

hiszen bármely $i \in N_*^k$ esetén az $\omega_i : V \to \mathbb{R}$ nulladrendű differenciélformára

$$d(d\omega_i) = 0 \in \Lambda_2^0(V),$$

továbbá

$$d\Delta_i^{n,k} = d(1 \cdot \Delta_i^{n,k}) = 0 \cdot \Delta_i^{n,k+1} = 0 \in \Lambda_{k+1}^1(V) \qquad (i \in N_*^k). \quad \blacksquare$$

7. Legyen

$$\omega := pr_1 dx_1 + pr_2 dx_2 + pr_3 dx_3 \in \Lambda_1^r(\mathbb{R}^3) \qquad \text{és} \qquad w := pr_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 dx_3 \in \Lambda_2^r(\mathbb{R}^3),$$

ahol tetszőleges $i \in \{1,2,3\}$ esetén

$$pr_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad pr_i(x) := x_i \qquad /pr_i = f_{e_i} = dx_i = \Delta_i^{n,1}/.$$

Számítsuk ki az $\omega \wedge w$ ékszorzatot!
Útm. Mivel bármely $i, j \in \{1,2,3\}$ esetén

$$dx_i \wedge dx_i = f_0 \qquad \text{és} \qquad dx_i \wedge dx_j = -(dx_j \wedge dx_i) \quad (i \neq j),$$

ezért

$$\omega\wedge w = pr_2 dx_2\wedge dx_2\wedge dx_3 + pr_3 pr_1 dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2 = (pr_1 pr_3 - pr_2) dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3. \quad \blacksquare$$

8. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f := (f_1, \ldots, f_n) : V \to \mathbb{R}^n$: $f \in \mathfrak{C}^1$, majd értelmezzük az

$$\omega^f(x; x_1, \ldots, x_{n-1}) := \det[f(x), x_1, \ldots, x_{n-1}] \qquad (x \in V,\ x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n)$$

differenciálformát $\Lambda_{n-1}^1(V)$-ben. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\omega^f = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \Delta_1^{n,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{i-1}^{n,1} \wedge \Delta_{i+1}^{n,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_n^{n,1}$$

teljesül, majd számítsuk ki ω^f deriváltját!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $x \in V$, ill. $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\det(f(x), x_1, \ldots, x_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & x_{11} & \ldots & x_{n-11} \\ f_2(x) & x_{12} & \ldots & x_{n-12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x) & x_{1n-1} & \ldots & x_{n-1n-1} \\ f_n(x) & x_{1n} & \ldots & x_{n-1n} \end{bmatrix},$$

ezért az első oszlop szerinti kifejtéssel azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in V$ esetén $\omega^f(x) =$

$$= f_1(x) \det \begin{bmatrix} x_{12} & \ldots & x_{n-12} \\ x_{13} & \ldots & x_{n-13} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n-1} & \ldots & x_{n-1n-1} \\ x_{1n} & \ldots & x_{n-1n} \end{bmatrix} - f_2(x) \det \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{n-11} \\ x_{13} & \ldots & x_{n-13} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n-1} & \ldots & x_{n-1n-1} \\ x_{1n} & \ldots & x_{n-1n} \end{bmatrix} +$$

$$+ \ldots + (-1)^n f_n(x) \det \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{n-11} \\ x_{12} & \ldots & x_{n-12} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n-2} & \ldots & x_{n-1n-2} \\ x_{1n-1} & \ldots & x_{n-1n-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} &= f_1(x)\Delta_2^{n-1,1} \wedge \Delta_3^{n-1,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{n-1}^{n-1,1} \wedge \Delta_n^{n-1,1} - \\ &\quad -f_2(x)\Delta_1^{n-1,1} \wedge \Delta_3^{n-1,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{n-1}^{n-1,1} \wedge \Delta_n^{n-1,1} + \\ &\quad + \ldots + (-1)^n f_n(x)\Delta_1^{n-1,1} \wedge \Delta_2^{n-1,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{n-2}^{n-1,1} \wedge \Delta_{n-1}^{n-1,1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i(x)\Delta_1^{n,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{i-1}^{n,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_{i+1}^{n,1} \wedge \ldots \wedge \Delta_n^{n,1}. \end{aligned}$$

2. lépés. Mivel a $\mathbf{d}$ operátor lineáris, ezért

$$
\begin{aligned}
d\omega^f &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}\partial_j f_i \Delta_j^{n,1}\wedge\Delta_1^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_{i-1}^{n,1}\wedge\Delta_{i+1}^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_n^{n,1} = \\
&= \overbrace{0}^{1}+\ldots+\overbrace{0}^{i-1}+ \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\Delta_j^{n,1}\wedge\Delta_1^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_{i-1}^{n,1}\wedge\Delta_{i+1}^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_n^{n,1}+ \\
&\quad \overbrace{0}^{i+1}+\ldots+\overbrace{0}^{n} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(-1)\Delta_1^{n,1}\wedge\Delta_j^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_{i-1}^{n,1}\wedge\Delta_{i+1}^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_n^{n,1} = \ldots = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\partial_i f_i\Delta_1^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_n^{n,1} = (\operatorname{div} f)\Delta_1^{n,1}\wedge\ldots\wedge\Delta_n^{n,1}\in\Lambda_n^0(V). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi,\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$: $\varphi,\psi\in\mathfrak{D}^2$ ill. $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$: $f,g\in\mathfrak{D}^2$, akkor

   (a) $\operatorname{div}(f\times g)=\langle g,\operatorname{rot}(f)\rangle-\langle f,\operatorname{rot}(g)\rangle$;

   (b) $\operatorname{rot}(f\times g)=\operatorname{div}(g)\cdot f-\operatorname{div}(f)\cdot g+f'\cdot g-g'\cdot f$;

   (c) $\Delta(\varphi\psi)=\varphi\Delta(\psi)+\psi\Delta(\varphi)+2\langle\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi\rangle$

   teljesül!

   Útm.

   (a) Mivel

$$f\times g=(f_2g_3-f_3g_2, f_3g_1-f_1g_3, f_1g_2-f_2g_1),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f \times g) &= \partial_1(f_2g_3 - f_3g_2) + \partial_2(f_3g_1 - f_1g_3) + \partial_3(f_1g_2 - f_2g_1) = \\
&= (\partial_1 f_2)g_3 + f_2(\partial_1 g_3) - (\partial_1 f_3)g_2 - f_3(\partial_1 g_2) + \\
&\quad +(\partial_2 f_3)g_1 + f_3(\partial_2 g_1) - (\partial_2 f_1)g_3 - f_1(\partial_2 g_3) + \\
&\quad +(\partial_3 f_1)g_2 + f_1(\partial_3 g_2) - (\partial_3 f_2)g_1 - f_2(\partial_3 g_1) = \\
&= f_1 \cdot (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) + f_2 \cdot (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) + f_2 \cdot (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) - \\
&\quad -g_1 \cdot (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) + g_2 \cdot (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) + g_2 \cdot (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \\
&= \langle g, \operatorname{rot}(f)\rangle - \langle f, \operatorname{rot}(g)\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Mivel

$$f' = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{grad} f_2 \\ \operatorname{grad} f_3 \end{bmatrix} = [\partial_j f_i]_{i,j=1}^{3,3}, \qquad \text{ill.} \qquad g' = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g_1 \\ \operatorname{grad} g_2 \\ \operatorname{grad} g_3 \end{bmatrix} = [\partial_j g_i]_{i,j=1}^{3,3},$$

ezért

$$f \cdot \operatorname{div}(g) = \begin{bmatrix} f_1(\partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3) \\ f_2(\partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3) \\ f_3(\partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3) \end{bmatrix}, \quad g \cdot \operatorname{div}(f) = \begin{bmatrix} g_1(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) \\ g_2(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) \\ g_3(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) \end{bmatrix}$$

és

$$f' \cdot g = \begin{bmatrix} (\partial_1 f_1)g_1 + (\partial_2 f_1)g_2 + (\partial_3 f_1)g_3 \\ (\partial_1 f_2)g_1 + (\partial_2 f_2)g_2 + (\partial_3 f_2)g_3 \\ (\partial_1 f_3)g_1 + (\partial_2 f_3)g_2 + (\partial_3 f_3)g_3 \end{bmatrix},$$

ill.

$$g' \cdot f = \begin{bmatrix} (\partial_1 g_1)f_1 + (\partial_2 g_1)f_2 + (\partial_3 g_1)f_3 \\ (\partial_1 g_2)f_1 + (\partial_2 g_2)f_2 + (\partial_3 g_2)f_3 \\ (\partial_1 g_3)f_1 + (\partial_2 g_3)f_2 + (\partial_3 g_3)f_3 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$f \times g = (f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1),$$

ezért $\operatorname{rot}(f \times g)$

- első komponense:

$$f_1\partial_2 g_2 - f_2\partial_2 g_1 - (f_3\partial_3 g_1 - f_1\partial_3 g_3) - (g_1\partial_2 f_2 - g_2\partial_2 f_1) + (g_3\partial_3 f_1 - g_1\partial_3 f_3),$$

azaz

$$\begin{aligned}[\mathrm{rot}(f\times g)]_1 &= \underbrace{(\partial_1 f_1)g_1 + g_2\partial_2 f_1 + g_3\partial_3 f_1}_{[f'\cdot g]_1} - \underbrace{\{(\partial_1 g_1)f_1 + f_2\partial_2 g_1 + f_3\partial_3 g_1\}}_{[g'\cdot f]_1} + \\ &+ \underbrace{(\partial_1 g_1)f_1 + f_1\partial_2 g_2 + f_1\partial_3 g_3}_{[\mathrm{div}\, g\cdot f]_1} - \underbrace{\{(\partial_1 f_1)g_1 + g_1\partial_2 f_2 + g_1\partial_3 f_3\}}_{[\mathrm{div}\, f\cdot g]_1},\end{aligned}$$

- második komponense:

$$f_2\partial_3 g_3 - f_3\partial_3 g_2 - (f_1\partial_1 g_2 - f_2\partial_1 g_1) - (g_2\partial_3 f_3 - g_3\partial_3 f_2) + (g_1\partial_1 f_2 - g_2\partial_1 f_1),$$

azaz

$$\begin{aligned}[\mathrm{rot}(f\times g)]_2 &= \underbrace{(\partial_1 f_2)g_1 + g_2\partial_2 f_2 + g_3\partial_3 f_2}_{(J_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{v})_2} - \underbrace{\{(\partial_1 g_2)f_1 + f_2\partial_2 g_2 + f_3\partial_3 g_2\}}_{(g'\cdot f]_2} + \\ &+ \underbrace{(\partial_1 g_1)f_2 + f_2\partial_2 g_2 + f_2\partial_3 g_3}_{[\mathrm{div}\, g\cdot f]_2} - \underbrace{\{(\partial_1 f_1)g_2 + g_2\partial_2 f_2 + g_2\partial_3 f_3\}}_{[\mathrm{div}\, f\cdot g]_2},\end{aligned}$$

- harmadik komponense:

$$f_3\partial_1 g_1 - f_1\partial_1 g_3 - (f_2\partial_2 g_3 - f_3\partial_2 g_2) - (g_3\partial_1 f_1 - g_1\partial_1 f_3) + (g_2\partial_2 f_3 - g_3\partial_2 f_2),$$

azaz

$$\begin{aligned}[\mathrm{rot}(f\times g)]_3 &= \underbrace{(\partial_1 f_3)g_1 + g_2\partial_2 f_3 + g_3\partial_3 f_3}_{(J_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{v})_3} - \underbrace{\{(\partial_1 g_3)f_1 + f_2\partial_2 g_3 + f_3\partial_3 g_3\}}_{[g'\cdot f]_3} + \\ &+ \underbrace{(\partial_1 g_1)f_3 + f_3\partial_2 g_2 + f_3\partial_3 g_3}_{[\mathrm{div}\, g\cdot f]_3} - \underbrace{\{(\partial_1 f_1)g_3 + g_3\partial_2 f_2 + g_3\partial_3 f_3\}}_{[\mathrm{div}\, f\cdot g]_3}.\end{aligned}$$

(c) $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta(\psi) + \psi\Delta(\varphi) + 2\langle \mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,\psi\rangle$, ui.

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\psi) &= \sum_{l=1}^{3}\partial_{ll}(\varphi\psi) = \sum_{l=1}^{3}\partial_l\left(\partial_l(\varphi\psi)\right) = \sum_{l=1}^{3}\partial_l\left(\psi\partial_l\varphi + \varphi\partial_l\psi\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{3}\left(\partial_l\psi\partial_l\varphi + \psi\partial_{ll}\varphi + \partial_l\varphi\partial_l\psi + \psi\partial_{ll}\psi\right) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^{3}\partial_{ll}f\right)\psi + \left(\sum_{l=1}^{3}\partial_{ll}\psi\right)\varphi + 2\sum_{l=1}^{n}\partial_l\varphi\partial_l\psi = \\ &= \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

10. Számítsuk ki rot f-et és div f-et! Legyen

(a) $\omega > 0$, $e \in \mathbb{R}^3$: $|e| = 1$, továbbá[52]

$$f(r) := \omega\,(e \times r) \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

(b) $c > 0$, ill.[53]

$$f(r) := \frac{c}{|r|^3} \cdot r \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3).$$

(c) $\mu_0, I > 0$, majd[54]

$$f(r) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{|r|^2 - \langle k, r\rangle^2} \cdot (k \times r) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 > 0).$$

(d) $R > 0$, $p_1 > p_2 > 0$, $\eta, l > 0$, ill.

$$f(r) := \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - x^2 - z^2)j \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq R^2).$$

[52] f: valamely rögzített e irányvektorú tengely körül (egyenletesen) forgó **merev test** sebességét leíró vektormező.

[53] f: **centrális erőter**et leíró vektormező.

[54] f: a z-tengely mentén haladó, I intenzitású árammal átjárt, végtelen hosszú(nak gondolt) egyenes vezető keltette **mágneses tér térerősség**ét leíró vektormező.

Útm.

(a) Mivel

$$f(r) = Mr, \qquad \text{ahol} \qquad M := \omega \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(vö. $\boxed{\mathbf{A}}$ Függelék), ezért $f'(r) = M$, ahonnan

$$\operatorname{div} f(r) = 0, \qquad \operatorname{rot} f(r) = 2\omega e \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

következik.

(b) Mivel bármely $0 \neq r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$f(r) = \phi(r)\mathbb{E}_3 r, \qquad \text{ahol} \qquad \phi(r) := \frac{c}{|r|^3} = \frac{c}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

ezért

$$\operatorname{grad} \phi(r) = c\left(\frac{-3x}{|r|^5}, \frac{-3y}{|r|^5}, \frac{-3z}{|r|^5}\right) = \frac{-3c}{|r|^5} \cdot r,$$

így

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{c}{|r|^5} \cdot \left(r \circ (3r) - |r|^2 \mathbb{E}_3\right) = \\ &= -\frac{c}{|r|^5} \cdot \begin{bmatrix} 2x^2 - y^2 - z^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 2y^2 - x^2 - z^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 2z^2 - x^2 - y^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ez utóbbi pedig olyan szimmetrikus mátrix, amelynek nyoma zérus, ennélfogva

$$\operatorname{div} f(r) = 0, \qquad \operatorname{rot} f(r) = 0 \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

(c) Mivel bármely $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $x^2 + y^2 > 0$ esetén

$$f(r) = \phi(r) M r, \qquad \text{ahol} \qquad \phi(r) := \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2+y^2)}, \qquad M := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\operatorname{grad} \phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}, 0\right),$$

így

$$f'(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2xy & y^2-x^2 & 0 \\ y^2-x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ez utóbbi pedig olyan szimmetrikus mátrix, amelynek nyoma zérus, így

$$\operatorname{div} f(r) = 0, \qquad \operatorname{rot} f(r) = 0 \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 > 0).$$

(d) Közvetlen számolással

$$f'(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2x & 0 & -2z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

így

$$\operatorname{div} f(r) \equiv 0, \qquad \operatorname{rot} f(r) \equiv (2z, 0, -2x). \quad \blacksquare$$

11. Legyen $\mu_0 > 0$, $j \in \mathbb{R}^3$, ill.

$$H(r) := \frac{\mu_0}{4\pi|r|} j \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3).$$

Számítsuk ki H rotációját!

Útm.

$$\operatorname{rot} H(r) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{|r|}\underbrace{\operatorname{rot} j}_{=0} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|r|}\right) \times j\right\} \equiv -\frac{\mu_0}{4\pi|r|^3}(r \times j).$$

Ha j az origóban lévő **áramsűrűség**et jelenti, akkor az egyenlőség jobb oldalán az r pontbeli mágneses indukciósűrűség áll (**Biot-Savart-törvény**). $\blacksquare$

12. Igazoljuk, hogy ha $e, \epsilon_0 > 0$, ill. $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor az

$$U(r) := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\langle d, r\rangle}{|r|^3}, \qquad A(r) := \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d \times r}{|r|^3} \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

skalár-, ill. vektormezőre

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{rot} A$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$U(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d_1 x + d_2 y + d_3 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U(r) &\equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d_1|r|^2-3x\langle d,r\rangle}{|r|^5},\frac{d_2|r|^2-3y\langle d,r\rangle}{|r|^5},\frac{d_3|r|^2-3z\langle d,r\rangle}{|r|^5}\right)= \\
&\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3\langle d,r\rangle}{|r|^5}r-\frac{d}{|r|^3}\right\}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\operatorname{rot} A=\operatorname{rot}(\varphi)v=\varphi\operatorname{rot} v-v\times\operatorname{grad}\varphi,$$

ahol

$$\varphi(r):\equiv\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{|r|^3}\qquad\text{és}\qquad v(r):\equiv d\times r.$$

továbbá

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(r)\equiv 2d$$

és

$$\operatorname{grad}\varphi(r)\equiv\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{|r|^6}\left(3|r|^2\cdot\frac{x}{|r|},3|r|^2\cdot\frac{y}{|r|},3|r|^2\cdot\frac{z}{|r|}\right)\equiv\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{-3}{|r|^5}\cdot r,$$

ezért (vö. $\boxed{\mathbf{A}}$ Függelék)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} A(r) &\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left\{\frac{1}{|r|^3}\cdot 2d-(d\times r)\times\left(\frac{-3}{|r|^5}\cdot r\right)\right\}\equiv \\
&\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{2d}{|r|^3}+\frac{3}{|r|^5}(d\times r)\times r\right\}\overset{(d\times r)\times r=\langle d,r\rangle r-\langle r,r\rangle d}{\equiv} \\
&\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{-\frac{d}{|r|^3}+\frac{3\langle d,r\rangle r}{|r|^5}\right\}.\quad\blacksquare
\end{aligned}$$

13. Mutassuk meg, hogy ha $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathfrak{D}^2$,

$$n(r):=|r|\qquad(r\in\mathbb{R}^3),$$

akkor a $\phi:=f\circ n$ függvényre

$$\Delta\phi=f''\circ n+\frac{2}{n}\cdot f'\circ n$$

teljesül!

Útm. Mivel a $\phi:=f\circ n$ függvényre teteszőleges $0\neq r\in\mathbb{R}^3$ esetén

$$\partial_1\phi(r)=(f'\circ n)(r)\cdot\frac{x}{n(r)},$$

így

$$\partial_{11}\phi(r) = (f'' \circ n)(r) \cdot \frac{x^2}{n(r)^2} + (f' \circ n)(r) \cdot \frac{n(r) - \dfrac{x^2}{n(r)}}{n(r)^2} =$$

$$= (f'' \circ n)(r) \cdot \frac{x^2}{n(r)^2} + (f' \circ n)(r) \cdot \frac{y^2 + z^2}{n(r)^3},$$

sőt

$$\partial_{22}\phi(r) = \ldots = (f'' \circ n)(r) \cdot \frac{y^2}{n(r)^2} + (f' \circ n)(r) \cdot \frac{x^2 + z^2}{n(r)^3},$$

$$\partial_{33}\phi(r) = \ldots = (f'' \circ n)(r) \cdot \frac{z^2}{n(r)^2} + (f' \circ n)(r) \cdot \frac{x^2 + y^2}{n(r)^3}.$$

Innen pedig

$$\Delta\phi(r) = \partial_{11}\phi(r) + \partial_{22}\phi(r) + \partial_{33}\phi(r) =$$

$$= (f'' \circ n)(r) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{n(r)^2} + (f' \circ n)(r) \cdot \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{n(r)^3}$$

következik. Figyelembe véve, hogy

$$n(r)^2 = |r|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

az igazolandó állítást kapjuk. ■

1.15. 15. gyakorlat

1.15.1. A gyakorlat anyaga

Az alábbiakban fel fogjuk használni a k-dimenziós kompakt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^n$-be képező függvények differenciálhatóságának fogalmát.

Emlékeztető. A $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazon értelmezett $f : K \to \mathbb{R}^n$ függvényt r-szer (folytonosan) differenciálhatónak nevezzük ($r \in \mathbb{N}$), ha van olyan K-t tartalmazó $\mathcal{U}$ nyílt halmaz ($K \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$) és f-nek olyan $\widetilde{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ kiterjesztése, hogy $\widetilde{f} \in \mathfrak{C}^r$, s ekkor

$$f^{(r)}(x) := \widetilde{f}^{(r)}(x) \qquad (x \in K)\,. \quad \Diamond$$

A továbbiakban gyakran használjuk az

$$\mathbf{I}^k := [0,1]^k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

($\mathbb{R}^k$-beli zárt egységkocka), illetve az

$$\mathbf{I} := \mathbf{I}^1 \qquad \text{és az} \qquad \mathbf{I}^0 := \{0\}$$

szimbólumokat.

Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ill. $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz esetén azt mondjuk, hogy

1. a
$$\Phi : \mathbf{I}^k \to V$$
leképezés V-beli k-dimenziós **cella** (röviden k-**cella**), ha Φ folytonos: $\Phi \in \mathfrak{C}(\mathbf{I}^k, V)$.

2. az $\mathcal{F} \subset V$ halmaz k-dimenziós **felület** /k-**felület**/, ha $\mathcal{F}$ valamely Φ k-cella értékkészlete: $\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Phi$. A szóban forgó k-cellát az $\mathcal{F}$ felület egy **paraméterezés**ének nevezzük.

3. a fenti Φ leképezés V-beli **(r-szeresen) sima k-cella**, ha $\Phi \in \mathfrak{C}^r$.

4. Azt mondjuk, hogy a sima V-beli Φ cella **reguláris**, ha $\Phi|_{\mathrm{int}(\mathbf{I}^k)}$ injektív, és bármely $x \in \mathbf{I}^k$ esetén $\mathrm{rang}(\Phi'(x)) = k$. $\Diamond$

Megjegyzések.

1. A k-cella értelmezésében $\mathbf{I}^k$ helyett tetszőleges $\mathbb{R}^k$-beli kompakt intervallumot is meg szoktak engedni. Minthogy az $\mathbf{I}^k$ alkalmas lineáris leképezéssel bármely kompakt k-dimenziós intervallumba átvihető, ezért az $\mathbf{I}^k$ rögzítése a továbbiakban semmiféle megszorítást nem jelent. Így a cella értelmezési tartománya sok esetben $\mathbf{I}^k$ helyett $[a,b]^k$, ahol $a,b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$.

2. Cellák esetében a simaságnak nincsen olyan következménye az értékkészletre vonatkozóan, mint az egyváltozós függvények esetében a grafikonra vonatkozóan, ui. pl. a

$$\Phi(t) := (t^2, t^3) \quad (t \in [-a,a],\ a > 0)$$

1-cellára (útra) $\Phi \in \mathfrak{C}^\infty$ teljesül, viszont értékkészletének (**Neil-féle parabola**[55]) „csúcsa” van a $(0,0)$ pontban. Talán még meglepőbb az a tény, hogy az egységnégyzet határa is előáll valamely $\mathfrak{C}^\infty$-beli 1-cella értékkészleteként, ui. ha

$$\widetilde{h}(t) := \begin{cases} \exp(1/t(t-1)) & (t \in (0,1)), \\ 0 & (t \in \{0,1\}), \end{cases}$$

ill.

$$h(t) := 1 - \left(\int_0^t \widetilde{h}\right) \Big/ \left(\int_0^1 \widetilde{h}\right) \quad (t \in [0,1])),$$

akkor h monoton csökkenő,

$$h(0) = 1, \qquad h(1) = 0, \qquad h^{(k)}(0) = h^{(k)}(1) = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

továbbá a

$$\Phi(t) := \begin{cases} (1 - h(t), 0) & (t \in [0,1]), \\ (1, 1 - h(t-1)) & (t \in [1,2]), \\ (h(t-2), 1) & (t \in [2,3]), \\ (0, h(t-3)) & (t \in [3,4]) \end{cases}$$

cellára $\Phi \in \mathfrak{C}^\infty$ és

$$\mathcal{R}_\Phi = \partial([0,1] \times [0,1]).$$

[55] William Neil (1637 – 1670)

3. Ha $\theta_0 \in \mathbb{R}$ és

$$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

olyan sima 1-cella, hogy

$$\Phi(a) = (r(a)\cos(\theta_0), r(a)\sin(\theta_0)),$$

ahol

$$r(t) := \sqrt{[\Phi_1(t)]^2 + [\Phi_2(t)]^2} \qquad (t \in [a,b]),$$

akkor pontosan egy olyan $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\theta \in \mathfrak{C}^1$ (**hajlásszög**)függvény van, hogy

$$\Phi(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)) \quad (t \in [a,b])$$

(**polárkoordinátás megadás**). Mivel $\Phi(a) = \Phi(b)$ esetén $r(a) = r(b)$, ezért ebben az esetben van olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy

$$\theta(a) = \theta(b) + k2\pi.$$

A

$$W_\Phi := \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}$$

számot Φ **körülfordulási szám**ának nevezzük. $\square$

Definíció. Adott $k, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, ill. V-beli Φ k-cella, ill. $j \in \{1, \ldots, k\}$ és $s \in \{0,1\}$ esetén Φ_{js}-sel jelöljük a következő $(k-1)$-cellát:

$$\Phi_{js} : [0,1]^{k-1} \to V, \qquad \Phi_{js}(x_1, \ldots, x_{k-1}) := \begin{cases} \Phi(s) & (k = 1), \\ \\ \Phi(x_1, \ldots, x_{j-1}, s, x_j, \ldots, x_{k-1}) & (k > 1). \end{cases}$$

A $(k-1)$-cellák alkotta

$$\partial\Phi := \{\Phi_{js} : \ j \in \{1, \ldots, k\}, \ s \in \{0,1\}\}$$

(formálisan) $2k$-elemű halmazt – ún. $(k-1)$-**lánc**ot – a Φ **cella határ**ának nevezzük. $\Diamond$

Példák.

1. Ha $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sima út, akkor

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}\}, \quad \text{ahol} \quad \Phi_{10}(0) = \Phi(0), \quad \Phi_{11}(0) = \Phi(1).$$

azaz

$$\Phi_{1s}(0) = \Phi(s) \quad (s \in \{0,1\}).$$

2. $0 < a < b \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\Phi(u,v) := ((a + (b-a)u)\cos(2\pi v), (a + (b-a)u)\sin(2\pi v))$$

$$((u,v) \in [0,1]^2)$$

2-cella ($\mathcal{R}_\Phi$: origó középpontú a belső sugarú, b külső sugarú **körgyűrű**) határa:

$$\partial\Phi := \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(t) & = & \Phi(0,t) & = & (a\cos(2\pi t), a\sin(2\pi t)), \\ \Phi_{11}(t) & = & \Phi(1,t) & = & (b\cos(2\pi t), b\sin(2\pi t)), \\ \Phi_{20}(t) & = & \Phi(t,0) & = & (a + (b-a)t, 0), \\ \Phi_{21}(t) & = & \Phi(t,1) & = & (a + (b-a)t, 0) \end{array}\right\} \qquad (t \in [0,1]).$$

3. A

$$\Phi(u,v) := \left(u\cos(2\pi v), u\sin(2\pi v), u^2\right) \quad \left((u,v) \in [0,1]^2\right)$$

2-cella ($\mathcal{R}_\Phi$ **forgásparaboloid**) határa

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(y) & = & \Phi(0,y) & = & (0,0,0) \\ \Phi_{11}(y) & = & \Phi(1,y) & = & (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y), 1) \\ \Phi_{20}(y) & = & \Phi(y,0) & = & (y,0,y^2) \\ \Phi_{21}(y) & = & \Phi(y,1) & = & (y,0,y^2) \end{array}\right\} \qquad (y \in [0,1]).$$

Definíció. Rögzített $k \in \mathbb{N}$, ill. $\Phi, \Psi \in \mathfrak{C}^r([a,b]^k, \mathbb{R}^n)$ esetén azt mondjuk, hogy a Ψ, Φ k-cellák

1. **kongruens**ek, ha van olyan $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometria, hogy $\Psi = I \circ \Phi$;
2. **paralell**ek, ha kongruensek és a fenti I izometria **transzláció** is egyben;
3. **ekvivalens**ek $/\Phi \sim \Psi/$, ha van $S : [a, b]^k \to [a, b]^k$ diffeomorfizmus[56] amelyre

$$\det(S'(x)) > 0 \quad (x \in [a, b]^k) \qquad \text{és} \qquad \Psi = \Phi \circ S$$

teljesül. $\Diamond$

Definíció. Legyen $r \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, továbbá $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ és $\Phi \in \mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^k, V)$. Értelmezzük az

$$\omega \star \Phi \in \Lambda_k^r(\mathbf{I}^k)$$

transzformáltat, ahol

$\boxed{k = 0}$ esetén, azaz amikor

$$\omega : V \to \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \Phi : \{0\} \to V,$$

akkor

$$\omega \star \Phi := \omega \circ \Phi;$$

$\boxed{k > 0}$ esetén

$$\omega \star \Phi(x; x_1, \ldots, x_k) := \omega\left(\Phi(y); \Phi'(x)x_1, \ldots, \Phi'(x)x_k\right)$$

$$(x \in \mathbf{I}^k,\ x_1, \ldots x_k \in \mathbb{R}^k). \quad \Diamond$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció, reguláris k-cellával ekvivalens k-cella is reguláris, továbbá két egymással ekvivalens k-cella értékkészlete azonos, azaz ekvivalens cellák ugyananak a k-felületnek a paraméterezései. $\Box$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, valamint $\Phi \in \mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^k, V)$ és $\Psi \in \mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^k, V)$ ekvivalens sima cellák, azaz alkalmas $S : \mathbf{I}^k \to \mathbf{I}^k$ reguláris cella esetén $\Psi = \Phi \circ S$ (vö. fenti definíció), akkor fennáll az

$$\omega \star \Psi = \omega \star (\Phi \circ S) = (\omega \star \Phi) \star S$$

egyenlőség!

[56] Az S leképezést **diffeomorfizmus**nak nevezzük, ha S olyan folytonosan differenciálható bijekció, amelyre az S^{-1} inverz is folytonosan differenciálható.

Útm. A $*$ művelet értelmezése alapján

$$\begin{aligned}\omega\star(\Phi\circ S)(x)(x_1,\ldots,x_k) &= \omega((\Phi\circ S)(x))((\Phi\circ S)'(x))x_1,\ldots(\Phi\circ S)'(x))x_k) = \\ &= \omega(\Phi(S(x)))(\Phi'(S(x))\cdot S'(x)x_1,\ldots,\Phi'(S(x))\cdot S'(x)x_k),\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}((\omega\star\Phi)\star S)(x)((x_1,\ldots,x_k) &= (\omega\star\Phi)(S(x))(S'(x)x_1,\ldots,S'(x)x_k) = \\ &= \omega(\Phi(S(x)))(\Phi'(S(x))\cdot S'(x)x_1,\ldots,\Phi'(S(x))\cdot S'(x)x_k),\end{aligned}$$

ahol $x\in\mathbf{I}^k$, $x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{R}^k$. ■

Megjegyzés. Mivel

$$\dim\left(\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)\right)=\binom{k}{k}=1,$$

ezért $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)$-nak egyetlen báziseleme van: $\Delta_{(1,\ldots,k)}$. Így, ha $k\in\{1,\ldots,n\}$, ill. $\Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^k,V)$, akkor $\omega\star\Phi\in\Lambda_k^r([0,1]^k)$, azaz

$$\omega\star\Phi=\Omega\cdot\Delta_{(1,\ldots,k)},$$

ahol $\Omega\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^k,\mathbb{R})$. □

Definíció. Legyen $k\in\{0,\ldots,n\}$, $\omega\in\Lambda_k^r(V)$ és $\Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^k,V)$. Az ω differenciálforma **Φ cellára vonatkozó integrál**jának nevezzük az $\displaystyle\int_\Phi\omega$ valós számot, ahol

- ha $k=0$, azaz
$$\omega\in\Lambda_0^r(V)=\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}),\qquad \Phi:\{0\}\to V,$$
akkor
$$\int_\Phi\omega:=\omega(\Phi(0)).$$
- ha $k>0$, úgy
$$\int_\Phi\omega:=\int_{[0,1]^k}\Omega.\quad\Diamond$$

Megjegyzés. Ha

- $\boxed{k=1}$, azaz
$$\omega_f=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\Delta_i,$$
ahol
$$f=(f_1,\ldots,f_n)\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}^n),\qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1],V)\qquad \text{(pl. V-beli sima út) és}$$
$$\begin{aligned}\omega_f\star\Phi(u;y) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(\Phi(u))\underbrace{\Delta_i(\Phi'(u)y)}_{(\Phi'(u)y)_i}=\sum_{i=1}^{n} f_i(\Phi(u))\Phi_i'(u)\underbrace{y}_{\Delta_1(y)}=\\ &= \langle f\circ\Phi,\Phi'\rangle(u)\Delta_1(y)=\omega_{\langle f\circ\Phi,\Phi'\rangle}(u;y)\quad (u\in[0,1],y\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$
akkor
$$\boxed{\int_\Phi \omega_f}=\int_{[0,1]}\langle f\circ\Phi,\Phi'\rangle=\boxed{\int_\Phi f}\qquad \textbf{(vonalintegrál).}$$

- $\boxed{k{=}n}$, azaz
$$\omega_f=f\cdot\Delta_{(1,\ldots,n)},$$
ahol
$$f\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}),\qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^n,V)\qquad \text{(valamely V-beli test paraméterezése) és}$$
tetszőleges $x\in[0,1]^n$, ill. $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ esetén
$$\begin{aligned}\omega_f\star\Phi(x;x_1,\ldots,x_n) &= f(\Phi(x))\Delta_{(1,\ldots,n)}(\Phi'(x)x_1,\ldots,\Phi'(x)x_n)=\\ &= f(\Phi(x))\det(\Phi'(x)x_1,\ldots,\Phi'(x)x_n)=\\ &= f(\Phi(x))\det(\Phi'(x))\det(x_1,\ldots,x_n)=\\ &= f(\Phi(x))\det(\Phi'(x))\Delta_{(1,\ldots,n)}(x_1,\ldots,x_n)=\\ &= \omega_{(f\circ\Phi)\cdot\det(\Phi')}(x;x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$
akkor
$$\boxed{\int_\Phi \omega_f}=\int_{[0,1]^n}(f\circ\Phi)\cdot\det(\Phi')\underbrace{=}_{\Phi\text{ reguláris}}\int_{[0,1]^n}(f\circ\Phi)\cdot|\det(\Phi')|=\boxed{\int_{\mathcal{R}_\Phi} f}$$
(többes integrál).

- $\boxed{n=3, \quad k=2}$, azaz

$$\omega_f = f_1 \cdot \Delta_{(2,3)} + f_2 \cdot \Delta_{(3,1)} + f_3 \cdot \Delta_{(1,2)},$$

ahol

$$f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathfrak{C}^r(V, \mathbb{R}^3), \quad \Phi \in \mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^2, V) \quad \text{(pl. } \mathcal{R}_\Phi \text{ felület) és}$$

és $\omega_f \star \Phi = \Omega \cdot \Delta_{(1,2)}$, és itt

$$\begin{aligned}
\Omega(u) &= \omega_f \star \Phi(u; e_1, e_2) = \omega_f\left(\Phi(u); \partial_1\Phi(u), \partial_2\Phi(u)\right) \\
&= f_1\left(\Phi(u)\right)\Delta_{(2,3)}\left(\partial_1\Phi(u), \partial_2\Phi(u)\right) + f_2\left(\Phi(u)\right)\Delta_{(3,1)}\left(\partial_1\Phi(u), \partial_2\Phi(u)\right) + \\
&\quad + f_3\left(\Phi(u)\right)\Delta_{(1,2)}\left(\partial_1\Phi(u), \partial_2\Phi(u)\right) = \underbrace{\ldots}_{\text{(vö. 12. gyakorlat)}} = \\
&= \langle f \circ \Phi, \partial_1\Phi \times \partial_2\Phi\rangle(u) = \langle f \circ \Phi, n_\Phi\rangle(u) \quad (u \in [0,1]^2).
\end{aligned}$$

Így

$$\omega_f \star \Phi = \underbrace{\ldots}_{\text{(vö. előadás)}} = \omega_{\langle f \circ \Phi, n_\Phi\rangle},$$

tehát

$$\boxed{\int_\Phi \omega_f} = \int_{[0,1]^2} \langle f \circ \Phi, n_\Phi\rangle = \boxed{\int_\Phi f} \quad \textbf{(felületi integrál).} \quad \blacksquare$$

Definíció. Legyen $n, r \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Az $\omega \in \Lambda^r_{k-1}(V)$ differenciálformának a $\Phi \in \mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^k, V)$ cella határára vonatkozó integrálján az

$$\int_{\partial\Phi} \omega := \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{1} (-1)^{j+s} \int_{\Phi_{js}} \omega$$

valós számot értjük. $\diamondsuit$

Feladat. Adott

$$\Phi(u,v) := \left((a+(b-a)u)\cos(2\pi v), (a+(b-a)u)\sin(2\pi v)\right) \quad \left((u,v) \in [0,1]^2;\ 0 < a < b \in \mathbb{R}\right)$$

2-cella ($\mathcal{R}_\Phi$: origó középpontú a belső sugarú, b külső sugarú körgyűrű), és

$$\omega \in \Lambda^\infty_1(\mathbb{R}^2), \quad \omega = f \cdot \Delta_2, \quad \text{ahol} \quad f(x,y) := x^3 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

Pfaff-féle differenciálforma esetén határozzzuk meg az

$$\int_{\Phi} d\omega \quad \text{és} \quad \int_{\partial\Phi} \omega$$

integrálokat!
Útm.: $n = 2$, $k = 1$, $N_*{}^1 = \{1,2\}$, így $d\omega = \partial_1 f \cdot \Delta_{(1,2)}$. Tehát

$$d\omega(x,y) = 3x^2 \cdot \Delta_{(1,2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Így

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi} d\omega &= \int_{[0,1]^2} \partial_1 f \circ \Phi \cdot \det(\Phi') = \\
&= \int_{[0,1]^2} 3 \cdot (a + (b-a)u)^2 \cdot \cos^2(2\pi v) \cdot 2\pi \cdot (b-a) \cdot (a + (b-a)u)\, d(u,v) = \\
&= 6\pi(b-a) \left(\int_0^1 (a + (b-a)u)^3\, du\right) \cdot \left(\int_0^1 \cos^2(2\pi v)\, dv\right) = \frac{3\pi\left(b^4 - a^4\right)}{4},
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Phi} \omega &= -\int_{\Phi_{10}} \omega + \int_{\Phi_{11}} \omega + \underbrace{\int_{\Phi_{20}} \omega - \int_{\Phi_{21}} \omega}_{=0} = \\
&= -\int_{[0,1]} f \circ \Phi_{10} \cdot [\Phi_{10}']_2 + \int_{[0,1]} f \circ \Phi_{11} \cdot [\Phi_{11}']_2 = \\
&= -\int_0^1 a^3 \cos^3(2\pi t) a 2\pi \cos(2\pi t)\, dt + \int_0^1 b^3 \cos^3(2\pi t) b 2\pi \cos(2\pi t)\, dt = \\
&= 2\pi(b^4 - a^4) \cdot \int_0^1 \cos^4(2\pi t)\, dt = 2\pi(b^4 - a^4) \cdot \frac{3}{8} = \frac{3\pi(b^4 - a^4)}{4}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az előző két integrál megegyezett, ui. igaz a **Poincaré-Stokes-tétel**:

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega. \quad \square$$

Feladat. Legyen $V := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Mutassuk meg, hogy az

$$\omega(x;y) := -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\cdot\Delta_1(y)+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\cdot\Delta_2(y) \qquad \big(x=(x_1,x_2)\in V,\ y\in\mathbb{R}^2\big)$$

Pfaff-féle forma esetén nincsen olyan $\eta \in \Lambda_0^\infty(V)$, amelyre $d\eta = \omega$ teljesülne!
Útm.

1. módszer Tegyük fel, hogy

$$\eta : V \to \mathbb{R}, \qquad \eta \in \mathfrak{C}^\infty$$

skalármező (többváltozós függvény) esetén

$$f\cdot\Delta_1^{2,1}+g\cdot\Delta_2^{2,1}=\omega=d\eta=\partial_1\eta\cdot\Delta_1^{2,1}+\partial_2\eta\cdot\Delta_2^{2,1},$$

azaz

$$\partial_1\eta = f \qquad \text{és} \qquad \partial_2\eta = g$$

teljesül. Így, ha valamely differenciálható $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$F(t)=\eta(\cos(t),\sin(t)) \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

akkor egyrészt F periodikus függvény, így alkalmas $\tau \in \mathbb{R}$ esetén $\max F = F(\tau)$, továbbá a láncszabály felhasználásával tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F'(t) &= \partial_1\eta(\cos(t),\sin(t))\cdot(-\sin(t))+\partial_2\eta(\cos(t),\sin(t))\cdot\cos(t) = \\ &= -f(\cos(t),\sin(t))\cdot\sin(t)+g(\cos(t),\sin(t))\cdot\cos(t) = \\ &= \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}+\frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = 1 \end{aligned}$$

adódik, ami nem lehetséges.

2. módszer Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\exists\eta \in \Lambda_0^\infty(V)\colon d\eta = \omega$, továbbá $\Phi : [0,1] \to V$ legyen tetszőleges V-beli 1-cella. Ekkor

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi d\eta \overbrace{=}^{\boxed{\text{Poincare-Stokes}}} \int_{\partial\Phi} \eta = \sum_{s=0}^{1} (-1)^{1+s} \int_{\Phi_{1s}} \eta =$$

$$= \sum_{s=0}^{1} (-1)^{1+s} \eta(\Phi_{1s}(0)) = -\eta(\Phi_{10}(0)) + \eta(\Phi_{11}(0)) =$$

$$= \eta(\Phi(1)) - \eta(\Phi(0)).$$

Ha pl.

$$\Phi(t) := (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t)) \qquad (t \in [0,1];\ r > 0),$$

akkor

$$\Phi(1) = (r\cos(2\pi), r\sin(2\pi)) = (r,0) = (r\cos(0), r\sin(0)) = \Phi(0),$$

így

$$\eta(\Phi(1)) - \eta(\Phi(0)) = 0.$$

Viszont

$$\int_\Phi \omega \neq 0$$

ui.

$$\int_\Phi \omega = \int_0^1 \left\langle \left(-\frac{r\sin(2\pi t)}{r^2}, \frac{r\cos(2\pi t)}{r^2} \right), (-2r\pi\sin(2\pi t), 2r\pi\cos(2\pi t)) \right\rangle dt =$$

$$= 2\pi \neq 0. \quad \blacksquare$$

HÁZI FELADAT. Az $\boxed{\text{M}}$ Függelék ismeretanyaga.

HÁZI FELADAT. Az $\boxed{\text{N}}$ Függelék ismeretanyaga.

1.15.2. Beadható/gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a Φ cella $\partial\Phi$ határát az alábbi esetekben!

   (a) Legyen $0 < b < a \in \mathbb{R}$, ill.

   $$\Phi(u,v) := (au\cos(2\pi v), bu\sin(2\pi v)) \quad ((u,v) \in [0,1]^2).$$

   (b) Legyen $0 < R \in \mathbb{R}$, ill. $\Phi(u,v) :=$

   $$R\sin((\pi/2)u)\cos(2\pi v), R\sin((\pi/2)u)\sin(2\pi v), R\cos((\pi/2)u))$$

   $$\left((u,v) \in [0,1]^2\right).$$

   (c) $\Phi(u,v) := (2u\cos(2\pi v), 2u\sin(2\pi v), 2u)\ \left((u,v) \in [0,1]^2\right)$.

   (d) Legyen $0 < R \in \mathbb{R}$, ill.

   $$\Phi(\rho,u,v) := (R\rho\sin(\pi u)\cos(2\pi v), R\rho\sin(\pi u)\sin(2\pi v), R\rho\cos(\pi u))$$

   $$\left((\rho,u,v) \in [0,1]^3\right).$$

   (e) Legyen $0 < r, R \in \mathbb{R}$, ill.

   $$\mathrm{Phi}(\rho,u,v) := ((R+r\rho\sin(2\pi u))\cos(2\pi v), (R+r\rho\sin(2\pi u))\sin(2\pi v), r\rho\cos(2\pi u))$$

   $$\left((\rho,u,v) \in [0,1]^3\right).$$

Útm.

(a) Φ olyan 2-cella, amelynek $\mathcal{R}_\Phi$ értékkészlete egy origó középpontú $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszislap. Φ határa:

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll}
\Phi_{10}(t) & = & \Phi(0,t) & = & (0,0), \\
\Phi_{11}(t) & = & \Phi(1,t) & = & (a\cos(2\pi t), b\sin(2\pi t)), \\
\Phi_{20}(t) & = & \Phi(t,0) & = & (at,0), \\
\Phi_{21}(t) & = & \Phi(t,1) & = & (at,0)
\end{array}\right\} \qquad (t \in [0,1]).$$

(b) Φ olyan 2-cella, amelynek $\mathcal{R}_\Phi$ értékészlete egy origó középpontú R sugarú félgömbfelület. Φ határa:

$$\partial\Phi := \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(t) & = & \Phi(0,t) & = & (0,0,R)), \\ \Phi_{11}(t) & = & \Phi(1,t) & = & (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t),0), \\ \Phi_{20}(t) & = & \Phi(t,0) & = & (R\sin((\pi/2)t),0, R\cos((\pi/2)t)), \\ \Phi_{21}(t) & = & \Phi(t,1) & = & (R\sin((\pi/2)t),0, R\cos((\pi/2)t)) \end{array}\right\} \quad (t \in [0,1]).$$

(c) Φ olyan 2-cella, amelynek $\mathcal{R}_\Phi$ értékkészlete a

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

egyenletű kúppalást $0 \le z \le 2$ közé eső része. Φ határa:

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(t) & = & \Phi(0,t) & = & (0,0,0), \\ \Phi_{11}(t) & = & \Phi(1,t) & = & (2\cos(2\pi t),2\sin(2\pi t),2), \\ \Phi_{20}(t) & = & \Phi(t,0) & = & (2t,0,2t), \\ \Phi_{21}(t) & = & \Phi(t,1) & = & (2t,0,2t) \end{array}\right\} \quad (t \in [0,1]).$$

(d) Φ olyan 3-cella, amelynek $\mathcal{R}_\Phi$ értékkészlete az origó középpontú, R sugarú gömbtest. Φ határa:

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}, \Phi_{30}, \Phi_{31}\},$$

ahol tetszőleges $(u,v) \in [0,1]^2$ esetén

$$\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(u,v) & = & \Phi(0,u,v) & = & (0,0,0), \\ \Phi_{11}(u,v) & = & \Phi(1,u,v) & = & (R\sin(\pi u)\cos(2\pi v), R\sin(\pi u)\sin(2\pi v), R\cos(\pi u)), \\ \Phi_{20}(u,v) & = & \Phi(u,0,v) & = & (0,0,Ru), \\ \Phi_{21}(u,v) & = & \Phi(u,1,v) & = & (0,0,-Ru), \\ \Phi_{30}(u,v) & = & \Phi(u,v,0) & = & (Ru\sin(\pi v),0, Ru\cos(\pi v)), \\ \Phi_{31}(u,v) & = & \Phi(u,v,1) & = & (Ru\sin(\pi v),0, Ru\cos(\pi v)). \end{array}$$

(e) Φ olyan 3-cella, amelynek $\mathcal{R}_\Phi$ értékkészlete **tóruszfelület**.Φ határa:

$$\partial\Phi = \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}, \Phi_{30}, \Phi_{31}\},$$

ahol tetszőleges $(u, v) \in [0,1]^2$ esetén

$$\begin{aligned}
\Phi_{10}(x, v) &= \Phi(0, u, v) = (R\cos(2\pi v), R\sin 2\pi v), 0),\\
\Phi_{11}(x, v) &= \Phi(1, u, v) =\\
&= ((R + r\sin(2\pi u))\cos(2\pi v), (R + r\sin(2\pi u))\sin(2\pi v), r\cos(2\pi u)),\\
\Phi_{20}(x, v) &= \Phi(u, 0, v) = (R\cos(2\pi v), R\sin(2\pi v), ru),\\
\Phi_{21}(x, v) &= \Phi(u, 1, v) = (R\cos(2\pi v), R\sin(2\pi v), ru),\\
\Phi_{30}(x, v) &= \Phi(u, v, 0) = (R + ru\sin(2\pi v), 0, ru\cos(2\pi v)),\\
\Phi_{31}(x, v) &= \Phi(u, v, 1) = (R + ru\sin(2\pi v), 0, ru\cos(2\pi v)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, valamint $\Phi \in \mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^k, V)$ és $\Psi \in \mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^k, V)$ ekvivalens sima cellák, azaz alkalmas $S : \mathbf{I}^k \to \mathbf{I}^k$ reguláris cella esetén $\Psi = \Phi \circ S$, akkor fennáll az
$$\int_\Psi \omega = \int_\Phi \omega$$
egyenlőség!
Útm. A
$$\omega \star \Phi = \Omega_\Phi \cdot \Delta^{k,k}_{(1,\dots,k)} \qquad \text{és} \qquad \omega \star \Psi = \Omega_\Psi \cdot \Delta^{k,k}_{(1,\dots,k)}$$
jelöléssel egy korábbi feladat értelmében
$$\omega \star \Psi = \omega \star (\Phi \circ S) = (\omega \star \Phi) \star S = (\Omega_\Phi \circ S) \cdot \det(S') \cdot \Delta^{k,k}_{(1,\dots,k)},$$
így
$$\int_\Psi \omega = \int_{\mathbf{I}^k} \Omega_\Psi = \int_{\mathbf{I}^k} (\Omega_\Phi \circ S) \cdot \det(S') = \int_{\mathbf{I}^k} \Omega_\Phi = \int_\Phi \omega. \quad \blacksquare$$

3. Adjon meg olyan $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ 2-cellát, amelyre
$$\mathcal{R}_\Phi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\right\},$$
majd az
$$\omega \in \Lambda^\infty_2(\mathbb{R}^3), \qquad \omega := g_1 \cdot \Delta_{(2,3)} + g_2 \cdot \Delta_{(3,1)} + g_3 \cdot \Delta_{(1,2)},$$
$$g_1(x, y, z) := xy, \quad g_2(x, y, z) := xz, \quad g_3(x, y, z) := -yz \quad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

differenciálforma esetén számítsa ki az $\int_\Phi \omega$ integrált!

Útm. Ha a $z = f(x)$, $y = 0$ egyenletű **meridiángörbét** (**profilgörbét**) megforgatjuk a z-tengely körül, akkor az így keletkező forgásfelület egyenlete:

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Az

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ponthalmaz tehát olyan forgásfelület, amely $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkezik, ahol

$$\varphi(u) := \left(u, 0, u^2\right) \qquad (u \in [0,1]).$$

Így

$$\Phi(u,v) := \left(u\cos(2\pi v), u\sin(2\pi v), u^2\right) \quad \left((u,v) \in [0,1]^2\right)$$

esetén $\mathcal{R}_\Phi = \mathcal{F}$. Mivel $n = 3$, $k = 2$, ezért

$$\int_\Phi \omega = \int_{[0,1]^2} \langle g \circ \Phi, n_\Phi \rangle, \quad \text{ahol} \quad g := (g_1, g_2, g_3).$$

Mivel bármely $(u,v) \in [0,1]^2$ esetén $[g \circ \Phi, \partial_1\Phi, \partial_2\Phi]\,(u,v) =$

$$= \det \begin{bmatrix} u^2\cos(2\pi v)\sin(2\pi v) & u^3\cos(2\pi v) & -u^3\sin(2\pi v) \\ \cos(2\pi v) & \sin(2\pi v) & 2u \\ -2\pi u\sin(2\pi v) & 2\pi u\cos(2\pi v) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -2\pi u^4\sin(2\pi v) - 4\pi u^4\sin(2\pi v)\left\{\cos^2(2\pi v) + u\cos(2\pi v)\right\},$$

ezért

$$\int_{[0,1]^2} \langle g \circ \Phi, n_\Phi \rangle = \left(\int_0^1 -2\pi u^4\,du\right)\underbrace{\left(\int_0^1 \sin(2\pi v)\,dv\right)}_{=0} +$$

$$+\left(\int_0^1 -4\pi u^4\,du\right)\underbrace{\left(\int_0^1 \ldots\,dv\right)}_{=0} = 0. \quad \blacksquare$$

4. Adott $r > 0$, ill.

$$\Phi(u,v) := (ru\cos(2\pi v), ru\sin(2\pi v)) \quad \left((u,v) \in [0,1]^2\right)$$

2-cella ($\mathcal{R}_\Phi$: origó középpontú r sugarú sugarú körlap), és

$$\omega \in \Lambda_1^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \omega = f{\cdot}\Delta_1{+}g{\cdot}\Delta_2, \quad \text{ahol} \quad f(x,y) := -x^2y, \quad g(x,y) := xy^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálforma esetén határozzzuk meg az

$$\int_\Phi d\omega \quad \text{és} \quad \int_{\partial\Phi} \omega$$

integrálokat!

Útm.: $n = 2$, $k = 1$, $N_*{}^1 = \{1,2\}$, így $d\omega = (\partial_1 g - \partial_2 f) \cdot \Delta_{(1,2)}$. Tehát

$$d\omega(x,y) = (y^2 + x^2) \cdot \Delta_{(1,2)} \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\int_\Phi d\omega &= \int_{[0,1]^2} (\partial_1 g - \partial_2 f) \circ \Phi \cdot \det[\Phi'] = \\
&= \int_{[0,1]^2} \left\{r^2u^2\sin^2(2\pi v) + r^2u^2\cos^2(2\pi v)\right\} 2\pi r^2 u \, d(u,v) = \\
&= 2\pi r^4 \int_0^1 \left(\int_0^1 u^3 \, du\right) dv = \frac{r^4\pi}{2},
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Phi} \omega &= \underbrace{-\int_{\Phi_{10}} \omega}_{=0} + \int_{\Phi_{11}} \omega + \underbrace{\int_{\Phi_{20}} \omega - \int_{\Phi_{21}} \omega}_{=0} = \int_{\Phi_{11}} \omega = \int_{[0,1]} \langle (f,g) \circ \Phi_{11} \cdot \Phi_{11}' \rangle = \\
&= \int_0^1 \left\langle \left(-r^3\cos^2(2\pi t)\sin(2\pi t), r^3\cos(2\pi t)\sin^2(2\pi t)\right), \right. \\
&\qquad \left. (-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t)) \right\rangle \, dt = \\
&= \int_0^1 4\pi r^4 \cos^2(2\pi t)\sin^2(2\pi t) \, dt = \int_0^1 \pi r^4 \sin^2(4\pi t) \, dt = \frac{r^4\pi}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. Adjunk meg olyan $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ 2-cellát, amelyre

$$\mathcal{R}_\Phi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 16, \; z \geq 0\right\},$$

majd az

$$\omega \in \Lambda_2^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad \omega := g\Delta_{(3,1)} + h\Delta_{(1,2)},$$

$$g(x,y,z) := -2z, \quad h(x,y,z) := 3y-1 \quad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

differenciálforma esetén számítsuk ki az $\int_\Phi \omega$ integrált!

Útm. A

$$\Phi(u,v) := (4\sin((\pi/2)u)\cos(2\pi v), 4\sin((\pi/2)u)\sin(2\pi v), 4\cos((\pi/2)u))$$

$$\big((u,v)\in[0,1]^2\big)$$

2-cella megfelelő paraméterezés, így mivel $n=3$, $k=2$, ezért

$$\int_\Phi \omega = \int_{[0,1]^2} \langle f\circ\Phi, n_\Phi\rangle, \quad \text{ahol} \quad f := (0,g,h).$$

Mivel

$$n_\Phi(u,v) = 4\pi^2\sin((\pi/2)u)\Phi(u,v) \qquad \big((u,v)\in[0,1]^2\big)$$

és minden $(u,v)\in[0,1]^2$ esetén

$$\begin{aligned}
\langle f\circ\Phi, n_\Phi\rangle(u,v) &= 4\pi^2\sin((\pi/2)u)\cdot\{-32\cos((\pi/2)u)\sin((\pi/2)u)\sin(2\pi v)+\\
&\quad +48\sin((\pi/2)u)\cos((\pi/2)u)\sin(2\pi v) - 4\cos((\pi/2)u)\} =\\
&= 4\pi^2\sin((\pi/2)u)\cdot\{-16\sin(\pi u)\sin(2\pi v)+24\sin(\pi u)\sin(2\pi v)-\\
&\quad -4\cos((\pi/2)u)\} =\\
&= 4\pi^2\sin((\pi/2)u)\cdot\{8\sin(\pi u)\sin(2\pi v)-4\cos((\pi/2)u)\},
\end{aligned}$$

ezért

$$\int_{[0,1]^2}\langle f\circ\Phi, n_\Phi\rangle = \left(\int_0^1 \ldots\, du\right)\underbrace{\left(\int_0^1 \sin(2\pi v)\,dv\right)}_{=0} - \int_0^1 8\pi^2\sin(\pi u)\,du = -16\pi. \quad \blacksquare$$

6. Legyen $\omega\in\Lambda_2^\infty(V)$,

$$\omega := f\cdot\Delta^{3,2}_{(2,3)} + g\cdot\Delta^{3,2}_{(3,1)} + h\cdot\Delta^{3,2}_{(1,2)},$$

ahol $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ és

$$f(r) := \frac{x}{|r|^3}, \quad g(r) := \frac{y}{|r|^3}, \quad h(r) := \frac{z}{|r|^3} \qquad (r = (x,y,z) \in V)\,.$$

Igazoljuk, hogy nincsen olyan $\eta \in \Lambda_1^\infty(V)$ differenciálforma, amelyre $d\eta = \omega$ teljesülne!

Útm. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\exists \eta \in \Lambda_1^\infty(V)$: $d\eta = \omega$, továbbá $\Phi : [0,1] \to V$ legyen tetszőleges V-beli 2-cella. Ekkor

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi d\eta \overbrace{=}^{\boxed{\text{Poincare-Stokes}}} \int_{\partial\Phi} \eta.$$

Ha pl. $0 < R \in \mathbb{R}$, ill.

$$\Phi(u,v) := (R\sin(\pi u)\cos(2\pi v), R\sin(\pi u)\sin(2\pi v), R\cos(\pi u)) \qquad ((u,v) \in [0,1]^2)$$

($\mathcal{R}_\Phi$: origó középpontú, R sugarú gömbfelület), akkor Φ határa:

$$\partial\Phi := \{\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\},$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lllll} \Phi_{10}(t) & = & \Phi(0,t) & = & (0,0,R)), \\ \Phi_{11}(t) & = & \Phi(1,t) & = & (0,0,-R), \\ \Phi_{20}(t) & = & \Phi(t,0) & = & (R\sin(\pi t),0,R\cos(\pi t)), \\ \Phi_{21}(t) & = & \Phi(t,1) & = & (R\sin(\pi t),0,R\cos(\pi t)) \end{array}\right\} \qquad (t \in [0,1]).$$

Így tehát

$$\int_{\partial\Phi} \eta = -\int_{\Phi_{10}} \eta + \int_{\Phi_{11}} \eta + \int_{\Phi_{20}} \eta - \int_{\Phi_{21}} \eta = 0.$$

Viszont, ha $F := (f,g,h)$, azaz

$$F(r) = \frac{r}{|r|^3} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3),$$

akkor

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi F = \int_{[0,1]^2} \langle F \circ \Phi, n_\Phi \rangle = 4R^2\pi,$$

hiszen

$$n_\Phi(u,v) = 2\pi^2 R^2 \sin(\pi u) \cdot \Phi(u,v) \qquad ((u,v) \in [0,1]^2),$$

ezért

$$\|n_\Phi(u,v)\|_2 = 2\pi^2 R\sin(\pi u)|\Psi(u,v)| = 2\pi R^2\sin(\pi u) \qquad ((u,v)\in[0,1]^2),$$

így

$$\int_{[0,1]^2}\langle F\circ\Phi, n_\Phi\rangle = \int_{[0,1]^2} 2\pi^2R^2\sin(\pi u)\,d(u,v) = 2\pi^2R^2\left[\frac{-\cos(\pi u)}{\pi}\right]_0^1 = 4R^2\pi. \quad \blacksquare$$

7. Mutassuk meg, hogy a Newton-Leibniz-formula és a klasszikus integrálátalakító tételek a Poincaré-Stokes-tétel speciális esetei!
Útm. Ha

- $\boxed{k=1}$, akkor

$$\omega\in\Lambda_0^r(V)=\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}), \qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1],V),$$

azaz ha

$$f\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}), \qquad \omega:=\omega_f,$$

akkor $d\omega=\omega_{\mathrm{grad}(f)}$, így

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega_{\mathrm{grad}(f)} &= \int_\Phi d\omega \overbrace{=}^{\text{P-S}} \int_{\partial\Phi}\omega = \sum_{s=0}^1(-1)^{1+s}\int_{\Phi_{1s}}\omega = \sum_{s=0}^1(-1)^{1+s}\omega(\Phi_{1s}(0))\\ &= \sum_{s=0}^1(-1)^{1+s}\omega(\Phi(s)) = \omega(\Phi(1))-\omega(\Phi(0)),\end{aligned}$$

azaz

$$\boxed{\int_\Phi \mathrm{grad}(f) = f(\Phi(1))-f(\Phi(0))}$$

(vonalintegrálra vonatkozó **Newton-Leibniz-formula**).

- $\boxed{n=2,\ k=2}$, akkor

$$\omega\in\Lambda_1^r(V), \qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^2,V)$$

(valamely V-beli síkidom paraméterezése), azaz ha

$$f=(f_1,f_2)\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}^2),\quad \omega:=\omega_f=f_1\Delta_1+f_2\Delta_2,\quad \text{akkor}\quad d\omega=\omega_{\partial_1 f_2-\partial_2 f_1},$$

így reguláris Φ esetén

$$\boxed{\int_{\mathcal{R}_\Phi}(\partial_1 f_2-\partial_2 f_1)=}\int_\Phi \partial_1\widetilde{f_2-\partial_2}f_1=\int_\Phi d\widetilde{f}\overset{\text{P-S}}{\overbrace{=}}\int_{\partial\Phi}\widetilde{f}=\boxed{\int_{\partial\Phi} f}\quad(\textbf{Green-tétel}).$$

- $\boxed{n=3,\ k=2}$, akkor

$$\omega\in\Lambda_1^r(V),\qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^2,V)$$

($\mathcal{R}_\Phi$ felület), azaz ha

$$f=(f_1,f_2,f_3)\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}^3),\quad \omega:=\omega_f=f_1\Delta_1+f_2\Delta_2+f_3\Delta_3,\quad \text{akkor}\quad d\omega=\omega_{\mathrm{rot}(f)},$$

és

$$\boxed{\int_\Phi \mathrm{rot}(f)=}\int_\Phi \omega_{\mathrm{rot}(f)}=\int_\Phi d\omega\overset{\text{P-S}}{\overbrace{=}}\int_{\partial\Phi}\widetilde{f}=\boxed{\int_{\partial\Phi} f}\quad(\textbf{Stokes-tétel}).$$

- $\boxed{n=3,\ k=3}$, akkor

$$\omega\in\Lambda_2^r(V),\qquad \Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}([0,1]^3,V)$$

(valamely V-beli test paraméterezése), azaz ha

$$f=(f_1,f_2,f_3)\in\mathfrak{C}^r(V,\mathbb{R}^3),\quad \omega:=\omega_f=f_1\Delta_{(2,3)}+f_2\Delta_{(3,1)}+f_3\Delta_{(1,2)},$$

akkor $d\omega=\omega_{\mathrm{div}(f)}$, így reguláris Φ esetén

$$\boxed{\int_{\mathcal{R}_\Phi}\mathrm{div}(f)=}\int_\Phi \omega\mathrm{div}(f)=\int_\Phi d\omega\overset{\text{P-S}}{\overbrace{=}}\int_{\partial\Phi}\omega=\boxed{\int_{\partial\Phi} f}\quad(\textbf{Gauß-tétel}).\quad\blacksquare$$

8. Legyen $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\emptyset\neq V\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $\omega\in\Lambda_k^r(V)$, ill. $f\in\Lambda_0^r(V)$. Igazoljuk, hogy ekkor tetszőleges $\Phi\in\mathfrak{C}^{r+1}(\mathbf{I}^{k+1},V)$ cella esetén fennáll az

$$\boxed{\int_\Phi f\,d\omega=\int_{\partial\Phi} f\cdot\omega-\int_\Phi(df)\wedge\omega}$$

egyenlőség!

Útm. A Poincaré-Stokes-tétel, a diferenciálformák szorztának deriváltjára vonatkozó formula, illetve a d operátor lineáris voltának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_{\partial\Phi} f\cdot\omega=\int_{\Phi} d(f\cdot\omega)=\int_{\Phi}((df)\wedge\omega+f\cdot(d\omega))=\int_{\Phi}(df)\wedge\omega+\int_{\Phi}f\cdot(d\omega).$$

Megjegyzés. Legyen $n:=1$, $k:=0$, azaz $V\subset\mathbb{R}$ nyílt, $\omega\in\Lambda_0^r(V)$ $/\omega:V\to\mathbb{R},\ \ \omega\in\mathfrak{C}^r/$. Ekkor a

$$\Phi(t):=t\qquad(t\in[0,1])$$

cellával

$$\int_{\partial\Phi} f\cdot\omega=(f\cdot\omega)(\Phi(1))-(f\cdot\omega)(\Phi(0))=f(1)\omega(1)-f(0)\omega(0)=[f(x)\cdot\omega(x)]_0^1,$$

$$\int_{\Phi}(df)\wedge\omega=\int_{\Phi}(f'\omega\Delta_1^{1,1})=\int_0^1 f'\omega,$$

továbbá

$$\int_{\Phi} f\cdot(d\omega)=\int_{\Phi}(f\omega'\Delta_1^{1,1})=\int_0^1 f\omega',$$

azaz

$$\int_0^1 f\omega'=[f(x)\cdot\omega(x)]_0^1-\int_0^1 f\omega'$$

(**parciális integrálás**). ■

9. Legyen $V:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u>0\right\}$ és

$$f(x,y):=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad g(x,y):=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad((x,y)\in V).$$

Mutassuk meg, hogy az

$$\omega\in\Lambda_1^\infty(V),\qquad \omega:=f\cdot\Delta_1^{2,1}+g\cdot\Delta_2^{2,1}$$

Pfaff-féle forma esetén van olyan $\eta\in\Lambda_0^\infty(V)$, amelyre $d\eta=\omega$ teljesül!

Útm. Ha pl.

$$\eta:V\to\mathbb{R},\qquad \eta(x,y):=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi,$$

akkor bármely $(x,y)\in V$ esetén

$$d\eta(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\Delta_1^{2,1}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\Delta_2^{2,1}=f(x,y)\cdot\Delta_1^{2,1}+g(x,y)\cdot\Delta_2^{2,1}=\omega(x,y).\quad ■$$

10. Legyen $V := \mathbb{R}^2$ és
$$f, g : V \to \mathbb{R} : \qquad f, g \in \mathfrak{C}^1.$$
Mutassuk meg, hogy ha az
$$\omega \in \Lambda_1^1(V), \qquad \omega := f \cdot \Delta_1^{2,1} + g \cdot \Delta_2^{2,1}$$
Pfaff-féle differenciálformára $d\omega = 0 \in \Lambda_2^0(V)$, akkor alkalmas $\eta \in \Lambda_0^2(V)$ differenciálforma esetén $d\eta = \omega$ teljesül (vö. **egzakt differenciálegyenlet**)!
Útm. Mivel
$$\Lambda_2^1(V) \ni 0 = d\omega = (\partial_1 g - \partial_2 f) \cdot \Delta_{(1,2)}^{2,2},$$
azaz $\partial_2 f = \partial_1 g$, ezért, ha
$$h : V \to \mathbb{R}, \qquad \eta(x, y) := \int_0^x f(t,0)\,dt + \int_0^y g(x, t)\,dt,$$
akkor bármely $(x, y) \in V$ esetén
$$\begin{aligned} \partial_1\eta(x, y) &= f(x,0) + \int_0^y \partial_1 g(x, t)\,dt = f(x,0) + \int_0^y \partial_2 f(x, t)\,dt = \\ &= f(x,0) + [f(x, t)]_{t=0}^{t=y} = f(x,0) + f(x, y) - f(x, y) = \\ &= f(x, y), \end{aligned}$$
és hasonlóan
$$\partial_2\eta(x, y) = g(x, y).$$
Ez azt jelenti, hogy $d\eta = \omega$. ■

11. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, ill. $\omega \in \mathfrak{C}_1^0(I)$. Mutassuk meg, hogy van olyan $\eta \in \Lambda_0^1(I)$ differenciálforma, amelyre $d\eta = \omega$ teljesül!
Útm. Mivel alkalamas $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$ függvény esetén $\omega = f dx_1$, ezért ha $a \in I$, akkor az
$$\eta(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in I)$$
integrálfüggvényre (differenciálformára)
$$d\eta = \eta' dx_1 = f dx_1 = \omega. \quad ■$$

2. fejezet

Függelék

2.1. $\boxed{\text{A}}$

Elemi geometria

Vektorok

Ebben a szakaszban legyen $d, m \in \mathbb{N}$.

1. **Vektorok (lineáris) függetlensége/összefüggősége.**
   Az $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^d$ vektorok

   - **(lineárisan) összefüggők**, ha van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, amelyre

     $$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_m| > 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0 \in \mathbb{R}^d;$$

   - **(lineárisan) függetlenek**, ha nem lineárisan összefüggők, azaz

     $$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0 \in \mathbb{R}^d \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

   Ha $m > d$, akkor az $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^d$ vektorok lineárisan összefüggők.

Példák.

(a) $d = 2$ esetén az

$$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

vektorok

$$\text{lineárisan összefüggők (kollineárisak)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = 0;$$

(b) $d = 3$ esetén az

$$a = (a_1, a_2, a_3), \qquad b = (b_1, b_2, b_3), \qquad c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

vektorok

$$\text{lineárisan összefüggők (komplanárisak)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Az $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}^d$ vektorok **bázis**t alkotnak, ha lineárisan függetlenek. Ekkor minden $a \in \mathbb{R}^d$ vektorhoz egyértelműen van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, hogy

$$a = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k x_k.$$

Példa. Az

$$e_1 := (1,0,\ldots,0), \qquad e_2 := (0,1,\ldots,0), \qquad \ldots, \qquad e_d := (0,0,\ldots,1)$$

vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^d$-ben (**kanonikus bázis**).
$d = 3$ esetén szokás az

$$e_1 =: i, \qquad e_2 =: j, \qquad e_3 =: k$$

jelölés.

2. **Vektorok szorzása.**
Az $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ vektorok **skaláris szorzat**a az

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^{d} a_k b_k$$

szám. Pl. az $F \in \mathbb{R}^3$ erőnek az a W **munkája**, amelynek eredményeként valamely anyagi pont (pontszerűnek tekinthető test) $s \in \mathbb{R}^3$ elmozdulást végez az F erő hatása alatt, az F és az s vektorok skaláris szorzatával egyenlő:

$$W = \langle F, s \rangle.$$

Az $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ vektorok **vektoriális szorzata** az

$$x_1 \times \ldots \times x_m := \sum_{k=1}^{m} \det[e_k, x_1, \ldots, x_m] e_k$$

vektor, ahol

$$[e_k, x_1, \ldots, x_m]$$

jelöli azt a mátrixot, amelynek sorai rendre $e_k, x_1, \ldots, x_m$ komponensei.
Az $m = 2$ speciális esetben az

$$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{és a} \qquad b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

vektorok vektoriális szorzata a következő módon számítható:

$$\boxed{a \times b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k = \boxed{\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}}.$$

Például.

- a B indukciójú mágneses térben v sebességgel mozgó, q töltésre ható erő (mágneses) **Lorentz-erő**:
$$F = \frac{q}{c}(v \times B),$$
ahol $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ a fény sebessége vákuumban.
- árammal átjárt lemez alakú vezetőt B indukciójú mágneses térbe helyezve a vezető két oldalán potenciálkülönbség lesz (**Hall-effektus**). A kialakuló térerősség arányos a mágneses indukció és az **áramsűrűség**[1] vektoriális szorzatával:
$$E = c_H (B \times j),$$

[1] Az áramsűrűség vektormennyiség, amelynek iránya valamely vezető adott pontjában megegyezik az áram irányával (negatív töltések áramlásáéval ellentétes irány), nagysága pedig az áramerősség.

ahol c_H a töltéshordozók n koncentrációjától és q töltésétől függő ún. Hall-állandó ($c_H = 1/qn$).

- a B indukciójú, E térerősségű elektromágneses mező esetében az energiaterjedés irányára merőleges egységnyi területen időegység alatt átáramló energia (**teljesítménysűrűség**):

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B \qquad \textbf{(Poynting-vektor).}$$

- valamely testet az r helyvektorú pontban támadó F erő **forgatónyomaték**a:

$$M = F \times r.$$

Az $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ vektorok **vegyes szorzat**a az

$$[a, b, c] := \langle a \times b, c \rangle = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

valós szám, ill. az $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektorok **diadikus (tenzoriális) szorzat**a az

$$a \circ b := \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

mátrix.

3. **Vektorok hossza, szöge.**
   Az $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor **hossz**a (euklideszi normája):

$$|x| := \sqrt{x^2} := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}\,.$$

$e \in \mathbb{R}^d$ **egységvektor**, ha $|e| = 1$.

Tetszőleges $0 \neq a \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$e_a := \frac{1}{|a|} \cdot a$$

vektor egységvektor: a**-irányú egységvektor**.

Az $a, b \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ vektorok

- **szöge** a következőképpen számítható:

$$\cos(a,b)=\frac{\langle a,b\rangle}{|a|\cdot|b|},\qquad \text{ill.}\qquad \sin(a,b)=\frac{|a\times b|}{|a|\cdot|b|}.$$

- **merőlegesek (ortogonálisak)**, ha skaláris szorzatuk 0:

$$a\perp b\quad :\Longleftrightarrow\quad \langle a,b\rangle=0.$$

- **párhuzamosak**, ha vektoriális szorzatuk $0\in\mathbb{R}^3$:

$$a\parallel b\quad :\Longleftrightarrow\quad a\times b=0\in\mathbb{R}^3.$$

4. **A vektorszorzatok legfontosabb tulajdonságai.**
Tetszőleges $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{R}^3$ vektor és $\alpha\in\mathbb{R}$ szám esetén

(a) **Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**:

$$|\langle a,b\rangle|\le|a|\cdot|b|,\qquad \text{ill.}\qquad |a\times b|\le|a|\cdot|b|,$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|a|\cdot|b|=0$ vagy ha $a\parallel b$, ill. ha $a\perp b$;

(b) $\langle a\times b,a\rangle=\langle a\times b,b\rangle=0$, sőt ha $a\nparallel b$, akkor a, b és $a\times b$, ebben a sorrendben, **jobbrendszer**t alkot[2];

(c) $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle,\quad a\times b=-b\times a$;

(d) $\alpha\langle a,b\rangle=\langle\alpha a,b\rangle=\langle a,\alpha b\rangle,\qquad \alpha(a\times b)=(\alpha a)\times b=a\times(\alpha b)$;
$\alpha(a\circ b)=(\alpha a)\circ b=a\circ(\alpha b)$;

(e) $\langle a,b+c\rangle=\langle a,b\rangle+\langle a,c\rangle,\quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

(f) $a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle\,b-\langle a,b\rangle\,c$, ill. $(a\times b)\times c=\langle a,c\rangle b-\langle b,c\rangle a$
(**kifejtési tétel**);

(g) $[a,b,c]=[b,c,a]=[c,a,b]=-[a,c,b]=-[b,a,c]=-[c,b,a]$
(a vegyes szorzat előjele két tényező felcserélésével megváltozik, mindhárom tényező ciklikus felcserélése esetén változatlan marad);

[2] $a\times b$ irányából nézve az a iránya az óramutató járásával ellenkező és π szögnél kisebb forgatásával a b irányába forgatható. Általában azt mondjuk, hogy az $a_1,\ldots,a_d\in\mathbb{R}^d$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ha a belőlük alkotott $[a_1,\ldots,a_d]$ mátrix determinánsára $\det[a_1,\ldots,a_d]>0$ teljesül.

(h) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle \cdot \langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle \cdot \langle a, d\rangle$ (**Lagrange-azonosság**);

(i) $[a, b, c] \cdot [e, f, g] = \det \begin{bmatrix} \langle a, e\rangle & \langle a, f\rangle & \langle a, g\rangle \\ \langle b, e\rangle & \langle b, f\rangle & \langle b, g\rangle \\ \langle c, e\rangle & \langle c, f\rangle & \langle c, g\rangle \end{bmatrix}$;

(j) $a \circ b = (b \circ a)^T$;

(k) $(a \circ b)r = \langle b, r\rangle\, a$ $(r \in \mathbb{R}^3)$; $\mathrm{Sp}(a \circ b) = \langle a, b\rangle$;

(l) ha $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, akkor

$$\langle Ar, s\rangle = \langle r, A^T s\rangle \qquad (r, s \in \mathbb{R}^d);$$

(m) Az $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix **szimmetrikus**, ill. **antiszimmetrikus**, ha $M^T = M$, ill. $M^T = -M$. Speciálisan $d = 3$ esetén alkalmas $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$ számokkal

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Minden $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus

$$S_M := \frac{1}{2}\left(M + M^T\right), \qquad A_M := \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$$

mátrix összege: $S_M + A_M = M$. S_M-et, ill. A_M-et M **szimmetrikus**, ill. **antiszimmetrikus részének** nevezzük.

(n) minden antiszimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixhoz van olyan $w \in \mathbb{R}^3$ vektor, hogy

$$Mr = w \times r \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$

ui. ekkor

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^3 \det(M) = -\det(M),$$

azaz $\det(M) = 0$; ezért ha $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ jelöli az M mátrix 0 sajátértékéhez tartozó sajátvektorát, akkor az

$$Mw = \begin{bmatrix} 0 & a & \boxed{b} \\ \boxed{-a} & 0 & c \\ -b & \boxed{-c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletből

$$w_1 = -c, \qquad w_2 = b, \qquad w_3 = -a, \tag{2.1}$$

és erre a w vektorra:

$$w \times r = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -c & b & -a \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bz + ay \\ cz - ax \\ -cy - bx \end{bmatrix} = Mr,$$

ahol $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(o) minden $w \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz van olyan antiszimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, hogy

$$Mr = w \times r \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$

ui. ha M ilyen mátrix, akkor az

$$r = xe_1 + ye_2 + ze_3 \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

vektorra

$$Mr = x(Me_1) + y(Me_2) + z(Me_3)$$

és

$$Me_1 = w \times e_1 = w_3e_2 - w_2e_3, \qquad Me_2 = w_1e_3 - w_3e_1, \qquad Me_3 = w_2e_1 - w_1e_2,$$

így ha

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

akkor bármely $r \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$Mr = w \times r.$$

5. **Vektorszorzatok geometriai jelentése.**
Az $a, b, c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektorok esetén a skaláris, a vektoriális és a vegyes szorzat geometriai jelentése a következő:

- a felbontható b-vel párhuzamos és egy arra merőleges összetevőre:
  $a = a_p + a_m$: $\qquad a_p := \langle a, e_b \rangle e_b, \qquad a_m := a - a_p$; [3]
- $|a \times b|$: a és b által kifeszített paralelogramma területe.
- $|[a, b, c]|$: az a, b és c által kifeszített paralelepipedon térfogata.

[3] Ha $a \neq b$, akkor $a_m = (e_b \times a) \times e_b$.

Egyenesek

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^3$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$. Ekkor az a **pontra illeszkedő,** v **irányvektorú egyenes** az

$$\mathcal{E}_a^v := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; x = a + tv \;\; (t \in \mathbb{R})\right\}$$

ponthalmaz.

Tetszőleges $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$r \in \mathcal{E}_a^v \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a_1 + tv_1 \\ y &=& a_2 + tv_2 \\ z &=& a_3 + tv_3 \end{array}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(az $\mathcal{E}_a^v$ **egyenes paraméteres egyenletrendszere**).
Ha $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \neq 0$, akkor $\mathcal{E}_a^v$ **irányvektoros egyenletrendszere**:

$$\boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}}.$$

2. Ha $p := (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor a $\mathsf{P}(p)$ pontnak az $\mathcal{E}_a^v$ egyenestől való távolsága:

$$d = \frac{|(p - a) \times v|}{|v|}.$$

3. Az $\mathcal{E}_a^u$ és az $\mathcal{E}_b^v$ egyenesek távolsága:

$$d = \begin{cases} \dfrac{|(a - b) \times v|}{|v|} & \left(u \times v = 0 \in \mathbb{R}^3\right) \quad \text{(párhuzamos egyenesek)}, \\[2ex] \dfrac{|\,[(a - b), u, v]\,|}{|u \times v|} & \left(u \times v \neq 0 \in \mathbb{R}^3\right) \quad \text{(kitérő egyenesek)}. \end{cases}$$

Síkok

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Ekkor az a **pontra illeszkedő,** n **normálvektorú sík** az

$$\mathcal{S}_a^n := \left\{r \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \langle r - a, n\rangle = 0\right\}$$

ponthalmaz.

Tetszőleges $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$r \in \mathcal{S}_a^n \iff \boxed{xn_1 + yn_2 + zn_3 = a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3}$$

(az $\mathcal{S}_a^n$-sík egyenlete), ill. az

$$n = (n_1, n_2, n_3) =: (A, B, C) \quad \text{és} \quad a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 =: -D$$

jelöléssel

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}\,.$$

2. Ha

$$p_1 := (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, \quad p_2 := (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3, \quad p_3 := (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$$

és a $P_1(p_1)$, $P_2(p_2)$, $P_3(p_3)$ pontok nincsenek egy egyenesen, akkor a rájuk illeszkedő sík egyenlete:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Speciálisan $a \cdot b \cdot c \neq 0$ esetén az

$$\left(\frac{1}{a},0,0\right), \qquad \left(0,\frac{1}{b},0\right), \qquad \left(0,0,\frac{1}{c}\right)$$

koordinátájú pontokra illeszkedő sík egyenlete:

$$\boxed{ax + by + cz = 1}\,.$$

3. Ha $p := (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor a $P(p)$ pontnak az $\mathcal{S}_a^n$ síktól való távolsága:

$$d = \frac{|\langle p - a, n\rangle|}{|n|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Kúpszeletek

1. Legyen $\epsilon, p \in \mathbb{R}$: $\epsilon \geq 0$, $p > 0$. Ekkor a

$$\mathcal{K} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = (\epsilon x + p)^2\right\} \tag{2.3}$$

ponthalmazt **kúpszelet**nek nevezzük:

- $\epsilon < 1$ esetén **ellipszis**nek (az $\epsilon = 0$ speciális esetben **kör**nek);
- $\epsilon > 1$ esetén **hiperbolának**;
- $\epsilon = 1$ esetén **parabolának**.

2. Az (r, φ) polárkoordináták[4] bevezetésével

$$\mathcal{K} = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ r = \frac{p}{\pm 1 - \epsilon\cos(\varphi)}\right\}.$$

3.
- $\epsilon < 1$ esetén az $a := p/(1-\epsilon^2)$, $c := \epsilon a$, $b := \sqrt{ap}$ jelölések[5] bevezetésével és $\xi := x + c$, $\eta := y$ (2.3)-ba való helyettesítésével:

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} := \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1\right\};$$

- $\epsilon > 1$ esetén az $a := p/(\epsilon^2 - 1)$, $c := \epsilon a$, $b := \sqrt{ap}$ jelölések bevezetésével és $\xi := x - c$, $\eta := y$ (2.3)-ba való helyettesítésével:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} := \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1\right\};$$

- $\epsilon = 1$ esetén $\xi := x - \dfrac{p}{2}$, $\eta := y$ (2.3)-ba való helyettesítésével:

$$\mathcal{K} = \mathcal{P} := \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 :\ \eta^2 = 2p\xi\right\}.$$

[4] $x =: r\cos(\varphi)$, $y =: r\sin(\varphi)$ $(0 \leq r \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0,2\pi))$.

[5] p**: paraméter**, ϵ**: numerikus excentricitás**, c: **lineáris excentricitás** (a **fókusz**ok féltávolsága), a: **fél nagytengely**, b: **fél kistengely**.

Tükrözés és forgatás

Ha $a \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, akkor tetszőleges $r \in \mathbb{R}^3$ vektornak az $\mathcal{S}_a^n$ síkra vonatkozó tükörképe:

$$T(r) := r - 2\langle r, n\rangle n.$$

Az $r \in \mathbb{R}^2$ vektornak az origó körüli ϑ-szöggel történő elforgatottja:

$$F(r) := \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} r = (\cos(\vartheta))r + (\sin(\vartheta))r^{\perp},$$

ahol $r^{\perp}$ az r vektor $\pi/2$ szöggel történő elforgatásával keletkezik[6].

Az $r \in \mathbb{R}^3$ vektornak a $t \in \mathbb{R}^3$: $|t| = 1$ irányvektorú tengely körüli ϑ-szöggel történő elforgatottja:

$$F(r) := (\cos(\vartheta))r + (1 - \cos(\vartheta))\langle r, t\rangle t + \sin(\vartheta) t \times r, \tag{2.4}$$

ui. ha felbontjuk az r vektort a tengelyre párhuzamos és egy arra merőleges komponensre:

$$r = r_t + (r - r_t) \qquad /r_t = \langle r, t\rangle t/\,,$$

akkor a forgatás során az r_t vektor helyben marad, az $s := r - r_t$ vektorból pedig

$$(\cos(\vartheta))s + (\sin(\vartheta))\hat{s}$$

lesz, ahol most $\hat{s} := s^{\perp} := t \times s$. Speciálisan, ha

1. $t = i$, akkor
$$F(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} r \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$
2. $t = j$, akkor
$$F(r) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} r \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$
3. $t = k$, akkor
$$F(r) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

[6] Ha $r = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, akkor $r^{\perp} := (-y, x)$.

Lineáris leképezések, mátrixok

Az alábbiakban legyenek X és Y lineáris terek ($\mathbb{K}$-ra vonatkozóan).
$\mathcal{L}(X, Y)$ jelöli az X-et az Y-ba képező **lineáris leképezés**ek halmazát:

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{f : X \to Y : \ f(\alpha r + \beta s) = \alpha f(r) + \beta f(s) \ (\alpha, \beta \in \mathbb{K}, r, s \in X)\}.$$

Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{b_1, \ldots, b_n\}$ vektorrendszer bázisa X-nek, akkor tetszőleges $x \in X$ esetén egyértelműen van olyan $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, hogy

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \quad \text{és így} \quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i),$$

ami azt jelenti, hogy ha X véges dimenziós, akkor f helyettesítési értékét elegendő valamely bázison ismerni.

A duális tér. Adott X lineáris tér esetén az

$$X' := \{f : X \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ lineáris}\} = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

vektorteret X **(algebrai) duális**ának, az X' duális tér elemeit pedig **lineáris funkcionál**oknak nevezzük. Sok esetben – különösen fizikai alkalmazásokban – szokás X'-t **lineáris formák** vagy **kovektor**ok tereként emlegetni, X elemeire a „ket-vektor”, X' elemeire pedig a „bra-vektor” elnevezést használni, és tetszőleges $f \in X'$ és $x \in X$ esetén az $f(x)$ helyettesítési értéket az $\langle f, x\rangle$, ill. $\langle f|x\rangle$ („bracket”) jelsorozattal jelölni. Könnyen belátható, hogy X' lineáris tér, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_1, \ldots, b_n$ bázis X-ben, akkor a $b^1, \ldots, b^n$,

$$b^j(b_i) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ & \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

definícióval értelmezett leképezések bázist alkotnak X'-ben (**duális bázis**). Ez azt jelenti, hogy bármely $f \in X'$ esetén van olyan $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ szám n-es, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i.$$

Ennek következtében X és X' dimenziója megegyezik. Belátható, hogy a

$$\psi : X \to (X')', \qquad (\psi(x))(f) := f(x)$$

leképezés bijekció. Így ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bázis X'-ben, akkor van olyan $b_1, \dots, b_n$ bázis X-ben, hogy bármely $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\varphi_i(b_j) = \delta_{ij}$ teljesül. Ha ui. $w_1, \dots, w_n$ jelöli a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bázis duálisát $(X')'$-ben, akkor könnyen belátható, hogy a

$$b_i := \psi^{-1}(w_i) \qquad (i \in \{1, \dots, n\}$$

módon definiált vektorrendszer bázis X-ben.

Azt mondjuk, hogy az X vektortér Y altere az $Y_1, \dots, Y_k$ **alterek direkt összege**:

$$Y =: Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_k =: \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i,$$

ha Y minden y eleme egyértelműen áll elő $y = \sum_{i=1}^{k} y_i$ alakban, ahol $y_i \in Y_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$. Ha X véges dimenziós és X az $Y_1, \dots, Y_k$ altereinek direkt összege: $X = \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i$, akkor

$$\dim(X) = \sum_{i=1}^{k} \dim(Y_i).$$

A továbbiakban legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér.

Ha $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, akkor az alábbi állítások egyenértékűek:

$$A \in \mathfrak{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \mathfrak{C}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, 0 < K \in \mathbb{R}: \ \|A(r)\|_Y \le K\|r\|_X \quad (r \in X).$$

Az $A : X \to Y$ lineáris leképezés tehát pontosan akkor folytonos, ha az előbbi értelemben korlátos. Ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $X := \mathbb{K}^n$, $Y := \mathbb{K}^m$, akkor $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ pontosan abban az esetben teljesül, ha van olyan $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mátrix[7], hogy

$$A(r) = Mr \qquad (r \in X).$$

[7] Ezt a mátrixot a következőképpen kaphatjuk meg: ha valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $i \in \{1, \dots, d\}$ és

$$P_i(r) := x_i \qquad (r = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d),$$

(i-edik **projekció** (vetítés)) és $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, akkor

$$M := [M_{ij}], \quad M_{ij} := P_i(A(e_j)) \quad (i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}).$$

Ebben az esetben A korlátos is.

Ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$ jelöli az $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix oszlopvektorait, akkor pontosan egy olyan

$$\delta : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

leképezés van, amelyre

- δ **n-lineáris**, azaz tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ és tetszőleges $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ ($\mathbb{K}^n$-beli) vektorok esetén a

  $$\delta : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \qquad u \mapsto \delta(a_1, \ldots, a_{i-1}, u, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

  leképezés lineáris, azaz bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ill. $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

  $$\delta(a_1, \ldots, \alpha x_i + \beta y_i, \ldots, a_n) = \alpha\delta(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) + \beta\delta(a_1, \ldots, y_i, \ldots, a_n);$$

- δ **szimmetrikus** vagy **alternáló**, azaz bármely $i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $i < j$ és $a_1, \ldots, a_n \in$ $\in \mathbb{K}^n$ esetén

  $$\delta(a_1, \ldots, a_n) = -\delta(b_1, \ldots, b_n), \qquad \text{vagy} \qquad \delta(a_1, \ldots, a_n) = \delta(b_1, \ldots, b_n)$$

  ahol

  $$b_l := \begin{cases} a_l & (l \notin \{i, j\}), \\ a_i & (l = j), \\ a_j & (l = i); \end{cases}$$

- $\delta(\mathbb{E}_n) = 1$, ahol $\mathbb{E}_n$ jelöli az $(n \times n)$-es **egységmátrix**ot:

  $$\mathbb{E}_n := [\delta_{ij}]_{i,j=1}^{n,n}, \qquad \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

Ha a fenti δ leképezés

- szimmetrikus, úgy a

  $$\delta(M) =: \operatorname{perm}(M)$$

  szám az M mátrix **permanense**;

- alternáló, úgy a
$$\delta(M) =: \det(M)$$
szám az M mátrix **determinánsa**.

Adott $p \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{S}_p$-vel jelöljük az $\{1, \ldots, p\}$ halmaz **permutáció**inak halmazát:

$$\mathfrak{S}_p := \{\pi : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p\},\ \pi \text{ bijektív}\}$$

(p-edrendű **szimmetrikus csoport**). π-re használatos a következő jelölés is:

$$\pi =: \begin{bmatrix} 1 & \ldots & p \\ \pi(1) & \ldots & \pi(p) \end{bmatrix} =: [\pi(1) \ldots \pi(p)] \,.$$

A $\pi \in \mathfrak{S}_p$ permutáció **paritás**ának nevezzük a

$$\operatorname{sgn}(\pi) := \prod_{1 \leq k < l \leq p} \frac{\pi(k) - \pi(l)}{k - l} = \det\left[e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(p)}\right] \in \{-1, 1\}$$

számot. Tetszőleges $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_p$ esetén

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

A $\tau \in \mathfrak{S}_p$ permutációt **transzpozíció**nak nevezzük, ha

- $\exists\, k, l \in \{1, \ldots, p\}, k \neq l :$
$$\tau(k) = l,\ \tau(l) = k,$$
- $\forall\, s \in \{1, \ldots, p\} \backslash \{k, l\}$:
$$\tau(s) = s.$$

Ezt a permutációt pedig így jelöljük:

$$\tau =: (kl) := \begin{bmatrix} k & l \\ l & k \end{bmatrix}.$$

Világos, hogy minden $\tau \in \mathfrak{S}_p$ transzpozíció paritására $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Az $\mathrm{id} \in \mathfrak{S}_1$ kivételével minden permutáció felírható transzpozíciók kompozíciójaként, így

$$\sigma := \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_\nu := \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_\nu \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^\nu.$$

Minden τ transzpozíció felírható páratlan sok

$$\tau_i := (i i+1) = \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{bmatrix} \quad (i \in \{1, \ldots, p-1\})$$

típusú transzpozíció (szomszédcsere) kompozíciójaként.[8]

Ha $M = [M_{ij}]_{i,j=1}^{n,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor M permanensére, ill. determinánsára

$$\boxed{\operatorname{perm}(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} M_{k\sigma(k)}}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M_{k\sigma(k)}}.$$

A fenti δ függvény igen fontos tulajdonsága a következő: ha $\alpha \in \mathbb{K}$ és $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor

- $\det(\alpha M) = \alpha^n \det(M)$;
- $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$;
- $\operatorname{perm}(M^T) = \operatorname{perm}(M)$, ill. $\det(M^T) = \det(M)$.

Így pl. ha M antiszimmetrikus, akkor $\det(M) = 0$, hiszen

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^3 \det(M).$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $N := \{1, \ldots, n\}$, $k \in N$, továbbá

$$N_*{}^k := \begin{cases} N_*{}^1 := N & (k = 1), \\ \\ \{i \in N^k : \; i_1 < \ldots < i_k\} & (k > 1). \end{cases}$$

Ha az $M, N \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixok esetén M_i, ill. N_i jelöli azt az $\mathbb{R}^{k\times k}$-beli mátrixot, amelyet úgy kapunk M-ből, ill. N-ből, hogy töröljük mindazon sorait, amelyek száma nincsen i komponensei között, azaz pl. az M_i mátrix l-edik sora az M mátrix i_l-edik sorával egyezik meg. Ekkor fennáll a

$$\det(M^T N) = \sum_{i\in N_*{}^k} (\det M_i)(\det N_i)$$

[8] Ha egy p elemű rendszerben ($p \geq 2$), az i-edik pozícióban lévő elemet szomszédcserékkel valamely a j-edik pozícióban lévő elemmel akarunk kicserélni, akkor páratlan sok számú cserére van szükségünk, ui. az i-edik pozícióban lévő elem j-edik pozícióba mozgatásához $|i - j| =: l$ darab cserére van szükség, majd ezután ahhoz, hogy az eredetileg j-edik pozícióban lévő elemet az i-edik pozícióba vigyük $l - 1$ darab csere szükséges. Összesen tehát $l + l - 1 = 2l - 1$ darab szomszédcsere történt.

egyelőség (**Cauchy-Binet-formula**).

Jelölje $L(X,Y)$ az $\mathcal{L}(X,Y)$-beli folytonos leképezések halmazát:

$$L(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}(X,Y) :\ f \in \mathfrak{C}\}.$$

$L(X,Y)$ a szokásos műveletekkel nyilván vektorteret alkot. Ha $A \in L(X,Y)$ és

$$|||A||| := \sup\{\|A(r)\|_Y \in \mathbb{R} :\ r \in X,\ \|r\|_X = 1\},$$

akkor $|||A||| < +\infty$, sőt az $|||\cdot||| : L(X,Y) \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti a norma szokásos követelményeit, így $(L(X,Y), |||\cdot|||)$ maga is normált tér. Igaz továbbá, hogy bármely $A \in L(X,Y)$ esetén

$$\|A(r)\|_Y \leq |||A||| \cdot \|r\|_X \qquad (r \in X).$$

Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek **izomor**fak ($X \sim Y$), ha van olyan $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, hogy A bijekció.[9] Az $A : X \to Y$ leképezés pontosan akkor izometria, ha A szürjektív és **normatartó**, azaz $\mathcal{R}_A = Y$ és

$$\|A(r)\|_Y = \|r\|_X \quad (r \in X).$$

Világos, hogy ha $A : X \to Y$ izometria, akkor egyben injektív is. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek **izometrikusan izomorf**ak ($X \cong Y$), ha van olyan $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijekció, amely normatartó. Világos, hogy az ilyen leképezésre $A \in L(X,Y)$, és $X \neq \{0\}$ esetén $|||A||| = 1$.

Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ normált terek ($\mathbb{K}$-ra vonatkozóan), akkor az

$$X := X_1 \times \ldots \times X_n$$

Descartes-szorzat a szokásos műveletekkel maga is vektortér. Ha az

$$r := (x_1, \ldots, x_n) \in X$$

vektor normáját az

$$\|r\|_X := \max\{\|x_1\|_{X_1}, \ldots, \|x_n\|_{X_n}\}$$

egyenlőséggel értelmezzük, akkor $\|\cdot\|_X$ norma X-en, azaz $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér. Ha $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér, akkor valamely $A : X \to Y$ leképezést **n-lineáris**nak ($n = 2$ esetén **bilineáris**nak, $n = 3$ esetén **trilineáris**nak) nevezünk, ha bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$ és bármely $x_j \in X_j$ $(j \in \{1,\ldots,n\} :\ j \neq i)$ esetén az

$$X_i \ni \xi \mapsto A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

[9] Ilyenkor azt mondjuk, hogy A az X és Y terek közötti **izomorfizmus**.

leképezés lineáris. $\mathcal{L}_n(X,Y)$ jelöli az X-et az Y-ba képező n-lineáris leképezések halmazát. Ha $A \in \mathcal{L}_n(X,Y)$, akkor az alábbi állítások egyenértékűek:

- $A \in \mathfrak{C}$;
- $A \in \mathfrak{C}[\mathbf{0}_1, \ldots, \mathbf{0}_n]$;
- $\exists\, 0 < K \in \mathbb{R}: \ \|A(r)\|_Y \leq K\|x_1\|_{X_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n\|_{X_n} \quad (r = (x_1, \ldots, x_n) \in X)$.

Jelölje $L_n(X,Y)$ az $\mathcal{L}_n(X,Y)$-beli folytonos leképezések halmazát:

$$L_n(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}_n(X,Y) : \ f \in \mathfrak{C}\}.$$

$L_n(X,Y)$ a szokásos műveletekkel nyilván vektorteret alkot. Ha $A \in L_n(X,Y)$ és

$$|||A|||_n := \sup\{\|A(r)\|_Y \in \mathbb{R} : \ r \in X, \ \|r\|_X = 1\},$$

akkor $|||A|||_n < +\infty$, sőt az $|||\cdot|||_n : L_n(X,Y) \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti a norma szokásos követelményeit, így $(L_n(X,Y), |||\cdot|||_n)$ maga is normált tér. Igaz továbbá, hogy bármely $A \in L_n(X,Y)$ esetén

$$\|A(r)\|_Y \leq |||A|||_n \cdot \|x_1\|_{X_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n\|_{X_n} \qquad (r = (x_1, \ldots, x_n) \in X).$$

Az $L(X_1, L(X_2, \ldots, L(X_n, Y)\ldots)$ és az $L_n(X,Y)$ terek izometrikusan izomorfak:

$$L(X_1, L(X_2, \ldots, L(X_n, Y)\ldots) \cong L_n(X,Y),$$

ui. tetszőleges $A \in L(X_1, L(X_2, \ldots, L(X_n, Y)\ldots)$ esetén az

$$\widetilde{A}(r) := (\ldots((A(x_1))(x_2)\ldots)(x_n) \quad (r = (x_1, \ldots, x_n) \in X)$$

lineáris leképezésre $\widetilde{A} \in L_n(X,Y)$ és

$$\varphi : L(X_1, L(X_2, \ldots, L(X_n, Y)\ldots) \to L_n(X,Y), \qquad \varphi(A) := \widetilde{A}$$

izometrikus izomorfia.

Deriváltak

Az alábbiakban legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek.

Valamely $f \in X \to Y$ függvény **differenciálható** az $a \in X$ pontban ($f \in \mathfrak{D}[a]$), ha $a \in \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$ és van olyan $f'(a) \in L(X,Y)$ (folytonos lineáris leképezés) és $\eta \in X \to Y$ függvény, hogy

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + \eta(h)\|h\|_X \quad (h \in X, a+h \in \mathfrak{D}_f) \quad \text{és} \quad \lim_{0 \in X} \eta = 0 \in Y.$$

Ha valamely $\emptyset \neq H \subset \mathrm{int}(D_f)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$ $(a \in H)$, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható a H halmazon ($f \in \mathfrak{D}(H)$), és ekkor az

$$f' : H \to L(X,Y), \qquad x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f **deriváltfüggvény**ének nevezzük.

Lagrange-egyenlőtlenség. Ha $f \in X \to Y$ differenciálható az

$$[a,b] := \{a + t(b-a) \in X : \ t \in [0,1]\} \subset X$$

szakaszon, akkor

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \sup\{|||f'(x)||| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \cdot \|b-a\|_X$$

Az $f \in X \to Y$ függvény **kétszer differenciálható** az $a \in X$ pontban ($f \in \mathfrak{D}^2[a]$), ha $a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_{f'})$ és az $f' \in X \to L(X,Y)$ (derivált)függvény differenciálható a-ban. f' ezen pontbeli

$$f''(a) := (f')'(a) \in L(X, L(X,Y))$$

deriváltja az f függvény a pontbeli **második derivált**ja. Ha valamely $\emptyset \neq H \subset X$ esetén $f \in \mathfrak{D}^2(H)$, azaz $f \in \mathfrak{D}^2[a]$ $(a \in H)$, akkor az

$$f'' : H \to L(X, L(X,Y)), \quad x \mapsto f''(x)$$

függvény az f **második deriváltfüggvény**e. Ha tehát $f \in X \to Y$ kétszer differenciálható függvény ($H = \mathfrak{D}_f$), akkor f második deriváltja az $f'' \in X \to L(X, L(X,Y))$ leképezés, azaz

$$f''(x) \in L(X, L(X,Y)) \quad (x \in \mathfrak{D}_f).$$

Mivel az $L(X, L(X,Y))$ és az $L_2(X,Y)$ terek izometrikusan izomorfak, ezért ha $f \in X \to Y$ kétszer differenciálható függvény, akkor az $f''(a) \in L(X, L(X,Y))$ leképezés azonosítható azzal az (ugyanúgy jelölt) $f''(a) \in L_2(X,Y)$ folytonos bilineáris leképezéssel, amelyre

$$f''(a)(u,v) := (f''(a)(u))\,(v) \quad ((u,v) \in X^2).$$

Indukcióval értelmezhető az $f \in X \to Y$ függvény valamely $a \in X$ pontban vett harmadik, negyedik stb. n-edik deriváltja, és ugyanígy a harmadik, negyedik, stb., n-edik deriváltfüggvénye is. Ha $f^{(n)}(a)$ jelöli az f deriváltját valamely $a \in X$ pontban, akkor

$$f^{(n)}(a) \in L(\overset{1}{\smile}{X}, L(\overset{2}{\smile}{X}, \dots, L(\overset{n}{\smile}{X}, Y)\dots)$$

Mivel az $L(X, L(X, \dots, L(X,Y)\dots)$ és az $L_n(X,Y)$ terek izometrikusan izomorfak, ezért az $f^{(n)}(a) \in L(X, L(X, \dots, L(X,Y)\dots)$ leképezés azonosítható azzal az (ugyanúgy jelölt) $f^{(n)}(a) \in L_n(X,Y)$ folytonos n-lineáris leképezéssel, amelyre

$$f^{(n)}(a)(r) := (\dots((f^{(n)}(a)(x_1))(x_2)\dots)(x_n) \qquad (r = (x_1, \dots, x_n) \in X^n).$$

Young-tétel. Ha az $f \in X \to Y$ függvény valamely $a \in X$ pontban n-szer differenciálható, akkor az $f^{(n)}(a) \in L_n(X,Y)$ folytonos n-lineáris leképezés szimmetrikus, azaz tetszőleges $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutáció esetén

$$f^{(n)}(a)(r) = f^{(n)}(a)(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) \qquad (r = (x_1, \dots, x_n) \in X^n),$$

speciálisan $n = 2$ esetén

$$f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u) \qquad ((u,v) \in X^2).$$

Ha X és Y **véges dimenziós**, pl. $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, akkor $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\mathbb{R}^{m\times n}$ izometrikusan izomorf[10]:

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ezt felhasználva tehát, ha

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{és} \qquad f \in \mathfrak{D}[a],$$

[10] Ha M jelöli azt a mátrixot, amelyre $A(r) = Mr$ $(r \in \mathbb{R}^n)$, akkor a

$$\varphi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad \varphi(A) := M$$

leképezés izometrikus izomorfizmus $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\mathbb{R}^{m\times n}$ között.

akkor

$$f'(a) = [\partial_j f_i(a)]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(**Jacobi-mátrix**), ill. $f \in \mathfrak{D}^2$ esetén

$$\Delta(f) := (\Delta(f_1), \ldots, \Delta(f_m)) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

ahol

$$\Delta(f_i) := \sum_{l=1}^{n} \partial_{ll} f_i \quad (i \in \{1, \ldots, m\}).$$

Speciálisan

1. $m = n$ esetén

$$\operatorname{div}(f) := \operatorname{Sp}(f') = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j, \quad (f \textbf{ divergenciája}),$$

ill. ha

- $m = n = 3$, akkor $f' = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f3 \end{bmatrix}$,

$$\operatorname{rot}(f) := (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \quad (f \textbf{ rotációja}),$$

- $m = n = 2$, akkor

$$\operatorname{rot}(f) := \operatorname{rot}(\widehat{f}), \qquad \text{ahol} \qquad \widehat{f} := (f_1, f_2, 0),$$

azaz

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = (0, 0, \partial_1 f_2(x, y) - \partial_2 f_1(x, y)) \qquad ((x, y) \in \mathcal{D}_f,\ z \in \mathbb{R}).$$

2. $m = 1$ esetén – felhasználva, hogy $\mathbb{R}^{1\times n} \cong \mathbb{R}^n$ – látható, hogy ha $f \in \mathfrak{D}$, akkor

$$f' = \operatorname{grad}(f) := (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

ill. $f \in \mathfrak{D}^2[a]$ esetén

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \ldots & \partial_{1n} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \ldots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \ldots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \ldots & \partial_n\partial_n f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

ami a Young-tétel következményeként szimmetrikus.

3. $n = 1$ esetén – felhasználva, hogy $\mathbb{R}^{m\times 1} \cong \mathbb{R}^m$ – látható, hogy ha $f \in \mathfrak{D}$, akkor

$$f' = (f_1', \ldots, f_m') \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m.$$

4. **Determináns deriválása.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{n} \quad (t \in I).$$

Ha $A \in \mathfrak{D}$, akkor

$$A'(t) = \left[a_{ij}'(t)\right]_{i,j=1}^{n} \qquad (t \in I),$$

továbbá, ha minden $t \in I$ esetén

$$A(t) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)], \qquad \text{ill.} \qquad D(t) := \det(A(t)),$$

akkor

$$\boxed{D'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\left[a_1(t), \ldots, a_{j-1}(t), a_j'(t), a_{j+1}(t), \ldots, a_n(t)\right]}.$$

Ui.

$$D(t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}(t) \quad (t \in I) \quad + \quad \text{Leibniz-szabály}.$$

Például

1. Ha $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor az

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(r) := Mr,$$

függvényre $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(r) = M \qquad (r \in \mathbb{R}^n),$$

ui.

$$f(a + h) - f(a) = M(a + h) - Ma = Mh + 0 \quad (a, h \in \mathbb{R}^n).$$

2. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega, \mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor az

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(r) := \phi(r)Mr,$$

függvényre $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(r) = (Mr) \circ \mathrm{grad}(\phi)(r) + \phi(r)M \quad (r \in \Omega).$$

Ui. ha $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$: $a + h \in \Omega$, akkor

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \phi(a+h)M(a+h) - \phi(a)Ma = \\ &= [\phi(a) + \langle \phi'(a), h\rangle + \eta_\phi(h)]\,[Ma + Mh] - \\ &\quad -\phi(a)Ma = \\ &= \phi(a)Mh + \langle \phi'(a), h\rangle Ma + \\ &\quad +\langle \phi'(a), h\rangle Mh + \eta_\phi(h)Ma + \eta_\phi(h)Mh \\ &= \{\phi(a)M + Ma \circ \phi'(a)\}\, h + \langle \phi'(a), h\rangle Mh + \\ &\quad +\eta_\phi(h)Ma + \eta_\phi(h)Mh, \end{aligned}$$

ahol $\lim_{h\to 0} \eta_\phi(h) = 0$. Így

$$\lim_{h\to 0}(\eta_\phi(h)Ma + \eta_\phi(h)Mh) = 0,$$

ill.

$$\|\langle \phi'(a), h\rangle Mh\| = |\langle \phi'(a), h\rangle| \cdot \|Mh\| \leq \|\phi'(a)\| \cdot \|h\| \cdot |||M||| \cdot \|h\|$$

miatt[11]

$$\lim_{h\to 0}(\langle \phi'(a), h\rangle Mh) = 0.$$

3. Ha

$$f(r) := \frac{r}{|r|^2} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3),$$

akkor

$$\mathrm{div}\, f(r) = \frac{|r|^2 - 2x^2}{|r|^4} + \frac{|r|^2 - 2y^2}{|r|^4} + \frac{|r|^2 - 2z^2}{|r|^4} = \frac{1}{|r|^2} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

[11] $|||M||| := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\mathrm{Sp}(M^T M)\right)^{1/2} = \left(\mathrm{Sp}(MM^T)\right)^{1/2}.$

Az **alkalmazások**ban gyakran találkozunk az alábbi jelölésekkel, ill. elnevezésekkel:

1. $n = 3$, $m = 1$, azaz $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ esetén f-et szokás **skalármezőnek** (**skaláreloszlás**nak) nevezni, pl.
   - $U(r) := -\gamma \dfrac{M}{|r|} \quad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$, ahol $\gamma, M > 0$,[12]
   - $U(r) := \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{|r|} \quad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$, ahol $Q, \varepsilon_0 > 0$,[13]
   - $U(r) := \dfrac{1}{2} m\omega^2 |r|^2 \quad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$, ahol $m, \omega > 0$,[14]
   - $U(r) := -\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\langle d, r\rangle}{|r|^3} \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$, ahol $e > 0$.[15]

2. $n = m = d \in \{2,3\}$, azaz $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ esetén f-et szokás **vektormezőnek** (**vektor-eloszlás**nak) nevezni. A fizikai (mechanikai, elektoromos, áramlástani stb.) erőterek (a tér minden pontjához egy $\mathbb{R}^d$-beli vektort – a szóbanforgó pontbeli erőt – rendelve ilyen típusú függvényekkel írhatók le.

   Például:

   - **merev test forgómozgása**: ha a rögített $t \in \mathbb{R}^3$: $|t| = 1$ irányvektorú tengely körül (egyenletesen) forgó merev test egy pontjának térbeli helyzetét a $\tau = 0$ időpillanatban az r_0 helyvektorral adjuk meg, akkor $\tau > 0$ idő elteltével a pont helyzete (vö. (2.4)):

   $$r(\tau) = (\cos(\omega\tau))r_0 + (1 - \cos(\omega\tau))\langle r_0, t\rangle t + \sin(\omega\tau) t \times r_0,$$

   ahol $\omega > 0$ a forgás (állandó) **szögsebessége**. Így – mivel $r : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ deriválható függvény – a pont sebességére:

   $$\begin{aligned} v(\tau) = \dot{r}(\tau) &= \omega\{-\sin(\omega\tau)r_0 + \sin(\omega\tau)\langle r_0, t\rangle t + \cos(\omega\tau) t \times r_0\} = \\ &= \omega\{t \times r(\tau)\} \quad (\tau \geq 0) \end{aligned}$$

[12] U-t szokás **Newton-potenciál**nak (az origóban lévő, M tömegű **anyagi pont** gravitációs tere potenciáljának) nevezni.

[13] U-t szokás **Coulomb-potenciál**nak nevezni: az origóban nyugvó **ponttöltés** potenciálja, ahol Q a töltés nagyága, $\varepsilon_0 := \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ pedig a vákuum (abszolút) **dielektromos állandó**ja.

[14] U-t szokás a **harmonikus oszcillátor** ($m > 0$ tömegű, $\omega > 0$ frekvenciával rezgő **részecske**) potenciáljának nevezni.

[15] U-t szokás az e és a $-e$, $|d|$ távolságban lévő töltések (**elektromos dipólus**) potenciáljának nevezni.

(vö. kifejtési tétel). A

$$w := \omega t$$

vektort a fizikában „**szögsebességvektor**nak” („**forgásvektor**nak”) nevezik. Így a forgómozgás sebességét leíró vektormező:

$$v(r) := w \times r = \omega(t \times r) \qquad (r \in \mathbb{R}^3). \tag{2.5}$$

Tudjuk, hogy $v(r) = Mr$ $(r \in \mathbb{R}^3)$, ahol

$$M := \omega \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix},$$

(vö. (2.2)), így

$$v'(r) = M, \quad \mathrm{div}(v)(r) = 0 \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

Megjegyezzük, hogy innen származik a 'rotáció' elnevezés, ui. a fentiek miatt valamely forgás sebességét

$$\mathbb{R}^3 \ni s \mapsto Ts = w \times s$$

alakú vektormező írja le, ahol T antiszimmetrikus mátrix, és ha $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deriválható vektormező, akkor minden $a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$ esetén

$$\mathrm{rot}(f)(a) \times r = (f'(a) - f'(a)^T)r \qquad (r \in \mathbb{R}^3). \tag{2.6}$$

Hiszen a

$$T := f'(a) - f'(a)^T$$

mátrix antiszimmetrikus, így van olyan $w \in \mathbb{R}^3$ vektor (vö. (2.1)), hogy

$$Tr = w \times r \quad (r \in \mathbb{R}^3): \qquad w = (-T_{23}, T_{13}, -T_{12}).$$

Ezért ha $M := f'(a)$, akkor

$$w = (M_{32} - M_{23}, M_{13} - M_{31}, M_{21} - M_{12}) = \mathrm{rot}(f)(a). \quad \blacksquare$$

- **centrális erőteret** ír le az

$$f(r) := \phi(r)r \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

vektormező, ahol alkalmas $c > 0$ esetén ϕ a következő skalármező:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \phi(r) := -\frac{c}{|r|^3}.$$

Mivel $r = \mathbb{E}_3 r$ és

$$\mathrm{grad}(\phi)(r) = \frac{3c}{|r|^5} r \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}),$$

ezért

$$f'(r) = \frac{c}{|r|^5}\left(|r|^2 \mathbb{E}_3 - 3r \circ r\right) \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}).$$

Tetszőleges $r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ esetén $f'(r)$ tehát olyan szimmetrikus mátrix, amelynek nyoma zérus, így

$$\mathrm{rot}(f)(r) = 0, \qquad \mathrm{div}(f)(r) = 0.$$

Ilyen pl. az origóban elhelyezett M tömegű anyagi pontnak az $r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ helyvektorú pontban lévő, m tömegű anyagi pontra gyakorolt **gravitációs ereje**[16]:

$$f(r) := -\gamma \frac{mM}{|r|^3} r \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}).$$

- Az I intenzitású árammal átjárt, végtelen hosszú(nak gondolt) **egyenes vezető keltette mágneses térerősség** az $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 > 0$ helyvektorú pontban[17]:

$$H(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{|r|^2 - \langle e_3, r \rangle^2} \cdot (e_3 \times r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Ha tetszőleges $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 > 0$ esetén

$$\phi(r) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad \text{és} \qquad M := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$H(r) = \phi(r) M r \quad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}),$$

[16] $\gamma := 6{,}67428 \pm 0{,}0067 \times 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$: **gravitációs állandó**.

[17] $\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ a vákuum (abszolút) **permeabilitás**a.

így

$$H'(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{bmatrix} 2xy & y^2-x^2 & 0 \\ y^2-x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}).$$

Látható, hogy

$$\mathrm{div}(H)(r) = 0, \qquad \mathrm{rot}(H)(r) = 0 \qquad (r \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}).$$

- **lamináris** (**réteges**) áramlás:
  valamely $R > 0$ sugarú kör keresztmetszetű, l hosszúságú, vízszintesen elhelyezkedő csőben összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásának sebességét írja le a

  $$v(r) := \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(0, R^2 - x^2 - z^2, 0) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq R^2),$$

  vektormező[18], ahol p_1, ill. p_2 a cső két végén levő nyomás: $p_1 > p_2$, $\eta > 0$, pedig a belső súrlódásra jellemző állandó. Némi számolással látható, hogy

  $$v'(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2x & 0 & -2z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq R^2),$$

  így

  $$\mathrm{div}(v)(r) = 0, \quad \mathrm{rot}(v)(r) = (-2x, 0, 2z) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq R^2).$$

3. Ha $d \in \{2,3\}$ és

   (a) bevezetjük a

   $$\nabla := (\partial_1, \ldots, \partial_d)$$

   jelölést (**nabla-operátor**[19]), továbbá $\varphi \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ill. $f, g \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ „alkalmasan” megválasztott skalár- ill. (esetleg kétszer is) deriválható vektormező, akkor „formálisan”[20] a következő írható:

   $$\mathrm{grad}(\varphi) = \nabla\varphi, \qquad \Delta = \langle \nabla, \nabla \rangle, \qquad \mathrm{div}(f) = \langle \nabla, f \rangle, \qquad (f')^T = \nabla \circ f,$$

[18] f a cső közepétől forgásparaboloid mentén csökken a falnál zérusra (**parabolikus sebességprofil**).
[19] A 'nabla' elnevezés a ∇ alakú húros hangszerről (háromszögalakú hárfa) származik.
[20] ∂F-et $\partial \cdot F$-nek nézve

ill.

$$f'g = \langle g, \nabla \rangle f, \qquad \mathrm{rot}(f) = \nabla \times f = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel[21]

- a **Maxwell-egyenletek**[22] vákuumra érvényes alakja (feltételezve, hogy nincsenek jelen töltések és áram sem folyik):

  $$\nabla_r \times E = -\mu_0 \partial_t H, \qquad \nabla_r \times H = \epsilon_0 \partial_t E,$$

  $$\langle \nabla_r, \epsilon_0 E \rangle = 0, \qquad \langle \nabla_r, \mu_0 H \rangle = 0,$$

  ahol

  $$E(r,t) \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{ill.} \qquad H(r,t) \in \mathbb{R}^3$$

  jelöli az elektormos, ill. mágneses térerősséget az $r \in \mathbb{R}^3$ helyvektorú pontban és a $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban.

- a súrlódó folyadékokra vonatkozó **Navier-Stokes-egyenlet**:[23]

  $$\rho\left(\partial_t v + \langle v, \nabla_r \rangle v\right) = f - \nabla_r p + \eta \triangle_r v$$

  ($\eta = 0$ esetén **Euler-egyenlet**),[24] ahol $v(r,t) \in \mathbb{R}^3$ az áramló folyadék sebessége, $\rho(r,t) \in \mathbb{R}$ a folyadék sűrűsége, $p(r) \in \mathbb{R}$ a nyomása, $f(r) \in \mathbb{R}^3$ a folyadék egységnyi térfogatára ható (adott) erő (**erősűrűség**) az $r \in \mathbb{R}^3$ helyvektorú pontban és a $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban.

(b) $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $f \in \mathfrak{D}$ és $\mathrm{div}(f) = 0$, akkor az f vektormezőt **forrásmentes**nek nevezzük; $\mathrm{rot}(f) = 0$ esetén pedig azt mondjuk, hogy f **örvénymentes**. Pl. az **áramlástan**ban a **tömegmegmaradás**t kifejező

$$\partial_t \rho + \langle \nabla_r, \rho v \rangle = 0$$

ún. **kontinuitási egyenlet**ből következik, hogy összenyomhatatlan,[25] ideális folyadék sebességmezejére: $\langle \nabla_r, v \rangle = 0$ (sok helyen folyadékok összenyomhatatlan-

[21] Az alsó indexben az r a „térváltozó” szerinti deriváltra utal.
[22] James Clerk Maxwell (1831 – 1879).
[23] Claude-Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836), George Gabriel Stokes (1819 – 1903).
[24] Leonhard Euler (1707 – 1783).
[25] Az öszenyomhatalan foyadékot az jellemzi, hogy sűrűségeloszlása mind térben, mind pedig időben állandó: $\rho(r,t) = \rho \in \mathbb{R}$ ($r \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$).

ságát ezzel a feltétellel definiálják). A kontinuitási egyenlet előfordul pl. az elektrodinamikában is (ezzel fejezik ki az elektromos **töltésmegmaradás**t):

$$\partial_t \rho + \langle \nabla_r, j \rangle = 0,$$

ahol $j(r,t) \in \mathbb{R}^3$ jelöli az áramsűrűséget, $\rho(r,t) \in \mathbb{R}^3$ a **töltéssűrűség**et az $r \in \mathbb{R}^3$ helyvektorú pontban és a $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a ∇ differenciáloperátor megkönnyíti az összetett kifejezésekkel való munkát, alkalmazásánál azonban óvatosságra van szükség, mert mechanikus, gondolkodás nélküli alkalmazása néha tévútra vezethet (pl. az eredmények koordinátafüggetleneknek látszanak, holott általában nem ez a helyzet, pl.

$$\langle \nabla, f \rangle g + \langle \nabla, g \rangle f \neq \nabla \langle f, g \rangle = (\nabla \circ f) g + (\nabla \circ g) f.)$$

2.2. $\boxed{\text{B}}$

Példa.

1. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$ esetén a

$$\varphi(t) := a + t(b-a) = (1-t)a + tb \qquad (t \in [0,1])$$

   függvény értékkészlete az a kezdőpontú, ill. b végpontú **szakasz**.

2. Tetszőleges $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(t) := (u + \alpha\cos(t))i + (v + \beta\sin(t))j \qquad (t \in [0,2\pi])$$

   függvény értékkészlete az (u, v) középpontú, α félnagytengelyű, ill. β félkistengelyű ellipszisvonal.

Definíció. Ha $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út, akkor a $\varphi(a)$ helyettesítési értéket a szóban forgó út, ill. az általa meghatározott görbe **kezdőpont**jának, $\varphi(b)$-t pedig **végpont**jának nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út

- **zárt**, ha φ kezdőpontja azonos φ végpontjával, azaz $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- az $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ **halmazban halad**, ha $\mathcal{R}_\varphi \subset \Omega$, azaz

$$\varphi(t) \in \Omega \qquad (t \in [a, b]).$$

- ellentettje a $\widetilde{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ út, ahol

$$\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(b + a - t) \qquad (t \in [a, b]).$$

Definíció. Ha a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ utak esetében $\varphi(b) = \psi(c)$, akkor a

$$\varphi \vee \psi(t) := (\varphi \vee \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (t \in [a, b]), \\ \\ \psi(t + c - b) & (t \in [b, b + d - c]) \end{cases}$$

utat a φ és ψ **utak egyesítésének** nevezzük.

Feladat. Adjunk példát olyan $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ útra, amelynek $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészlete $\partial\Omega$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ az x-tengelyre nézve normáltartomány, pontosabban alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, ill. $f, g \in \mathfrak{C}^1[a, b]$: $f \leq g$ esetén

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

teljesül!
Útm. Ha

$$\mu_1(t) := (t, f(t)) \quad (t \in [a, b]), \qquad \mu_2(t) := (b, t) \quad (t \in [f(b), g(b)]),$$

ill.

$$\mu_3(t) := (t, g(t)) \quad (t \in [a, b]), \qquad \mu_4(t) := (a, t) \quad (t \in [f(a), g(a)]),$$

akkor

$$\varphi := \mu_1 \vee \mu_2 \vee \widetilde{\mu_3} \vee \widetilde{\mu_4}$$

a kívánt út. ■

Példa. A fenti feladatban a második, ill. negyedik határelemet paraméterezhetjük a következőképpen is:

$$\mu_2(t) := (b, f(b) + t(g(b) - f(b))), \quad \mu_4(t) := (a, f(a) + t(g(a) - f(a))) \qquad (t \in [0,1]).$$

Feladat. Valamely anyagi pont egy R sugarú (egyenes kör)henger palástján mozog: állandó ω szögsebességgel forog a henger tengelye körül és állandó ν sebességgel halad a tengellyel párhuzamosan. Adjuk meg a pont helyzetét a $t \in [0, T]$ időpillanatban, majd a mozgás pályájának a koordinátasíkokra eső vetületét!
Útm. Helyezzük el a hengert a derékszögő koordinátarendszerben úgy, hogy tengelye a z-tengely legyen. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban a pont koordináta-vektora: $(R,0,0)$. Ekkor a szögelfordulásra $\alpha(t) = \omega t$, így

$$x(t) = R\cos(\omega t), \qquad y(t) = R\sin(\omega t),$$

ill. a felfelé megtett útra: $z(t) = \nu t$. Tehát a pont helyvektora:

$$(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), \nu t) =: \varphi(t) \qquad (t \in [0, T]).$$

Az $\mathcal{R}_\varphi$ ponthalmaz neve **hengerre írt csavarvonal** vagy **hengeres csavarvonal**. A csavarvonal vetülete az (xy)-síkban az

$$x^2 + y^2 = R^2$$

egyenletű kör; az (xz)-síkban az

$$x = R\cos\left(\frac{z}{b}\right)$$

egyenletű koszinuszgörbe; az (yz)-síkban pedig az

$$y = R\sin\left(\frac{z}{b}\right)$$

egyenletű szinuszgörbe, ahol $b := v/\omega$. ■

Megjegyzés. A fenti feladatban az idő volt a paraméter. Ha az α szöget választjuk paraméternek, akkor a csavarvonal a

$$\psi(\alpha) := \left(R\cos(\alpha), R\sin(\alpha), \frac{v}{\omega}\alpha\right) \qquad (\alpha \in [0, A])$$

út értékkészlete, ahol $A := \omega T$.

Megjegyzés. Ha $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, továbbá

$$\varphi_{\mu,\nu}(t) := (\mu\cos(t), \mu\sin(t), \nu t) \qquad (t \in [-\pi, \pi]),$$

akkor $\mathcal{R}_{\varphi_{\mu,\nu}}$:

- $\nu = 0$ esetén a $z = 0$ síkban lévő, origó középpontú, $|\mu|$ sugarú körvonal;
- $\nu \neq 0$ esetén közönséges (hengeres) csavarvonal ($\mu, \nu > 0$ esetén

  $$\mathcal{R}_{\varphi_{\mu,\nu}} \cup \mathcal{R}_{\varphi_{-\mu,\nu}}$$

  a genetikából jól ismert **kettőscsavar**[26]).

A csavarvonal műszaki alkalmazása is gyakori: rugó, dugóhúzó, csavar, csigahajtás esetén találkozni vele. A sodrott kötélben a pászmák szintén csavarvonal alakban helyezkednek el. A csavarvonal bal- illetve jobbsodrású lehet.[27] Jobbsodrású a csavarvonal, ha a pont

[26] A DNS molekula atomjai kettőscsavar mentén rendeződnek el, de több protein molekula is csavarvonal alakú.

[27] $\nu > 0$ esetén **jobbcsavar**ról, $\nu < 0$ esetén pedig **balcsavar**ról beszélünk.

tengelyirányú mozgásához az óramutató járásával egyező irányú forgás tartozik (tehát ahogy egy csavar befelé csavarodik). A balsodrású csavarvonalnál a tengelyirányú mozgáshoz az óramutató járásával ellentétes irányú forgómozgás tartozik. A fehérjék molekulájának csavarvonala és a DNS A és B alakja jobbsodrású, a Z alakú DNS molekula balsodrású.

Tétel. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz pontosan akkor összefüggő, ha bármely $u, w \in \Omega$ esetén van olyan $\varphi : [a, b] \to \Omega$ sima út, amelyre

$$\varphi(a) = u \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) = w.$$

teljesül. □

Definíció. Ha $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ reguláris út, akkor tetszőleges $c \in [a, b]$ esetén a

$$\left\{\varphi(c) + t\varphi'(c) \in \mathbb{R}^d : \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

halmazt a $\gamma = \mathcal{R}_\varphi$ görbe $\varphi(c)$ pontbeli **érintő**jének nevezzük.

Példa. Ha $f \in \mathfrak{D}([a, b], \mathbb{R})$, akkor

$$\varphi(t) := (\cos(t), \sin(t), 2t) \quad (t \in [0, 2\pi]), \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(t) := (t, f(t)) \quad (t \in [a, b])$$

leképezés értékkészlete egy csavarvonal-darab, ill. az f függvény grafikonja. Ezeknek a görbéknek a π, ill. az $a \in I$ paraméterértékhez tartozó pontjaiban vett érintője a

$$\left\{(-1, -t, 2\pi + 2t) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \text{ill. az} \qquad \left\{(x, f(a) + f'(a)(x - a)) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\right\}$$

ponthalmaz, azaz az érintő egyenlete:

$$x = -1, \ z = 2(\pi - y), \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}.$$

Feladat. Bizonyítsuk be az ellipszis érintőjének szögfelező tulajdonságát, azaz, hogy tetszőleges P ellipszisponthoz tartozó érintő felezi a pont vezérsugarainak mellékszögét!
Útm. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az ellipszis középpontja az origó, kistengelye az y-tengelyen, nagytengelye az x-tengelyen van. Ekkor az ellipszis paraméterezése:

$$\varphi(t) := (a\cos(t), b\sin(t)) \qquad (t \in [0, 2\pi];\ 0 < b < a \in \mathbb{R}).$$

Jelöljük a görbe P pontjából ($P = \varphi(t)$) az

$$A = (-c, 0), \qquad \text{ill.} \qquad B = (c, 0)$$

koordinátájú fókuszba mutató vektorokat így: $f_1(t)$, ill. $f_2(t)$. A vezérsugarak

$$\cos(\alpha_k(t)) \qquad (k \in \{1;2\})$$

mellékszögére:

$$\cos(\alpha_k(t)) = \frac{\left\langle f_k(t), (-1)^{k-1}\varphi'(t)\right\rangle}{|f_k(t)| \cdot |\varphi'(t)|} \quad (t \in [0{,}2\pi]).$$

Mivel

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

ill.

$$f_k(t) = (-a\cos(t) + (-1)^k c, -b\sin(t), \quad \varphi'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)) \quad (t \in [0{,}2\pi]),$$

ezért

$$\begin{aligned}
(-1)^{k-1}\left\langle f_k(t), \varphi'(t)\right\rangle &= (-1)^{k-1}[(-1)^k c - a\cos(t)][-a\sin(t)] + (-1)^{k-1}[-b\sin(t)]\cdot \\
&= b\cos(t) = \\
&= ca\sin(t) + (-1)^{k-1}a^2\cos(t)\sin(t) + (-1)^k b^2\cos(t)\sin(t) = \\
&= \sin(t)[ca + (-1)^{k-1}\cos(t)(a^2 - b^2)] = \\
&= c\sin(t)[a + (-1)^{k-1}c\cos(t)]
\end{aligned}$$

és

$$|\varphi'(t)|^2 = a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)$$

ill.

$$\begin{aligned}
|f_k(t)|^2 &= [(-1)^k c - a\cos(t)]^2 + b^2\sin^2(t) = \\
&= c^2 + 2(-1)^{k-1}ca\cos(t) + a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t) = \\
&= a^2 - b^2 + 2(-1)^{k-1}ca\cos(t) + c^2\cos^2(t) + b^2 = \\
&= [a + (-1)^{k-1}c\cos(t)]^2.
\end{aligned}$$

Így $c < a$ miatt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_k(t)) &= \frac{c\sin(t)[a+(-1)^{k-1}c\cos(t)]}{[a+(-1)^{k-1}c\cos(t)]\cdot\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} = \\ &= \frac{c\sin(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} \qquad (t\in[0,2\pi]),\end{aligned}$$

ami független k-tól. ■

Megjegyzés. Az ellipszis ezen tulajdonságának több gyakorlati alkalmazása ismert. Pl.

1. Ha ellipszis alakú tükröt készítünk, melynek egyik fókuszába fényforrást helyezünk, a fénysugarak egyetlen pontba tükröződnek: a másik fókuszba. A hanghullámok hasonló módon verődnek vissza, mint a fény, így ha valaki egy nagy „elliptikus helyiség” egyik fókuszába áll, a másik fókuszban álló személy jól hallja az első suttogását is, anélkül, hogy a terem egyéb pontjain hallható volna. Ezen az elven működik a **vesekő törése**.

2. A **fúziós bomba** (**hidrogénbomba**) beindításához szükséges energiát egy **hasadási bomba** (**atombomba**) szolgáltatja. Egy nehézfémből, pl. (238-as) uránból készült forgásellipszoid alakú tükör (**Teller-Ulam-tükör**) egyik fókuszpontjába egy gyutacsként szolgáló atombombát helyeznek, a másik fókuszpontban foglal helyet a nehézhidrogéntöltet. A tükör atomjai – tehetetlenségüknél fogva – képesek ellenállni a sugárnyomásnak annyi ideig, amennyi elég a fúziós reakció megindulásához, illetve lefolyásához.

Feladat. Mutassuk meg, hogy a hengeres csavarvonal érintői állandó szöget zárnak be a henger tengelyével!
Útm. A csavarvonal egy ívének paraméterezése

$$\varphi(t) := (R\cos(2\pi\omega t), R\sin(2\pi\omega t), 2\pi\nu t) \quad (t\in[0,1]).$$

Így

$$\varphi'(t) = (-2\pi\omega R\sin(2\pi\omega t), -2\pi\omega R\cos(2\pi\omega t), 2\pi\nu) \quad (t\in[0,1])$$

következtében az érintő és a henger $k := (0,0,1)$ irányvektorú tengelye közötti szögre

$$\cos(\varphi'(t),k) = \frac{\langle\varphi'(t),k\rangle}{\|\varphi'(t)\|_2^2\cdot\|k\|_2^2} = \frac{2\pi\nu}{4\pi^2\omega^2R^2+4\pi^2\nu^2} \qquad (t\in[0,1]). \quad ■$$

Megjegyzés. **Általánosított csavarvonal**nak nevezik az olyan térgörbét, amelynek érintői egy rögzített iránnyal állandó szöget zárnak be, azaz a $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbb{R}^3$ út értékkészlete pontosan akkor általánosított csavarvonal, ha van olyan $e \in \mathbb{R}^3$, ill. $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\langle \varphi'(t), e \rangle = c \quad (t \in \mathbf{I}).$$

Feladat. Adjunk példát olyan $I \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumra és $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ útra, amelynek értékészletére az alábbi két állítás teljesül:

- valamely $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $(\alpha,0) \in \mathcal{R}_\varphi$
- tetszőleges $t \in I$ esetén a $\varphi(t)$-beli érintőegyenes olyan pontban metszi a második tengelyt, amelynek $\varphi(t)$-től vett távolsága α-val egyenlő!

Útm. Ha paraméternek az adott pont első tengelyre való vetületének az $(\alpha,0)$ ponttól mért távolságát választjuk, és alkalmas $0 < \beta < \alpha$ szám, $I := [0, \beta]$ intervallum, ill. $f, g : I \to \mathbb{R}$ sima függvények esetén az érintő az

$$m(t) := (0, g(t)) \quad (t \in I)$$

pontban metszi a második tengelyt, míg, ha

$$\varphi(t) := (\alpha - t, f(t)) \qquad (t \in I),$$

akkor a φ út értékkészlete pontosan abban az esetben lesz a keresett görbe, ha $f(0) = 0$ és

$$m(t) - \varphi(t) = \alpha \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \qquad (t \in I), \tag{$*$}$$

azaz az első komponensek egyenlőségéből

$$\alpha - t = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + [f'(t)]^2}} \qquad (t \in I)$$

vagy

$$[f'(t)]^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha - t)^2} - 1 = \frac{2\alpha t - t^2}{(\alpha - t)^2} \qquad (t \in I)$$

ill.

$$f'(t) = \frac{\sqrt{2\alpha t - t^2}}{\alpha - t} \qquad (t \in I)$$

adódik. Világos, hogy f' pozitív előjelű, ui. $(*)$ következtében

$$g(t) - f(t) = f'(t)(1 + [f(t)]^2)^{-1/2} \quad \text{és} \quad g(t) > f(t) \qquad (t \in I).$$

Így, ha $t \in I$, akkor $f(0) = 0$ következtében

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \frac{\sqrt{2\alpha s - s^2}}{\alpha - s}\, ds = \int_0^t \frac{\sqrt{2\alpha s - s^2}}{\alpha - s}\, ds = \int_\alpha^{\alpha - t} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{u}(-1)\, du = \\
&= \int_{\alpha-t}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{u}\, du = \int_{\alpha-t}^{\alpha} \frac{\alpha^2 - u^2}{u\sqrt{\alpha^2 - u^2}}\, du = \\
&= \int_{\alpha-t}^{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{u\sqrt{\alpha^2 - u^2}} - \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \right) du = \\
&= \int_{\alpha-t}^{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{u^2\sqrt{\frac{\alpha^2}{u^2} - 1}} - \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \right) du = \\
&= \int_{\frac{\alpha}{\alpha-t}}^{1} \frac{-\alpha}{\sqrt{v^2 - 1}}\, dv - \int_{(\alpha-t)^2}^{\alpha^2} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\alpha^2 - w}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{w}}\, dw = \\
&= \int_{\frac{\alpha}{\alpha-t}}^{1} \frac{-\alpha}{\sqrt{v^2 - 1}}\, dv - \int_{(\alpha-t)^2}^{\alpha^2} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\alpha^2 - w}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{w}}\, dw = \\
&= \int_1^{\frac{\alpha}{\alpha-t}} \frac{\alpha}{\sqrt{v^2 - 1}}\, dv - \frac{1}{2}\int_{(\alpha-t)^2}^{\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - w}}\, dw = \alpha \cdot \operatorname{arch}\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right) - \sqrt{2\alpha t - t^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $\mathcal{R}_\varphi$ görbének (**traktrix**) igen fontos műszaki alkalmazásai (is) vannak. A hiperbolikus geometria egyik modellje, a **pszeudoszféra** a traktrix forgatásával létrejövő forgásfelület.

2.3. $\boxed{\text{C}}$

Megjegyzés. Világos, hogy ha $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sima út,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

akkor az $f : \mathcal{R}_\varphi \to [0, +\infty)$ folytonos skalármező által meghatározott kerítés területének egy közelítése a

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_{k-1})) \cdot \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|_2 = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_{k-1}) \cdot \sqrt{\sum_{l=1}^{2} (\varphi_l(t_k) - \varphi_l(t_{k-1}))^2}$$

valós szám. A Lagrange-féle középértéktétel miatt alkalmas $\xi_k^l \in [t_{k-1}, t_k]$ esetén

$$\varphi_l(t_k) - \varphi_l(t_{k-1}) = \dot{\varphi}_l(\xi_k^l) \cdot (t_k - t_{k-1}) \qquad (l \in \{1{,}2\}).$$

A fenti összeg tehát a következő alakú:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_{k-1})) \cdot \sqrt{[\dot{\varphi}_1(\xi_k^l)]^2 + [\dot{\varphi}_2(\xi_k^l)]^2} \cdot |t_k - t_{k-1}|\,,$$

ami nem más, mint az

$$(f \circ \varphi) \cdot \|\dot{\varphi}\|_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény integrálközelítő összege.

Feladat. Számítsuk ki a

$$\varphi(t) := (2\cos(t), 2\sin(t), t/2) \qquad (t \in [0, 4\pi])$$

paraméterezte csavarvonal(darab) tömegét, ha sűrűségeloszlása a

$$\rho(x, y, z) := x^2y^2 + z^2 \qquad ((x, y, z) \in \Omega)$$

függvénnyel írható le, ahol $\mathcal{R}_\varphi \subset \Omega$ tartomány!

Útm. A csavarvonaldarab tömege:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_\varphi \rho = \int_0^{4\pi} \left(16\cos^2(t)\sin^2(t) + t^2/4\right) \cdot \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 1/4}\,dt = \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}\left\{\int_0^{4\pi} 4\sin^2(2t)\,dt + \frac{16\pi^3}{3}\right\} = \sqrt{17}\int_0^{8\pi}\sin^2(\tau)\,d\tau + \frac{8\sqrt{17}\pi^3}{3} = \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^{8\pi}(1-\cos(2\tau))\,d\tau + \frac{8\sqrt{17}\pi^3}{3} = 4\pi\sqrt{17} - \left[\frac{\sin(2\tau)}{2}\right]_0^{8\pi} + \frac{8\sqrt{17}\pi^3}{3} = \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}\left\{8\pi + \frac{16\pi^3}{3}\right\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Feladat. Számítsuk ki annak a száz hurokból álló tekercsnek a tömegét, amelynek sűrűség-eloszlása

$$\rho(r) := 1 + |y| \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

alakú!

Útm. A

$$\varphi(t) := (\cos(t), \sin(t)) \qquad (t \in [0,2\pi])$$

vektor-skalár függvény az egységkör paraméterezése, ezért a tekercs tömege

$$
\begin{aligned}
M &= 100\int_\varphi \rho = 100\int_0^{2\pi} \rho(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\,dt = 100\int_0^{2\pi}(1+|\sin(t)|)\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt = \\
&= 200\int_0^{\pi}(1+\sin(t))\,dt = 200[t-\cos(t)]_0^{\pi} = 200(\pi-(-1)+2) = 200(\pi+2). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Figyeljük meg, hogy a fenti feladatban ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a sűrűségoloszlás a következő alakú:

$$\rho(r) := 1 + |x| \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Tétel. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos skalármezők és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\varphi : [a, b] \to \Omega$, $\psi : [c, d] \to \Omega$ sima utak esetén

1. $\displaystyle\int_{\widetilde{\varphi}} f = \int_{\varphi} f$;
2. $\displaystyle\int_{\varphi} (f + cg) = \int_{\varphi} f + c\int_{\varphi} g$;
3. $\displaystyle\int_{\varphi\vee\psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} g$;
4. alkalmas $u \in \mathcal{R}_{\varphi}$ esetén
$$\int_{\varphi} f = \nu(u) \cdot L(\varphi).$$

Biz.

1. Mivel $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ m$, ahol
$$m(t) := b + a - t \qquad (t \in [a, b]),$$
ezért
$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\varphi}} f &= \int_a^b f(\widetilde{\varphi}(t)) \cdot \|\dot{\widetilde{\varphi}}(t)\|_2 \,dt = \int_a^b f(\varphi(b + a - t)) \cdot \|\dot{\varphi}(b + a - t)(-1)\|_2 \,dt = \\ &= \int_b^a f(\varphi(u)) \cdot \|\dot{\varphi}(u)\|_2 \cdot (-1) \,du = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \|\dot{\varphi}(u)\|_2 \,du = \\ &= \int_{\varphi} f.\end{aligned}$$
2. Világos, hogy
$$\begin{aligned}\int_{\varphi} (f + cg) &= \int_a^b \{f(\varphi(t)) + cg(\varphi(t))\} \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \,dt = \\ &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \,dt + c\int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \,dt = \\ &= \int_{\varphi} f + c\int_{\varphi} g.\end{aligned}$$

3. Ez az állításnak a belátása az integrál intervallum szerinti additivitásának felhasználásával történik.

4. Lévén, hogy f folytonos függvény, ezért az integrálszámítás középértéktétele következtében

$$\int_{\varphi} f = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \, dt = f(u) \cdot \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \, dt = f(u) \cdot L(\varphi). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha

$$f(r) = 1 \qquad (r \in \Omega),$$

akkor

$$\int_{\varphi} f = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \, dt = \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\|_2 \, dt = L(\varphi),$$

azaz a fenti elsőfajú vonalintegrál nem más, mint $\mathcal{R}_{\varphi}$ ívhossza.

2.4. $\boxed{\text{D}}$

Megjegyzés. Középiskolai fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy valamely tömegpontra ható állandó nagyságú és irányú erő által végzett munkát a

$$W := \langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$

képlettel lehet kiszámítani, ahol

- $\mathbf{F}$ a tömegpontra ható erő, $F := |\mathbf{F}|$,
- $\mathbf{r}$ az elmozdulás vektora, $s := |\mathbf{r}|$,
- α az erő és az elmozdulás iránya által bezárt szög.

Tehát a munka az erő és az elmozdulás skaláris szorzata. Változó erő munkájának kiszámításakor a fenti értelmezésből indulunk ki. Legyen adott az $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}$ erőtér, amelyben egy tömegpontot mozgatunk a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ sima út meghatározta $\mathcal{R}_\varphi$ görbe mentén. Felosztjuk az $[a, b]$ intervallumot:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

így a $[t_{k-1}, t_k]$ osztásintervallumhoz tartozó $\Delta s_k := \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$ szakasz mentén a munka közelítőleg

$$W_k := \langle f(\varphi(t_{k-1})), \Delta s_k \rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

A sima φ utat közelítő, a fenti felosztáshoz tartozó töröttvonal mentén végzett munka így

$$\sum_{k=1}^{n} \langle f(\varphi(t_{k-1})), \Delta s_k \rangle .$$

A Lagrange-féle középértéktétel értelmében alkalmas $\xi_k^l \in [t_{k-1}, t_k]$ esetén

$$\varphi_l(t_k) - \varphi_l(t_{k-1}) = \dot{\varphi}_l(\xi_k^l) \cdot (t_k - t_{k-1}) \qquad (l \in \{1,2,3\}),$$

ezért a fenti összeg a következő alakú:

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} \langle f(\varphi(t_{k-1})), \dot{\varphi}(\xi_k^l) \rangle,$$

ami nem más, mint az

$$\langle f \circ \varphi, \dot{\varphi} \rangle : [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény integrálközelítő összege.

Példa. Állandó fizikai erőterek esetében a munka nem más, mint az erő és az „erő irányába eső elmozdulás" szorzata, ui. ha

$$F(r) := c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

és $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ sima út, akkor

$$\begin{aligned}
\int_\varphi F &= \int_\alpha^\beta \langle c, \dot{\varphi}(t) \rangle \, dt = \int_\alpha^\beta \{c_1 \dot{\varphi}_1(t) + c_2 \dot{\varphi}_2(t) + c_3 \dot{\varphi}_3(t)\} \, dt = \\
&= c_1\{\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\} + c_2\{\varphi_2(b) - \varphi_2(a)\} + c_3\{\varphi_3(b) - \varphi_3(a)\} = \\
&= \langle c, \varphi(b) - \varphi(a) \rangle .
\end{aligned}$$

A fenti példában előforduló munka számítási módja a termodinamikában is felbukkan. Valamely mozgatható dugattyúval ellátott henger esetében a gáz A keresztmetszetű dugattyút tol el s távolságra, ezért a p nyomású gáz által végzett tágulási munka („nyomás = nyomóerő / nyomott felület.)"

$$W = F \cdot \triangle s = p \cdot A \cdot s = p \cdot V$$

(feltéve persze, hogy a folyamat során a gáz nyomása nem változott).

Feladat. Határozzuk meg a v_{II} második kozmikus sebességet!
Útm. Ez az a sebesség, amellyel egy rakétát elindítva az kiszabadul a Föld vonzásából. Ha $R > 0$ a Föld sugara, akkor $h > 0$ magasságig a gravitációs erő ellenében végzett munka

$$W(h) := -\int_R^{R+h} \phi(r) \cdot r \, dr = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right),$$

ahol (a tömegvonzás törvénye szerint)

$$\phi(r) := -\gamma \frac{mM}{r^3} \qquad (r \in (0, +\infty)),$$

és $M > 0$ a Föld, ill. $m > 0$ a rakéta tömege. Ha azt akarjuk, hogy a rakéta kikerüljön a Föld vonzásából, akkor olyan $v > 0$ kezdősebességgel kell indítani, hogy a rakéta $\frac{mv^2}{2}$ kezdeti mozgási energiája fedezze az előbbi munkát. Mivel W korlátos, azaz

$$\sup\{W(h) \in \mathbb{R} : \ h \in [0, +\infty)\} = \frac{\gamma m M}{R},$$

ezért a

$$\frac{\gamma m M}{R} \leq \frac{mv^2}{2}$$

feltételből

$$v \geq v_{\mathrm{II}} := \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

következik. Mivel

$$M = 5.97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}, \qquad R = 6372{,}8\ \mathrm{km}, \qquad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kgs^2},$$

így

$$v_{\mathrm{II}} \approx 11{,}19\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az $\int_{\varphi} f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := \frac{-y}{x^2+y^2} i + \frac{x}{x^2+y^2} j \qquad (0 \neq r = (x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$\varphi(t) := R\cos(2\pi t) i + R\sin(2\pi t) j \qquad (t \in [0,1]).$$

Útm. A vonalintegrál definíciója alapján

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f &= \int_0^1 \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle \, dt = \\ &= \int_0^1 \left\langle \left(-\frac{r\sin(2\pi t)}{r^2}, \frac{r\cos(2\pi t)}{r^2}\right), (-2r\pi\sin(2\pi t), 2r\pi\cos(2\pi t))\right\rangle dt = 2\pi. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Legyen

$$\varphi(t) := (t, t^2), \quad \psi(t) := (t^2, t) \qquad (t \in [0,1]),$$

ill.

$$f(r) := (xy, y - x) \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

majd számítsuk ki az

$$\int_\varphi f, \qquad \int_\psi f$$

vonalintegrálokat!

Útm. Mivel

$$\dot\varphi(t) = (1,2t), \quad \dot\psi(t) = (2t,1) \qquad (t \in [0,1]),$$

ezért

$$\int_\varphi (xy\,dx + (y-x)\,dy) = \int_0^1 \left\{t^3 + (t^2 - t)\cdot 2t\right\}\,dt = \int_0^1 \left(3t^3 - 2t^2\right)\,dt = \frac{1}{12},$$

ill.

$$\int_\psi (xy\,dx + (y-x)\,dy) = \int_0^1 \left\{t^3\cdot 2t + (t - t^2)\right\}\,dt = \int_0^1 \left(2t^4 - t^2 + t\right)\,dt = \frac{17}{30}. \quad \blacksquare$$

Tétel. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $\varphi : [a,b] \to \Omega$ sima út, $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező, továbbá $\pi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ olyan folytonosan differenciálható bijekció, amelyre $\pi' > 0$. Ekkor f-nek a $\psi := \varphi \circ \pi : [\alpha, \beta] \to \Omega$ útra vonatkozó vonalintegrálja az alábbi formula alapján számítható:

$$\int_\psi f = \begin{cases} \displaystyle\int_\varphi f & (\pi(\alpha) = a, \quad \pi(\beta) = b), \\[2ex] \displaystyle -\int_\varphi f & (\pi(\alpha) = b, \quad \pi(\beta) = a). \end{cases}$$

Biz. Mivel

$$\dot\psi(t) = \dot\varphi(\pi(t))\cdot\dot\pi(t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]),$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_\psi f &= \int_\alpha^\beta \langle f(\psi(t)), \dot\psi(t)\rangle\,dt = \int_\alpha^\beta \langle f(\varphi(\pi(t))), \dot\varphi(\pi(t))\cdot\dot\pi(t)\rangle\,dt = \\ &= \int_\alpha^\beta \langle f(\varphi(\pi(t))), \dot\varphi(\pi(t))\rangle\cdot\dot\pi(t)\,dt = \int_{\pi(\alpha)}^{\pi(\beta)} \langle f(\varphi(s)), \dot\varphi(s)\rangle\,ds. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Tétel. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $\varphi : [\alpha, \alpha + h] \to \Omega$, ill. $\psi : [\beta, \beta + k] \to \Omega$ olyan sima utak, hogy $\varphi(\alpha + h) = \psi(\beta)$, továbbá $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormezők és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor

1. $\displaystyle\int_\varphi \{\lambda f + \mu g\} = \lambda \int_\varphi f + \mu \int_\varphi g;$
2. $\displaystyle\int_{\widetilde{\varphi}} f = -\int_\varphi f;$
3. $\displaystyle\int_{\varphi \cup \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f.$

Feladat. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := -i + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) j \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0), \qquad \varphi := \varphi_1 \vee \varphi_2,$$

ahol
$\mathcal{R}_{\varphi_1}$: az $y = x^2$ normálparabola $(1,1)$ kezdőpontú és $(2,4)$ végpontú íve,
$\mathcal{R}_{\varphi_2}$: a $(2,4)$ kezdőpontú és $(1,1)$ végpontú szakasz.
Útm. Ha tetszőleges $t \in [1,2]$, ill. $t \in [0,1]$ esetén

$$\varphi_1(t) := (t, t^2), \qquad \text{ill.} \qquad \varphi_2(t) := (2,4) + t\,((1,1) - (2,4)) = (2 - t, 4 - 3t),$$

akkor

$$\langle f(\varphi_1(t)), \dot{\varphi}_1(t) \rangle \equiv -1 + 2t \operatorname{arctg}(t), \qquad \text{ill.} \qquad \langle f(\varphi_2(t)), \dot{\varphi}_2(t) \rangle \equiv 1 - 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{4 - 3t}{2 - t}\right).$$

Így

$$\int_\varphi f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f = \int_1^2 (2t \operatorname{arctg}(t) - 1)\, dt + \int_0^1 \left(3 \operatorname{arctg}\left(\frac{4 - 3t}{2 - t}\right) - 1\right) dt.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\int_1^2 2t \operatorname{arctg}(t)\, dt &= \left[t^2 \operatorname{arctg}(t)\right]_1^2 - \int_1^2 t^2 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = 4 \operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} - \int_1^2 \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2}\, dt = \\
&= 4 \operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = \\
&= 4 \operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} - 1 + \operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(1) = \\
&= 5 \operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

és

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{4-3t}{2-t}\right) dt &= \int_1^2 \operatorname{arctg}(s)\cdot\frac{2}{(s-3)^2}\,ds = 2\int_1^2 \operatorname{arctg}(s)\frac{d}{ds}\frac{1}{3-s}\,ds = \\
&= 2\left[\frac{1}{3-s}\operatorname{arctg}(s)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{3-s}\cdot\frac{2}{1+s^2}\,ds = \\
&= 2\operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(\frac{A}{3-s} + \frac{Bs+C}{1+s^2}\right) ds = \\
&= 2\operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5}\int_1^2 \left(\frac{1}{3-s} + \frac{s+3}{1+s^2}\right) ds = \\
&= 2\operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5}(\ln(2)-\ln(1)) + \frac{1}{10}\int_1^2 \frac{2s}{1+s^2}\,ds + \\
&\quad + \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{3}{1+s^2}\,ds = \\
&= 2\operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{5} + \frac{1}{10}\left[\ln(1+s^2)\right]_1^2 + \frac{3}{5}\left[\operatorname{arctg}(s)\right]_1^2 = \\
&= \frac{26\operatorname{arctg}(2) - 4\pi + \ln(10)}{10},
\end{aligned}
$$

ezért

$$\int_\varphi f = \frac{128\operatorname{arctg}(2) - 17\pi + \ln(1000)}{10}. \qquad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy teljesül a

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\varphi f = 0$$

egyenlőség!

$$f(r) := \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}i + \frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}j \qquad (r=(x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

$$\varphi(t) := R\cos(t)i + R\sin(t)j \qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Útm. Mivel

$$\dot{\varphi}(t) = (-R\sin(t), R\cos(t)) \qquad (t \in [0,2\pi]),$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_\varphi f &= \int_0^{2\pi} \frac{-R^2\sin^2(t) - R^2\cos^2(t)}{(R^2\cos^2(t) + R^2\cos(t)\sin(t) + R^2\sin^2(t))^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2}\,dt \longrightarrow 0 \qquad (R \to +\infty). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$f(r) := r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

erőtérnek a

$$\varphi(t) := R\cos(t)i + R\sin(t)j + vtk \qquad (t \in [0,2\pi])$$

út mentén végzett munkáját, ahol $R, v > 0$ adott állandók!
Útm.

$$W = \int_0^{2\pi} \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi} v^2 t\,dt = 2\pi^2 v^2. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := xe^{y-x}i + ye^x j \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \varphi := \varphi_1 \cup \varphi_2,$$

ahol
$\mathcal{R}_{\varphi_1}$: az $(1,0)$ kezdőpontú és $(2,\sqrt{3})$ végpontú szakasz,
$\mathcal{R}_{\varphi_2}$: a $(2,\sqrt{3})$ kezdőpontú és $(0,0)$ végpontú szakasz.
Útm. Ha

$$\varphi_1(t) := (1,0) + t(1,\sqrt{3}), \quad \varphi_2(t) := (1-t)(2,\sqrt{3}) \qquad (t \in [0,1]),$$

akkor

$$\dot{\varphi}_1(t) = (1,\sqrt{3}), \quad \dot{\varphi}_2(t) = -(2,\sqrt{3}) \qquad (t \in [0,1]),$$

így

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\, dt &= \int_0^1 \langle f(\varphi_1(t)), \dot\varphi_1(t)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle f(\varphi_2(t)), \dot\varphi_2(t)\rangle\, dt = \\
&= \int_0^1 \Big\{ (1+t)\exp(\sqrt{3}t - (1+t)) + 3t\exp(1+t) \Big\}\, dt = \\
&= \int_0^1 \Big\{ -4(1-t)\exp((\sqrt{3}-2)(1-t)) - 3(1-t)\cdot \\
&\quad \cdot \exp(2(1-t))\}\, dt = \\
&= \int_0^1 \Big\{ (1+t)\exp((\sqrt{3}-1)t - 1) + 3ete^t - 4(1-t)\cdot \\
&\quad \cdot \exp((\sqrt{3}-2)(1-t)) - 3(1-t)\exp(2(1-t)) \Big\}\, dt = \\
&= \Bigg[\frac{(1+t)\exp((\sqrt{3}-1)t-1)}{\sqrt{3}-1} + 3ete^t + \\
&\quad + \frac{4(1-t)\exp((\sqrt{3}-2)(1-t))}{\sqrt{3}-2} + \\
&\quad + \frac{3(1-t)\exp(2(1-t))}{2} \Bigg]_0^1 - \\
&\quad - \int_0^1 \Bigg\{ \frac{(1+t)\exp((\sqrt{3}-1)t-1)}{\sqrt{3}-1} + 3e^{t+1} - \\
&\quad - \frac{4\exp((\sqrt{3}-2)(1-t))}{\sqrt{3}-2} - \frac{3\exp(2(1-t))}{2} \Bigg\}\, dt.
\end{aligned}$$

Ezért a második rész kiintegrálásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle \,dt &= \frac{2\exp(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1} + 3e^2 - \frac{1}{e(\sqrt{3}-1)} - \frac{4\exp(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-2} - \frac{3e^2}{2} - \\
&\quad - \left[\frac{\exp((\sqrt{3}-1)t-1)}{(\sqrt{3}-1)^2} + 3e^{t+1} + \frac{4\exp((\sqrt{3}-2)(1-t))}{(\sqrt{3}-2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\exp(2(1-t))}{4}\right]_0^1 = \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}\right)\exp(\sqrt{3}-2) - \frac{3e^2}{2} - \frac{4}{(\sqrt{3}-2)^2} - \\
&\quad \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)\frac{1}{e} + 3e - \\
&\quad - \left(\frac{4}{\sqrt{3}-2} - \frac{4}{(\sqrt{3}-2)^2}\right)\exp(\sqrt{3}-2) + \frac{3e^2}{4} = \\
&= \left(36 + \frac{41\sqrt{3}}{2}\right)\exp(\sqrt{3}-2) - \frac{3e^2}{4} + 3e + \frac{1}{2e} - \frac{115}{4} - \\
&\quad -16\sqrt{3}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := yi + ye^x j \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \varphi := \varphi_1 \cup \varphi_2,$$

ahol

$\mathcal{R}_{\varphi_1}$: az $y = \sqrt{x+1}$ egyenletű görbe $(0,1)$ kezdőpontú és az $y = -x\sqrt{2}$ egyenletű egyenesen lévő végpontú íve,

$\mathcal{R}_{\varphi_2}$: az előbbi pont, mint kezdőpontú és $(0,0)$ végpontú szakasz.

Útm. Ha

$$\widetilde{\varphi}_1(t) := (t, \sqrt{t+1}), \quad \varphi_2(t) := (t, -t\sqrt{2}) \qquad (t \in [-1/2, 0]),$$

akkor

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right), \quad \dot{\varphi}_2(t) = (1, -\sqrt{2}) \qquad (t \in [-1/2, 0]),$$

így

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f &= \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f = \\
&= \int_0^{-1/2} \left\{\sqrt{t+1} + \sqrt{t+1}e^t \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right\} dt + \int_{-1/2}^0 \left\{-t\sqrt{2} - t\sqrt{2}e^t(-\sqrt{2})\right\} dt = \\
&= \int_0^{-1/2} \left\{\sqrt{t+1} + \frac{e^t}{2} + t\sqrt{2} - 2te^t\right\} dt = \\
&= \left[\frac{2\sqrt{(t+1)^3}}{3} + \frac{e^t}{2} + \frac{\sqrt{2}t^2}{2} - 2te^t\right]_0^{-1/2} + \int_0^{-1/2} 2e^t\, dt = \\
&= \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2e^t\right]_0^{-1/2} = \\
&= \frac{7\sqrt{2} - 76}{24} + \frac{7}{2\sqrt{e}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $k \in \{1,2,3,4\}$, majd számítsuk ki az

$$\int_{\varphi_k} f$$

vonalintegrálokat az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := 2xyi + x^2j \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

$\mathcal{R}_{\varphi_1}$ az $y = x$, $\mathcal{R}_{\varphi_2}$ az $y = x^2$, $\mathcal{R}_{\varphi_3}$ az $y = x^3$, ill. $\mathcal{R}_{\varphi_4}$ az $y = x^4$ egyenletű görbe $(0,0)$-ból $(1,1)$-be menő íve.

Útm. Ha

$$\varphi_1(t) := (t, t), \quad \varphi_2(t) := (t, t^2), \quad \varphi_3(t) := (t, t^3), \quad \varphi_4(t) := (t, t^4) \qquad (t \in [0,1]),$$

akkor

$$\dot\varphi_1(t) = (1{,}1), \quad \dot\varphi_2(t) = (1{,}2t), \quad \dot\varphi_3(t) = (1{,}3t^2), \quad \dot\varphi_4(t) = (1{,}4t^3) \qquad (t \in [0{,}1]).$$

Így

$$\int_{\varphi_1} f = \int_0^1 \langle (2t^2, t^2), (1{,}1)\rangle\, dt = \int_0^1 3t^2\, dt = 1,$$

$$\int_{\varphi_2} f = \int_0^1 \langle (2t^3, t^2), (1{,}2t)\rangle\, dt = \int_0^1 4t^3\, dt = 1,$$

$$\int_{\varphi_3} f = \int_0^1 \langle (2t^4, t^2), (1{,}3t^2)\rangle\, dt = \int_0^1 5t^4\, dt = 1,$$

$$\int_{\varphi_4} f = \int_0^1 \langle (2t^5, t^2), (1{,}4t^3)\rangle\, dt = \int_0^1 6t^5\, dt = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_{\varphi} f$$

vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := \frac{1}{y} i + \frac{1}{x} j \qquad (r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}),$$

$\mathcal{R}_\varphi$ az $y = 1$, $x = 4$, ill. $y = x$ egyenesek határolta háromszöglemez határa (pozitív körbejárással).

Útm. Ha bármely $t \in [1{,}4]$ esetén

$$\varphi_1(t) := (t{,}1), \qquad \varphi_2(t) := (4, t), \qquad \widetilde{\varphi}_3(t) := (t, t),$$

akkor

$$\dot\varphi_1(t) = (1{,}0), \qquad \dot\varphi_2(t) = (0{,}1), \qquad \dot{\widetilde{\varphi}}_3(t) = (1{,}1).$$

Így

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f - \int_{\varphi_3} f =$$

$$= \int_1^4 (1+0)\, dt + \int_1^4 \left(0 + \frac{1}{4}\right) dt - \int_1^4 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= 3 + \frac{3}{4} - [2\ln(t)]_1^4 = \frac{15}{4} - 2\ln(4). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := 3x^2yz^2\operatorname{ch}(x^3y)i + x^3z^2\operatorname{ch}(x^3y)j + (1+2z\operatorname{sh}(x^3y))k \qquad (r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

$\mathcal{R}_\varphi$ a (3,0,0), (0,5,0) és (0,0,1) csúcspontú háromszöglemez határa (pozitív körbejárással).
Útm. Ha

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &:= (1-t)(3,0,0)+(0,5,0)t = (3,0,0)+t(-3,5,0) \qquad (t\in[0,1]),\\
\varphi_2(t) &:= (1-t)(0,5,0)+t(0,0,1) = (0,5,0)+t(0,-5,1) \qquad (t\in[0,1]),\\
\varphi_3(t) &:= (1-t)(0,0,1)+t(3,0,0) = (0,0,1)+t(3,0,-1) \qquad (t\in[0,1]),
\end{aligned}$$

akkor bármely $t\in[0,1]$ esetén

$$f(\varphi_1(t) = (0,0,1), \qquad f(\varphi_1(t)) = (0,t,1), \qquad f(\varphi_1(t)) = (0,1-t+27(1-t)^2,1).$$

Így

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f &= \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \int_{\varphi_3} f =\\
&= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 (-5t+1)\,dt + \int_0^1 (-1)\,dt =\\
&= \left[-\frac{5}{2}t^2+t-t\right]_0^1 = -\frac{5}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := 3xyi - 5zj + 10xk \qquad (r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

$$\varphi(t) := (t^2+1,2t^2,t^3) \qquad (t\in[1,2]).$$

Útm. Mivel

$$\dot\varphi(t) = (2t,4t,3t^2) \qquad (t\in[1,2]),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f &= \int_1^2 \left\langle (6t^2(t^2+1), -5t^2, 10(t^2+1)), (2t, 4t, 3t^2) \right\rangle \,dt = \\
&= \int_1^2 \left(12t^3(t^2+1) - 20t^4 + 30t^2(t^2+1)\right) dt = \\
&= \int_1^2 \left(12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2\right) dt = \left[2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3\right]_1^2 = \\
&= 303. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált az alábbi függvények esetében!

$$f(r) := x^2 i + 2xyj + xzk \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$\varphi(t) := (1+t, 2-t, 3+t) \qquad (t \in [0,1]).$$

Útm. Mivel

$$\dot\varphi(t) = (1, -1, 1) \qquad (t \in [0,1]),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f &= \int_0^1 \left\langle ((1+t)^2, 2(1+t)(2-t), (1+t)(3+t)), (1, -1, 1) \right\rangle dt = \\
&= \int_1^2 \left((1+t)^2 - 2(1+t)(2-t) + (1+t)(3+t)\right) dt = \\
&= \int_1^2 \left(4t + 4t^2\right) dt = \left[2t^2 + \frac{4t^3}{3}\right]_1^2 = \\
&= \frac{10}{3}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az origó körüli 90°-os forgatás,

$$J := [A(i), A(j)], \qquad \text{ill.} \qquad F(r) := Jr \qquad (r \in \mathbb{R}^2),$$

továbbá $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ az origó középpontú, $0 < b \leq a$ féltengelyű ellipszisvonal szokásos paraméterezése (vö. 4. gyakorlat). Számítsuk ki az

$$\int_\varphi F$$

vonalintegrált!

Útm. Mivel

$$\varphi(t) = a\cos(t)i + b\sin(t)j, \quad \dot\varphi(t) = -a\sin(t)i + b\cos(t)j \qquad (t \in [0,2\pi])$$

és

$$F(r) = -yi + xj \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

$$\int_\varphi F = \int_0^{2\pi} \langle F(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle -b\sin(t)i + a\cos(t)j, -a\sin(t)i + b\cos(t)j\rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab(\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt = 2ab\pi. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ reguláris út, akkor az $\mathcal{R}_\varphi$ görbe minden pontjához hozzárendelhetünk egy ún. **érintővektor**t az alábbi módon:

$$e_\varphi : \mathcal{R}_\varphi \to \mathbb{R}^d, \qquad e_\varphi(r) := \frac{\dot\varphi(\varphi^{-1}(r))}{\|\dot\varphi(\varphi^{-1}(r))\|}.$$

Ennek segítségével fogalmazzuk meg az elsőfajú és a másodfajú vonalintegrál kapcsolatára vonatkozó állítást.

Tétel. Legyen $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folytonos vektormező, $\varphi : [a,b] \to \mathcal{R}_\varphi$ reguláris út. Ekkor

$$\int_\varphi \langle f, e_\varphi\rangle(r)\, dr = \int_\varphi \langle f(r), dr\rangle.$$

Biz. Világos, hogy

$$\int_\varphi \langle f, e_\varphi\rangle(r)\, dr = \int_a^b \langle f(\varphi(t)), e_\varphi(\varphi(t))\rangle \cdot \|\varphi'(t)\|_2 \, dt =$$

$$= \int_a^b \left\langle f(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2} \right\rangle \cdot \|\varphi'(t)\|_2 \, dt =$$

$$= \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \, dt = \int_\varphi \langle f(r), dr\rangle. \quad \blacksquare$$

2.5. $\boxed{\text{E1}}$

Definíció. Ha $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ reguláris, akkor tetszőleges $(a, b) \in I \times J$ esetén az $n_\Psi(a, b)$ vektorra merőleges, az $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$ felület $\Psi(a, b)$ pontjára illeszkedő síkot az $\mathcal{F}$ felület $\Psi(a, b)$-beli **érintősík**jának nevezzük:

$$\left\{\Psi(a,b) + \Psi'(a,b)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\} =$$

$$= \left\{\Psi(a,b) + u\partial_1\Psi(a,b) + v\partial_2\Psi(a,b) \in \mathbb{R}^3 :\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Feladat. Adott $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumok, ill.

$$\Psi(u,v) := (u+v, u-v, uv) \qquad ((u,v) \in I \times J),$$

$\mathcal{R}_\Psi =: \mathcal{F}$ esetén határozzuk meg $\mathcal{F}$-nek azt az érintősíkját, amely párhuzamos az

$$x + 2y + 2z = 32$$

egyenletű síkkal!
Útm. Mivel

$$\Psi'(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ v & u \end{bmatrix} \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2),$$

így $\mathcal{F}$ reguláris felület,

$$n_\Psi(u,v) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{bmatrix} = (u+v, v-u, -2) \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2).$$

Tehát

$$n_\Psi \parallel (1{,}2{,}2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = 1/2, \quad v = -3/2.,$$

Így a

$$\Psi(1/2, -3/2) = (-1{,}2, -3/4)$$

pontbeli érintősík egyenlete:

$$x+1+2(y-2)+2(z+3/4)=0. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{C}^1(I \times J, \mathbb{R})$, akkor a

$$\Psi(u,v) := (u,v,f(u,v)) \quad ((u,v) \in I \times J)$$

leképezés értékkészlete az f függvény grafikonja. Ennek a felületnek az $(a,b) \in I \times J$ paraméterhez tartozó pontjában vett érintősíkjának egyenlete

$$\boxed{z = f(a,b) + \partial_1 f(a,b)(x-a) + \partial_2 f(a,b)(y-b)}.$$

Ui. tetszőleges $(u,v) \in I \times J$ esetén

$$\partial_1\Psi(u,v) \times \partial_2\Psi(u,v) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_1 f(u,v) \\ 0 & 1 & \partial_2 f(u,v) \end{bmatrix} = (-\partial_1 f(u,v), -\partial_2 f(u,v), 1).$$

Így a $\Psi(a,b) = (a,b,f(a,b))$ pontbeli érintősík egyenlete:

$$-\partial_1 f(a,b)(x-a) - \partial_2 f(a,b)(y-b) + z - f(a,b) = 0.$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned}
&\left\{\Psi(a,b) + u\partial_1\Psi(a,b) + v\partial_2\Psi(a,b) \in \mathbb{R}^3 : \ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\
&\left\{(a,b,f(a,b)) + u(1,0,\partial_1 f(a,b)) + v(0,1,\partial_2 f(a,b)) \in \mathbb{R}^3 : \ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\
&\left\{(a+u, b+v, f(a,b) + u\partial_1 f(a,b) + v\partial_2 f(a,b)) \in \mathbb{R}^3 : \ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\
&\left\{(x,y,f(a,b) + \partial_1 f(a,b)(x-a) + \partial_2 f(a,b)(y-b)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $0 < a \in \mathbb{R}$, majd mutassuk meg, hogy a

$$\Psi(u,v) := \left(u, v, \frac{a^3}{uv}\right) \quad \left((u,v) \in [1,3]^2\right),$$

paraméterezte $\mathcal{F}$ felület érintősíkjai és az $\mathbb{R}^3$-beli koordinátasíkok állandó térfogatú tetraédert alkotnak!

Útm. A fentiek következtében, ha $(u_0, v_0) \in [1,3]^2$, akkor a felület $\frac{a^3}{u_0 v_0}$ pontján átmenő érintősík egyenlete:

$$z = \frac{a^3}{u_0 v_0} - \frac{a^3}{u_0^2 v_0}(x - u_0) - \frac{a^3}{u_0 v_0^2}(y - v_0),$$

ill.

$$\frac{a^3}{u_0^2 v_0}x + \frac{a^3}{u_0 v_0^2}y + z = \frac{a^3}{u_0 v_0} + \frac{a^3}{u_0 v_0} + \frac{a^3}{u_0 v_0} = \frac{3a^3}{u_0 v_0}.$$

A $\frac{3a^3}{u_0 v_0} \neq 0$ számmal végigosztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{x}{3u_0} + \frac{y}{3v_0} + \frac{z}{\frac{3a^3}{u_0 v_0}} = 1.$$

A szóben forgó tetraéder térfogata tehát:

$$V = \frac{3u_0 \cdot 3v_0 \cdot \frac{3a^3}{u_0 v_0}}{6} = \frac{9a^3}{2}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és

$$\Psi(u, v) := \left(u, v, uf\left(\frac{v}{u}\right)\right) \qquad \left((u, v) \in [2,6]^2\right).$$

Lássuk be, hogy az $\mathcal{R}_\Psi$ felület érintősíkjai átmennek az origón!
Útm. A $\Psi(u_0, v_0)$ pontban a felületi normális:

$$\begin{aligned}\partial_1\Psi(u_0, v_0) \times \partial_2\Psi(u_0, v_0) &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f(v_0/u_0) - (v_0/u_0) \cdot f'(v_0/u_0) \\ 0 & 1 & f'(v_0/u_0) \end{bmatrix} = \\ &= \left((v_0/u_0) \cdot f'(v_0/u_0) - f(v_0/u_0), -f'(v_0/u_0), 1\right),\end{aligned}$$

az érintősík egyenlete tehát

$$f'(v_0/u_0) \cdot (v_0/u_0) - f(v_0/u_0)(x - u_0) - f'(v_0/u_0)(y - v_0) + z - u_0 \cdot f(v_0/u_0) = 0.$$

Az

$$a := f(v_0/u_0) - f'(v_0/u_0) \cdot (v_0/u_0) \quad \text{és} \quad b := f'(v_0/u_0)$$

jelölés bevezetésével

$$ax + by + z = au_0 + bv_0 - u_0 \cdot f(v_0/u_0) \ .$$

Az utóbbi egyenlőség jobb oldalára

$$au_0 + bv_0 - u_0 \cdot f(v_0/u_0) = 0$$

teljesül, ugyanis

$$au_0 + bv_0 - u_0 \cdot f(v_0/u_0) = u_0 f(v_0/u_0) - f'(v_0/u_0) \cdot v_0 + v_0 f'(v_0/u_0) - u_0 \cdot f(v_0/u_0) = 0 \ .$$

Így tehát minden $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}_f$ esetén $a \cdot 0 + b \cdot 0 + 0 = 0$, azaz minden érintősík átmegy az origón. ■

2.6. $\boxed{\text{E2}}$

Megjegyzés. (**A felületi integrál fizikai jelentése.**) A felületi integrálnak a fizika különböző ágaiban különböző szemléletes jelentése van. Az áramlástanban $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}$ az áramló folyadék sebességi vektormezője (a tér r helyvektorú pontjához az ott tartózkodó folyadékrészecske $f(r)$ sebességvektorát rendeljük hozzá). A folyadék útjába egy $\Psi : I \times \times J \to \mathbb{R}^3$, $\Psi \in \mathfrak{C}^1$ paraméterezéssel adott $\mathcal{R}_\Psi$ felületet helyezünk, és meghatározzuk az adott felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyiségét: f-nek Ψ-re vonatkozó **fluxus**át. (A folyadékmennyiséget a térfogattal mérjük. Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor a tömege arányos a térfogatával).

Felosztjuk a felületet „kicsiny” felületdarabokra, és – lévén, hogy f folytonos – hozzárendeljük a felület-darab minden pontjához a felületdarab valamely r pontjához tartozó $f(r)$ sebességvektort (a folytonosság következtében a felületdarab többi pontjához tartozó sebességvektorok ettől csak „keveset” térnek el). A felületdarabon Δt idő alatt áthaladó folyadékrészecskék egy – ferde hasábszerű – térrészt töltenek ki, amelynek alapja maga a felületdarab, élei pedig $|f(r)|\Delta t$ méretűek.

Ezt a felosztást a következőképpen végezzük el. Kiindulásképpen felosztjuk az $I \times J$ intervallumot:

$$I \times J =: \bigcup_{i,\,j} [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \, .$$

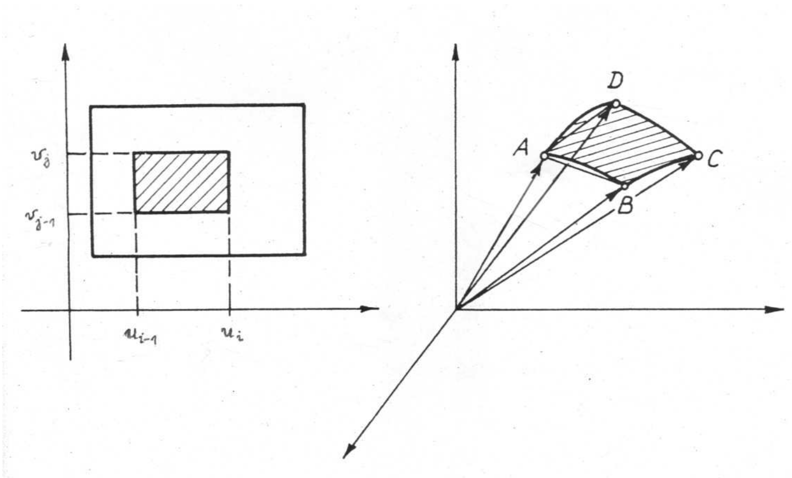
Az $[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ osztástégla csúcsai által meghatározott $ABCD$ felületrészt, ahol

$$A := \Psi(u_{i-1}, v_{j-1}), \quad B := \Psi(u_i, v_{j-1}), \quad C := \Psi(u_i, v_j) \quad , D := \Psi(u_{i-1}, v_j)$$

az

$$\overrightarrow{AB} = \Psi(u_i, v_{j-1}) - \Psi(u_{i-1}, v_{j-1}) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AD} = \Psi(u_{i-1}, v_j) - \Psi(u_{i-1}, v_{j-1})$$

vektorok által meghatározott paralelogrammával közelítjük (vö. 2.1. ábra). A felosztást minden határon túl finomítva ezen paralelogrammák uniójával közelítjük a felületet (**pikkelyrendszer**).



2.1. ábra.

A Lagrange-féle középértéktételből kapjuk, hogy van olyan

$$\xi_i \in (u_{i-1}, u_i), \qquad \text{ill.} \qquad \eta_j \in (v_{j-1}, v_j),$$

hogy

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \Psi(u_i, v_{j-1}) - \Psi(u_{i-1}, v_{j-1}) = \\
&= \partial_1\Psi(\xi_i, v_{j-1})(u_i - u_{i-1}) \approx \partial_1\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})(u_i - u_{i-1}), \\
\overrightarrow{AD} &= \Psi(u_{i-1}, v_j) - \Psi(u_{i-1}, v_{j-1}) = \\
&= \partial_2\Psi(u_{i-1}, \eta_j)(v_j - v_{j-1}) \approx \partial_2\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})(v_j - v_{j-1}).
\end{aligned}$$

Az $ABCD$ paralelogramma $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$ területe tehát közelítőleg:

$$|\partial_1\Psi(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \partial_2\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})| \cdot (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) =$$

$$= |n_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})| \cdot (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) =: t_{ij}$$

A paralelogrammák minden pontjához az $f(A)$ sebességvektort rendeljük:

$$f(\Psi(u, v)) := f(A) = f(\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})) \qquad ((u, v) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j])\,.$$

Így, ha M_{ij} jelöli az $f(A) = f(\Psi(u_{i-1}, v_{j-1}))$ sebességvektor $n^\circ{}_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})$ normális irányába eső előjeles vetületét:

$$M_{ij} := \langle f(A), n^\circ{}_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})\rangle$$

(ez a mennyiség pozitív vagy negatív aszerint, hogy a folyadék a felületdarabon, ill. a paralelogrammán a normális irányában, vagy azzal ellenkező irányban lép-e át), akkor a szóban forgó paralelogrammán egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyisége nem más, mint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata:

$$\begin{aligned} M_{ij} \cdot t_{ij} \;\; &= \;\; \langle f(\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})), n^\circ{}_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})\rangle \cdot |n_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})| \cdot (u_i - u_{i-1}) \cdot \\ & \cdot (v_j - v_{j-1}) = \langle f(\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})), n_\Psi(u_{i-1}, v_{j-1})\rangle\, (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}). \end{aligned}$$

Ezek $\sum\limits_{i,j} M_{ij} \cdot t_{ij}$ összege az

$$\langle f \circ \Psi, n_\Psi\rangle : I \times J \to \mathbb{R}$$

függvény integrálközelítő összege – az áramló folyadék térfogatának közelítése. Ha az f vektormező (pl. elektromos) erőteret ír le, akkor a $M_{ij} \cdot t_{ij}$ a t_{ij}-n (ún. **felületelem**en) az n_Ψ normális irányában áthaladó erővonalak számát adja meg. $\sum\limits_{i,j} M_{ij} \cdot t_{ij}$ azt fejezi ki, hogy a felületen időegység alatt mennyivel több erővonal halad át a normális irányában, mint az ellenkező irányban.

Ennek alapján az

$$\int_{I\times J} \langle f \circ \Psi, n_\Psi\rangle$$

felületi integrált szokás a szóban forgó felületen egység idő alatt átáramló folyadék térfogatának vagy a felületet „átdöfő” erővonalak számának nevezni.

A felületi integrál fizikai jelentésének iménti tárgyalásakor a „felületi négyszög” területe közelítőleg

$$|\partial_1\Psi(u_{i-1},v_{j-1})\times\partial_2\Psi(u_{i-1},v_{j-1})|\cdot(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})=$$

$$=|n_\Psi(u_{i-1},v_{j-1})|\cdot(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})=:t_{ij}$$

volt. A fentiekből következik, hogy

$$\sum_{i,j} t_{ij} \quad \text{az} \quad |n_\Psi| : I\times J\to\mathbb{R}$$

függvény egy integrálközelítő összege, ezért ésszerű az $\mathcal{R}_\Psi$ felület felszínét az

$$\mathcal{F}(\Psi):=\int_{I\times J}|n_\Psi|=\int_{I\times J}|\partial_1\Psi\times\partial_2\Psi|$$

formulával értelmezni.

Megjegyzés. Mint tudjuk (vö. 4. beadható feladatsor), ha az $\mathcal{R}_\Psi$ felület Euler-Monge-féle módon van megadva egy $h\in\mathfrak{C}^1(I\times J,\mathbb{R})$ függvény révén, azaz

$$\Psi(u,v):=(u,v,h(u,v))\quad((u,v)\in I\times J),$$

akkor

$$\boxed{\mathcal{F}(\Psi)=\int_{I\times J}\sqrt{1+[\partial_1 h]^2+[\partial_2 h]^2}}.$$

Ha ez a h egy $F\in\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F\in\mathfrak{C}^1$ függvény által meghatározott implicit függvény, azaz

$$F(u,v,h(u,v))=0\quad((u,v)\in I\times J),$$

és teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, akkor

$$\operatorname{grad} h(u,v)=-\frac{\partial_{(12)}F(u,v,h(u,v))}{\partial_3F(u,v,h(u,v))}\quad((u,v)\in I\times J),$$

azaz tetszőleges $(u,v)\in I\times J$ esetén

$$\partial_1h(u,v)=-\frac{\partial_1F(u,v,h(u,v))}{\partial_3F(u,v,h(u,v))},\qquad\partial_2h(u,v)=-\frac{\partial_2F(u,v,h(u,v))}{\partial_3F(u,v,h(u,v))},$$

így

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Psi) &= \int\limits_{I\times J}\sqrt{1+\left[\frac{\partial_1 F(u,v,h(u,v))}{\partial_3 F(u,v,h(u,v))}\right]^2+\left[\frac{\partial_2 F(u,v,h(u,v))}{\partial_3 F(u,v,h(u,v))}\right]^2}\,\mathrm{d}(u,v) = \\ &= \int\limits_{I\times J}\frac{|\mathrm{grad}\,F(u,v,h(u,v))|}{|\partial_3 F(u,v,h(u,v))|}\,\mathrm{d}(u,v).\end{aligned}$$

Példák.

1. Ha $g \in \mathfrak{C}^1([a,b],\mathbb{R})\colon g(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$, és

$$\Psi(u,v) := (u, g(u)\cos(v), g(u)\sin(v)) \quad ((u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi])$$

($\mathcal{R}_\Psi$: a g függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület), akkor

$$|\partial_1\Psi(u,v)\times\partial_2\Psi(u,v)| = g(u)\sqrt{1+[g'(u)]^2} \quad ((u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]),$$

ezért

$$\mathcal{F}(\Psi) = \int\limits_{[a,b]\times[0,2\pi]} g(u)\sqrt{1+[g'(u)]^2}\,\mathrm{d}(u,v) = 2\pi\int_a^b g(u)\sqrt{1+[g'(u)]^2}\,\mathrm{d}u.$$

2. Ha $I \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $\varphi \in \mathfrak{C}^1\left(I,\mathbb{R}^3\right)$ injektív,

$$\varphi_1(u) =: x(u) > 0, \quad \varphi_2(u) = 0, \quad \varphi_3(u) =: z(u) \quad (u \in I),$$

továbbá

$$\Psi(u,v) := (x(u)\cos(v), x(u)\sin(v), z(u)) \quad ((u,v)\in I\times[0,2\pi])$$

($\mathcal{R}_\Psi$: $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület), akkor tetszőleges $(u,v) \in I\times[0,2\pi]$ esetén

$$E(u,v) = [x'(u)]^2 + [z'(u)]^2, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = [x(u)]^2,$$

ezért

$$\mathcal{F}(\Psi) = \int\limits_{I\times[0,2\pi]}\sqrt{\{[x'(u)]^2+[z'(u)]^2\}[x(u)]^2}\,\mathrm{d}(u,v) = 2\pi\int\limits_I x(u)\sqrt{[x'(u)]^2+[z'(u)]^2}\,\mathrm{d}u.$$

Spec. esetek:

(a) Ha
$$\varphi(u) := (u,0,b(1-u/a)) \quad (u \in [a_0,a]),$$
akkor $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület csonkakúp-palást, melynek felszíne:
$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{a_0}^{a} u\sqrt{1+(b/a)^2}\,du = \pi(a^2-a_0^2)\sqrt{1+(b/a)^2}.$$

(b) Ha
$$\varphi(u) := [R,0,u] \quad (u \in [z_0,z_1]),$$
akkor $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület hengerpalást, melynek felszíne:
$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} R\sqrt{1}\,du = 2R\pi(z_1-z_0).$$

(c) Ha
$$\varphi(u) := [R\sin(u),0,R\cos(u)] \quad (u \in [0,\pi]),$$
akkor $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület gömbfelület, melynek felszíne:
$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2\pi \int_0^{\pi} R\sin(u)\sqrt{R^2\cos^2(u)+R^2\sin^2(u)}\,du = \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin(u)\,du = 4\pi R^2.\end{aligned}$$

(d) Ha
$$\varphi(u) := [R+r\sin(u),0,r\cos(u)] \quad (u \in [0,2\pi]),$$
akkor $\mathcal{R}_\varphi$ z-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület tóruszfelület, melynek felszíne:
$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2\pi \int_0^{2\pi} (R+r\sin(u))\sqrt{r^2\cos^2(u)+r^2\sin^2(u)}\,du = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} r(R+r\sin(u))\,du = 4\pi^2 rR.\end{aligned}$$

2.7. $\boxed{\text{F}}$

Az A és B halmazok **egyesítés**ét $A \cup B$, **metszet**ét $A \cap B$, **különbség**ét $A \backslash B$ jelöli; az **üres halmaz** jele: $\emptyset$. Ha A a B halmaz részhalmaza, akkor ezt írjuk: $A \subset B$ (megengedve, hogy $A = B$). Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B egyesítésére az $A \uplus B$ jelölést használjuk. Az **egész szám**ok halmazát $\mathbb{Z}$, a pozitív egész számok halmazát $\mathbb{N}$, a **természetes szám**ok halmazát $\mathbb{N}_0$ $(= \mathbb{N} \cup \{0\})$, a **valós szám**ok halmazát $\mathbb{R}$, a **komplex szám**ok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli. Minthogy sok állítás egyaránt érvényes mind a valós, mind a komplex számok halmazára, ezért az $\mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ helyett azok bármelyikére a $\mathbb{K}$ jelölést is használni fogjuk.

Definíció. Az $\mathcal{M}$ halmazt **halmazrendszer**nek nevezzük, ha $\mathcal{M}$ minden eleme halmaz. Halmazrendszer pl. $\{\emptyset\}$, de adott $\mathcal{H}$ halmaz esetén a $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ **hatványhalmaz** ($\mathcal{H}$ részhalmazainak a halmaza) is halmazrendszer.

Adott A, B halmazok esetében $A \rightarrow B$ jelöli azon függvényeknek a halmazát, amelyek képhalmaza B, értelmezési tartománya része A-nak. A B^A szimbólum legyen az előbbi függvények közül azoknak a halmaza, amelyeknek az értelmezési tartománya egyenlő A-val. Az $f \in B^A$ függvényre használjuk még az $f : A \rightarrow B$ jelölést is. Ha B halmazrendszer, akkor **halmazértékű függvény**ről beszélünk. Gyakran használjuk az $(f_x : x \in \mathcal{D}_f)$, továbbá az f_x $(x \in \mathcal{D}_f)$, ill. az $(f_x)_{x \in \mathcal{D}_f}$ **indexes jelölés**módot, továbbá f értékkészletére az $\{f_x : x \in \mathcal{D}_f\}$ jelölést is. Ha az $A =: I$ halmaz neve **indexhalmaz**, és $f_i =: \mathcal{H}_i$, akkor a $(\mathcal{H}_i : i \in I)$ függvényt **indexelt halmazrendszer**nek nevezzük. $I = \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N})$ neve halmaz**sorozat**. Valamely $(\mathcal{H}_i : i \in I)$ indexelt halmazrendszer $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ értékkészletének egyesítését, ill. metszetét az

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i, \qquad \text{ill. a} \qquad \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$$

szimbólummal jelöljük. Ha

$$I = \{1, \ldots, n\} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{vagy} \qquad I = \mathbb{N},$$

akkor ezekre az

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i, \qquad \text{ill. az} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_i, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$$

jelölést használjuk.

Definíció. Adott $\mathcal{M}$ halmazrendszer esetén

1. $\mathcal{M}_\cup$, ill. $\mathcal{M}_\cap$ jelöli az $\mathcal{M}$-beli halmazok összes véges egyesítéseiből, ill. összes véges metszeteiből álló halmazrendszert:

$$\mathcal{M}_\cup := \left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : \ n \in \mathbb{N}, \ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}\right\},$$

   ill.

$$\mathcal{M}_\cap := \left\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k : \ n \in \mathbb{N}, \ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}\right\}$$

   /$A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $i \neq j$) esetén használni fogjuk az $\mathcal{M}_\uplus$ jelölést is/.

2. $\mathcal{M}_\sigma$, ill. $\mathcal{M}_\delta$ jelöli az $\mathcal{M}$-beli halmazok összes megszámlálható egyesítéseiből, ill. összes megszámlálható metszeteiből álló halmazrendszert:

$$\mathcal{M}_\sigma := \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_k \in \mathcal{M} \ (k \in \mathbb{N})\right\},$$

   ill.

$$\mathcal{M}_\delta := \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_k \in \mathcal{M} \ (k \in \mathbb{N})\right\}.$$

   Azt mondjuk továbbá, hogy az A halmaz az $\mathcal{M}$ halmazrendszerre nézve $\mathcal{M}_\sigma$-, ill. **$\mathcal{M}_\delta$-halmaz**, ha $A \in \mathcal{M}_\sigma$, ill. $A \in \mathcal{M}_\delta$.

Világos, hogy $\mathcal{M}_\cup$ uniózárt ($\cup$-stabil) és $\mathcal{M}_\cap$ metszetzárt ($\cap$-stabil), továbbá $\mathcal{M}_\sigma$ zárt a szigma-unióra és $\mathcal{M}_\delta$ zárt a szigma-metszetre.
Az $\cup$ és a $\cap$, ill. a σ és a δ „operációk” iterálhatók:

$$\mathcal{M}_{\cap\cup} := (\mathcal{M}_\cap)_\cup \quad \text{és} \quad \mathcal{M}_{\cup\cap} := (\mathcal{M}_\cup)_\cap \qquad (\mathcal{M}_{\cup\cup} = \mathcal{M}_\cup, \quad \mathcal{M}_{\cap\cap} = \mathcal{M}_\cap),$$

hasonlóan értelmezhető $\mathcal{M}_{\cap\cup\cup}$ és $\mathcal{M}_{\cup\cap\cup}$ stb., ill.

$$\mathcal{M}_{\delta\sigma} := (\mathcal{M}_\delta)_\sigma \quad \text{és} \quad \mathcal{M}_{\sigma\delta} := (\mathcal{M}_\sigma)_\delta \qquad (\mathcal{M}_{\sigma\sigma} = \mathcal{M}_\sigma, \quad \mathcal{M}_{\delta\delta} = \mathcal{M}_\delta),$$

hasonlóan értelmezhető $\mathcal{M}_{\sigma\delta\sigma}$ és $\mathcal{M}_{\delta\sigma\delta}$ stb.
Könnyen belátható, hogy

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{M}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}_{\sigma\delta\sigma} \subset \ldots, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\delta \subset \mathcal{M}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{M}_{\delta\sigma\delta} \subset \ldots$$

Állítás. Ha $\mathcal{M}$ metszetzárt halmazrendszer, akkor $\mathcal{M}_\cup$ is metszetzárt.
Biz. Ha $A, B \in \mathcal{M}_\cup$, akkor van olyan $m, n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$ ill. $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M}$, hogy

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad \text{és} \qquad B = \bigcup_{l=1}^{n} B_k,$$

így

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{m}\left(A_k \cap \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{l=1}^{n}(A_k \cap B_l) = \bigcup_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le n}} \underbrace{(A_k \cap B_l)}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_\cup. \quad \blacksquare$$

Állítás. Ha A halmaz, $(B_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ indexelt halmazrendszer, akkor

$$A \bigcap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A \bigcap B_\gamma\right), \qquad \text{ill.} \qquad A \bigcup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\left(A \bigcup B_\gamma\right).$$

Állítás. Ha A halmaz, és $(B_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ pedig olyan indexelt halmazrendszer, hogy tetszőeges $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \subset A$, akkor

$$A \backslash \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \backslash B_\gamma), \qquad \text{ill.} \qquad A \backslash \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \backslash B_\gamma).$$

Állítás. Ha $\mathcal{H}$ halmaz, akkor minden, az $A_\gamma \subset \mathcal{H}$ $(\gamma \in \Gamma)$ feltételnek eleget tévő indexelt halmazrendszer esetén

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c, \qquad \text{ill.} \qquad \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

(**De-Morgan-azonosságok**), ahol

$$B^c := \mathcal{H} \backslash B \qquad (B \in \mathcal{H}).$$

Definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy az $\mathcal{O}$ halmazrendszer a $\mathcal{H}$ halmaz **osztályozás**a, ha

1° $A, B \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$,

2° $A \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad A \subset \mathcal{H}$,

3° $\bigcup \mathcal{O} = \mathcal{H}$

teljesül. $\mathcal{O}$ elemeit **osztály**oknak nevezzük.

Példa. A $\mathcal{H} := \{a, b, c\}$ háromelemű halmaznak osztályozásai az alábbi halmazrendszerek:

$$\mathcal{O}_1 := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \qquad \mathcal{O}_2 := \{\{a\}, \{b, c\}\}, \qquad \mathcal{O}_3 := \{\{b\}, \{a, c\}\},$$

$$\mathcal{O}_4 := \{\{c\}, \{a, b\}\}, \qquad \mathcal{O}_5 := \{\{a, b, c\}\}.$$

Definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy a $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ reláció

1° **reflexív**, ha minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $(x, x) \in \rho$,

2° **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(x, y) \in \rho \qquad \Longrightarrow \qquad (y, x) \in \rho,$$

3° **antiszimmetrikus**, ha minden $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(x, y), (y, x) \in \rho \qquad \Longrightarrow \qquad x = y,$$

4° **tranzitív**, ha tetszőleges $x, y, z \in \mathcal{H}$ esetén

$$((x, y) \in \rho \ \wedge \ (y, z) \in \rho) \quad \Longrightarrow \quad (x, z) \in \rho.$$

Definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy a $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ reláció ($\mathcal{H}$-beli)

1. **ekvivalencia**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív;
2. **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. A ρ rendezés **láncszerű**, ha $\mathcal{H}$ bármely két eleme **összehasonlítható**, azaz ha

$$x, y \in \mathcal{H} \qquad \Longrightarrow \qquad ((x, y) \in \rho \quad \text{vagy} \quad (y, x) \in \rho)\,.$$

Példa. Ha $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz, akkor a $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

- $(x, y) \in \rho :\Longleftrightarrow x, y \in \mathcal{H}$ reláció ekvivalencia,
- $(x, y) \in \rho :\Longleftrightarrow x = y \ (x, y \in \mathcal{H})$ reláció ekvivalencia.

Példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{N}$ és $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(x, y) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege megegyezik,}$$

akkor ρ ekvivalencia.

Példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{Z}$ és adott $2 \leq m \in \mathbb{N}$ esetén $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(x, y) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad m|(x - y),$$

akkor ρ ekvivalencia.

Példa. Ha $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz, akkor a $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$(x, y) \in \rho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x = y \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

reláció rendezés (**diszkrét rendezés**), ami pontosan akkor láncszerű, ha $\mathcal{H}$ egyelemű.

Példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{N}$ és $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(m, n) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{N}_0 : \ m + c = n \quad (m, n \in \mathcal{H}),$$

akkor ρ (láncszerű) rendezés.

Példa. Tetszőleges $\mathcal{X}$ halmaz esetén a $\rho \subset \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X})$,

$$(A, B) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset B \quad (A, B \subset \mathcal{X})$$

reláció $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-beli rendezés, ami pontosan akkor láncszerű, ha $\mathcal{X}$ egyelemű.

Könnyen belátható, hogy tetszőleges $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén

- ha $\mathcal{O}$ osztályozása $\mathcal{H}$-nak, $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, és

  $$(x, y) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ ugyanazon osztály eleme, mint } y,$$

  akkor ρ ($\mathcal{H}$-beli) ekvivalencia;

- ha ρ ($\mathcal{H}$-beli) ekvivalencia, továbbá

  $$[x] := \{y \in \mathcal{H} : (x, y) \in \rho\} \quad (x \in \mathcal{H})$$

  akkor a

  $$\mathcal{H}/\rho := \mathcal{O} := \{[x] : x \in \mathcal{H}\}$$

  halmazrendszer (a ρ-**ekvivalenciaosztályok** halmaza) osztályozása $\mathcal{H}$-nak.

Az egyes ekvivalenciaosztályok kapcsolatára vonatkozik a következő

Állítás. Ha $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ekvivalencia, akkor bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$[x] = [y] \quad \Longleftrightarrow \quad [x] \cap [y] \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \in \rho.$$

Definíció. Ha a ρ reláció $\mathcal{H}$-beli rendezés, akkor a $(\mathcal{H}, \rho)$ (rendezett) párt **rendezett halmaz**nak nevezzük, továbbá valamely $x \in \mathcal{H}$ és $A \subset \mathcal{H}$ esetén azt mondjuk, hogy

- az x az A ($\mathcal{H}$-beli) **felső korlát**ja, ha bármely $y \in A$ esetén $(y, x) \in \rho$,
- az x az A ($\mathcal{H}$-beli) **alsó korlát**ja, ha bármely $y \in A$ esetén $(x, y) \in \rho$,
- az x az A **maximális elem**e, ha $x \in A$ és bármely $y \in A$ esetén

  $$(x, y) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad x = y,$$

- az x az A **minimális elem**e, ha $x \in A$ és bármely $y \in A$ esetén

  $$(y, x) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Az $(\mathbb{N}, \leq)$ rendezett halmaz esetén az $\mathbb{N}$ halmaznak 1 a minimális eleme, de nincsen maximális eleme. Az, hogy valamely rendezett halmaz esetén van-e maximális elem, sok esetben igen fontos kérdés. Az alábbiakban olyan feltételeket fogalmazunk meg, amelyek a maximális elem létezését biztosítják.

Tétel. (**Kuratowski-Zorn-lemma.**) Ha a $(\mathcal{H}, \rho)$ rendezett halmaz bármely – a ρ rendezéssel – láncszerűen rendezett $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ részhalmaza felülről korlátos, akkor $\mathcal{H}$-nak van maximális eleme.

Tétel. (**Kiválasztási axióma.**) Ha $\Gamma \neq \emptyset$ és bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{H}_\gamma \neq \emptyset$, akkor van olyan

$$f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_\gamma$$

(ún. **kiválasztási**) **függvény**, amely minden $\gamma \in \Gamma$-hoz $\mathcal{H}_\gamma$ valamely elemét rendeli:

$$f(\gamma) \in \mathcal{H}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in A \to B$ függvény

- **injektív**, ha
$$(x, y \in \mathcal{D}_f : \; x \neq y) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \neq f(y);$$
- **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_f = B$;
- **bijektív** vagy **bijekció**, ha injektív és szürjektív.

Definíció. Valamely $f : A \to B$ függvény és $\mathcal{H}$ halmaz esetén az

$$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B : \; x \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_f\}$$

halmazt a $\mathcal{H}$ halmaz f **függvény által létesített kép**ének, az

$$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) \in \mathcal{H}\}$$

halmazt pedig a $\mathcal{H}$ halmaz f **függvény által létesített őskép**ének nevezzük.
Így f^{-1} tekinthető a következő leképezésnek is:

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \qquad \mathcal{H} \mapsto \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) \in \mathcal{H}\}.$$

Valamely $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(B)$ halmaz(rendszer)nek f^{-1} szerinti képe tehát az

$$f^{-1}[\mathcal{M}] := \left\{f^{-1}[\mathcal{H}] \subset A : \; \mathcal{H} \in \mathcal{M}\right\}$$

halmaz(rendszer). Világos, hogy

$$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f$$

ill.

$$f^{-1}[\mathcal{H}] = f^{-1}[\mathcal{H} \cap \mathcal{R}_f] \qquad \text{és} \qquad f[\mathcal{H}] = f[\mathcal{H} \cap \mathcal{D}_f].$$

Példa.

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

$$f[[1,2]] = [1,4] \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[1,4] = [-2,-1] \cup [1,2].$$

Állítás. Adott $f : A \to B$ függvény és $\mathcal{H} \subset A$, továbbá $C, D \subset B$ halmazok esetében

- fennáll az
$$f^{-1}[C \backslash D] = f^{-1}[C] \backslash f^{-1}[D]$$
egyenlőség, így pl. (ha $U^c := B \backslash U$ $(U \subset B)$)
$$f^{-1}[D^c] = f^{-1}[B \backslash D] = f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[D] = A \backslash f^{-1}[D] = \left(f^{-1}[D]\right)^c;$$

- f pontosan akkor bijektív, ha minden $C \subset A$ esetén
$$f[A \backslash C] = B \backslash f[C].$$

Állítás. Az

$$f : A \to B$$

függvény és az

$$A_\gamma \subset A \quad (\gamma \in \Gamma), \qquad \text{ill. a} \qquad B_\delta \subset B \quad (\delta \in \Delta)$$

feltételeknek eleget tévő indexelt halmazrendszerek esetén

$$f\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f[A_\gamma]$$

és

$$f\left[\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f[A_\gamma] \quad (\text{és itt egyenlőség áll fenn} \iff f \text{ injektív}),$$

ill.

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j] \qquad \text{és} \qquad f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j].$$

2.8. $\boxed{\text{G}}$

Definíció. Adott $X \neq \emptyset$, ill. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{D}$ (X-beli) **Dynkin-rendszer (λ-rendszer)**, ha teljesülnek következő feltételek:

i) $X \in \mathcal{D}$;

ii) $A, B \in \mathcal{D}: \ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad B \backslash A \in \mathcal{D}$;

iii) $A_n \in \mathcal{D} \ (n \in \mathbb{N}): \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j) \quad \Longrightarrow \quad \biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}.$

Megjegyzések.

1. Világos, hogy minden (X-beli) σ-algebra egyben (X-beli) Dynkin-rendszer is.

2. A fenti definícióban a **ii)** tulajdonság komplementer-zártságra cserélhető, ui.

   (a) ha $\mathcal{D}$ Dynkin-rendszer, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{D}$ esetén $A \subset X \in \mathcal{D}$, így
   $$A^c = X \backslash A \in \mathcal{D};$$

   (b) ha $\mathcal{D}$ komplementer-zárt és $A, B \in \mathcal{D}$: $A \subset B$, akkor $B^c \in \mathcal{D}$, így $A \cap B^c = \emptyset$ miatt
   $$B \backslash A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c \in \mathcal{D}.$$

   Következésképpen $\emptyset \in \mathcal{D}$, hiszen $\emptyset = X^c \in \mathcal{D}$.

3. A fenti definícióban az **iii)** tulajdonság a következőre cserélhető:
   $$A_n \in \mathcal{D} \quad (n \in \mathbb{N}): \quad (A_n) \ \prec, \succ \quad \Longrightarrow \quad \lim(A_n) \in \mathcal{D}, \qquad (*)$$
   ui.

   (a) ha $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$: $(A_n) \prec$, akkor
   $$(A_i \backslash A_{i-1}) \cap (A_j \backslash A_{j-1}) = \emptyset \quad (2 \leq i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$$
   és
   $$A_1 \cap \biguplus_{2 \leq n \in \mathbb{N}} (A_n \backslash A_{n-1}) = \emptyset,$$

így
$$\lim(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \uplus \biguplus_{2\leq n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash A_{n-1}) \in \mathcal{D},$$
ha viszont $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$: $(A_n) \succ$, akkor $(A_n^c) \prec$, így
$$\lim(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c = A_1^c \in \mathcal{D};$$

(b) tetszőleges $A, B \in \mathcal{D}$: $A \cap B = \emptyset$ esetén
$$A \cup B = (A^c \backslash B)^c \in \mathcal{D},$$
azaz $\mathcal{D}$ zárt a véges diszjunkt unióra, így adott
$$A_n \in \mathcal{D} \quad (n \in \mathbb{N}): \quad A_i \cap A_j \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$$
halmazsorozat esetén
$$\widetilde{A}_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{D} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \left(\widetilde{A}_n\right) \prec,$$
ahonnan $(*)$ miatt
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\left(\widetilde{A}_n\right) \in \mathcal{D}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{D}$ halmaz X-beli Dynkin-rendszer, ha

1. valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $|X| = 2n$ és
$$\mathcal{D} := \{A \subset X: \ |A| = 2m, \ (m \in \{0, \ldots, n\})\},$$

2. (X, Ω) mérhető tér, $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty)$ olyan függvények, hogy

   - $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = \nu(X)$;
   - $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbb{N}): \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$, $f \in \{\mu, \nu\} \Longrightarrow$
$$f\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$$

és

$$\mathcal{D} := \{A \in \Omega : \ \mu(A) = \nu(A)\}$$

teljesül!

Útm.

1. Világos, hogy

   (a) $X \in \mathcal{D}$ $(m := n)$;

   (b) ha $A, B \in \mathcal{D}$: $A \subset B$, akkor van olyan

   $$p, q \in \{0, \ldots, n\} : \quad p \leq q, \qquad \text{hogy} \qquad |A| = 2p, \quad |B| = 2q,$$

   így

   $$|B \backslash A| = 2q - 2p = 2(q - p), \qquad \text{ahol} \qquad q - p \in \{0, \ldots, n\},$$

   így $B \backslash A \in \mathcal{D}$.

   (c) X páros elemű részhalmazainak diszjunkt σ-uniója ismét X páros elemű részhalmaza.

   Megjegyzés. Ha $n > 1$, akkor $\mathcal{D}$ nem algebra, ui. két páros elemű részhalmaz uniója nem feltétlenül páros elemű (ez az eset áll fenn pl. ha $A, B \in \mathcal{D}$ és $|A \cap B| = 1$).

2. Világos, hogy

   (a) $X \in \mathcal{D}$, ui. $X \in \Omega$ és $\mu(X) = \nu(X)$;

   (b) ha $A, B \in \mathcal{D}$: $A \subset B$, akkor $B \backslash A \in \mathcal{D}$, ui. tetszőleges $f \in \{\mu, \nu\}$ ill. $E, F \in \Omega$, $E \subset F$ esetén $F \backslash E \in \Omega$, $F = (F \backslash E) \cup E$, így $(F \backslash E) \cap E = \emptyset$ miatt

   $$f(F) = f((F \backslash E) \uplus E) = f(F \backslash E) + f(E),$$

   azaz

   $$f(F \backslash E) = f(F) - f(E),$$

   ezért

   $$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \backslash A);$$

(c) ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$: $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N}:\ i \neq j)$, akkor $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$, így ha $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ és

$$\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

következtében $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. ■

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy valamely Dynkin-rendszer pontosan akkor σ-algebra, ha metszetzárt (∩-stabil)!

Útm. Lévén, hogy minden σ-algebra metszetzárt Dynkin-rendszer, ezért elég megmutatni azt, hogy valamely $\mathcal{D}$ Dynkin-rendszer metszetzártsága a σ-unióra való zártságát vonja maga után. Látható, hogy tetszőleges $A, B \in \mathcal{D}$ esetén

$$A \cap (B\backslash(A \cap B)) = \emptyset,$$

ezért

$$A \cup B = A \uplus (B\backslash(A \cap B)) \in \mathcal{D},$$

azaz a metszetzárt $\mathcal{D}$ zárt a véges unióra (∪-stabil)[28]. Adott $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén az

$$\widetilde{A}_n := \begin{cases} \emptyset & (n = 0), \\ & \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}_0) \\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k & (n > 0) \end{cases}$$

halmazsorozatra: $\widetilde{A}_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Mivel $\widetilde{A}_n \subset \widetilde{A}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ezért $\widetilde{A}_{n+1}\backslash\widetilde{A}_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, így

$$\left(\widetilde{A}_{i+1}\backslash\widetilde{A}_i\right) \cap \left(\widetilde{A}_{j+1}\backslash\widetilde{A}_j\right) = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}_0:\ i \in j)$$

következtében

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\widetilde{A}_{n+1}\backslash\widetilde{A}_n\right) \in \mathcal{D}.$$

Világos azonban, hogy

$$\biguplus_{k=0}^{n} \left(\widetilde{A}_{k+1}\backslash\widetilde{A}_k\right) = \widetilde{A}_{n+1} = \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l,$$

[28] Az ilyen halmazrendszert szokás **π-rendszer**nek is nevezni.

ezért

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\widetilde{A}_{n+1}\setminus\widetilde{A}_n\right)=\bigcup_{l=1}^{\infty}A_l. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Valamely Dynkin-rendszer pontosan akkor uniózárt ($\cup$-stabil), ha metszetzárt ($\cap$-stabil). $\blacksquare$

Feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{D}$ Dynkin-rendszer, de nem σ-algebra X-ben, ha

1. $X := \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{D} := \{\emptyset,\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,3,4\}\}$;
2. $X \neq \emptyset$, Ω (X-beli) σ-algebra, $A \in \Omega$,

$$\mathcal{D} := \{B \in \Omega : \; P(A \cap B) = \varphi(A)\cdot\varphi(B)\},$$

ahol $\varphi : \Omega \to [0,1]$ olyan függvény, amelyre $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(X) = 1$ és

$$\varphi\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(A_n)$$

minden olyan $A_n \in \Omega$ ($n \in \mathbb{N}$) halmazsorozat esetén, amelyre

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i,j \in \mathbb{N} : \; i \neq j)$$

teljesül!

Útm.

1. Világos, hogy $X \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ komplementerzárt, ill. zárt a diszjunkt σ-unióra, így Dynkin-rendszer. Viszont nem σ-algebra, ui. nem metszetzárt:

$$\{1,2\}\cap\{1,4\}=\{1\}\notin\mathcal{D}.$$

2. Ahhoz, hogy $\mathcal{D}$ Dynkin-rendszer legyen, három tulajdonságnak kell teljesülnie:
   - $X \in \mathcal{D}$, ui. tetszőleges $A \in \Omega$ esetén

$$\varphi(A\cap X)=\varphi(A)=\varphi(A)\cdot 1=\varphi(A)\cdot\varphi(X);$$

- ha $A, B, C \in \Omega$: $B \subset C$, akkor $C \setminus B \in \mathcal{D}$, ui. az ilyen függvényre:

  $$\varphi(F \setminus E) = \varphi(F) - \varphi(E) \quad (E, F \in \Omega: \ E \subset F)$$

  (vö. korábban), ezért

  $$\begin{aligned} \varphi(A \cap (C \setminus B)) &= \varphi((A \cap C) \setminus (A \cap B)) = \varphi(A \cap C) - \varphi(A \cap B) = \\ &= \varphi(A) \cdot \varphi(C) - \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \\ &= \varphi(A) \cdot (\varphi(C) - \varphi(B)) = \varphi(A) \cdot \varphi(C \setminus B). \end{aligned}$$

- ha $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan halmazsorozat, amelyre $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j)$, akkor $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, ui. ha $A \in \Omega$, akkor

  $$\begin{aligned} \varphi\left(A \cap \left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) &= \varphi\left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} (A \cap A_n)\right) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A) \cdot \varphi(A_n) = \\ &= \varphi(A) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n) = \varphi(A) \cdot \varphi\left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ nem σ-algebra, ui. nem metszetzárt: ha pl.

$$X := \{0,1\} \times \{0,1\}, \qquad \Omega := \mathcal{P}(X),$$

és

$$\varphi(A) := \frac{|A|}{|X|} \quad (A \in \Omega),$$

akkor φ nyilván a kívánt tulajdonságú függvény, és

$$A := \{(0,0), (0,1)\}, \qquad A_1 := \{(0,0), (1,0)\}, \qquad A_2 := \{(0,0), (1,1)\}$$

esetén

$$\varphi(A) = \varphi(A_1) = \varphi(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\varphi(A \cap A_1) = \varphi(A \cap A_2) = \varphi(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4},$$

így $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$, de

$$\begin{aligned}\varphi(A \cap (A_1 \cap A_2)) &= \varphi(A \cap A_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \\ &= \varphi(A) \cdot \varphi(A_1) \cdot \varphi(A_2) = \varphi(A) \cdot \varphi(A_1 \cap A_2). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, $\mathcal{D}_\gamma$ (X-beli) Dynkin-rendszer ($\gamma \in \Gamma$), akkor $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma$ Dynkin-rendszer X-ben!

Útm. Világos, hogy

- $X \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma$, mivel minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X \in \mathcal{D}_\gamma$;
- ha $A \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma$, akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A \in \mathcal{D}_\gamma$, így

  $$A^c \in \mathcal{D}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  tehát $A^c \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma$;
- ha $A_n \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma$ $(n \in \mathbb{N})$: $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

  $$A_n \in \mathcal{D}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  azaz

  $$\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

  így

  $$\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{D}_\gamma. \quad \blacksquare$$

2.9. $\boxed{\mathrm{H}}$

Megjegyzés. Korábban beláttuk, hogy ha adott X alaphalmaz, ill. $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz esetén $\mathcal{K}_\gamma$ (X-beli) σ-algebra, algebra, gyűrű, ill. Dynkin-rendszer ($\gamma \in \Gamma$), akkor

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_\gamma := \{A \subset X : \ A \in \mathcal{K}_\gamma \ (\gamma \in \Gamma)\}$$

is (X-beli) σ-algebra, algebra, gyűrű, ill. Dynkin-rendszer. Így az ilyen halmazrendszerek esetében van értelme "legszűkebb" σ-algebráról, „legszűkebb” algebráról, „legszűkebb” gyűrűről, ill. „legszűkebb” Dynkin-rendszerről beszélni. $\square$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha adott X halmaz, ill. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer esetén van $\mathcal{M}$-et részhalmazként tartalmazó legszűkebb $\sigma(\mathcal{M})$ σ-algebra, $\alpha(\mathcal{M})$ algebra, $\rho(\mathcal{M})$ gyűrű, ill. $\delta(\mathcal{M})$ Dynkin-rendszer, azaz ha Ω szigma-algebra, $\mathcal{A}$ algebra, $\mathcal{R}$ gyűrű, ill. $\mathcal{D}$ Dynkin-rendszer X-ben, és

$$\mathcal{M} \subset \Omega, \qquad \mathcal{M} \subset \mathcal{A}, \qquad \mathcal{M} \subset \mathcal{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{M} \subset \mathcal{D},$$

akkor

$$\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M}) \subset \Omega, \quad \mathcal{M} \subset \alpha(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{M} \subset \rho(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R} \quad \text{ill.} \quad \mathcal{M} \subset \delta(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}\,!$$

Útm. Mivel $\mathcal{P}(X)$ (X-beli) σ-algebra, algebra, gyűrű, ill. Dynkin-rendszer, ezért tetszőleges $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ esetén van $\mathcal{M}$-t részhalmazként tartalmazó σ-algebra, algebra, gyűrű ill. Dynkin-rendszer. Így, ha

$$\Sigma_Y := \{\Omega \subset \mathcal{P}(X) : \ \Omega \ \sigma\text{-algebra}, \ \mathcal{M} \subset \Omega\},$$

$$A_Y := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \ \mathcal{A} \text{ algebra}, \ \mathcal{M} \subset \mathcal{A}\},$$

$$\Gamma_Y := \{\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) : \ \mathcal{R} \text{ gyűrű}, \ \mathcal{M} \subset \mathcal{R}\},$$

ill.

$$\Delta_Y := \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) : \ \mathcal{D} \text{ Dynkin-rendszer}, \ \mathcal{M} \subset \mathcal{D}\},$$

akkor a

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\Omega \in \Sigma_Y} \Omega, \quad \alpha(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in A_Y} \mathcal{A}, \quad \rho(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{R} \in \Gamma_Y} \mathcal{R}, \quad \text{ill.} \quad \delta(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in \Delta_Y} \mathcal{D},$$

halmazrendszerek a kívánt tulajdonságúak. ■

Definíció. Az fenti feladatban lévő

$$\sigma(\mathcal{M}), \qquad \mathcal{A}(\mathcal{M}), \qquad \mathcal{R}(\mathcal{M}), \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{D}(\mathcal{M})$$

halmazrendszert az $\mathcal{M}$ **halmazrendszer által generált σ-algebrának, algebrának, gyűrűnek, ill. Dynkin-rendszernek** nevezzük.

Megjegyzés. Világos, hogy ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, algebra, gyűrű, ill. Dynkin-rendszer, akkor

$$\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad \alpha(\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad \rho(\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad \text{ill.} \quad \delta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}. \quad \square$$

Példa. Ha $X := \{1,2,3,4,5,6,7\}$, ill. $\mathcal{M} := \{\{1,2\},\{6\}\}$, akkor

$$\sigma(\mathcal{M}) = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{6\}, \{1,2,3,4,5,7\}, \{1,2,6\}, \{3,4,5,7\}, \{3,4,5,6,7\}\}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$, akkor

1. $\sigma(\mathcal{Z}) = \sigma(\sigma(\mathcal{Z}))$;
2. $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{N})$;
3. $(\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{N}) \quad \wedge \quad \mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{M})) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{M})$;
4. $\alpha(\mathcal{Z}) \subset \sigma(\mathcal{Z})$ és $\delta(\mathcal{Z}) \subset \sigma(\mathcal{Z})$;

Útm.

1. Mivel $\sigma(\mathcal{Z})$ szigma-algebra, ezért ez az állítás triviális.
2. Ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, akkor minden σ-algebra, amely $\mathcal{N}$-t tartalmazza, tartalmazza $\mathcal{M}$-t is, sőt $\sigma(\mathcal{M})$-t is, így $\sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{N})$.
3. Az előző két állítás következményeként:

$$\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{N}) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{N})) = \sigma(\mathcal{N}),$$

ill.

$$\mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{M}) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{N}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{M})) = \sigma(\mathcal{M}).$$

4. Mivel $\sigma(\mathcal{Z})$ algebra és Dynkin-rendszer is egyben, ezért $\alpha(\mathcal{Z})$, $\delta(\mathcal{Z})$ definíciója következtében az állítás nyilvánvaló. ■

Feladat. Adott X alaphalmaz, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer, (a $\mathcal{P}(X)$ elemeire vonatkozó) τ tulajdonság esetén adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy a $\sigma(\mathcal{M})$ halmazrendszer minden eleme τ tulajdonságú legyen, ha tudjuk, hogy az

$$\Omega := \{A \subset X : \ A \ \tau \text{ tulajdonságú}\}$$

halmazrendszer σ-algebra!
Útm. A $\sigma(\mathcal{M})$ halmaz minden eleme pontosan akkor τ tulajdonságú, ha $\mathcal{M} \subset \Omega$, ui.

- ha $\sigma(\mathcal{M})$ minden eleme τ tulajdonságú, akkor Ω definíciója miatt $\sigma(\mathcal{M}) \subset \Omega$, ahonnan $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M})$ miatt $\mathcal{M} \subset \Omega$ következik;

- ha $\mathcal{M} \subset \Omega$, akkor a korábbiak értelmében

$$\sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(\Omega) = \Omega,$$

ahonnan Ω definíciója miatt $\sigma(\mathcal{M})$ minden eleme τ tulajdonságú. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $X \neq \emptyset$, $A \subset X$, akkor

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, X, A, A^c\}$$

teljesül!
Útm. Világos, hogy $\sigma(\{A\})$-nak tartalmaznia kell az üres halmazt, magát X-et, A-t, így A komplementerét is. Ennélfogva, ha $\Omega := \{\emptyset, X, A, A^c\}$, akkor $\Omega \subset \sigma(\{A\})$. Mivel Ω szigma-algebra, ezért $\sigma(\{A\}) = \Omega$.
Megjegyzés. $A = \emptyset$ esetén $\sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, X\}$. ■

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \neq \emptyset$ és az $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer $\cap$-stabil, akkor

$$\delta(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}),$$

azaz a halmazrendszer generálta Dynkin-rendszer negegyezik a halmazrendszert tartalmazó legszűkebb szigma-algebrával!
Útm. Világos, hogy $\delta(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$. A fordított irányú tartalmazáshoz megmutatjuk, hogy $\delta(\mathcal{M})$ szigma-algebra. Ehhez elegendő belátni, hogy $\delta(\mathcal{M})$ metszetzárt ($\cap$-stabil). Ezt több lépésben tesszük:

1. lépés. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $A \in \delta(\mathcal{M})$ esetén a

$$\mathcal{D}_A := \{B \subset X : \ B \cap A \in \delta(\mathcal{M})\},$$

halmaz Dynkin-rendszer:

- $X \in \mathcal{D}_A$, hiszen $X \cap A = A \in \delta(\mathcal{M})$;
- ha $B, C \in \mathcal{D}_A$: $B \subset C$, akkor egyrészt

  $$(B \cap A) \subset (C \cap A),$$

  másrészt mivel $C \cap A, B \cap A \in \delta(\mathcal{M})$, ezért

  $$(C \setminus B) \cap A = (C \cap A) \setminus (B \cap A) \in \delta(\mathcal{M}),$$

  ahonnan $C \setminus B \in \mathcal{D}_A$ következik;
- ha $B_n \in \mathcal{D}_A$ $(n \in \mathbb{N})$: $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j)$, akkor

  $$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A) \in \delta(\mathcal{M}),$$

  azaz $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}_A$.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $A \in \delta(\mathcal{M})$ esetén $\delta(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}_A$.
Mivel $\mathcal{M}$ metszetzárt, ezért ha $A \in \mathcal{M}$, akkor

$$B \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad B \cap A \in \mathcal{M} \subset \delta(\mathcal{M}),$$

ahonnan $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_A$. Lévén, hogy $\mathcal{D}_A$ Dynkin-renszer, így $\delta(\mathcal{M})$ definíciója következtében $\delta(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}_A$.

3. lépés. Ezek után könnyen belátható, hogy $\delta(\mathcal{M})$ metszetzárt: ha ugyanis $D, E \in \delta(\mathcal{M})$, akkor

$$D \in \delta(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}_E.$$

$\mathcal{D}_E$ definíciója alapján ez pedig éppen azt jelenti, hogy $D \cap E \in \delta(\mathcal{M})$. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha Ω szigma-algebra X-ben és $Y \subset X$: $Y \notin \Omega$, akkor teljesül a

$$\sigma(\Omega \cup \{Y\}) = \{(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c) \subset X : \ A, B \in \Omega\}$$

egyenlőség!

Útm.

- Világos, hogy ha
$$\Sigma := \{(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c) \subset X : \; A, B \in \Omega\},$$
akkor Σ minden eleme $\sigma(\Omega \cup \{Y\})$-nak is eleme.

- Σ szigma-algebra X-ben, ui.
  - Ω minden eleme benne van Σ-ban, ui. $A = B$ esetén
  $$(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c) = (A \cap Y) \cup (A \cap Y^c) = A \in \Omega$$
  továbbá Y is benne van Σ-ban, hiszen $A = X$, $B = \emptyset$ esetén
  $$(X \cap Y) \cup (\emptyset \cap Y^c) = Y \cup \emptyset = Y;$$
  - ha $E \in \Sigma$, akkor alkalmas $A, B \in \Omega$ halmazokkal
  $$E = (A \cap Y) \cup (B \cap Y^c),$$
  így
  $$E^c = (A^c \cap Y) \cup (B^c \cap Y^c) \in \Sigma.$$
  Ui. $x \notin E$ pontosan akkor teljesül, ha
  $$x \notin A \cap Y \quad \text{és} \quad x \notin B \cap Y^c,$$
  azaz ha
  $$\text{vagy } \; x \in A^c \cap Y, \qquad\qquad \text{vagy } \; x \in B^c \cap Y^c;$$
  - ha $E_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor van olyan $A_n, B_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy
  $$E_n = (A_n \cap Y) \cup (B_n \cap Y^c) \quad (n \in \mathbb{N}).$$
  Így ha
  $$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega, \qquad \text{ill.} \qquad B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega,$$
  akkor
  $$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (A \cap Y) \cup (B \cap Y^c) \in \Sigma,$$
  továbbá
  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E^c = [(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c)]^c \in \Sigma. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $X \neq \emptyset$,

$$\mathcal{M} := \{\{x\} \subset X : \ x \in X\},$$

akkor

1. $\sigma(\mathcal{M}) = \left\{A \subset X \,\middle|\, A \text{ vagy } A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}\right\};$
2. $\alpha(\mathcal{M}) = \left\{A \subset X \,\middle|\, A \text{ vagy } A^c \text{ véges}\right\};$
3. $\delta(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$

teljesül!
Útm.

1. Mivel $\sigma(\mathcal{M})$ szigma-algebra, ezért komplementerzárt, ill. zárt a szigma-unióra, következésképpen $\sigma(\mathcal{M})$-nek tartalmaznia kell X minden legfeljebb megszámlálható részhalmazát, ill. olyan részhalmazát, amelynek komplementere legfeljebb megszámlálható. Tehát ha
$$\Omega := \left\{A \subset X \,\middle|\, A \text{ vagy } A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}\right\},$$
akkor $\sigma(\mathcal{M}) \supset \Omega$. Mivel Ω szigma-algebra (vö. 1.7.1. feladat/2) és $\mathcal{M} \subset \Omega$, ezért $\sigma(\mathcal{M}) \subset \Omega$, ahonnan $\sigma(\mathcal{M}) = \Omega$ következik.

2. Mivel $\alpha(\mathcal{M})$ algebra, ezért komplementerzárt, ill. zárt a véges unióra, következésképpen $\alpha(\mathcal{M})$-nek tartalmaznia kell X minden véges részhalmazát ill. olyan részhalmazát, amelynek komplementere véges. Ha tehát
$$\mathcal{A} := \left\{A \subset X \,\middle|\, A \text{ vagy } A^c \text{ véges}\right\},$$
akkor $\alpha(\mathcal{M}) \supset \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A}$ algebra, ezért $\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$, ahonnan $\alpha(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$ következik.

3. $\mathcal{M} \cup \{\emptyset\}$ metszetzárt. ■

Megjegyzés. Ha X legfeljebb megszámlálható, ill. véges halmaz, akkor persze

$$\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{P}(X), \qquad \text{ill.} \qquad \alpha(\mathcal{M}) = \mathcal{P}(X),$$

hiszen ekkor $\Omega = \mathcal{P}(X)$, ill. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : X \to Y$, akkor tetszőleges $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(Y)$ esetén

$$\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right) = f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]$$

teljesül!
Útm.

- $\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right) \subset f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]$, ui. $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M})$, $f^{-1}[\mathcal{M}] \subset f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]$, ahonnan

$$\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right) \subset \sigma\left(f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]\right).$$

  Továbbá $f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]$ szigma-algebra X-ben, így

$$\sigma\left(f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]\right) = f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})].$$

- $\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right) \supset f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})]$, ui.

$$\Omega' := \left\{B \subset Y : \; f^{-1}[B] \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right)\right\},$$

  szigma-algebra. Továbbá $\Omega' \supset \mathcal{M}$, így $\Omega' \supset \sigma(\mathcal{M})$, ahonnan

$$f^{-1}[\Omega'] \supset f^{-1}[\sigma(\mathcal{M})].$$

  Viszont Ω' szigma-algebra Y-ban, így $\Omega' \in Y$, ezért felhasználva Ω' definícióját azt kapjuk, hogy

$$f^{-1}[\Omega'] \subset \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{M}]\right). \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha adott $X \neq \emptyset$ esetén $A \subset X$, ill. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, akkor

$$\sigma_A(\mathcal{M} \cap A) = \sigma(\mathcal{M}) \cap A,$$

ahol az $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrenszer esetén

$$\mathcal{N} \cap A := \{Y \cap A \subset X : \; Y \in \mathcal{N}\},$$

és $\sigma_A(\mathcal{M} \cap A)$ jelöli az $\mathcal{M} \cap A$ halmazrendszer által generált $\mathcal{P}(A)$-beli szigma-algebrát!
Útm.

- Mivel $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M})$, ezért $\mathcal{M} \cap A \subset \sigma(\mathcal{M}) \cap A$, így – lévén a $\sigma(\mathcal{M}) \cap A$ nyílván $\mathcal{P}(A)$-beli szigma-algebra –

$$\sigma_A(\mathcal{M} \cap A) \subset \sigma(\mathcal{M}) \cap A.$$

- A fordított irányú tartalmazás, azaz $\sigma_A(\mathcal{M} \cap A) \supset \sigma(\mathcal{M}) \cap A$ belátásához bevezetjük a következő jelölést:

$$\Omega := \{(C \cap A^c) \cup B \subset X : \ C \in \sigma(\mathcal{M}), \ B \in \sigma_A(\mathcal{M} \cap A)\}.$$

Világos, hogy

$$B \in \sigma_A(\mathcal{M} \cap A) \quad \Longrightarrow \quad B \subset A \quad \Longrightarrow \quad (C \cap A^c) \cap B = \emptyset,$$

továbbá Ω szigma-elgebra X-ben, ui.

– $X \in \Omega$, hiszen (a fentiekben) a $C := X$, $B := A$ választással $(C \cap A^c) \cup B = X$.

– ha $E \in \Omega$, akkor alkalmas $C \in \sigma(\mathcal{M})$, ill. $B \in \sigma_A(\mathcal{M} \cap A)$ halmazokkal

$$E = (C \cap A^c) \cup B,$$

így $B \subset A$, ill. $C \cap A^c \subset X \cap A^c$ következtében

$$\begin{aligned} E^c &= [(C \cap A^c) \cup B]^c = X \setminus [(C \cap A^c) \cup B] = \\ &= [(X \cap A^c) \cup A] \setminus [(C \cap A^c) \cup B] = \\ &= [(X \cap A^c) \setminus (C \cap A^c)] \cup (A \setminus B) = [C^c \cap A^c] \cup (A \setminus B) \in \Omega. \end{aligned}$$

– Ω triviálisan zárt a szigma-unióra nézve.

Látható, hogy ha $E \in \Omega$, akkor $E \cap A = B \in \sigma_A(\mathcal{M} \cap A)$, így $\Omega \cap A \subset \sigma_A(\mathcal{M} \cap A)$. Mivel Ω szigma-algebra X-ben, ezért már csak azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{M} \subset \Omega$. Mivel tetszőleges $F \in \mathcal{M}$ esetén

$$F = (F \cap A^c) \cup (F \cap A),$$

ezért $F \cap A \in \sigma_A(\mathcal{M} \cap A)$ miatt $F \in \Omega$, ahonnan $\mathcal{M} \subset \Omega$ következik. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ gyűrű X-ben, akkor

$$\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \{A^c \subset X : \ A \in \mathcal{R}\},$$

ill. ha tetszőleges $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén még $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ is teljesül ($\mathcal{R}$ σ-gyűrű), akkor

$$\alpha(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}).$$

Útm.

- Világos, hogy ha
$$\mathcal{A} := \mathcal{R} \cup \{A^c \subset X : \ A \in \mathcal{R}\},$$
akkor $\mathcal{A}$ minden eleme $\alpha(\mathcal{R})$-nak is eleme: $\mathcal{A} \subset \alpha(\mathcal{R})$.

- Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ algebra X-ben, ui. ekkor $\alpha(\mathcal{R})$ definíciója miatt $\mathcal{A} \supset \alpha(\mathcal{R})$ is teljesül, ahonnan $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{R})$ következik.
  - $\emptyset \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ gyűrű X-ben), így $X = \emptyset^c \in \mathcal{A}$;
  - ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $A \in \mathcal{R}$ vagy $A^c \in \mathcal{R}$, ahonnan $A^c \in \mathcal{A}$, tehát $\mathcal{A}$ komplementer-zárt;
  - tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén négy eset lehetséges:
    - $A, B \in \mathcal{R}$, ekkor $A \cup B \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$;
    - $A \in \mathcal{R}$, $B^c \in \mathcal{R}$, ekkor $\mathcal{A}$ definíciója alapján $A \cup B \in \mathcal{A}$;
    - $A^c \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$, ekkor $\mathcal{A}$ definíciója alapján $A \cup B \in \mathcal{A}$;
    - $A^c, B^c \in \mathcal{R}$, ekkor $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{R}$, ahonnan $A \cup B \in \mathcal{A}$.

- Világos, hogy $\alpha(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{R})$, így már csak azt kell belátni, hogy ha $\mathcal{R}$ szigma-gyűrű, akkor $\mathcal{A}$ szigma-algebra. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $I \subset \mathbb{N}$ és az $\emptyset \neq X$ osztályozása az
$$\mathcal{O} := \{O_k \subset X : \ k \in I\},$$
halmazrendszer, azaz
$$O_k \cap O_l = \emptyset \quad (k, l \in I : \ k \neq l), \qquad \bigcup \mathcal{O} = \bigcup_{k \in I} O_k = X,$$
akkor
$$\sigma(\mathcal{O}) = \left\{ \bigcup_{k \in J} O_k \subset X : \ J \subset I \right\}$$
teljesül!

Útm. Mivel $\sigma(\mathcal{O})$ szigma-algebra, ezért zárt a (szigma-)unióra, következésképpen ha
$$\Omega := \left\{ \bigcup_{k \in J} O_k \subset X : \ J \subset I \right\},$$

akkor $\sigma(\mathcal{O}) \subset \Omega$. Mivel Ω szigma-algebra , ezért $\sigma(\mathcal{O}) \supset \Omega$, ahonnan

$$\sigma(\mathcal{O}) = \Omega$$

következik. ■

Feladat. Adott $X := [0,1)$ alaphalmaz, ill.

$$\mathcal{M} := \{\emptyset, X, [0,1/2), [0,1/4), [0,3/4), [1/4,3/4)\}$$

halmazrendszer esetén határozzuk meg a $\rho(M)$ generált gyűrűt!
Útm. A legszűkebb $\mathcal{M}$-et tartalmazó halmazrendszert kell meghatározni, amely $\mathcal{M}$ elemeinek uniójából, ill. különbségéből adódik:

$$\begin{array}{llll}
\emptyset, & X, & [0,1/4), & [0,1/2), \\
[0,3/4), & [1/4,3/4), & [1/4,1/2), & [1/2,3/4), \\
[1/4,1), & [1/2,1), & [3/4,1), & [0,1/4) \cup [3/4,1), \\
[0,1/2) \cup [3/4,1), & [0,1/4) \cup [1/2,3/4), & [0,1/4) \cup [1/2,1), & [1/4,1/2) \cup [3/4,1). \quad ■
\end{array}$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $A_1, \ldots, A_n \in \in \mathcal{M}$, hogy

$$A \in \rho(\mathcal{M}) \quad \Longrightarrow \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

azaz az $\mathcal{M}$ halmazrendszer által generált gyűrű minden eleme lefedhető $\mathcal{M}$ véges sok elemével!
Útm. Megmutatjuk, hogy az

$$\mathcal{R} := \left\{ A \subset X \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}, \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M} : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right\}$$

halmazrendszer gyűrű:

- $\mathcal{R} \neq \emptyset$, ui. $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$, hiszen tetszőleges $A \in \mathcal{M}$ esetén $A \subset A$;
- ha $A, B \in \mathcal{R}$, akkor alkalmas $m \in \mathbb{N}$ ill. $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$, ill. $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M}$ esetén

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \qquad \text{ill.} \qquad B \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_l,$$

így

$$A\backslash B = A \cap B^c \subset \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\right)^c = \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{n} B_l^c\right) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{m} \left(A_k \cap \bigcap_{l=1}^{n} B_l^c\right) \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_k,$$

ill.

$$A \cup B \subset \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\right) = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} (A_k \cup B_l). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, akkor

$$\rho(\mathcal{H}) = \mathcal{R},$$

ahol $\mathcal{R}$ a 8. gyakorló feladatsor 12. feladatában bevezetett halmazrendszer, azaz félgyűrű generálta gyűrű nem más, mint a félgyűrű alkotta halmazok véges unióinak halmaza!
Útm. Világos, hogy

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{H}),$$

és mivel $\mathcal{R}$ gyűrű, ezért $\rho(\mathcal{H})$ definíciója miatt $\rho(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}$, ahonnan

$$\rho(\mathcal{H}) = \mathcal{R}$$

következik. $\blacksquare$

Példa. Tetszőleges $X \neq \emptyset$ esetén az

$$\mathcal{R} := \left\{A \subset X \middle| A \text{ véges}\right\}$$

gyűrű és a

$$\mathcal{H} := \emptyset \cup \{\{\omega\} \subset X : \ \omega \in X\}$$

félgyűrű között a $\rho(\mathcal{H}) = \mathcal{R}$ összefüggés áll fenn, hiszen $\mathcal{R}$ minden eleme $\mathcal{H}$-beli halmazok véges uniója, azaz $\rho(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}$ és $\mathcal{H}$-beli halmazok uniója $\mathcal{R}$-beli, azaz $\rho(\mathcal{H}) \supset \mathcal{R}$.

2.10. $\boxed{\text{I1}}$

Tétel (Fatou-lemma halmazsorozatokra).
Legyen (X, Ω, μ) mértéktér és $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ mérhető halmazok sorozata, majd tegyük fel, hogy létezik a $\lim(A_n) =: A$ határhalmaz, továbbá van olyan $X_0 \in \Omega$, hogy $\mu(X_0) < +\infty$, $A_n \subset X_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\mu(A) = \lim(\mu(A_n))$$

(μ **folytonos**).
Biz. Mivel

$$A = \liminf(A_n) = \limsup(A_n),$$

ezért

1. $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m =: \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, ahol $B_n \in \Omega$, $B_n \subset B_{n+1}$, $B_n \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, így

$$\mu(A) = \lim(\mu(B_n)) \quad \text{és} \quad \mu(B_n) \leq \mu(A_n), \quad \text{tehát} \quad \boxed{\mu(A) \leq \liminf(\mu(A_n))}\,.$$

2. $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m =: \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, ahol $C_n \in \Omega$, $A_n \subset C_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és $C_{n+1} \subset C_n \subset X_0$ és $\mu(X_0) < +\infty$, így

$$\mu(A) = \lim(\mu(C_n)) \quad \text{és} \quad \mu(A_n) \leq \mu(C_n),$$

ezért

$$\boxed{\limsup(\mu(A_n)) \leq} \lim(\mu(C_n)) = \boxed{\mu(A)}.$$

Ennélfogva

$$\mu(A) \leq \liminf(\mu(A_n)) \leq \limsup(\mu(A_n)) \leq \mu(A),$$

azaz

$$\liminf(\mu(A_n)) = \limsup(\mu(A_n)) = \mu(A),$$

ami azt jelenti, hogy $\mu(A) = \lim(\mu(A_n))$. ■

Megjegyzés.
A $\mu(X_0) < +\infty$ feltétel nem hagyható el, ui. pl. az $(X, \Omega, \mu) := (\mathbb{R}, \Omega_1, \mu_1)$ (Lebesgue-struktúra) esetén, ha

$$A_n := (n, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\liminf(A_n) = \limsup(A_n) = \emptyset,$$

de

$$\mu(A_n) = +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Definíció. Adott (X, Ω, μ) valószínűségi mértéktér $(\mu(X) = 1)$ esetén az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok **(sztochasztikusan) függetlenek**, ha bármely $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ véges halmaz esetén

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathcal{N}} A_k\right) = \prod_{k\in\mathcal{N}} \mu(A_k).$$

Példa. Ha $X := [0,1)$, Ω az X Lebesgue-mérhető halmazainak σ-algebrája, $\mu := \mu_1|_\Omega$, ill.

$$A_n := \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right) = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \bigcup \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right) \bigcup \ldots \bigcup \left[\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\mu(A_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ esetén könnyen belátható, hogy

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_{i_k}\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_{i_k}\right) \cdot \mu\left(A_{i_n}\right) = \ldots = \prod_{k=1}^{n} \mu(A_{i_k}).$$

Megjegyzések.

1. Ha az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok függetlenek, akkor **páronként** is **függetlenek**, azaz tetszőleges $k, l \in \mathcal{N}$ esetén

   $$\mu(A_k \cap A_l) = \mu(A_k) \cdot \mu(A_l).$$

   A páronkénti függetlenség viszont általában nem vonja maga után a függetlenséget, ui. ha $X := \{1,2,3,4\}$, $\Omega := \mathcal{P}(X)$,

   $$\mu(\{k\}) := \frac{1}{4} \qquad (k \in X),$$

   továbbá

   $$A_k := \{k,4\} \qquad (k \in \{1,2,3\}),$$

   akkor

- páronként függetlenek:

$$\mu(A_k \cap A_{k+1}) = \mu(\{4\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mu(A_k) \cdot \mu(A_{k+1}) \qquad (k \in \{1,2\}),$$

ill.

$$\mu(A_1 \cap A_3) = \mu(\{4\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mu(A_1) \cdot \mu(A_3).$$

- nem függetlenek:

$$\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(\{4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3).$$

2. A függetlenség definíciójában az A_k halmazok helyére A_k^c $(k \in \mathcal{N})$ is írható, ui. ha $\mathcal{N} = \{i_1, i_2\}$ $(i_1, i_2 \in \mathbb{N})$, akkor

$$\begin{aligned}
\mu(A_{i_1}^c) \cdot \mu(A_{i_2}^c) &= \{\mu(X) - \mu(A_{i_1})\} \cdot \{\mu(X) - \mu(A_{i_2})\} = \{1 - \mu(A_{i_1})\} \cdot \{1 - \mu(A_{i_2})\} = \\
&= 1 - \mu(A_{i_1}) - \mu(A_{i_2}) + \mu(A_{i_1})\mu(A_{i_2}) = \\
&= 1 - \mu(A_{i_1}) - \mu(A_{i_2}) + \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = 1 - \mu(A_{i_1} \cup A_{i_2}) = \\
&= \mu(X) - \mu(A_{i_1} \cup A_{i_2}) = \mu((A_{i_1} \cup A_{i_2})^c) = \mu(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c),
\end{aligned}$$

és ha $|\mathcal{N}| \geq 2$, akkor indukcióval adódik az állítás.

3. $x \in [0,1) \Longrightarrow \ln(1-x) \leq -x$, ui.

$$\ln(1-x) \leq -x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x \leq e^{-x} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + x \leq e^{x} \quad (x \leftrightarrow -x),$$

ez pedig igaz, ui. az exponenciális függvény konvex ($\exp'' = \exp > 0$), így grafikonja 0-beli érintője, azaz az $y = 1 + x$ egyenletű egyenes felett van.

4. Ha $\alpha_n \in [0,1)$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - \alpha_n) = 0,$$

ui.

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\alpha_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

ahonnan

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Tétel (Borel-Cantelli-lemma). Ha (X, Ω, μ) valószínűségi mértéktér és $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$, $A := \limsup(A_n)$, akkor

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = 0;$

2. ha $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty$ és az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat független, akkor $\mu(A) = 1$.

Bizonyítás.

1. lépés. Mivel $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m$, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \subset \bigcup_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m$, továbbá

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(h_n := \sum_{n\leq m\in\mathbb{N}} \mu(A_m)\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \lim(h_n) = 0\right),$$

ezért

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m\right) \leq \sum_{n\leq m\in\mathbb{N}} \mu(A_m) = h_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. lépés. Mivel az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat független és μ folytonos (valószínűségi mérték), ezért

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \lim_n \left(\mu\left(\bigcup_{n\leq m\in\mathbb{N}} A_m\right)\right) = \lim_n \left(\lim_N \left(\mu\left(\bigcup_{m=n}^{N} A_m\right)\right)\right) = \\
&= \lim_n \left(\lim_N \left(1 - \mu\left(\bigcap_{m=n}^{N} (A_m^c)\right)\right)\right) = \lim_n \left(\lim_N \left(1 - \prod_{m=n}^{N} (1 - \mu(A_m))\right)\right) = \\
&= 1 - \lim_n \left(\lim_N \left(\prod_{m=n}^{N} (1 - \mu(A_m))\right)\right).
\end{aligned}$$

Ha

$$\alpha_k := \mu(A_{k+n}) \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{N-n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N-n} \mu(A_{k+n}) = \sum_{m=n}^{N} \mu(A_m) \to +\infty \quad (N \to \infty),$$

így

$$\lim_N \left(\prod_{m=n}^{N} (1 - \mu(A_m))\right) = 0, \quad \text{azaz} \quad \mu(A) = 1. \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. A **2.** esetben megfogalmazott eredményben az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok függetlensége lényeges feltétel:

   (a) ha
   $$A_n = \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
   akkor
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty, \qquad \limsup(A_n) = \left[0, \frac{1}{2}\right],$$
   ezért
   $$\mu\left(\limsup(A_n)\right) = \frac{1}{2};$$

   (b) ha
   $$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
   akkor
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \qquad \limsup(A_n) = \emptyset,$$
   ezért
   $$\mu\left(\limsup(A_n)\right) = 0.$$

2. Megmutatható, hogy az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok függetlensége helyett a gyengébb
   $$\liminf \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \mu(A_k \cap A_l) \right) \Big/ \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \right)^2 \right) \right) = 1$$
   feltétel is elegendő.

3. A valószínűségszámításban X elemeit **elemi események**nek, Ω elemeit **esemény**eknek, $\mu(A)$-t pedig az $A \in \Omega$ esemény (**bekövetkezési**) **valószínűség**ének nevezik. Így a Borel-Cantelli-lemma jelentése a következő: ha (X, Ω, μ) valószínűségi mértéktér, $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ független események egy sorozata, akkor $\mu(A)$ – azaz annak a valószínűsége, hogy az A_n-ek közül végtelen sok bekövetkezik – nulla vagy egy, pontosan akkor, ha
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
   véges vagy sem.

2.11. $\boxed{\text{I2}}$

Definíció. Az (X, Ω, μ) véges mértéktér ($\mu(X) < +\infty$) esetében

1. az $A \in \Omega$ halmazt **atom**nak nevezzük, ha $\mu(A) > 0$ és
$$\text{bármely} \quad B \in \Omega, \quad B \subset A \quad \text{esetén} \quad \mu(B) = 0 \quad \text{vagy} \quad \mu(B) = \mu(A),$$
2. azt mondjuk, hogy az $A \in \Omega$ és a $B \in \Omega$ atom **lényegében megyegyező**, ha
$$\mu(A \setminus B) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mu(B \setminus A) = 0,$$
ill. **lényegesen különböző**, ha $\mu(A \cap B) = 0$;
3. azt mondjuk, hogy (X, Ω, μ), ill. μ **atommentes**, ha Ω-ban nincsen atom, azaz minden $A \in \Omega$, $\mu(A) > 0$ esetén van olyan $B \in \Omega$, $B \subset A$, hogy $0 < \mu(B) < \mu(A)$;
4. azt mondjuk, hogy (X, Ω, μ), ill. μ **atomos**, ha van benne atom;
5. azt mondjuk, hogy (X, Ω, μ), ill. μ **tisztán atomos**, ha alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, ill. $A_n \in \Omega$ ($n \in \mathcal{N}$) atomok esetén az $A := \bigcup\limits_{n \in \mathcal{N}} A_n$ halmazra $\mu(A) = \mu(X)$. $\Diamond$

Példák.

1. Ha $X := \{a, b\}$ kételemű halmaz, $\Omega := \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$, továbbá $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ olyan mérték, amelyre
$$\mu(\{a\}) := 1, \qquad \mu(\{b\}) := 2,$$
akkor az (X, Ω, μ) mértéktér atomos, hiszen az $\{a\}$, $\{b\}$ halmazok atomok.
2. Az $(X, \Omega) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mérhető tér esetén, ha $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ olyan mérték, amelyre
$$\mu(\{n\}) := 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor az (X, Ω, μ) mértéktér atomos, hiszen az $\{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok atomok.
3. Az $(X, \Omega) := (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ mérhető tér esetén, ha $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ olyan mérték, amelyre
$$\mu(\{n\}) := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ \dfrac{1}{n} & (n > 0), \end{cases}$$
akkor az (X, Ω, μ) mértéktér esetén

(a) a $\{0\}$ halmaz nem atom, hiszen $\mu(\{0\}) = 0$;

(b) a $\{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok atomok;

(c) a $\{n,0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok atomok, hiszen

$$\mu(\{0\}) = 0, \qquad \mu(\{n,0\}) = \frac{1}{n} = \mu(\{n\});$$

(d) az $A_n := \{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ atomok egyesítésére $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$ és

$$\mu(A) = 0 = \mu(\mathbb{N}),$$

azaz (X, Ω, μ) tisztán atomos.

4. A Lebsgue-mérték atommentes.

Feladat. Igazoljuk, hogy az (X, Ω, μ) véges mértéktér esetében két atom vagy lényegében megegyező vagy lényegesen különböző!

Útm. Ha az $A \in \Omega$ és a $B \in \Omega$ atom nem lényegesen különböző, akkor $A \cap B \in \Omega$ és $A \cap B \subset A$ miatt, mivel $\mu(A \cap B) \neq 0$, nyilván $\mu(A \cap B) = \mu(A)$, így

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) = 0.$$

Másrészt $A \cap B \subset B$ és ebből hasonlóan $\mu(B \backslash A) = 0$ adódik, azaz A és B lényegében megegyező. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az (X, Ω, μ) véges mértéktér atommentes, $\mu \neq 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $B \in \Omega$, hogy $0 < \mu(B) < \varepsilon$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy van olyan $B_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat, amelyre

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j \in \mathbb{N}: \ i \neq j) \qquad \text{és} \qquad 0 < \mu(B_n) < \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k^c\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\mu(X) > 0$ és X nem atom, ezért van olyan $B_1 \in \Omega$, hogy $0 < \mu(B_1) < \mu(X)$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_1, \ldots, B_n \in \Omega$ a kívánt tulajdonságú, akkor

$$\begin{aligned}
\mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) &= \mu\left(\biguplus_{k=1}^{n-1} B_k\right) + \mu(B_n) < \mu\left(\biguplus_{k=1}^{n-1} B_k\right) + \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k^c\right) = \\
&= \mu\left(\biguplus_{k=1}^{n-1} B_k\right) + \mu\left(\left(\biguplus_{k=1}^{n-1} B_k\right)^c\right) = \mu(X),
\end{aligned}$$

így

$$\mu\left(\left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\right) > 0.$$

Mivel μ atommentes, ezért $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k^c$ sem atom, azaz van olyan $B_{n+1} \in \Omega$, hogy

$$B_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c \qquad \text{és} \qquad 0 < \mu(B_{n+1}) < \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\right).$$

2. lépés. Világos, hogy a

$$\sum_n \mu(B_n)$$

számsor konvergens, hiszen μ szigma-additív és véges, így

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \mathbb{R}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy (B_n) olyan pozitív mértékű halmazokból álló sorozat, amelyre

$$\lim(\mu(B_n)) = 0. \quad \blacksquare$$

2.12. $\boxed{\text{I3}}$

Ha $p \in \mathbb{N}$ és $x \in [0,1)$, akkor van olyan

$$a_n \in \{0,1,\ldots,p-1\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(együttható)sorozat, hogy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} =: (0, a_1 a_2 \ldots)_p\,, \tag{2.8}$$

ui. pl. az

$$a_1 := [px],\ \ldots,\ a_{n+1} := \left[p^{n+1}x - (p^n a_1 + \ldots + p a_n)\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív megadású sorozatra:

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = x.$$

Definíció. $p = 3$ esetén a (2.8) előállítást az x szám **triadikus tört** alakjának nevezzük.

Vannak olyan számok, amelyeknek két különböző triadikus tört alakjuk van, pl.

$$(0{,}100\ldots)_3 = \frac{1}{3} = (0{,}022\ldots)_3.$$

Ebben az esetben a következő mondható: $a_n, b_n \in \{0,1,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$a_n = b_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

vagy van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$a_n = b_n \qquad (n \in \{1,\ldots,N-1\})$$

és

$$a_N = b_N + 1, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = 2 \qquad (N+1 \le n \in \mathbb{N}).$$

Ha a $D_0 := \mathbf{I} := [0,1]$ intervallumot három egyenlő részre osztjuk, akkor a középső rész belsejének elhagyásával a

$$D_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

halmazt kapjuk. Ha most ugyanezt megcsináljuk a megmaradt két intervallummal, azaz elhagyjuk középső nyílt harmadukat, akkor a

$$D_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

halmazhoz jutunk. Folytatva az eljárást, az n-edik lépésben kapjuk a $D_n \subset \mathbf{I}$ halmazt, amely 2^n darab, egyenként 3^{-n} hosszú intervallumból áll:

$$D_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{nk}: \quad D_{nk} \cap D_{nl} = \emptyset, \quad |D_{nk}| = \frac{1}{3^n} \quad (k, l \in \{1, \ldots, 2^n\}: \ k \neq l)\,.$$

Mivel D_n-et úgy kaptuk, hogy D_{n-1}-nek mind a 2^{n-1} darab – egyenként 3^{n-1} hosszú – intervallumából eltávolítottuk a középső nyílt harmadát:

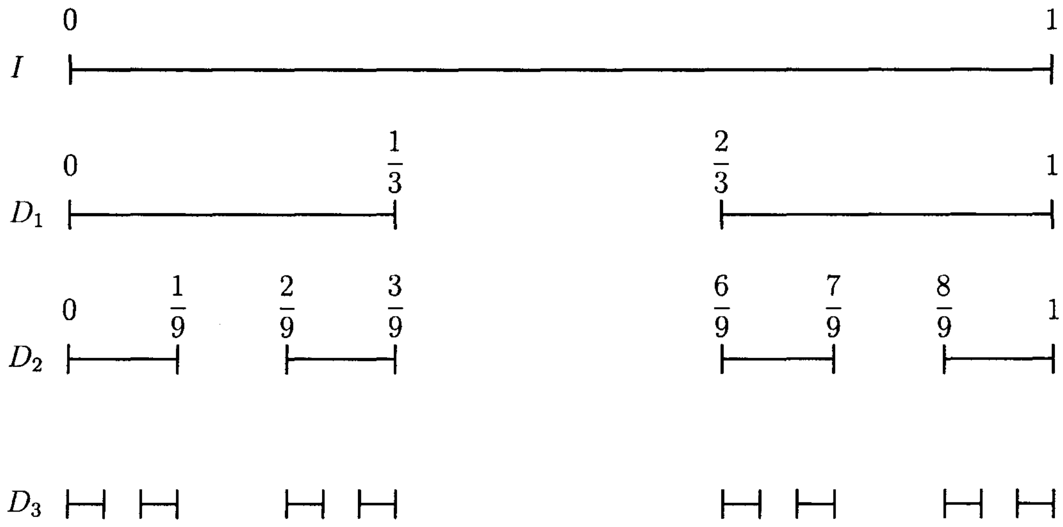
$$\left[\frac{k}{3^{n-1}}, \frac{k+1}{3^{n-1}}\right] \setminus \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right) = \left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n}\right],$$

ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_n \subset D_{n-1}$ és a D_n hossza (a D_n-et alkotó intervallumok összhossza) a D_{n-1} hosszának kétharmada. Sőt, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$D_m = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}), \ a_k \neq 1 \ (k \leq m) \right\}.$$

Például, ha $m = 1$, ill. $m = 2$, akkor

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = D_{1,1} \cup D_{1,2} = \\
&= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} : \ a_1 = 0 \right\} \cup \\
&\quad \cup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} : \ a_1 = 2 \right\} = \\
&= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} \ a_n \in \{0,1,2\} : \ a_1 \in \{0,2\} \right\}
\end{aligned}$$



2.2. ábra. A triadikus Cantor-halmaz approximációjának első három tagja.

(azaz D_1 nem tartalmazza azokat a törteket amelyek triadikus alakjában a törtjel után 1 áll), ill.

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right] = D_{2,1} \cup D_{2,2} \cup D_{2,3} \cup D_{2,4} = \\
&= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}) : \ a_1 = a_2 = 0\right\} \cup \\
&\cup \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}) : \ a_1 = 0, a_2 = 2\right\} \cup \\
&\cup \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}) : \ a_1 = 2, a_2 = 0\right\} \cup \\
&\cup \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}) : \ a_1 = a_2 = 2\right\} = \\
&= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in \mathbb{R} : \ a_n \in \{0,1,2\} \ (n \in \mathbb{N}) : \ \{a_1, a_2\} \subset \{0,2\}\right\}
\end{aligned}$$

(azaz D_2 nem tartalmazza mindazokat a D_1-beli törteket, amelyek triadikus alakjában a törtjel utáni második jegy 1). Mivel minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén D_n az **I** zárt részhalmaza (véges sok zárt halmaz egyesítése), ezért minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén D_n kompakt (korlátos és zárt) halmaz, így ezek metszete is zárt.

Definíció. A

$$\mathbb{D} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} D_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{nk}$$

halmazt (triadikus) **Cantor-halmaz**nak (**Smith-Volterra-Cantor-halmaz**nak[29]) nevezzük.

Állítások.

1. $\mathbb{D}$ kompakt, hiszen korlátos és zárt (ui. zárt halmazok metszete), továbbá $\mathbb{D}$ az $\mathbb{I}$ intervallumnak pontosan azon pontjait tartalmazza, amelyeknek van olyan hármas számrendszerbeli alakjuk, amelyben nem szerepel az 1-es számjegy:

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in [0,1] : \ \exists\, a_n \in \{0,2\}\ (n \in \mathbb{N}) : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right\} =$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k\in\mathcal{Z}(m)} \left[\frac{k}{3^m}, \frac{k+1}{3^m} \right],$$

ahol

$$\mathcal{Z}(m) := \left\{ k \in \mathbb{Z} : \ k = \sum_{n=1}^{m} a_n 3^{m-n}, \ a_n \in \{0,2\}\ (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

2. $\mathbb{D}$ nem tartalmaz (valódi) intervallumot (nincsen belső pontja), ha ui. lenne olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, amelyre $I \subset \mathbb{D}$ teljesülne, akkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $I \subset D_n$ volna, sőt I-t lefedné valamelyik D_n-beli intervallum is, és mivel minden D_n-beli intervallumnak a hossza legfeljebb 3^{-n}, ezért $\lim(3^{-n}) = 0$ miatt I-nek legfeljebb csak egy eleme lehet.

3. $\mathbb{D}$ önmagában sűrű[30], ui. ha $x \in \mathbb{D}$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sum_{n=m}^{\infty} 2^n/3^n < \varepsilon.$$

[29] Ezt a halmazt először (1875-ben) H. J. Smith, majd (1881-ben) Vito Volterra és (1883-ban) Georg Cantor írta le.

[30] Az (X, ρ) metrikus tér valamely $H \subset X$ részhalmazát **önmagában sűrű**nek nevezzük, ha nincsen izolált pontja, azaz minden pontja torlódási pont.

Így ha $x_n \in \{0,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, amelyre $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n$ és

$$y_n := \left\{ \begin{array}{lll} x_n & (n < m) & \\ 0 & (n \geq m & \text{és} \quad x_n = 2) \\ 2 & (n \geq m & \text{és} \quad x_n = 0) \end{array} \right\}, \qquad \text{ill.} \qquad y := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n},$$

akkor $y \in \mathbb{D}$, $x \neq y$ és

$$|x - y| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon.$$

4. $\mathbb{D}$ kontinuum számosságú, ui. az

$$M := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,|\, x_n \in \{0,2\} \ (n \in \mathbb{N})\},$$

halmaz kontinuum számosságú és $M \sim \mathbb{D}$, mivel a

$$\varphi : M \to \mathbb{D}, \qquad \varphi\left((x_n)\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

leképezés bijektív.

5. $\mathbb{D}$ Lebesgue-mérhető, hiszen kompakt, továbbá, ha $(\mathbb{R}, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-struktúra, akkor

$$\lambda(D_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \mu(D_n k) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és λ-nak – mint mértéknek – a folytonossága következtében

$$\lambda(\mathbb{D}) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} D_n\right) = \lambda(\lim_{n\to\infty}(D_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = 0.$$

6. A $[0,1]$ intervallum a Cantor-halmaz folytonos képe, azaz van olyan $f : \mathbb{D} \to [0,1]$ szürjektív függvény, amely folytonos. Ha ui. $y \in [0,1]$, akkor van olyan $y_n \in \{0,1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, hogy

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n/2^n,$$

ezért az

$$x_n := 2y_n \in \{0,2\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in \mathbb{D},$$

így az

$$f : \mathbb{D} \to [0,1], \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y \tag{2.9}$$

leképezés szürjektív. Megmutatjuk, hogy f (egyenletesen) folytonos is. Ha ui. $m \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{D}$ olyan, hogy $|a - b| < 3^{-m}$, akkor

$$|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2^m},$$

hiszen ha $a_n, b_n \in \{0,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$ az a-t, ill. a b-t előállító sorozatok:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n, \qquad \text{ill.} \qquad b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/3^n,$$

akkor

$$|a - b| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \right| < \frac{1}{3^m}$$

következtében $a_n = b_n$ $(n \in \{1, \ldots, m\})$ és így

$$|f(a) - f(b)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m}. \qquad \blacksquare$$

A (2.9)-beli f függvény esetében könnyen belátható az is, hogy $f(0) = 0$, ill. $f(1) = 1$ teljesül, továbbá f monoton növekedő. Ha ui. $x, y \in \mathbb{D}$: $x < y$, akkor van olyan $x_n, y_n \in \{0,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \qquad \text{ill.} \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n},$$

tehát az

$$m := \min\{n \in \mathbb{N} : \; x_n \neq y_n\}$$

indexre $y_m - x_m = \pm 2$, ezért

$$\begin{aligned} 0 < y - x \; &= \; \frac{y_m - x_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{3^n} \leq \frac{y_m - x_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \\ &= \; \frac{y_m - x_m}{3^m} + \frac{1}{3^m}, \end{aligned}$$

ennélfogva $y_m = 2$, $x_m = 0$, ahonnan

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \le \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{2^n} + \frac{2}{2^m} \le \sum_{n=1}^{m-1} \frac{y_n}{2^n} + \frac{2}{2^m} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

Az így értelmezett f függvény könnyen kiterjeszthető a $[0,1]$ intervallumra a monotonitás ill. a folytonosság megtartásával:

Definíció. Ha f a (2.9)-beli függvény, akkor az

$$F(x) := \sup\{f(t) \in \mathbb{R} : \ t \in \mathbb{D}, \ t \le x\} \quad (x \in [0,1])$$

függvényt **Cantor-függvény**nek nevezzük.

A fentiekből világos, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és $x, y \in [0,1]$, akkor

$$|x - y| < \frac{1}{3^m} \qquad \Longrightarrow \qquad |F(x) - F(y)| < \frac{1}{2^m},$$

így, ha $x \neq y$ és m az a legnagyobb index, amelyre még $|x - y| < 3^{-m}$ teljesül, akkor

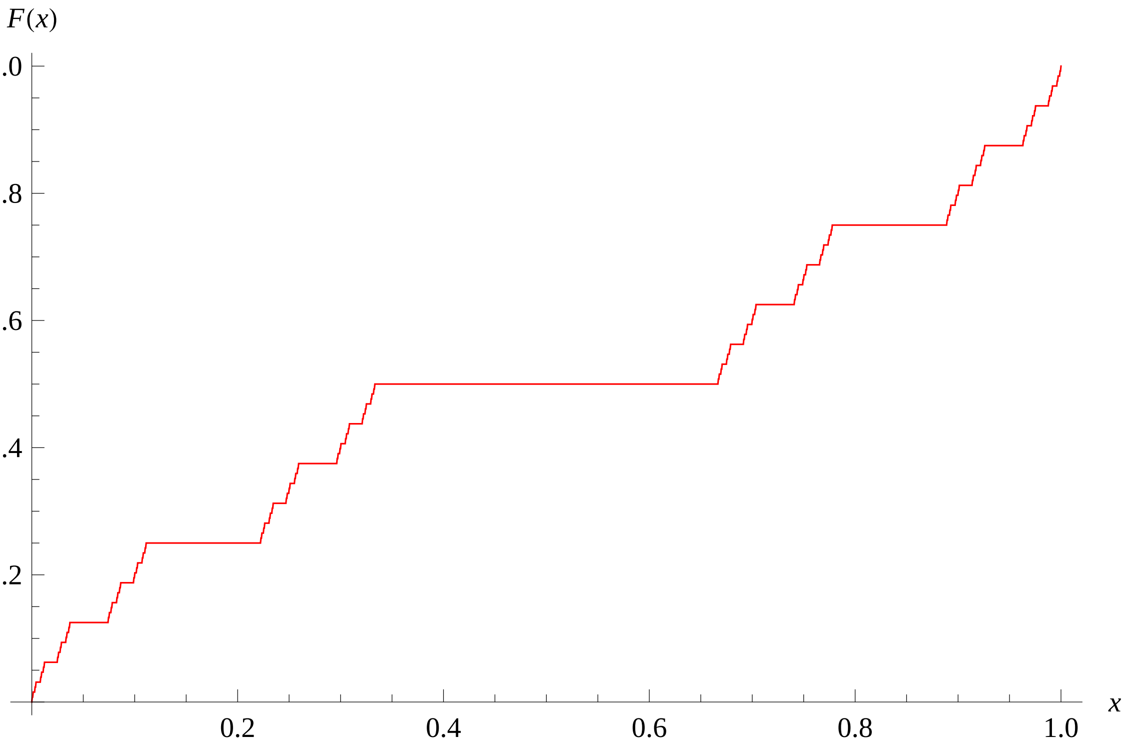
$$\frac{1}{3^m + 1} < |x - y| < \frac{1}{3^m}, \qquad \text{és így} \qquad -m - 1 < \frac{\ln(|x - y|)}{\ln(3)} < -m,$$

ahonnan

$$|F(x) - F(y)| < \frac{1}{2^m} < 2^{1 + \ln(|x-y|)/\ln(3)} = 2|x - y|^{\ln(2)/\ln(3)}$$

következik.

A Cantor-függvény grafikonja az ördögi lépcső. Az ördögi lépcső az a ponthalmaz, melyet az így kapott F függvény grafikonja, az x-tengely és az $y = 1$ egyenletű egyenes határol. Azért ördögi, mert balról jobbra feljuthatunk rajta úgy, hogy 0 összhosszúságú részen megyünk felfelé, és sehol sem ugrunk, hiszen F folytonos.



2.3. ábra. A Cantor-függvény grafikonja.

2.13. $\boxed{\text{J}}$

Megjegyzés. Legyen (X, Ω, μ) valószínűségi mértéktér (Kolmogorov mező).

1. Ha $\xi \in L$, akkor – valószínűségszámítási terminológiával élve – ξ neve **valószínűségi változó**,
$$M(\xi) := \int \xi \, d\mu$$
a ξ **várható értéke**,
$$D(\xi) := \|\xi - M(\xi)\|_2 = \sqrt{M\left(|\xi - M(\xi)|^2\right)} = \sqrt{\int \left|\xi - \int \xi \, d\mu\right|^2 d\mu}$$
pedig a **szórása**. Így, ha $0 < a, \lambda, p \in \mathbb{R}$, akkor a Markov-, ill. a Csebisev-egyenlőtlenség a következú alakú:
$$\mu\left(|\xi| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^p} \cdot M(|\xi|^p), \qquad \text{ill.} \qquad \mu\left(|\xi - M(\xi)| \geq \lambda D(\xi)\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Ha $\xi : X \to \mathbb{R}$ mérhető, továbbá korlátos, azaz alkalmas $k, K \in \mathbb{R}$ számokkal
$$k \leq \xi(x) \leq K \qquad (x \in X),$$
akkor – mint tudjuk – $\xi \in L$ (azaz ξ valószínűségi változó), továbbá
$$k = k \cdot \mu(X) \leq k \cdot \int 1 \, d\mu \leq M(\xi) \leq K \cdot \int 1 \, d\mu = K \cdot \mu(X) = K.$$
Ha speciálisan

   (a) alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén
   $$\xi(x) = c \qquad (x \in X),$$
   akkor $M(\xi) = c$.

   (b) $k = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = K$, és
   $$A_k := \{x \in X : \; x_{k-1} \leq \xi(x) < x_k\} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$
   akkor
   $$A_j \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\} : \; i \neq j) \qquad \text{és} \qquad X = \biguplus_{k=1}^{n} A_k.$$

Így

$$M(\xi) = \int \xi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int \xi \cdot \chi_{A_k} \, d\mu,$$

és ezért

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \mu(A_k) \leq M(\xi) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mu(A_k).$$

Definíció. Legyen (X, Ω, μ) valószínűségi mértéktér. A $\xi : X \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük az

$$F(t) := \mu(\{\xi < t\}) = \mu(\{x \in X : \ \xi(x) < t\}) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvényt.

Könnyen belátható, hogy

1. F monoton növekedő, ui. ha $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, továbbá

   $$A := \{\xi < a\} = \{x \in X : \ \xi(x) < a\}, \qquad \text{ill.} \qquad B := \{\xi < b\} = \{x \in X : \ \xi(x) < b\},$$

   akkor $A \subset B$, így

   $$F(a) = \mu(A) \leq \mu(B) = F(b);$$

2. bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a fenti $\{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([k, K])$ felosztásra és A_k halmazokra

   $$\mu(A_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}),$$

   hiszen

   $$\begin{aligned} \mu(A_k) &= \mu(\{x \in X : \ x_{k-1} \leq \xi(x) < x_k\}) = \\ &= \mu(\{x \in X : \ \xi(x) < x_k\} \setminus \{x \in X : \ \xi(x) < x_{k-1}\}) = \\ &= \mu(\{x \in X : \ \xi(x) < x_k\}) - \mu(\{x \in X : \ \xi(x) < x_{k-1}\}) = \\ &= F(x_k) - F(x_{k-1}). \end{aligned}$$

A fentiek figyelembe vételével ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1})) \leq M(\xi) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1}))\,.$$

Ha most a $[k, K]$ intervallum $\{x_0, \ldots, x_n\}$ felosztását minden határon túl finomítjuk, azaz

$$\max_{k \in \{1,\ldots,n\}} (x_k - x_{k-1}) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1})) \longrightarrow \int_k^K x\, dF(x)$$

és

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1})) \longrightarrow \int_k^K x\, dF(x).$$

Mivel

$$F(x) = 0 \quad (x < k) \qquad \text{és} \qquad F(x) = 1 \quad (x > K),$$

így

$$\lim_{\substack{k \to -\infty \\ K \to +\infty}} \int_k^K x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x),$$

ahonnan

$$\boxed{\int \xi\, d\mu = M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)}$$

következik.

2.14. $\boxed{\text{K}}$

Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

egyenlőség!

Útm.

0. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$a_n := (2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

akkor $\lim(a_n) = \dfrac{\pi}{2}$:

- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx,$$

akkor

$$\left.\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \\ I_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad \text{ui.}$$

$n = 0$, ill. $n = 1$ esetén

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1,$$

és ha $2 \le n \in \mathbb{N}$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x))\cos^{n-2}(x)\,dx = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)\cos^{n-2}(x)\sin(x)\,dx = \\ &= I_{n-2} + \left[\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\cos(x)\,dx = \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cdot I_n, \end{aligned}$$

azaz

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad (2 \le n \in \mathbb{N}).$$

- Mivel

  $$0 \le \cos(x) \le 1 \qquad (x \in [0, \pi/2]),$$

  ezért minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

  $$\cos^{2n}(x) \ge \cos^{2n+1}(x) \ge \cos^{2n+2}(x) \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

  így az integrál monotonitása alapján

  $$I_{2n} \ge I_{2n+1} \ge I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

  ahonnan

  $$1 \ge \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \ge \frac{2n+1}{2n+2} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

  A Sandwich-tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

  $$\lim \left(\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\right) = 1,$$

  ahonnan

  $$\lim \left(\frac{2}{\pi}(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = 1,$$

  vagyis

  $$\lim \left((2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

  Ez a határérték-reláció az ún. **Wallis-formula**.

1. lépés. Ha

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in L^1$, azaz $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \in \mathbb{R}$, ui.

- minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $1 + x \le e^x$, így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

  $$0 < e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2},$$

  tehát

- $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$

2. lépés. Ha

$$f_n(x) := \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & (0 \leq x \leq \sqrt{n}), \\ \\ 0 & (x > \sqrt{n}), \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

akkor $f_n \in L^1$ és minden $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill. $\lim(f_n(x)) = f(x)$. Így a Lebesgue-tétel következtében az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int f_n\,d\mu \longrightarrow \int f\,d\mu = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

3. lépés. A fenti egyenlőség bal oldalát parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \left[x\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\right]_0^{\sqrt{n}} + \frac{2n}{n}\int_0^{\sqrt{n}} x^2\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \\ &= 2\int_0^{\sqrt{n}} x^2\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n-1} dx = \\ &= \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{n-1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n-2} dx = \ldots = \\ &= \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n^{n-1}}\cdot\int_0^{\sqrt{n}} x^{2n}\,dx = \\ &= \frac{2\cdot 4\cdot\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. lépés. A Wallis-formula felhasználásásával tehát

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. lépés. Világos, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} e^{-x^2}\,dx = \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{-\alpha}^{0} -e^{-(-u)^2}\,du = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{0}^{-\alpha} e^{-u^2}\,du = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.15. $\boxed{\text{L1}}$

Definíció. Ha $k \in \mathbb{N}$, X és Y véges dimenziós valós vektortér, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, akkor az $f \in \mathcal{L}_k(Y^k, \mathbb{R})$ k-forma (k-adrendű tenzor) T^*f transzormáltján a

$$T^*f : X^k \to \mathbb{R}, \qquad (T^*f)(x_1, \ldots, x_k) := f(T(x_1), \ldots, T(x_n))$$

leképezést értjük. $k = 0$ esetén $T^*f := f$.

Megjegyzések.

- T linearitása következtében T^*f minden változójában lineáris, azaz T^*f k-forma (k-adrendű tenzor): $T^*f \in \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R})$.
- A $k = 1$ speciális esetben $T^*f = f \circ T$.

Házi feladat. Igazoljuk, hogy

1. a
$$T^* : \mathcal{L}_k(Y^k, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}_k(X^k, \mathbb{R}), \qquad f \mapsto T^*f$$
leképezés lineáris, azaz tetszőleges $f, g \in \mathcal{L}_k(Y^k, \mathbb{R})$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén
$$T^*(\lambda f + \mu g) = \lambda T^*f + \mu T^*g;$$

2. ha $f \in \mathcal{L}_k(Y^k, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}_l(Y^l, \mathbb{R})$, akkor
$$T^*(f \otimes g) = (T^*f) \otimes (T^*g);$$

3. ha Z is véges dimenziós valós vektortér, $S \in \mathcal{L}(Z, X)$, akkor $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, továbbá
$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*,$$
azaz tetszőleges $f \in \mathcal{L}_k(Y^k, \mathbb{R})$ esetén teljesül a
$$(T \circ S)^*f = S^*(T^*f)$$
egyenlőség!

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, X és Y véges dimenziós valós vektortér, továbbá $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

1. akkor bármely $f \in \mathcal{A}_k(Y)$ esetén $T^* f \in \mathcal{A}_k(X)$;
2. és T izomorfizmus, akkor

$$T^* : \mathcal{A}_k(Y) \to \mathcal{A}_k(X), \qquad f \mapsto T^* f$$

   szintén izomorfizmus és T^* inverze a $(T^{-1})^*$ leképezés;

3. akkor bármely $f \in \mathcal{A}_k(Y)$ esetén

$$\mathcal{A}(T^* f) = T^* \mathcal{A}(f),$$

   azaz $\mathcal{A}$ és T^* felcserélhető!

Útm.

1. Világos, hogy $T^* f$ multilineáris, f alternáló volta miatt igaz, hogy $f \in \mathcal{A}_k(Y)$.
2. $T^* f$ triviálisan izomorfizmus, továbbá

$$\mathrm{id} = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^* \quad \text{ill.} \quad \mathrm{id} = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*.$$

3. **Házi feladat.** ■

Megjegyzések.

1. A $k = n$ esetben $\binom{n}{n} = 1$, így $\dim(\mathcal{A}_n(X)) = 1$. Ezért, ha $T \in \mathcal{L}(X, X)$, akkor – mivel tetszőleges $f_0 \neq f \in \mathcal{A}_n(X)$ esetén $T^* f \in \mathcal{A}_n(X)$ – pontosan egy olyan $\mu \in \mathbb{R}$ szám van, amelyre $T^* f = \mu f$. Ily módon a véges dimenziós X lineáris tér minden egyes T lineáris transzformációjához hozzárendeltünk egy egyértelműen meghatározott μ számot, amelyet a T **determinláns**ának nevezünk és $\det(T)$-vel jelöljük:

$$T^* f =: \det(T) f. \tag{2.10}$$

2. A $k = 1$ speciális esetben tehát $T^* \in \mathcal{L}(Y', X')$, amelyet a T lineáris leképezés **duálisá**nak szokás nevezni és a $T^* =: T'$ módon jelölni. Ha $a := \{a_1, \ldots, a_n\}$

és $b := \{b_1, \ldots, b_m\}$ egy-egy bázis X-ben, ill. Y-ban, akkor T-nek az (a, b) bázispárra vonatkozó mátrixa a

$$[T]_{a,b} := [[T(a_1)]_b, \ldots, [T(a_n)]_b] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

mátrix. Tehát, ha alkalmas $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ számokkal

$$T(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i \quad (j \in \{1, \ldots, n\}), \qquad \text{akkor} \qquad [T]_{a,b} = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}.$$

T^*-nak a $b' := \{b^1, \ldots, b^m\} \subset Y'$, ill. az $a' := \{a^1, \ldots, a^m\} \subset X'$ bázisokra vonatkozó mátrixa a

$$[T^*]_{a'b'} := [T']_{a'b'} := \left[[T'(b^1)]_{a'}, \ldots, [T'(b^n)]_{a'}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

azaz, ha alkalmas $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ számokkal

$$T^*b^i = T'(b^i) = \sum_{l=1}^{n} \beta_{li} a^l, \qquad \text{akkor} \qquad [T^*]_{a'b'} = [T']_{a'b'} = [\beta_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}.$$

Mivel egyrészt

$$T^*b^i(a_j) = T'(b^i)(a_j) = \sum_{l=1}^{n} \beta_{li} a^l(a_j) = \beta_{ji},$$

másrészt

$$T^*b^i(a_j) = b^i(T(a_j)) = b^i\left(\sum_{l=1}^{m} \alpha_{lj} b_l\right) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lj} b^i(b_l) = \alpha_{ij},$$

ezért

$$[\beta_{ji}]_{i,j=1}^{m,n} = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{m,n},$$

azaz a T lineáris leképezés valamely $a-b$ bázispárra vonatkoztatott mátrixa megegyezik a duális leképezés $a' - b'$ (duális) bázispárra vonatkoztatott mátrixának transzponáltjával.

Feladat. Legyen X és Y véges dimenziós valós vektortér. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $k, l, \in \mathbb{N}_0$, ill.

1. $\varphi \in \mathcal{S}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{S}_l(X)$ esetén

$$T^*(\varphi \vee \psi) = (T^*\varphi) \vee (T^*\psi)$$

2. $\varphi \in \mathcal{A}_k(X)$, $\psi \in \mathcal{A}_l(X)$ esetén

$$T^*(\varphi \wedge \psi) = (T^*\varphi) \wedge (T^*\psi)$$

teljesül!
Útm. Közvetlenül adódik T^*, illetve $\vee$ és $\wedge$ definíciójából. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha X véges dimenziós, akkor

1. tetszőleges $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$ esetén
$$\det(S \circ T) = \det(S) \cdot \det(T);$$
2. az $I \in \mathcal{L}(X, X)$, $I(x) := x$ (identikus) leképezésre $\det(I) = 1$;
3. tetszőleges $T \in \mathcal{L}(X, X)$ esetén igaz a
$$\ker(T) \neq \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(T) = 0$$
ekvivalencia;
4. a $T \in \mathcal{L}(X, X)$ leképezés X tetszőleges bázisára vonatkozó mátrixának determinánsa a $\det(T)$ szám!

Útm. Ha $f \in \mathcal{A}_n(X)$, akkor

1. nyilvánvalóan
$$\det(T)\det(S)f = \det(T)(S^*f) = T^*(S^*f) = (S \circ T)^*f = \det(S \circ T)f.$$
2. világos, hogy
$$I^*f = f = 1 \cdot f.$$
3. Ha
   - $\ker(T) = \{0\}$, akkor T injektív, így $T \circ T^{-1} = I$ miatt
   $$1 = \det(I) = \det(T \circ T^{-1}) = \det(T)\det(T^{-1}),$$
   ahonnan $\det(T) \neq 0$ következik.

- $\det(\mathsf{T}) \neq 0$ és $\{b_1, \dots, b_n\}$ az X egy bázisa, továbbá $f_0 \neq f \in \mathcal{A}_n(X)$, akkor $f(b_1, \dots, b_n) \neq 0$, így

  $$0 \neq \det(\mathsf{T}) f(b_1, \dots, b_n) = (\mathsf{T}^* f)(b_1, \dots, b_n) = f(\mathsf{T}(b_1), \dots, \mathsf{T}(b_n))$$

  tehát a $\{\mathsf{T}(b_1), \dots, \mathsf{T}(b_n)\}$ rendszer lineárisan független, azaz bázisa X-nek. Ez viszont azt jelenti, hogy $\dim(\mathrm{Im}(\mathsf{T})) = n$, ahonnan $\dim(\ker(\mathsf{T})) = n - n = 0$, azaz $\ker(\mathsf{T}) = \{0\}$ következik.

4. Ha $a := \{a_1, \dots, a_n\}$, ill. $b := \{b_1, \dots, b_n\}$ az X egy bázisa és $\{a^1, \dots, a^n\}$, ill. $\{b^1, \dots, b^n\}$ az X' tér hozzá duális bázisa, akkor

$$\mathsf{T}(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{T}^* b^j = \mathsf{T}'(b^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} a^i.$$

Így

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}^*(b^1 \wedge \ldots \wedge b^n) &= (\mathsf{T}^* b^1) \wedge \ldots \wedge (\mathsf{T}^* b^n) = \\
&= \sum_{1 \le l_1, \dots, l_n \le n} \alpha_{1 l_1} a^{l_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{n, l_n} a^{l_n} = \\
&= \sum_{1 \le l_1, \dots, l_n \le n} \prod_{m=1}^{n} \alpha_{1 l_m} \left(a^{l_1} \wedge \ldots \wedge a^{l_n}\right) = \\
&= f_0 + \sum_{l \in \mathcal{S}_n} \prod_{m=1}^{n} \alpha_{1 l_m} \left(a^{l_1} \wedge \ldots \wedge a^{l_n}\right) = \\
&= \sum_{l \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(l) \prod_{m=1}^{n} \alpha_{1 l_m} \left(a^{1} \wedge \ldots \wedge a^{n}\right) = \\
&= \det\left[\alpha_{ij}\right] \left(a^1 \wedge \ldots \wedge a^n\right).
\end{aligned}$$

Ha $a = b$, akkor az

$$f := a^1 \wedge \ldots \wedge a^n = b^1 \wedge \ldots \wedge b^n$$

n–formára

$$\det(\mathsf{T}) f = \mathsf{T}^* f = \det\left[\alpha_{ij}\right] f, \qquad \text{azaz} \qquad \det(\mathsf{T}) = \det\left[\alpha_{ij}\right]. \quad \blacksquare$$

2.16. $\boxed{\text{L2}}$

Feladat. Értelmezzünk $\mathcal{A}_k(X)$-en, majd $\mathcal{A}(X)$-en skaláris szorzatot, ha $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ véges dimenziós euklideszi tér!
Útm.

0. lépés. A $k = 0$ esetben

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{A}_0(X)} := fg \qquad (f, g \in \mathcal{A}_0(X) = \mathbb{R})$$

triviálisan skaláris szorzat $\mathcal{A}_0(X)$-en.

1. lépés. Mivel $\dim(X) < \infty$, ezért X egyben Hilbert-tér is, és

$$X \sim X' = \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})}_{\mathcal{A}_1(X)} = L(X, \mathbb{R}) =: X^*,$$

továbbá a

$$\flat : X \to X^* = \mathcal{A}_1(X), \qquad \flat(x)(y) := \langle x, y\rangle \qquad (x, u \in X)$$

leképezés izomorfizmus. Ha $\sharp$ jelöli $\flat$ inverzét: $\sharp := \flat^{-1}$, akkor X^*-on is tudunk skaláris szorzatot értelmezni:

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{A}_1(X)} := \langle \sharp f, \sharp g\rangle_X \qquad (f, g \in X^*).$$

Ezért pl., ha $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset X$ ortonormált bázis és $\{b^1, \ldots, b^n\} \subset X^*$ a hozzá duális bázis, akkor tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\flat(b_i) = \langle b_i, \cdot\rangle_X = b^i \qquad \text{és} \qquad \sharp(b^i) = b_i,$$

és így $\{b^1, \ldots, b^n\}$ ortonormált bázis X^*-ban.

2. lépés. A $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetben azt fogjuk megmutatni, hogy pontosan egy olyan

$$\mathfrak{B} : \mathcal{A}_k(X) \times \mathcal{A}_k(X) \to \mathbb{R}$$

bilineáris leképezés van, amelyre ha $\varphi_l, \psi_l \in \mathcal{A}_1(X)$ $(l \in \{1, \ldots, k\})$,

$$f := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k, \qquad \text{ill.} \qquad g := \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k,$$

akkor

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(f,g) &= (\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)\,(\sharp(\psi_1),\ldots,\sharp(\psi_k)) = \\ &= \det\begin{bmatrix}\langle\varphi_1,\psi_1\rangle_{\mathcal{A}_1(X)} & \cdots & \langle\varphi_1,\psi_k\rangle_{\mathcal{A}_1(X)}\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\varphi_k,\psi_1\rangle_{\mathcal{A}_1(X)} & \cdots & \langle\varphi_k,\psi_k\rangle_{\mathcal{A}_1(X)}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Így – mivel ha $\{b_1,\ldots,b_n\}$ ortonormált bázis X-ben, akkor a $\{b^1,\ldots,b^n\}\subset X^*=\mathcal{A}_1(X)$ duális bázisra –

$$b^i := b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}\qquad (i\in N_*^k)$$

ortonormált bázis $\mathcal{A}_k(X)$-ben ($\mathfrak{B}$-re nézve). Ezért, ha $\lambda_i,\mu_i\in\mathbb{R}$ $(i\in N_*^k)$, akkor az

$$f := \sum_{i\in N_*^k}\lambda_i b^i \qquad \text{és} \qquad g := \sum_{i\in N_*^k}\mu_i b^i$$

formára

$$\mathfrak{B}(f,g) = \sum_{i\in N_*^k}\lambda_i\mu_i,$$

ahonnan $\mathfrak{B}$ szimmetriája, pozitív definitsége, ill. egyértelműsége azonnal következik, azaz

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{A}_k(X)} := \mathfrak{B}(f,g)\qquad (f,g\in\mathcal{A}_k(X))$$

skaláris szorzat $\mathcal{A}_k(X)$-en. Valóban, a

$$\Theta : (\mathcal{A}_k(X))^*\to\mathcal{A}_k(X^*),\qquad (\Theta(f))(\varphi_1,\ldots,\varphi_k) := f(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)$$

lineáris leképezés injektív: $\ker(\Theta)=\{0\}\in\mathcal{A}_k(X^*)$ (ui. ha $\Theta(f)=0$, akkor minden $i\in N_*^k$ esetén $f(b^i)=0$, azaz $f=0\in(\mathcal{A}_k(X))^*$), továbbá

$$\dim\left((\mathcal{A}_k(X))^*\right) = \dim\left(\mathcal{A}_k(X)\right) = \dim\left(\mathcal{A}_k(X^*)\right)$$

következtében Θ szürjektív, azaz Θ izomorfizmus, ill. bármely $\xi\in\mathcal{A}_k(X^*)$, ill. $\varphi_1,\ldots,\varphi_k\in$ $\in X^*=\mathcal{A}_1(X)$ esetén

$$(\Theta^{-1}(\xi))(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k) = \xi(\varphi_1,\ldots,\varphi_k).$$

Így mivel a $\sharp : X^*\to X$ leképezés izomorfizmus, a $\sharp^* : \mathcal{A}_k(X)\to\mathcal{A}_k(X^*)$ is izomorfizmus, sőt ezek

$$\Theta^{-1}\circ\sharp^* : \mathcal{A}_k(X)\to(\mathcal{A}_k(X))^*$$

kompozíciója is izomorfizmus. A

$$\mathfrak{B}(f,g) := (\Theta^{-1}(\sharp^*(f)))(g) \qquad (f,g \in \mathcal{A}_k(X))$$

leképezés tehát bilineáris forma $\mathcal{A}_k(X)$-en. Ha valamely $\varphi_r, \psi_r \in \mathcal{A}_1(X)$ $(r \in \{1,\ldots,k\})$ esetén

$$f := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k, \qquad \text{ill.} \qquad g := \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k,$$

akkor

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(f,g) &= (\sharp^*(f))(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k) = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(\sharp\psi_1, \ldots, \sharp\psi_k) = \\ &= \det\,[\varphi_r(\sharp(\psi_s))]_{r,s=1}^{k,k} = \det\,[\langle \sharp\varphi_r, \sharp\psi_s\rangle_X]_{r,s=1}^{k,k} = \\ &\ \det\left[\langle \varphi_r, \psi_s\rangle_{\mathcal{A}_1(X)}\right]_{r,s=1}^{k,k}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3. lépés. Ha tetszőleges $r, s \in \{0,1,\ldots,n\}$ esetén $\varphi_r \in \mathcal{A}_r(X)$, ill. $\psi_s \in \mathcal{A}_s(X)$, akkor

$$f := \sum_{r=0}^{n} \varphi_r \in \mathcal{A}(X), \qquad g := \sum_{s=0}^{n} \psi_s \in \mathcal{A}(X),$$

és így

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{A}(X)} := \sum_{l=0}^{n} \langle \varphi_l, \psi_l\rangle_{\mathcal{A}_l(X)}$$

skaláris szorzat $\mathcal{A}(X)$-en. $\blacksquare$

Megjegyzések. A $\flat$, ill. a $\sharp$ izomorfizmust írásmódjuk miatt szokás **zenei izomorfizmus**oknak nevezni. Ez az izomorfizmus képezi a kontinuummechanikában, ill. a relativitáselméletben (is) használatos jelölésrendszerben az ún. **indexemelés**, ill. **indexsüllyesztés** alapját.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ véges dimenziós euklideszi tér, a $\{b_1,\ldots,b_n\}$ vektorrendszer X egy bázisa, $\{b^1,\ldots,b^n\} \subset X^*$ a hozzá duális bázis, továbbá tetszőleges $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ esetén

$$g_{ij} := \langle b_i, b_j\rangle_X, \qquad \text{ill.} \qquad g^{ij} := \left\langle b^i, b^j\right\rangle_{\mathcal{A}_1(X)},$$

és

$$G := [g_{ij}]_{i,j=1}^{n,n} \qquad \text{ill.} \qquad H := \left[g^{ij}\right]_{i,j=1}^{n,n},$$

akkor

1. bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\flat(b_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} b^j, \qquad \text{ill.} \qquad \sharp(b^i) = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} b_j;$$

2. a H a G mátrix inverze: $H = G^{-1}$;

3. ha $\{d_1, \dots, d_n\}$ ortonormált bázis X-ben és az $M = [M_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a báziscsere mátrixa, azaz

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} d_i \qquad (j \in \{1, \dots, n\}),$$

akkor $G = M^{\mathsf{T}} M$ teljesül!

Útm.

1. Ha $i, j \in \{1, \dots, n\}$, akkor

$$\flat(b_i)(b_j) = \langle b_i, b_j \rangle_X = g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} g_{il} \delta_{lj} = \sum_{l=1}^{n} g_{il} b^l(b_j).$$

Így, ha $\{b_1, \dots, b_n\}$ az X egy bázisa, akkor

$$\flat(b_i) = \sum_{l=1}^{n} g_{il} b^l \qquad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Másrészt bármely $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$b^j(\sharp(b^i) = \langle \sharp(b^i), \sharp(b^j) \rangle_X = g^{ij} = b^j \left(\sum_{l=1}^{n} g^{il} b_l \right) = \sum_{l=1}^{n} g^{il} b^j(b_l) = \sum_{l=1}^{n} g^{il} \delta_{jl}.$$

Ezért – mivel $\{b^1, \dots, b^n\}$ bázisa X^*-nak –

$$\sharp(b^i) = \sum_{l=1}^{n} g^{il} b_l \qquad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

2. Mivel tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\sum_{l=1}^{n} g_{il} g^{lj} = \left\langle \overbrace{\sum_{l=1}^{n} g^{il} b^l}^{=\flat(b_i)}, b^j \right\rangle_{\mathcal{A}_1(X)} = \left\langle b_i, \sharp(b^j) \right\rangle_X = \flat\left(\sharp(b^j)\right)(b_i) = \delta_{ij},$$

ezért H jobbinverze G-nek, és G, ill. H szimmetrikussága következtében $H = G^{-1}$.

3. Mivel tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle_X = \sum_{k,l=1}^{n} M_{ki} M_{lj} \underbrace{\langle d_k, d_l \rangle_X}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k,l=1}^{n} M_{ki} M_{kj} = (M^T M)_{ij},$$

ezért $G = M^T M$. ■

2.17. $\boxed{\text{M}}$

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, továbbá $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$.

1. A
$$\Phi : [0,1]^k \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(t_1, \dots, t_k) := \sum_{i=1}^{k} t_k x_k$$
k-cella értékkészletét, azaz a
$$P(x_1, \dots, x_k) := \{t_1 x_1 + \dots + t_k x_k \in \mathbb{R}^n : \ t_i \in [0,1], \, i \in \{1, \dots, k\}\}$$
halmazt k-dimenziós **paralelepipedon**nak nevezzük.

2. Ha
$$A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \qquad A(e_i) := x_i, \quad (i \in \{1, \dots, k\}),$$
ahol $e_1, \dots, e_k$ jelöli az $\mathbb{R}^k$-beli kanonikus bázist, akkor a
$$\mathrm{gr}(A) := \det(A^T A) = \det\left(\langle A^T A e_i, e_j \rangle\right) = \det\left(\langle A e_i, A e_j \rangle\right) = \det(\langle x_i, x_j \rangle) \geq 0$$
számot az $A^T A$ **Gram-mátrix** determinánsának, **Gram-determináns**nak nevezzük.

3. A
$$\mu_k(P) := \sqrt{\mathrm{gr}(A)} = \sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)}$$
számot a P paralelepipedon **k-dimenziós mértéké**nek nevezzük.

Megjegyzés.

1. Ha $k = 1$, akkor
$$\mu_k(P) = \sqrt{\det(\langle x_1, x_1 \rangle)} = \sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle} = \sqrt{\|x_1\|_2^2} = \|x_1\|_2.$$

2. Ha $k = n$, akkor
$$\mu_n(P) = \sqrt{\mathrm{gr}(A)} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{\det(A^T) \cdot \det(A)} = \sqrt{\det(A) \cdot \det(A)} = |\det(A)|.$$

3. Ha $n = 3$, $k = 2$, akkor

$$(\det(\langle x_i, x_j \rangle))^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \|x_1 \times x_2\|_2^2$$

következtében

$$\mu_2(P) = \|x_1 \times x_2\|_2.$$

4. A Cauchy-Binet-formula felhasználásával belátható, hogy

$$\mu_k(P) = \sqrt{\sum_{i \in N_*{}^k} [\Delta_i^{n,k}(x_1, \dots, x_k)]^2}.$$

Legyen $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, továbbá $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, ill. $\Phi \in \mathfrak{C}^r([0,1]^k, V)$.
Az $n = 3$, $k = 2$ esetben az

$$n_\Phi := \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi$$

jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$\|n_\Phi\|_2^2 = \|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi\|_2^2 = \left| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 \Phi_1 & \partial_1 \Phi_2 & \partial_1 \Phi_3 \\ \partial_2 \Phi_1 & \partial_2 \Phi_2 & \partial_2 \Phi_3 \end{bmatrix} \right|^2 =$$

$$= \left[\det \begin{bmatrix} \partial_1 \Phi_2 & \partial_1 \Phi_3 \\ \partial_2 \Phi_2 & \partial_2 \Phi_3 \end{bmatrix} \right]^2 + \left[-\det \begin{bmatrix} \partial_1 \Phi_1 & \partial_1 \Phi_3 \\ \partial_2 \Phi_1 & \partial_2 \Phi_3 \end{bmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{bmatrix} \partial_1 \Phi_1 & \partial_1 \Phi_2 \\ \partial_2 \Phi_1 & \partial_2 \Phi_2 \end{bmatrix} \right]^2 =$$

$$= \left[\Delta_{(2,3)}\left(\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi\right)\right]^2 + \left[\Delta_{(3,1)}\left(\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi\right)\right]^2 + \left[\Delta_{(1,2)}\left(\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi\right)\right]^2.$$

Ez motiválja a következő fogalom bevezetését.

Definíció. A $\Phi : [0,1]^k \to \mathbb{R}^n$ sima k-cella **felszín**ének nevezzük az

$$\mathcal{F}(\Phi) := \int_{[0,1]^k} \sqrt{\sum_{i \in N_*{}^k} \left[\Delta_i^{n,k}(\partial_1 \Phi, \dots, \partial_k \Phi)\right]^2}$$

valós számot.

Megjegyzések. Ha

1. $k = 1$, azaz
$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$
sima út, akkor
$$\mathcal{F}(\Phi) = \int_0^1 \|\Phi'\|_2 = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n [\Phi_i']^2}.$$

2. $n = 3$, $k = 2$, azaz
$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$$
valamely sima felület paraméterezése, akkor
$$\mathcal{F}(\Phi) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{\sum_{i \in N_*{}^2} \left[\Delta_i^{3,2}(\partial_1\Phi, \partial_2\Phi)\right]^2} = \int_{[0,1]^2} \|n_\Phi\|_2.$$

Példa. $n = 3$, $k = 1$ esetén a
$$\Phi(t) := (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t), h2\pi t) \qquad (t \in [0,1])$$
1-cella (sima út) felszíne (a csavarvonal egy menetének ívhossza):
$$\begin{aligned}
l_\Phi &= \int_0^1 \sqrt{[\Delta_1(\Phi'(t))]^2 + [\Delta_2(\Phi'(t))]^2 + [\Delta_3(\Phi'(t))]^2}\,dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{[\Phi_1'(t)]^2 + [\Phi_2'(t)]^2 + [\Phi_3'(t)]^2}\,dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{4\pi^2R^2(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) + 4\pi^2h^2}\,dt = \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{R^2 + h^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}.
\end{aligned}$$

2.18. $\boxed{\text{N}}$

Potenciálok

A potenciál fogalma

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ differenciálforma

- **zárt**, ha $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ és
$$d\omega = 0 \,/\!\in \Lambda_{k+1}^{r-1}(V)/$$
teljesül.

- **egzakt**, ha $k \in \mathbb{N}$ és alkalmas $\eta \in \Lambda_{k-1}^{r+1}(V)$ differenciálformára
$$d\eta = \omega$$
teljesül.

Példák.

1. Ha $\omega \in \Lambda_2^1(\mathbb{R}^2)$, akkor alkalmas $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{C}^1$ (koordináta)függvény esetén
$$\omega = a \cdot \Delta_{(1,2)}^{2,2},$$
így
$$d\omega = (\partial_1 a)\Delta_{(1,1,2)}^{2,3} + (\partial_2 a)\Delta_{(2,1,2)}^{2,3} + (\partial_3 a)\Delta_{(3,1,2)}^{2,3} = 0 \in \Lambda_3^0(\mathbb{R}^2),$$
azaz ω zárt forma.

2. Ha $V := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ és
$$f(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in V),$$
akkor az
$$\omega \in \Lambda_1^\infty(V), \qquad \omega := f \cdot \Delta_1^{2,1} + g \cdot \Delta_2^{2,1}$$
Pfaff-féle differenciálforma zárt (vö. 14. beadható feladatsor/1/(d) feladat).

3. Ha $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ és

$$f(r) := \frac{x}{|r|^3}, \quad g(r) := \frac{y}{|r|^3}, \quad h(r) := \frac{z}{|r|^3} \qquad (r = (x,y,z) \in V).$$

akkor az $\omega \in \Lambda_2^\infty(V)$,

$$\omega := f \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + g \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} + h \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)},$$

differenciálforma zárt (vö. 14. beadható feladatsor 1/(g) feladat).

Megjegyzés. A második, ill.a harmadik példában szereplő ω forma nem egzakt (vö. 15. gyakorlat, ill. 15. beadható feladatsor: 6. feladat). Ha a második példa esetében V-t az $\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\right\}$ (tartó)halmazra cseréljük, akkor egzakt formát kapunk (vö. 15. beadható feladatsor: 9. feladat). Innen sejthető, hogy zárt formák egzaktságához a V tartóhalmaznak valamilyen feltételnek eleget kell tennie.

Tétel (Poincaré-lemma). Ha $k \in N = \{1, \ldots, n\}$, ill. $2 \leq r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ és V csillagtartomány,[31] úgy valamely $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ differenciálforma pontosan akkor zárt, ha egzakt.
Biz.

1. lépés. Ha $\omega \in \Lambda_k^r(V)$ egzakt forma, akkor zárt is, hiszen ha $\eta \in \Lambda_{k-1}^{r+1}(V)$ olyan differenciálforma, amelyre $d\eta = \omega$, akkor (vö. 14. beadható feladatsor/(5)/(c) feladat)

$$d\omega = d(d\eta) = 0 \quad /\in \Lambda_{k+1}^{r-1}(V)/\,.$$

2. lépés. Tegyük fel, hogy V csillagtartomány a 0 csillagponttal,[32] az

$$\omega = \sum_{i \in N_*{}^k} \omega_i \Delta_i^{n,k} \in \Lambda_k^r(V)$$

differenciálforma zárt, azaz

$$d\omega = 0 \in \Lambda_{k+1}^{r-1}(V)$$

[31] Ez azt jelenti, hogy ha van olyan $a \in V$ (ún. **csillagpont**), hogy bármely $x \in V$ esetén

$$[a,x] := \{a + t(x-a) \in \mathbb{R}^n : \ t \in [0,1]\} \subset V.$$

[32] Ha $0 \neq a$ csillagpontja V-nek (és 0 nem az), akkor alkalmazzuk az $y := x - a$ transzformációt!

teljesül, majd legyen $P : \Lambda_k^r(V) \to \Lambda_{k-1}^{r+1}(V)$ olyan leképezés, amelyre tetszőleges $x \in V$ esetén $P(\omega)(x) :=$

$$\sum_{i \in N_*{}^k} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot x_{i_l} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l-1}} \wedge dx_{i_{l+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Ekkor a koordinátafüggvényekre alkalmazva a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt azt kapjuk, hogy

$$dP(\omega)(x) = A + B \qquad (x \in V),$$

ahol

$$A := \sum_{i \in N_*{}^k} \sum_{l=1}^{k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot \Delta_i^{n,k} = k \cdot \sum_{i \in N_*{}^k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot \Delta_i^{n,k},$$

ill. $B :=$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N_*{}^k} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \left(\int_0^1 t \cdot t^{k-1} \partial_j \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot x_{i_l} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l-1}} \wedge dx_{i_{l+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Mivel

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N_*{}^k} \partial_j \omega_i \cdot \Delta_i^{n,k},$$

ezért

$$P(d\omega)(x) = C - D \qquad (x \in V),$$

ahol

$$C := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N_*{}^k} \left(\int_0^1 t^k \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot x_j \cdot \Delta_i^{n,k},$$

ill. $D :=$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N_*{}^k} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \left(\int_0^1 t^k \partial_j \omega_i(tx)\,dt \right) \cdot x_{i_l} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l-1}} \wedge dx_{i_{l+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

A

$$P(d\omega) + dP(\omega)$$

összegben lesznek olyan tagok, amelyek ellenkező előjellel szerepelnek (és így kiesnek), a maradék pedig a következő: tetszőleges $x \in V$ esetén

$$(P(d\omega) + dP(\omega)(x)) \equiv$$

$$\equiv k \cdot \sum_{i \in N_*{}^k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_i(tx)\, dt \right) \cdot \Delta_i^{n,k} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N_*{}^k} \left(\int_0^1 t^k \partial_j \omega_i(tx)\, dt \right) \cdot x_j \cdot \Delta_i^{n,k} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i \in N_*{}^k} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t^k \omega_i(tx) \right] \, dt \right) \cdot \Delta_i^{n,k} = \sum_{i \in N_*{}^k} \{\omega_i(x) - 0 \cdot \omega_i(0)\} \cdot \Delta_i^{n,k} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i \in N_*{}^k} \omega_i(x) \cdot \Delta_i^{n,k} = \omega.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$P(d\omega) + dP(\omega) = \omega, \qquad \text{azaz} \qquad dP(\omega) = \omega. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A fenti lemmában lévő $\eta := P(\omega)$ differenciálforma mellett más differenciálforma Cartan-deriváltja is lehet az ω differenciálforma. Ha ui. pl. $\xi \in \Lambda_{k-1}^{r+1}(V)$, akkor a d operátor linearitása következtében

$$d(\eta + d\xi) = d\eta + d(d\xi) = d\eta + 0 = \omega.$$

Ha $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda_{k-1}^{r+1}(V)$ olyan differenciálformák, amelyekre

$$d\xi_1 = \omega = d\xi_2, \qquad \text{azaz} \qquad d(\xi_1 - \xi_2) = 0 \in \Lambda_k^r(V),$$

akkor a Poincaré-lemma következtében alkalmas $\theta \in \Lambda_{k-2}^{r+2}(V)$ differenciálforma esetén

$$\xi_1 - \xi_2 = d\theta, \qquad \text{azaz} \qquad \xi_1 = d\theta + \xi_2.$$

Példa. Ha $V := \mathbb{R}^3$ és

$$\omega_{(1,2)}(x,y) := xy, \qquad \omega_{(2,3)}(x,y) := 2x, \qquad \omega_{(1,3)}(x,y) := 2y \qquad ((x,y) \in V),$$

akkor – lévén V csillagtartomány – van olyan $\eta \in \Lambda_1^\infty(V)$, amelyre $d\eta = \omega$. Ezt az η formát kétféleképpen is megkaphatjuk.

1. módszer. Az η differenciálforma megkeresését kísérletező feltevések (ún. „Ansatz”-ok) alkalmazásával kíséreljük meg. Olyan, a $\mathfrak{C}^\infty$-osztályba tartozó $f, g, h : V \to \mathbb{R}$ függvények meghatározása tehát a feladat, amelyekre

$$\eta(x, y, z) = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz \qquad ((x, y, z) \in V).$$

Mivel

$$d\eta = (\partial_1 g - \partial_2 f) \cdot dx \wedge dy + (\partial_1 h - \partial_3 f) \cdot dx \wedge dz + (\partial_2 h - \partial_3 g) \cdot dy \wedge dz,$$

ezért bármely $(x, y, z) \in V$ esetén

$$(\partial_1 g - \partial_2 f)(x, y, z) = xy, \quad (\partial_1 h - \partial_3 f)(x, y, z) = 2x, \quad (\partial_2 h - \partial_3 g)(x, y) = 2y.$$

Ha az első két egyenlőséget az első változó szerint integráljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \int \partial_1 f(x, y, z)\, dx, \quad h(x, y) = 2xy + \int \partial_3 f(x, y)\, dx \qquad ((x, y, z) \in V).$$

Így a fenti feltételből

$$2x = 2x + \int \partial_{23} f(x, y, z)\, dx - \int \partial_{32} f(x, y, z)\, dx$$

következik. Ez azt jelenti, hogy f teszőleges $\mathfrak{C}^\infty$-beli függvény lehet, pl. $f = 0$. Így a

$$g(x, y, z) =: \frac{x^2 y}{2}, \quad h(x, y, z) := 2xy \qquad ((x, y, z) \in V)$$

választással az

$$\eta(x, y, z) := \frac{x^2 y}{2} \cdot dy + 2xy \cdot dz \qquad ((x, y, z) \in V)$$

differenciálforma megfelelő: $d\eta = \omega$.

2. módszer. A Poincaré–lemmában lévő P leképezést fogjuk kiszámolni. Világos, hogy bármely $(x, y, z) \in V$ esetén

$$\begin{aligned} P(\omega)(x, y, z) \quad = \quad & \left(\int_0^1 t(tx)(ty)\, dt\right) \cdot x \cdot dy - \left(\int_0^1 t(tx)(ty)\, dt\right) \cdot y \cdot dx + \\ & +2\left(\int_0^1 t(tx)\, dt\right) \cdot y \cdot dz - 2\left(\int_0^1 t(tx)\, dt\right) \cdot z \cdot dy + \end{aligned}$$

$$+2\left(\int_0^1 t(ty)\,dt\right)\cdot x\cdot dz - 2\left(\int_0^1 t(ty)\,dt\right)\cdot z\cdot dx =$$

$$= \frac{x^2y}{4}\cdot dy - \frac{xy^2}{4}\cdot dx + \frac{2xy}{3}\cdot dz - \frac{2xz}{3}\cdot dy - \frac{2xy}{3}\cdot dz - \frac{2yz}{3}\cdot dx =$$

$$= -\left(\frac{xy^2}{4}+\frac{2yz}{3}\right)\cdot dx + \left(\frac{x^2y}{4}-\frac{2xz}{3}\right)\cdot dy + \frac{4yz}{3}\cdot dz.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénynek van

- **skalárpotenciál**ja, ha alkalmas $F \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \in \mathfrak{D}$ függvény esetén $F' = \operatorname{grad} F = f$.
- **vektorpotenciál**ja, ha $n \in \{2,3\}$ és alkalmas $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathfrak{D}$ függvény esetén

$$\operatorname{rot} A = \begin{cases} f & (n=3), \\ \widehat{f} & (n=2). \end{cases}$$

Példa. Ha $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ill.

$$f(r) := f_1(r)\,i + f_2(r)\,j + f_3(r)\,k := yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k,$$

akkor az

$$F(r) := xyz(x+y+z) \qquad \left(r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

függvény (skalár)potenciálja f-nek, hiszen

$$\partial_1 F(r) = f_1(r), \quad \partial_2 F(r) = f_2(r), \quad \partial_3 F(r) = f_3(r) \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$

azaz $F \in \mathfrak{D}$ és $\operatorname{grad}(F) = f$.

Példa. Ha adott $e, \epsilon_0 > 0$, ill. $0 \neq d \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$f(r) := \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3\langle d, r\rangle}{|r|^5}r - \frac{d}{|r|^3}\right\} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

(f a dipólus keltette elektromos teret leíró vektormező), akkor az

$$F(r) := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\langle d, r\rangle}{|r|^3} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

skalármező (skalár)potenciálja f-nek, hiszen $\mathrm{grad}(F) = f$ teljesül, továbbá az

$$A(r) := \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d \times r}{|r|^3} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező vektorpotenciálja f-nek, hiszen $\mathrm{rot}(A) = f$ teljesül (vö. $14.$ beadható feladatsor: $12.$ feladat).

Példa. Ha adott $\mu_0 > 0$, $j \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$f(r) := -\frac{\mu_0}{4\pi|r|^3}(r \times j) \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3),$$

akkor a

$$H(r) := \frac{\mu_0}{4\pi|r|} j \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3).$$

vektormező vektorpotenciálja f-nek, hiszen $\mathrm{rot}(H) = f$ teljesül (vö. Biot-Savart-törvény: $14.$ beadható feladatsor: $11.$ feladat).

Példa. Ha $\mu_0, I > 0$, akkor a z-tengely mentén haladó, I intenzitású árammal átjárt, végtelen hosszú(nak gondolt) egyenes vezető keltette mágneses térerősségét leíró

$$H(r) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{|r|^2 - \langle k, r\rangle^2} \cdot (k \times r) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 > 0).$$

vektormező egy vektorpotenciálja az

$$A(r) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x^2 + y^2 > 0)$$

vektormező, hiszen $\mathrm{rot}\, A = H$.

Példa. Ha $a \in \mathbb{R}^3$, akkor az

$$f(r) := a \times r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező egy vektorpotenciálja az

$$A(r) := \langle a, r\rangle r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező, hiszen (vö. $\boxed{\textbf{A}}$ Függelék)

$$\mathrm{rot}(A)(r) = \langle a, r\rangle 0 - r \times a = r \times a = f(r) \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

Megjegyzések.

1. Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathfrak{C}$ és $F \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \in \mathfrak{C}^1$, akkor az a tény, hogy F a f skalárpotenciálja azt jelenti, hogy
$$d\omega_F = \omega_{\mathrm{grad}\,F} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F \Delta_i^{n,1} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_i^{n,1} = \omega_f.$$

2. Ha $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{C}$ és $A \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathfrak{C}^1$, akkor az a tény, hogy A a f vektorpotenciálja azt jelenti, hogy
$$\begin{aligned} d\omega_A &= \omega_{\mathrm{rot}\,A} = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)\,\Delta^{3,2}_{(2,3)} + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)\,\Delta^{3,2}_{(3,1)} + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)\,\Delta^{3,2}_{(1,2)} = \\ &= f_1 \Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2 \Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3 \Delta^{3,2}_{(1,2)} = \omega_f. \end{aligned}$$

Látható tehát, hogy mind a skalár-, mind pedig a vektorpotenciál meghatározása differenciálformák egzak voltának eldöntésére vezető feladat. Igaz tehát a következő

Tétel. Legyen $V \subset \mathbb{R}^3$ csillagtartomány. Az $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$ sima ($f \in \mathfrak{C}^1$) vektormezőnek pontosan akkor van

1. skalárpotenciálja, ha $\mathrm{rot}(f) = 0$ teljesül;
2. vektorpotenciálja, ha $\mathrm{div}(f) = 0$ teljesül.

Biz.

1. **1. lépés.** Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$ sima vektormezőnek van skalárpotenciálja, azaz alkalmas $F : V \to \mathbb{R}$, $F \in \mathfrak{C}^2$ skalármező esetén $\mathrm{grad}(F) = f$, akkor (vö. 14. gyakorlat)
$$\mathrm{rot}(f) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = 0.$$

   2. lépés. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$ sima vektormezőre $\mathrm{rot}(f) = 0$ teljesül, akkor az
$$\omega := \omega_f = f_1 \cdot \Delta_1^{3,1} + f_2 \cdot \Delta_2^{3,1} + f_3 \cdot \Delta_3^{3,1} \in \Lambda_1^1(V)$$
   differenciálformára
$$d\omega = \omega_{\mathrm{rot}\,f} = 0 \in \Lambda_2^0(V),$$

így a Poncaré-Stokes tétel értelmében alkalmas $\eta \in \Lambda_0^2(V)$ differenciálforma esetén $d\eta = \omega$. Ezért az

$$F := \eta : V \to \mathbb{R}, \qquad F \in \mathfrak{C}^2$$

skalármező tehát skalárpotenciálja lesz f-nek, hiszen

$$\omega_f = d\eta = \omega_{\mathrm{grad}(F)}, \qquad \text{azaz} \qquad f = \mathrm{grad}(F).$$

2. **1. lépés.** Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$ sima vektormezőnek van vektorpotenciálja, azaz alkalmas $A : V \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathfrak{C}^2$ vektrmező esetén $\mathrm{rot}(A) = f$, akkor (vö. 14. gyakorlat)

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}(A)) = 0.$$

2. lépés. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : V \to \mathbb{R}^3$ sima vektormezőre $\mathrm{div}(f) = 0$ teljesül, akkor az

$$\omega := \omega_f = f_1 \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2 \cdot \Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3 \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)} \in \Lambda_2^1(V)$$

differenciálformára

$$d\omega = \omega_{\mathrm{div}(f)} = 0 \in \Lambda_2^0(V),$$

így a Poncaré-Stokes tétel értelmében alkalmas

$$\eta = A_1 \cdot \Delta_1^{3,1} + A_2 \cdot \Delta_2^{3,1} + A_3 \cdot \Delta_3^{3,1} \in \Lambda_1^2(V)$$

differenciálforma esetén $d\eta = \omega$, tehát az

$$A := (A_1, A_2, A_3) : V \to \mathbb{R}^3, \qquad A \in \mathfrak{C}^2$$

vektormezőre

$$\omega_f = d\eta = \omega_{\mathrm{rot}(A)}, \qquad \text{azaz} \qquad f = \mathrm{rot}(A). \quad \blacksquare$$

Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ csillagtartomány. Az $f = (f_1, \ldots, f_n) : V \to \mathbb{R}^n$ sima vektormezőnek pontosan akkor van skalárpotenciálja, ha

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\}),$$

azaz bármely $x \in V$ esetén az $f'(x)$ Jacobi-mátrix szimmetrikus.

Biz.

1. lépés. Ha az $f = (f_1, \ldots, f_n) : V \to \mathbb{R}^n$ vektormezőnek van skalárpotenciálja, azaz alkalmas $F : V \to \mathbb{R}$, $F \in \mathfrak{C}^2$ skalármező esetén $\mathrm{grad}(F) = f$, akkor a Young-tétel következtében bármely $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén

$$\partial_j f_i = \partial_{ij} F = \partial_{ji} F = \partial_i f_j.$$

2. lépés. Ha bármely $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén $\partial_j f_i = \partial_i f_j$, akkor az

$$\omega := \omega_f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta_i^{n,1} \in \Lambda_1^1(V)$$

differenciálformára:

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i \cdot \Delta_{(j,i)}^{n,2} = \sum_{i<j} (\partial_j f_i - \partial_i f_j) \cdot \Delta_{(i,j)}^{n,2} = 0 \in \Lambda_2^0(V).$$

Így a Poncaré-Stokes tétel értelmében alkalmas $\eta \in \Lambda_0^2(V)$ differenciálformára $d\eta = \omega$. Ezért az

$$F := \eta : V \to \mathbb{R}, \qquad F \in \mathfrak{C}^2$$

skalármező tehát skalárpotenciálja lesz f-nek, hiszen

$$\omega_f = d\eta = \omega_{\mathrm{grad}(F)}, \qquad \text{azaz} \qquad f = \mathrm{grad}(F). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Fentebb láttuk, hogy ha egy ω differenciálforma egzakt, akkor több olyan differenciálforma is létezhet, amelynek a deriváltja ω. Hasonló állítás igaz a skalárpotenciál, ill. a vektorpotenciál esetében is. Pontosabban: ha V csillagtartomány, továbbá

- F és G skalárpotenciálja f-nek:

  $$\mathrm{grad}(F) = f = \mathrm{grad}(G), \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{grad}(F - G) = 0,$$

  akkor alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén $F - G = c$, azaz $F = G + c$. Erre azt szokás mondani, hogy „a skalárpotenciál egy additív konstans erejéig egyértelmű”.

- A és B vektorpotenciálja f-nek:

$$\mathrm{rot}(A) = f = \mathrm{rot}(B), \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{rot}(A - B) = 0,$$

akkor alkalmas $\phi \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R})$ esetén $A - B = \mathrm{grad}(\phi)$, azaz $A = B + \mathrm{grad}(\phi)$. Erre azt szokás mondani, hogy „a vektorpotenciál egy additív skalármező gradiense erejéig egyértelmű”. Tehát a vektorpotenciál – ha van – nem egyértelmű. A ϕ függvényt különféle szempontok figyelembevételével választják meg. A **magnetosztatiká**ban célszerű pl. azt megkövetelni, hogy $\mathrm{div}\, A = 0$ teljesüljön.

Feladat. Adott $V \subset \mathbb{R}^2$ csilagtartomány, $f = (f_1, f_2) \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^2)$: $\mathrm{div}(f) = 0$ esetén adjunk meg olyan $A : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ deriválható vektormezőt, amelyre

$$\mathrm{rot}(A) = (f_1, f_2, 0) = \widehat{f}$$

teljesül!
Útm. Mivel a

$$g := (-f_2, f_1, 0)$$

függvényre

$$\mathrm{rot}(g) = (0, 0, \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) = (0, 0, \mathrm{div}(f)) = (0, 0, 0),$$

ezért van olyan $G \in \mathfrak{D}(V \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, hogy

$$\mathrm{grad}(G) = g, \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1 G = g_1 = -f_2 \quad \text{és} \quad \partial_2 G = g_2 = f_1 \quad (\partial_3 G = 0),$$

így az

$$A := (0, 0, G)$$

vektormezőre

$$\mathrm{rot}(A) = (\partial_2 G, -\partial_1 G, 0) = (f_1, f_2, 0) = \widehat{f}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $f \in \mathfrak{C}^1$ és $\mathcal{D}_f$ csillagtartomány, akkor egyenértékűek tehát az alábbi állítások:

- bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f'(x)$ szimmetrikus,
- f-nek van primitív függvénye (skalárpotenciálja),

- $n = 3$ esetén $\operatorname{rot} f = 0$.

Tétel. Ha $V \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f \in \mathfrak{C}(V, \mathbb{R}^n)$, akkor az alábbi három állítás egyenértékű:

(1) f-nek tetszőleges $\varphi : [\alpha, \beta] \to V$ zárt útra vett cirkulációja zérus:

$$\oint_\varphi f = 0.$$

(2) Bármely rögzített $p, q \in V$ pont és ezeket a pontokat összekötő, V-ben haladó φ, ψ utakra

$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

(3) f-nek van skalárpotenciálja, azaz van olyan $F \in \mathfrak{D}(V, \mathbb{R})$ skalármező, amelyre $\operatorname{grad}(F) = f$ teljesül.

Biz.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Ha $p, q \in V$, továbbá

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to V, \qquad \text{ill.} \qquad \psi : [\gamma, \delta] \to V$$

olyan utak, amelyekre

$$\varphi(\alpha) = p = \psi(\gamma) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\beta) = q = \psi(\delta)$$

teljesül, akkor $\varphi \vee \widetilde{\psi}$ nyilván zárt út V-ben, ezért

$$0 = \int_{\varphi \vee \widetilde{\psi}} f = \int_\varphi f + \int_{\widetilde{\psi}} f = \int_\varphi f - \int_\psi f,$$

ahonnan

$$\int_\varphi f = \int_\psi f$$

következik.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (3)/. Legyen $a \in V$, majd jelölje $\varphi_{a,r} : [\alpha, \beta] \to \Omega$ azt az utat, amely a-t r-rel köti össze:

$$\varphi_{a,r}(\alpha) = a, \qquad \varphi_{a,r}(\beta) = r.$$

Ekkor az

$$\mathsf{F}:\Omega\to\mathbb{R},\qquad \mathsf{F}(r):=\int_{\varphi_{a,r}} f \tag{2.11}$$

skalármezőre

$$\frac{\mathsf{F}(r+he_k)-\mathsf{F}(r)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\int_{\varphi_{a,r+he_k}} f-\int_{\varphi_{a,r}} f\right\}$$

teljesül, ahol e_k jelöli a k-adik kanonikus bázisvektort $(k\in\{1,2,3\})$, $h\in\mathbb{R}$: $r+he_k\in V$. A feltételek következtében

$$\int_{\varphi_{a,r+he_k}} f=\int_{\varphi_{a,r}\vee s_{r,r+he_k}} f=\int_{\varphi_{a,r}} f+\int_{s_{rr+he_k}} f,$$

ahol az

$$s_{r,r+he_k}:[0,h]\to\mathbb{R}^3,\qquad s_{r,r+he_k}(t):=r+te_k,$$

azaz az $s_{r,r+he_k}$ út értékkészlete az r pontot az $r+he_k$ ponttal összekötő szakasz. Így tehát

$$\frac{\mathsf{F}(r+he_k)-\mathsf{F}(r)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h\langle f(r+he_k),e_k\rangle\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\int_0^h\langle f_k(r+he_k)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}f_k(r+\vartheta e_k)h,$$

ahonnan

$$\lim_{h\to0}\frac{\mathsf{F}(r+he_k)-\mathsf{F}(r)}{h}\equiv f_k(r)\quad(k\in\{1,2,3\}),\qquad\text{azaz}\qquad \mathrm{grad}(\mathsf{F})=f$$

következik.

3. lépés /(3) ⇒ (1)/. Ha $\varphi:[\alpha,\beta]\to V$ zárt út, akkor $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$, így

$$\begin{aligned}\int_\varphi f &= \int_\alpha^\beta\langle f(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\langle\mathrm{grad}(\mathsf{F})(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle\,\mathrm{d}t=\\ &= \int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{F}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t=[\mathsf{F}(\varphi(t)]_\alpha^\beta=\mathsf{F}(\varphi(\beta))-\mathsf{F}(\varphi(\alpha))=0.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha f erőteret ír le, akkor a fenti állításra a következőképpen szoktak hivatkozni: „valamely (tartományon értelmezett) erőteret leíró vektormezőnek pontosan akkor van (skalár)potenciálja, ha bármely, a tartományban haladó zárt út mentén végzett munka zérus”. Ezért az ilyen vektormezőket **konzervatív** vektormezőnek is nevezik. Ennek az elnevezésnek az oka a következő. A fizikában $-\mathsf{F}$-t nevezik potenciálnak, amely a potenciális energiát hivatott reprezentálni. Ha valamely φ út konzevatív erőtérben lezajló mozgást reprezentál, akkor Newton második törvénye értelmében az ilyen erőteret leíró f vektormezőre a következő összefüggés teljesül:

$$0 = m\ddot{\varphi} - f = m\ddot{\varphi} + \operatorname{grad} F,$$

ahol m jelöli a mozgó anyagi pont tömegét. Mindkét oldalt $\dot{\varphi}$-tal skalárisan szorozva azt kapjuk, hogy

$$0 = \langle m\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}\rangle + \langle \operatorname{grad} F, \dot{\varphi}\rangle = \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\langle\dot{\varphi}, \dot{\varphi}\rangle + F \circ \varphi\right\}.$$

Ez azt jelenti, hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ „állandó” esetén

$$c = \frac{1}{2}m|\dot{\varphi}|^2 + F \circ \varphi,$$

azaz „a mozgási energia és a potenciális energia összege állandó” (**energiamegmaradás**).

Példa. Korábban megmutattuk (vö. 5. gyakorlat), hogy az

$$f(r) := -\gamma\frac{mM}{|r|^3}r \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

gravitációs erőtér esetében

$$\int_\varphi f = \frac{\gamma mM}{|\varphi(\beta)|} - \frac{\gamma mM}{|\varphi(\alpha)|}.$$

Tehát, ha φ zárt út, akkor $\oint_\varphi f = 0$, ami nem csoda, hiszen az

$$F(r) := \gamma\frac{mM}{|r|} \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

skalármezőre $\operatorname{grad} F = f$.

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet a fenti tétel bizonyításában rejlő egyik állításra, amit külün is érdemes megfogalmazni. Ha $V \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, továbbá az $f : V \to \mathbb{R}^n$ folytonos vektormezőnek van (skalár)potenciálja: $F : V \to \mathbb{R}$, akkor tetszőleges $\varphi : [\alpha, \beta] \to V$ sima út esetén

$$\boxed{\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))}$$

teljesül (**Newton-Leibniz-tétel**).

Példa. Az iménti példabeli f gravitációs erőtér esetében

$$\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \frac{\gamma m M}{|\varphi(\beta)|} - \frac{\gamma m M}{|\varphi(\alpha)|}.$$

A potenciál meghatározása

Ha $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^3$ csillagtartomány, akkor potenciálok meghatározására a következő két módszer ajánlott: a **definíció alapján**, ill. **alkalmas integrálok kiszámításával**.

1. módszer. Ha a potenciált a definíció alapján szeretnénk meghatározni, akkor a következő módon érdemes eljárni.

- Amennyiben $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ örvénymentes vektormező ($\mathrm{rot}(f) = 0$), akkor olyan differenciálható $F : V \to \mathbb{R}$ skalármezőt keresünk, amelyre $\mathrm{grad}\, F = f$, azaz

  $$\partial_1 F = f_1, \qquad \partial_2 F = f_2, \qquad \partial_3 F = f_3$$

  teljesül. Az f vektormező simasága miatt van olyan $G \in \mathfrak{D}(V, \mathbb{R})$, ill. $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{D}$ függvény, hogy bármely $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in V$ esetén

  $$F(x, y, z) = G(x, y, z) + g(y, z),$$

  ahol $\partial_1 G = \partial_1 F = f_1$. Mivel bármely $(x, y, z) \in V$ esetén

  $$f_2(x, y, z) = \partial_2 F(x, y, z) = \partial_2 G(x, y, z) + \partial_1 g(y, z),$$

  ezért alkalmas $H \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H \in \mathfrak{D}$, ill. $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in \mathfrak{D}$ függvény esetén

  $$g(y, z) \equiv H(y, z) + h(z),$$

  ahol

  $$\partial_1 H(y, z) \equiv f_2(x, y, z) - \partial_2 G(x, y, z)$$

  (a H függvény kétváltozós, pontosabban nem függhet az x változótól, hiszen ellenkező esetben $\mathrm{rot}(f) \neq 0$ teljesülne). Mivel

  $$f_3(x, y, z) \equiv \partial_3 F(x, y, z) \equiv \partial_3 G(x, y, z) + \partial_2 g(y, z) \equiv \partial_3 G(x, y, z) + \partial_2 H(y, z) + h'(z),$$

ezért alkalmas $K \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $K \in \mathfrak{D}$, ill. tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$h(z) \equiv K(z) + c,$$

ahol

$$K'(z) \equiv f_3(x, y, z) - \partial_3 G(x, y, z) - \partial_2 H(y, z)$$

(a K függvény egyváltozós, pontosabban nem függhet sem az x, sem pedig az y változótól, hiszen ellenkező esetben $\mathrm{rot}(f) \neq 0$ teljesülne). Innen h, ill. F könnyen számítható.

- Amennyiben $f \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ forrásmentes vektormező ($\mathrm{div}(f) = 0$), akkor olyan differenciálható $A : V \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt keresünk, amelyre $\mathrm{rot}(A) = f$, azaz

$$\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = f_1, \qquad \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = f_2, \qquad \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_2$$

teljesül. Ha pl. $A_3 = 0$, akkor

$$\partial_3 A_2 = -f_1, \qquad \partial_3 A_1 = f_2 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_3. \tag{$*$}$$

Ezért f simasága miatt van olyan $F_1, F_2 \in \mathfrak{D}(V, \mathbb{R})$, ill. $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{D}$ függvény, hogy bármely $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in V$ esetén

$$A_2(x, y, z) = -F_1(x, y, z), \qquad \text{ill.} \qquad A_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) + g(x, y),$$

ahol

$$\partial_3 F_1(x, y, z) = f_1(x, y, z) \quad \text{és} \quad \partial_3 F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z) \qquad ((x, y, z) \in V).$$

Így g meghatározható $(*)$ utolsó egyenletéből.

2. módszer. Ha a potenciált integrálok kiszámításával szeretnénk meghatározni, akkor a következő a teendő. Ha 0 csillagpontja V-nek és

- $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ örvénymentes vektormező: $\mathrm{rot}(f) = 0$, azaz az

$$\omega_f = f_1 \cdot \Delta_1^{3,1} + f_2 \Delta_2^{3,1} + f_3 \cdot \Delta_3^{3,1} \in \Lambda_1^1(V)$$

differenciálformára

$$d\omega_f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) \cdot \Delta_{(2,3)}^{3,2} + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) \cdot \Delta_{(3,1)}^{3,2} + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \cdot \Delta_{(1,2)}^{3,2} = 0 \in \Lambda_2^0(V),$$

akkor (vö. Poincaré-lemma bizonyítása) bármely $r = (x, y, z) \in V$ esetén ${N_*}^1 = \{1,2,3\}$ figyelembevételével $/(x_1, x_2, x_3) =: (x, y, z)/$ azt kapjuk, hogy az

$$\begin{aligned} F(r) := P(\omega_f)(r) &= \left(\int_0^1 t^0 f_1(tr)\,dt\right) x + \left(\int_0^1 t^0 f_2(tr)\,dt\right) y + \left(\int_0^1 t^0 f_3(tr)\,dt\right) z = \\ &= \int_0^1 \langle f(tr), r\rangle \,dt \end{aligned}$$

skalármezőre (nulladrendű differenciálformára)

$$\omega_f = dP(\omega_f) = \omega_{\mathrm{grad}\,F}, \qquad \text{azaz} \qquad f = \mathrm{grad}\,F$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy ha $0 \neq a \in V$ csillagpontja V-nek, akkor a fenti integrál a következő:

$$F(r) = \int_0^1 \langle f(a + t(r - a)), r - a\rangle \,dt \qquad (r \in V).$$

- ha $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ forrásmentes vektormező: $\mathrm{div}(f) = 0$, azaz az

$$\omega_f = f_1 \cdot \Delta^{3,2}_{(2,3)} + f_2 \Delta^{3,2}_{(3,1)} + f_3 \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2)} \in \Lambda^1_2(V)$$

differenciálformára

$$d\omega_f = \mathrm{div}(f) \cdot \Delta^{3,2}_{(1,2,3)} = 0 \in \Lambda^0_3(V),$$

akkor (vö. Poincaré-lemma bizonyítása) bármely $r = (x, y, z) \in V$ esetén

$${N_*}^2 = \{(2,3), (3,1), (1,2)\}, \qquad \text{azaz} \qquad i_1 \in \{2,3,1\}, \quad i_2 \in \{3,1,2\}$$

figyelembevételével $/(x_1.x_2.x_3) =: (x, y, z)/$ azt kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned} P(\omega_f)(r) &= \left(\int_0^1 tf_1(tr)\,dt\right) \cdot y \cdot dz - \left(\int_0^1 tf_1(tr)\,dt\right) \cdot z \cdot dy + \\ &+ \left(\int_0^1 tf_2(tr)\,dt\right) \cdot z \cdot dx - \left(\int_0^1 tf_2(tr)\,dt\right) \cdot x \cdot dz + \\ &+ \left(\int_0^1 tf_3(tr)\,dt\right) \cdot x \cdot dy - \left(\int_0^1 tf_3(tr)\,dt\right) \cdot y \cdot dx = \end{aligned}$$

$$= \left\{\int_0^1 t\,(f_2(tr)\cdot z - f_3(tr)\cdot y)\;dt\right\} dx + \left\{\int_0^1 t\,(f_3(tr)\cdot x - f_1(tr)\cdot z)\;dt\right\} dy +$$

$$+ \left\{\int_0^1 t\,(f_1(tr)\cdot y - f_2(tr)\cdot x)\;dt\right\} dz$$

differenciálformára

$$P(\omega_f)(r) = \omega_A(r) \qquad (r \in V)$$

teljesül, ahol

$$A(r) := (A_1(r), A_2(r), A_3(r)) \qquad (r \in V).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} A_1(r) &:= \int_0^1 t\,(f_2(tr)\cdot z - f_3(tr)\cdot y)\;dt, \\ A_2(r) &:= \int_0^1 t\,(f_3(tr)\cdot x - f_1(tr)\cdot z)\;dt, \\ A_3(r) &:= \int_0^1 t\,(f_1(tr)\cdot y - f_2(tr)\cdot x)\;dt, \end{aligned}$$

azaz

$$A(r) := \int_0^1 t\{f(tr)\times r\}\;dt \qquad (r \in V).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\omega_f = dP(\omega_f) = d\omega_A = \omega_{\mathrm{rot}\,A}, \qquad \text{azaz} \qquad f = \mathrm{rot}\,A.$$

Megjegyezzük, hogy ha $0 \neq a \in V$ csillagpontja V-nek, akkor a fenti integrál a következő:

$$A(r) := \int_0^1 t\{f(a + t(r-a))\times (r-a)\}\;dt \qquad (r \in V).$$

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy van-e az

$$f\,(r) := (x^2 - yz)i + (y^2 - xz)j + (z^2 - xy)k \qquad \left(r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

vektormezőnek skalárpotenciálja! Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen potenciált!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$ és

$$f'(r) = \begin{bmatrix} 2x & -z & -y \\ -z & 2y & -x \\ -y & -x & 2z \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

szimmetrikus, ezért f-nek van skalárpotenciálja, azaz van olyan $F \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, hogy $\operatorname{grad} F = f$. Az F potenciál meghatározása kétféle módon történhet.

1. módszer. Az F potenciált a definíció alapján határozzuk meg. Mivel az f folytonossága miatt

$$\operatorname{grad} F = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\partial_1 F = f_1, \qquad \partial_2 F = f_2, \qquad \partial_3 F = f_3),$$

ezért F-re bármely $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\partial_1 F(x,y,z) = x^2 - yz, \qquad \partial_2 F(x,y,z) = y^2 - xz \qquad \text{és} \qquad \partial_3 F(x,y,z) \equiv z^2 - xy$$

teljesül. Innen

$$F(x,y,z) \equiv \frac{x^3}{3} - xyz + c(y,z)$$

következik, ahol $c \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mivel

$$y^2 - xz \equiv \partial_2 F(x,y,z) \equiv -xz + \partial_y c(y,z),$$

ezért

$$c(y,z) \equiv \frac{y^3}{3} + d(z),$$

ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mivel

$$z^2 - xy \equiv \partial_3 F(x,y,z) \equiv -xy + \partial_z c(y,z) \equiv -xy + d'(z),$$

ezért tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$d(z) \equiv \frac{z^3}{3} + K.$$

Így a keresett F potenciálra

$$F(r) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz + K \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

2. módszer. Az F potenciált az integráformula alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^1 \left\langle ((tx)^2 - tytz, (ty)^2 - txtz, (tz)^2 - txty), (x,y,z) \right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \left\{ t^2x^3 - t^2xyz + t^2y^3 - t^2xyz + t^2z^3 - t^2xyz \right\} \mathrm{d}t = \\ &= \left\{ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \right\} \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \end{aligned}$$

$$= \left\{x^3+y^3+z^3-3xyz\right\}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{x^3+y^3+z^3}{2} - xyz \quad (r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(r) := (ye^x(1+x), xe^x) \qquad (r=(x,y)\in V:=\mathbb{R}^2)$$

vektormezőnek van (skalár)potenciálja, majd határozzunk is meg egy ilyen potenciált!
Útm. Világos, hogy V csillagtartomány, melynek csillagpontja pl. az origó: 0, továbbá $f\in\mathfrak{C}^1(V,\mathbb{R}^2)$. Bármely $x\in V$ esetén az $f'(x)$ Jacobi-mátrix szimmetrikus, hiszen

$$f'(r) = \begin{bmatrix} ye^x(2+x) & e^x(1+x) \\ e^x(1+x) & 0 \end{bmatrix} \qquad (r=(x,y)\in V).$$

Így, ha

$$\varphi(t) := tr \qquad (t\in[0,1])$$

(φ az origót tetszőleges $0\neq r\in V$ ponttal összekötő út), akkor az

$$F(r) := \int_\varphi f = \int_0^1 \langle f(tr), r\rangle\,dt = \int_0^1 \left\{2txy + t^2x^2y\right\} e^{tx}\,dt \qquad (r\in V)$$

függvény (skalár)potenciálja f-nek. Az iménti integrál közvetlen kiszámítása helyett a következő módon járunk el. Mivel f-nek van (skalár)potenciálja, ezért

$$\int_\varphi f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f,$$

ahol pl.

$$\varphi_1(t) := (0, ty), \quad \varphi_2(t) := (tx, y) \qquad (t\in[0,1]),$$

így

$$\int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f = \int_0^1 \left\{xy + tx^2y\right\} e^{tx}\,dt.$$

Ez az integrál már egyszerűbben számolható, mint az előbbi, azonban még könnyebben jutunk célhoz, ha a vonalintegrált az

$$\int_\varphi f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f,$$

módon számítjuk, ahol

$$\psi_1(t) := (tx,0), \quad \psi_2(t) := (x, ty) \qquad (t \in [0,1]).$$

Ekkor ui.

$$\int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f = \int_0^1 xye^x \, dt = xye^x. \quad \blacksquare$$

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy van-e az

$$f(r) := y^2\cos(x)i + (2y\sin(x) + e^{2z})j + 2ye^{2z}k \qquad \left(r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

vektormezőnek skalárpotenciálja! Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen potenciált!
Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$ és

$$f'(r) = \begin{bmatrix} -y^2\sin(x) & 2y\cos(x) & 0 \\ 2y\cos(x) & 2y & 2e^{2z} \\ 0 & 2e^{2z} & 4ye^{2z} \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

szimmetrikus, ezért f potenciálos, azaz van olyan $F \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, hogy $\operatorname{grad} F = f$. Az F potenciált a definíció alapján határozzuk meg. Mivel az f folytonos, ezért

$$\operatorname{grad} F = \mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\partial_1 F = f_1, \qquad \partial_2 F = f_2, \qquad \partial_3 F = f_3),$$

ezért F-re tetszőleges $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\partial_1 F(x,y,z) = y^2\cos(x), \quad \partial_2 F(x,y,z) = 2y\sin(x) + e^{2x} \quad \text{és} \quad \partial_3 F(x,y,z) = 2ye^{2z}$$

teljesül. Innen

$$F(x,y,z) \equiv y^2\sin(x) + c(y,z)$$

következik, ahol $c \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mivel

$$2y\sin(x) + e^{2z} \equiv \partial_2 F(x,y,z) \equiv 2y\sin(x) + \partial_y c(y,z),$$

ezért

$$c(y,z) \equiv ye^{2z} + d(z),$$

ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mivel

$$2ye^{2z} \equiv \partial_3 F(x,y,z) \equiv \partial_z c(y,z) \equiv d'(z),$$

ezért tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$d(z) \equiv K.$$

Így az F potenciálra

$$F(r) = y^2 \sin(x) + ye^{2z} + K \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

Feladat. Határozzuk meg a $g \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ függvényt úgy, hogy az

$$f(r) := (2xy - z)i + (x^2 + y^2 + z^2)j + g(x, y, z)k \qquad \big(r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormezőnek legyen (skalár)potenciálja! Adjuk meg ebben az esetben a potenciált!
Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $g \in \mathfrak{C}^1$ és

$$f'(r) = \begin{bmatrix} 2y & 2x & -1 \\ 2x & 2y & 2z \\ \partial_x g(x, y, z) & \partial_y g(x, y, z) & \partial_z g(x, y, z) \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért f pontosan akkor potenciálos, ha $f'(r)$ szimmetrikus, tehát

$$\partial_x g(x, y, z) = -1, \quad \partial_y g(x, y, z) = 2z \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big),$$

azaz

$$g(x, y, z) = 2yz - x + c'(z) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big),$$

ahol $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonosan deriválható függvény. Az F potenciál meghatározása kétféle módon történhet.

1. módszer. Az F potenciált közvetlenül a definíció alapján határozzuk meg. Olyan $F \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ függvényt keresünk, amelyre $\operatorname{grad} F = f$:

$$\partial_1 F = f_1, \qquad \partial_2 F = f_2, \qquad \partial_3 F = f_3,$$

azaz

$$\partial_x F(x, y, z) \equiv 2xy - z, \quad \partial_y F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{és} \quad \partial_z F(x, y, z) \equiv 2yz - x + c'(z).$$

Innen

$$F(x, y, z) \equiv x^2 y - xz + d(y, z)$$

következik, ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mivel

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv \partial_2 F(x, y, z) \equiv x^2 + \partial_y d(y, z),$$

ezért

$$d(y, z) \equiv \frac{y^3}{3} + yz + e(z),$$

ahol $e \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mivel

$$2yz - x + c'(z) \equiv \partial_3 F(x, y, z) \equiv -x + \partial_z d(y, z) \equiv -x + y + e'(z),$$

ezért

$$e(z) \equiv yz^2 - yz + c(z).$$

Így az F potenciálra

$$F(r) = y\left(x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2\right) - xz + c(z) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

2. módszer. Az F potenciált az integrálformula alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
F(r) &= \int_0^1 \left\langle (2(tx)(ty) - tz, (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2, 2(ty)(tz) - tx + c'(tz)), (x, y, z) \right\rangle \, dt = \\
&= \int_0^1 \left\{ x\left(2t^2xy - tz\right) + y\left(t^2(x^2 + y^2 + z^2)\right) + z\left(2t^2yz - tx + c'(tz)\right) \right\} dt = \\
&= \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{2}xz + \frac{1}{3}(x^2y + y^3 + yz^2) + \frac{2}{3}yz^2 - \frac{1}{2}xz + c(z) = \\
&= y\left(x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2\right) - zx + c(z) \quad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Mely $\beta > 0$ szám esetén lesz az

$$f(r) := (y^\beta - x^2 - 2xz)i + \beta yxj + (z^2 - x^2)k \qquad \left(r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y > 0\right)$$

vektormezőnek (skalár)potenciálja? Adjuk meg ezen β esetén a potenciált!
Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$ és

$$f'(r) = \begin{bmatrix} -2x - 2z & \beta y^{\beta-1} & -2x \\ \beta y & \beta x & 0 \\ -2x & 0 & 2z \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y > 0),$$

ezért f pontosan akkor potenciálos, ha

$$\beta y = \beta y^{\beta-1} \qquad \left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\right),$$

azaz $\beta = 2$. Az F potenciál meghatározása kétféle módon történhet.

1. módszer. Az F potenciált közvetlenül a definíció alapján határozzuk meg. Olyan $F : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható skalármezőt keresünk, amelyre $\operatorname{grad} F = f$:

$$\partial_1 F = f_1, \qquad \partial_2 F = f_2, \qquad \partial_3 F = f_3,$$

azaz

$$\partial_x F(x,y,z) \equiv y^2 - x^2 - 2xz, \qquad \partial_y F(x,y,z) \equiv \beta yx \qquad \text{és} \qquad \partial_z F(x,y,z) \equiv z^2 - x^2.$$

Innen

$$F(x,y,z) \equiv y^2x - \frac{1}{3}x^3 - x^2z + c(y,z)$$

következik, ahol $c : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel

$$2yx \equiv \partial_2 F(x,y,z) \equiv 2xy + \partial_y c(y,z),$$

ezért

$$c(y,z) \equiv d(z),$$

ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mivel

$$z^2 - x^2 \equiv \partial_3 F(x,y,z) \equiv -x^2 + \partial_z c(y,z) \equiv -x^2 + d'(z),$$

ezért

$$d(z) \equiv \frac{z^3}{3} + K,$$

ahol $K \in \mathbb{R}$. Így az F potenciálra

$$F(r) = y^2x - \frac{1}{3}x^3 - x^2z + \frac{z^3}{3} + K \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0).$$

2. módszer. Az F potenciált az integrálformula alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
F(r) &= \int_0^1 \left\langle \left((ty)^2 - (tx)^2 - 2(tx)(tz), 2(ty)(tx), (tz)^2 - (tx)^2\right), (x,y,z) \right\rangle \mathrm{d}t = \\
&= \left\{xy^2 - x^3 - 2x^2z + 2y^2x + z^3 - x^2z\right\} \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \\
&= y^2x - \frac{1}{3}x^3 - x^2z + \frac{z^3}{3} \quad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Előfordulhat, hogy V nem csillagtartomány, de az f vektormező esetén mégis meghatározható (skalár)potenciál (vö. dipólus potenciálja). Ehhez persze elengedhetetlen az, hogy f' szimmetrikus legyen ($n = 3$ esetén $\operatorname{rot} f = 0$ teljesüljön).

Feladat. Legyen

$$\chi : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \chi \in \mathfrak{C}^1.$$

Határozzuk meg az

$$f(r) := \chi(|r|) \cdot r \qquad (0 \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező (**centrális erőtér**) egy (skalár)potenciálját!
Útm. Mivel tetszőleges $0 \neq r \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$f'(r) = r \circ \left\{\chi'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|}\right\}^T + \chi(|r|)\mathbb{E}_3 = \frac{\chi'(|r|)}{|r|} \cdot r \cdot r^T + \chi(|r|)\mathbb{E}_3 = (f'(r))^T,$$

azaz f' szimmetrikus, ezért f-nek lehet potenciálja. Legyen most $0 \neq a, r \in \mathbb{R}^3$, majd φ, ill. ψ a következő utak: $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ az origó körüli $|a|$ sugarú gömbfelületen haladó olyan út, amely összeköti az a pontot a $b := \frac{a}{|r|} r$ ponttal,

$$\psi(t) := t\frac{r}{|r|} \qquad (t \in [|a|, |r|]).$$

Mivel

$$\langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = 0 \qquad (t \in [|a|, |r|]),$$

ezért

$$F(r) := \int_{\varphi \vee \psi} f = \int_{\psi} f = \int_{|a|}^{|r|} \langle f(\psi(t)), \psi'(t)\rangle \, dt = \int_{|a|}^{|r|} \chi(t) t \, dt \qquad (a \neq r \in \mathbb{R}^3)$$

a keresett potenciál. ■

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy van-e az

$$f(r) := f_1(r)\, i + f_2(r)\, j + f_3(r)\, k := zi + xj + yk \qquad \left(r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

vektormezőnek vektorpotenciálja! Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen vektorpotenciált!
Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$ és $\operatorname{div} f = 0$, ezért f-nek van vektorpotenciálja. Az A potenciál meghatározása kétféle módon történhet.

1. módszer. Az A vektorpotenciált a definíció alapján határozzuk meg. Világos, hogy

$$\operatorname{rot} A = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 & = & f_1 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 & = & f_2 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 & = & f_3 \end{array} \right\}.$$

Ha pl. $A_3 = 0$, akkor

$$\partial_3 A_2 = -f_1, \qquad \partial_3 A_1 = f_2 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_3. \tag{$*$}$$

Így f simasága miatt van olyan $F_1, F_2 \in \mathfrak{D}(\Omega, \mathbb{R})$, ill. $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{D}$ függvény, hogy bármely $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in \Omega$ esetén

$$A_2(x, y, z) = -F_1(x, y, z), \qquad \text{ill.} \qquad A_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) + g(x, y),$$

ahol

$$\partial_3 F_1(x, y, z) = f_1(x, y, z) \quad \text{és} \quad \partial_3 F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z) \qquad ((x, y, z) \in \Omega).$$

Így g meghatározható $(*)$ utolsó egyenletéből. Az iménti példában $\operatorname{div} f = 0$, ezért

$$A_3(r) := 0 \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ahonnan

$$A_2(x, y, z) \equiv -\frac{z^2}{2}$$

következik. Így

$$A_1(x, y, z) \equiv xz + g(x, y),$$

ill.

$$y \equiv f_3(x, y, z) \equiv \partial_x A_2(x, y, z) - \partial_y A_1(x, y, z) \equiv 0 - \partial_y g(x, y),$$

tehát

$$g(x, y) :\equiv -\frac{y^2}{2}$$

jó lesz. Ezért, ha

$$A_1(x, y, z) :\equiv xz - \frac{y^2}{2},$$

akkor

$$A(r) = \begin{bmatrix} xz - y^2/2 \\ -z^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

2. módszer. Az A vektorpotenciált az integrálformula alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^1 t\{(tz, ty, tx) \times (x, y, z)\}\,dt = \int_0^1 t^2(xz - y^2, zy - z^2, yz - x^2)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}(xz - y^2, zy - z^2, yz - x^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Látható, hogy a fenti feladatban kétféle módon számított vektorpotenciál lényegesen eltér egymástól. Ennek az az oka, hogy a két vektorpotenciál különbségéről csak annyit lehet tudni, hogy az valamely skalármező gradiense.

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy V nem csillagtartomány, de az f vektormező esetén mégis meghatározható vektorpotenciál. Ehhez persze elengedhetetlen az, hogy $\operatorname{div} f = 0$ teljesüljön.

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(r) := (xy\sin(z), xy\sin(z), (x+y)\cos(z)) \qquad (r = (x, y, z) \in V := \mathbb{R}^3)$$

függvény egy vektorpotenciálját!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$ és $\operatorname{div} f = 0$, ezért f-nek van vektorpotenciálja. Az A vektorpotenciált a definíció alapján határozzuk meg. Világos, hogy

$$\operatorname{rot} A = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 &=& f_1 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 &=& f_2 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 &=& f_3 \end{array} \right\}.$$

Ha pl. $A_3 = 0$, akkor

$$\partial_3 A_2 = -f_1, \qquad \partial_3 A_1 = f_2 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_3. \tag{$*$}$$

Így f simasága miatt van olyan $F_1, F_2 \in \mathfrak{D}(V, \mathbb{R})$, ill. $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{D}$ függvény, hogy bármely $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in V$ esetén

$$A_2(x, y, z) = -F_1(x, y, z), \qquad \text{ill.} \qquad A_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) + g(x, y),$$

ahol

$$\partial_3 F_1(x, y, z) = f_1(x, y, z) \quad \text{és} \quad \partial_3 F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z) \qquad ((x, y, z) \in V).$$

Így g meghatározható $(*)$ utolsó egyenletéből. Az iménti példában $\operatorname{div} f = 0$, ezért

$$A_3(r) := 0 \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ahonnan

$$A_2(x, y, z) \equiv xy\cos(z)$$

következik. Így

$$A_1(x, y, z) \equiv -xy\cos(z) + g(x, y),$$

ill.

$$(x + y)\cos(z) \equiv f_3(x, y, z) \equiv \partial_x A_2(x, y, z) - \partial_y A_1(x, y, z) \equiv y\cos(z) + x\cos(z) - \partial_y g(x, y),$$

ahonnan

$$g(x, y) \equiv 0$$

jó lesz. Ezért, ha

$$A_1(x, y, z) :\equiv xz - \frac{y^2}{2},$$

akkor

$$A(r) = \begin{bmatrix} -xy\cos(z) \\ xy\cos(z) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $V \subset \mathbb{R}^3$ konvex tartomány, $(a, b, c) \in V$, továbbá $f \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R}^3)$ olyan vektormező, amelyre $\operatorname{div} f = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ha

$$A := (g_1, g_2, 0)\,,$$

ahol

$$g_1(x, y, z) := \int_c^z f_2(x, y, s)\,ds - \int_b^y f_3(x, t, c)\,dt \qquad ((x, y, z) \in V)\,,$$

ill.

$$g_2(x, y, z) := -\int_c^z f_1(x, y, s)\,ds \qquad ((x, y, z) \in V)\,,$$

akkor fennáll a $\operatorname{rot} A = f$ egyenlőség!

Útm. Mivel

$$\operatorname{rot} A = (-\partial_3 g_2, \partial_3 g_1, \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)$$

és

$$\partial_3 g_2(x,y,z) = -f_1(x,y,z), \quad \partial_3 g_1(x,y,z) = f_2(x,y,z), \qquad ((x,y,z)\in V),$$

ill.

$$\begin{aligned}
&\partial_1 g_2(x,y,z) - \partial_2 g_1(x,y,z) = \\
&\quad = -\int_c^z \partial_1 f_1(x,y,s)\,ds - \int_c^z \partial_2 f_2(x,y,s)\,ds + f_3(x,y,z) = \\
&\quad = -\int_c^z \{\partial_1 f_1(x,y,s) + \partial_2 f_2(x,y,s)\}\,ds + f_3(x,y,z) \overset{\operatorname{div} f=0}{=} \\
&\quad = \int_c^z \partial_3 f_3(x,y,s)\,ds + f_3(x,y,c) = f_3(x,y,z) - f_3(x,y,c) + f_3(x,y,c) = \\
&\quad = f_2(x,y,z) \quad ((x,y,z)\in V),
\end{aligned}$$

ezért $\operatorname{rot} A = f$. ■

Feladat. Legyen $V\subset\mathbb{R}^3$ konvex tartomány, $(a,b,c)\in V$, továbbá $f\in\mathfrak{C}^1(V,\mathbb{R}^3)$ olyan vektormező, amelyre $\operatorname{div} f = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ha

$$A := (0, g_1, g_2)\,, \qquad \text{ill.} \qquad A := (h_1, 0, h_2)$$

ahol

$$g_1(x,y,z) := \int_a^x f_3(s,y,z)\,ds - \int_c^z f_1(a,y,t)\,dt \qquad ((x,y,z)\in V)\,,$$

$$g_2(x,y,z) := -\int_a^x f_2(s,y,z)\,ds \qquad ((x,y,z)\in V)\,,$$

ill.

$$h_1(x,y,z) := -\int_b^y f_3(x,s,z)\,ds \qquad ((x,y,z)\in V)\,,$$

$$h_2(x,y,z) := \int_b^y v_1(x,s,z)\,ds - \int_a^x f_2(t,b,z)\,dt \qquad ((x,y,z)\in V)\,,$$

akkor fennáll a $\operatorname{rot} A = f$ egyenlőség!

Útm. Mivel

$$\operatorname{rot} A = (\partial_2 g_2 - \partial_3 g_1, -\partial_1 g_2, \partial_1 g_1), \qquad \text{ill.} \qquad \operatorname{rot} A = (\partial_2 h_2, \partial_3 h_1 - \partial_1 h_2, -\partial_2 h_1)$$

továbbá

$$\partial_1 g_2(x,y,z) = -f_2(x,y,z), \quad \partial_1 g_1(x,y,z) = f_3(x,y,z), \qquad ((x,y,z) \in \Omega),$$

és $\partial_2 g_2(x,y,z) - \partial_3 g_1(x,y,z) =$

$$\begin{aligned}
&= -\int_a^x \partial_2 f_2(s,y,z)\,ds - \int_a^x \partial_3 f_3(s,y,z)\,ds + f_1(a,y,z) = \\
&= -\int_a^x \{\partial_2 f_2(s,y,z) + \partial_3 f_3(s,y,z)\}\,ds + f_1(a,y,z) \overset{\operatorname{div}\mathbf{v}=0}{=} \\
&= \int_a^x \partial_1 v_1(s,y,z)\,ds + v_1(a,y,z) = v_1(x,y,z) - v_1(a,y,z) + v_3(a,y,z) = \\
&= v_1(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in \Omega),
\end{aligned}$$

ill.

$$\partial_2 h_1(x,y,z) = -v_3(x,y,z), \quad \partial_2 h_2(x,y,z) = v_1(x,y,z), \qquad ((x,y,z) \in \Omega),$$

és $\partial_3 h_1(x,y,z) - \partial_1 h_2(x,y,z) =$

$$\begin{aligned}
&= -\int_b^y \partial_3 v_3(x,s,z)\,ds - \int_b^y \partial_1 v_1(x,s,z)\,ds + v_2(x,b,z) = \\
&= -\int_b^y \{\partial_3 f_3(x,s,z) + \partial_1 f_1(x,s,z)\}\,ds + f_2(x,b,z) \overset{\operatorname{div} f=0}{=} \\
&= \int_b^y \partial_2 f_2(x,s,z)\,ds + f_2(x,b,z) = f_2(x,y,z) - f_2(x,b,z) + f_2(x,b,z) = \\
&= f_2(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in V),
\end{aligned}$$

ezért $\operatorname{rot} A = f$. ■

Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}^3$. Határozzuk meg az

$$f(r) := \mathbf{a} \times r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező vektorpotenciálját!Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$\operatorname{div} f = \langle a, 0 \rangle - \langle a, 0 \rangle = 0 \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$

ezért f-nek van vektorpotenciálja. Mivel

$$a \times r = (a_2x - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

$$A := (g_1, g_2, 0)\,,$$

vektorpotenciál, ahol

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &:= \int_0^z (a_3x - a_1s)\,ds - \int_0^y (a_1t - a_2x)\,dt = \\ &= a_3xz - \frac{a_1}{2}z^2 - \frac{a_1}{2}y^2 + a_2yx \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)\,, \end{aligned}$$

ill.

$$g_2(x,y,z) := -\int_0^z (a_2x - a_3y)\,ds = (a_2x - a_3y)z \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)\,. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$f(r) := (-2y, 0, -2x) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Mutassuk meg, hogy f-nek van vektorpotenciálja: A, majd határozzuk meg A-t úgy, hogy $\operatorname{div} A = 0$ teljesüljön!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$, $\operatorname{div} f = 0$, ezért f-nek van vektorpotenciálja, azaz alkalmas deriválható $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőre $\operatorname{rot} A = f$. Ekkor van olyan deriválható $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, amelyre

$$A = B + \operatorname{grad} F$$

teljesül, ahol tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} B_3 &= 0, \\ B_2 &= -\int_0^z v_1(x,y,s)\,ds = \int_0^z 2y\,ds = 2yz, \\ B_1 &= \int_0^z v_2(x,y,s)\,ds - \int_0^y v_3(x,t,0)\,dt = \int_0^y 2x\,dt = 2xy. \end{aligned}$$

Így tehát
$$B(r) = (2xy, 2yz, 0) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$
A
$$0 = \operatorname{div} A(r) = B(r) + \Delta F(r) = 2x + 2z + \Delta F(r) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$
feltételből
$$\Delta F(r) = -2(y + z) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$
következik. Nem nehéz belátni, hogy az
$$F(r) := -\frac{1}{3}(y^3 + z^3) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$
skalármezőre teljesül a fenti feltétel. Így
$$\operatorname{grad} F(r) = -(0, y^2, z^2) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$
ahonnan
$$A(r) = (2xy, 2yz - y^2, -z^2) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$
következik. ■

Feladat. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén határozzuk meg az
$$f(r) := r \times a \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$
függvény A vektorpotenciálját az alábbi feltételek esetén!
$$1)\ A_2 = 0, \qquad 2)\ A \parallel a, \qquad 3)\ A(r) \parallel r \quad (r \in \mathbb{R}^3).$$

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$,
$$f(r) = (ya_3 - za_2, za_1 - xa_3, xa_2 - ya_1) \qquad (r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$
így $\operatorname{div} f = 0$. Van tehát olyan $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deriválható skalármező, amelyre $\operatorname{rot} A = f$ teljesül. Így

1) az $A_2 = 0$ feltételnek megfelelő A vektorpotenciál első és harmadik komponensére tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned}
A_1(x,y,z) &= -\int_0^y v_3(x,s,z)\,\mathrm{d}s = -\int_0^y (xa_2 - sa_1)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}a_1y^2 - a_2xy,\\
A_3(x,y,z) &= \int_0^y v_1(x,s,z)\,\mathrm{d}s - \int_0^x v_2(t,b,z)\,\mathrm{d}t =\\
&= \int_0^y (sa_3 - za_2)\,\mathrm{d}s - \int_0^x (za_1 - ta_3)\,\mathrm{d}t =\\
&= \frac{1}{2}a_3y^2 - a_2yz + \frac{1}{2}a_3x^2 - a_1xz.
\end{aligned}$$

2) az $A \parallel a$ feltételnek eleget tévő vektorpotenciálra

$$A(r) = \mu(r)\mathbf{a} \qquad (r \in \mathbb{R}^3),$$

ahol $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ alkalmas deriválható skalármező. Mivel bármely $r \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$r \times a = \operatorname{rot} A(r) = \mu(r) \cdot 0 + \operatorname{grad}\mu(r) \times a,$$

ezért az iménti μ skalármezőre

$$\operatorname{grad}\mu(r) = r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

kell, hogy teljesüljön. Világos, hogy létezik ilyen μ skalármező, hiszen az

$$u(r) := r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

vektormező örvénymentes: $\operatorname{rot} u = 0$. A μ skalármezőre tehát bármely $r = (x, y, z) \in \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\partial_1\mu(r) = x, \qquad \partial_2\mu(r) = y, \qquad \partial_3\mu(r) = z$$

teljesül. Innen

$$\mu(x,y,z) \equiv \frac{x^2}{2} + c(y,z)$$

következik, ahol $c \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mivel

$$y \equiv \partial_2\mu(x,y,z) \equiv \partial_y c(y,z),$$

ezért

$$c(y,z) \equiv \frac{y^2}{2} + d(z),$$

ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mivel

$$z \equiv \partial_3\mu(x,y,z) \equiv \partial_z c(y,z) \equiv d'(z),$$

ezért tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$d(z) \equiv \frac{z^2}{2} + K.$$

Így pl., ha

$$\mu(r) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}|r|^2 \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

akkor a keresett vektorpotenciál

$$A(r) := \frac{1}{2}|r|^2 a \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

alakú.

3) az

$$A(r) \parallel r \quad (r \in \mathbb{R}^3)$$

feltételnek eleget tévő vektorpotenciálra

$$A(r) = \lambda(r) r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$

teljesül, ahol $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ alkalmas deriválható skalármező. Mivel bármely $r \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$r \times a = \operatorname{rot} A(r) = \lambda(r) \cdot 0 + \operatorname{grad} \lambda(r) \times r = -r \times \operatorname{grad} \lambda(r),$$

ezért az iménti λ skalármezőre

$$\partial_1\lambda(r) = -a_1, \qquad \partial_2\lambda(r) = -a_2, \qquad \partial_3\lambda(r) = -a_3.$$

Innen

$$\lambda(x,y,z) \equiv -a_1 x + c(y,z)$$

következik, ahol $c \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Mivel

$$-a_2 \equiv \partial_2\lambda(x,y,z) \equiv \partial_y c(y,z),$$

ezért
$$c(y,z) \equiv -a_2 y + d(z),$$
ahol $d \in \mathfrak{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mivel
$$-a_3 \equiv \partial_3\lambda(x,y,z) \equiv \partial_z c(y,z) \equiv d'(z),$$
ezért tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén
$$d(z) \equiv -a_3 z + K.$$
Így pl., ha
$$\lambda(r) := -a_1 x - a_2 y - a_3 z = -\langle r, \mathbf{a}\rangle \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$
akkor a keresett vektorpotenciál
$$A(r) := -\langle r, a\rangle r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$
alakú. ■

Megjegyzés. Ha A_1 és A_2 az iménti feladatbeli f vektormező egy-egy vektorpotenciálja, akkor bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$A := \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$$
is vektorpotenciálja f-nek. Ez pl. azt jelenti, hogy a $2)$, ill. $3)$ feltételeknek eleget tévő A_1, ill. A_2 vektorpotenciálok esetén
$$A(r) := \alpha\frac{1}{2}|r|^2 a - (1-\alpha)\langle r, a\rangle r \qquad (r \in \mathbb{R}^3)$$
vektorpotenciálja f-nek. Az $\alpha = \dfrac{2}{3}$ speciális esetben
$$A(r) = \frac{1}{3}\left(|r|^2 a - \langle r, a\rangle r\right) = \frac{r \times (a \times r)}{3} \qquad (r \in \mathbb{R}^3).$$

Alkalmazások

Feladat. Számítsuk ki az

$$f(r) := yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k \qquad \big(r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

erőtérnek a φ út mentén végzett munkáját, ha $\mathcal{R}_\varphi$ az origót az $(1{,}1{,}1)$ ponttal összekötő szakasz!
Útm.

1. módszer. Mivel

$$\varphi(t) = (0{,}0{,}0) + ((1{,}1{,}1)-(0{,}0{,}0))t = (t,t,t) \qquad (t\in[0{,}1]),$$

$$\varphi'(t) = (1{,}1{,}1) \qquad (t\in[0{,}1])$$

és

$$f(\varphi(t)) = (4t^3{,}4t^3{,}4t^3) \qquad (t\in[0{,}1]),$$

ezért

$$W = \int_\varphi f = \int_0^1 12t^3\,dt = 3.$$

2. módszer. Mivel az

$$F(r) := xyz(x+y+z) \qquad \big(r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

skalármező potenciálja f-nek, ezért a végzett munka:

$$W = \int_\varphi f = F(1{,}1{,}1) - F(0{,}0{,}0) = 3. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$f(r) := xyi + xzj - zyk \qquad \big(r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

sebességtérnek a Ψ-re vett fluxusát, ha $\mathcal{R}_\Psi$ a

$$\Gamma := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ z = x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\right\}$$

felület!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$, $\operatorname{div} f = 0$, ezért f-nek van vektorpotenciálja. Az A vektorpotenciál viszonylag könnyen meghatározható. Ha

$$A_3(r) := 0 \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

akkor

$$A_2(x,y,z) \equiv -xyz, \qquad A_1(x,y,z) \equiv \frac{xz^2}{2} + g(x,y),$$

ill.

$$-zy \equiv v_3(x,y,z) \equiv \partial_x A_2(x,y,z) - \partial_y A_1(x,y,z) \equiv -yz - \partial_y g(x,y).$$

Így $g(x,y) :\equiv 0$ jó lesz. Ha tehát $A_1(x,y,z) :\equiv \frac{xz^2}{2}$, akkor

$$A(r) = \begin{bmatrix} xz^2/2 \\ -xyz \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Így Stokes tételének felhasználásával

$$\int_\Psi f = \int_\Psi \operatorname{rot} A = \int_\varphi A,$$

ahol

$$\varphi(t) := \cos(t)i + \sin(t)j + k \qquad (t \in [0,2\pi]).$$

Így

$$\int_\varphi A = \int_0^{2\pi} \langle (\cos(t)/2, -\cos(t)\sin(t),0), (-\sin(t), \cos(t),0)\rangle \, dt = \ldots = 0.$$

Megjegyzés. A fluxus definíciója alapján

$$\int_\Psi f = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \big\langle \big(u^2\sin(v)\cos(v), u^3\cos(v), -u^3\sin(v)\big),$$

$$\big(-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u\big)\big\rangle \, d(u,v) = \ldots = 0,$$

hiszen, ha

$$\Psi(u,v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j + u^2k \qquad ((u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]),$$

akkor $\mathcal{R}_\Psi = \Gamma$, ill.

$$n_\Psi(u,v) = u\{-2u\cos(v)i - 2u\sin(v)j + k\} \qquad ((u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$H(r) := xi - (z+3)k \qquad \big(r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

mágneses mezőnek a Ψ-re vett fluxusát, ha $\mathcal{R}_\Psi$ a

$$\Gamma := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 2z = x^2 + y^2,\; 0 \le z \le 3\right\}$$

felület!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $H \in \mathfrak{C}^1$, $\operatorname{div} H(r) = 0$, ezért H-nak van vektorpotenciálja. Az A vektorpotenciál viszonylag könnyen meghatározható. Ha

$$A_3(r) := 0 \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

akkor

$$A_2(x,y,z) \equiv -xz, \qquad A_1(x,y,z) \equiv g(x,y),$$

ill.

$$-(z+3) \equiv v_3(x,y,z) \equiv \partial_x A_2(x,y,z) - \partial_y A_1(x,y,z) \equiv -z - \partial_y g(x,y).$$

Így $g(x,y) :\equiv -3y$ jó lesz. Ha tehát $A_1(x,y,z) :\equiv -3y$, akkor

$$A(r) = \begin{bmatrix} -3y \\ -xz \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Így Stokes tételének felhasználásával

$$\int_\Psi H = \int_\Psi \operatorname{rot} A = \int_\varphi A,$$

ahol

$$\varphi(t) := \frac{\cos(t)}{2} i + \frac{\sin(t)}{2} j + 3k \qquad (t \in [0,2\pi]).$$

Így

$$\int_\varphi A = \int_0^{2\pi} \langle (-3\sin(t)/2, -3\cos(t)/2, 0), (-\sin(t)/2, \cos(t)/2, 0)\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{3\cos(2t)}{4}\, dt = 0.$$

Megjegyzés. A fluxus definíciója alapján

$$\int_\Psi f = \int_{[0,3]\times[0,2\pi]} \Big\langle \big(u\cos(v), 0, -u^2/2-3\big),$$

$$\big(u^2\cos(v), -u^2\sin(v), u\cos(2v)\big)\Big\rangle \, d(u,v) =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \big(u^3\sin(2v)/2 + 0 - u^3\cos(2v)/2 - 3u\cos(2v)\big)\, dv \right) du = \ldots = 0,$$

hiszen ha

$$\Psi(u,v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j + \frac{u^2}{2}k \qquad ((u,v) \in [0,3]\times[0,2\pi]),$$

akkor $\mathcal{R}_\Psi = \Gamma$, ill.

$$n_\Psi(u,v) = u^2\cos(v)i - u^2\sin(v)j + u\cos(2v)k \qquad ((u,v)\in[0,3]\times[0,2\pi]). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$f(r) := (3x^4y^2 + z^3)i + (4xz^5 - 4x^3y^3)j + (x^2 + xy)k \qquad \big(r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

erőtérnek a Ψ-re vett fluxusát, ha $\mathcal{R}_\Psi$ a

$$\Gamma := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \cos^2(x^2+y^2),\ 0 \le x^2+y^2 \le \pi/2\right\}$$

felület!

Útm. Mivel $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$\operatorname{div} f(r) \equiv 12x^3y^2 - 12x^3y^2 + 0 = 0,$$

ezért f-nek van vektorpotenciálja. Az A vektorpotenciál viszonylag könnyen meghatározható. Ha

$$A_3(r) := 0 \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

akkor

$$A_1(x,y,z) = \int_0^z f_2(x,y,s)\, ds - \int_0^y f_3(x,t,0)\, dt = -4x^3y^2z + \frac{2xz^6}{3} - x^2y - \frac{xy^2}{2} \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

ill.

$$A_2(x,y,z) = -\int_0^z f_1(x,y,s)\,ds = -3x^4y^2z - \frac{z^4}{4} \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

azaz

$$A(r) = \begin{bmatrix} -4x^3y^2z + \frac{2xz^6}{3} - x^2y - \frac{xy^2}{2} \\ -3x^4y^2z - \frac{z^4}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (r=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3).$$

Így Stokes tételének felhasználásával

$$\int_\Psi f = \int_\Psi \operatorname{rot} A = \int_\varphi A,$$

ahol

$$\varphi(t) := \sqrt{\pi/2}\{\cos(t)i + \sin(t)j\} \qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Így

$$\int_\varphi A = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{2\pi}\left\langle\left(-\cos^2(t)\sin(t) - \cos(t)\sin^2(t)/2, 0, 0\right), (-\sin(t),\cos(t),0)\right\rangle dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt = \frac{\pi^2}{32}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{\pi^2}{32}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{\pi^2}{16}.$$

Megjegyzés. A fluxus definíciója alapján $\int_\Psi f =$

$$= \int_{[0,\sqrt{\pi/2}]\times[0,2\pi]}\left\langle\left(v_1(\Psi(u,v)), v_2(\Psi(u,v)), u^2\cos^2(v) + u^2\cos(v)\sin(v)\right), (0,0,u)\right\rangle d(u,v) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(u^3\cos^2(v) + u^3\cos(v)\sin(v)\right)dv\right)du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\left\{u^3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2v)}{2}\,dv + u^3\int_0^{2\pi}\sin'(v)\sin(v)\,dv\right\}du = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} u^3\pi\,du = \frac{\pi^3}{16},$$

hiszen ha

$$\Psi(u,v) := u\cos(v)i + u\sin(v)j \qquad ((u,v)\in[0,\sqrt{\pi/2}]\times[0,2\pi]),$$

akkor $\mathcal{R}_\Psi = \Gamma$, ill.

$$n_\Psi(u,v) = uk \qquad ((u,v)\in[0,\sqrt{\pi/2}]\times[0,2\pi]). \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$F(r) := z\cos(yz) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

továbbá

$$\Gamma := \left\{r \in \mathbb{R}^3 : \ |r| = 1\right\}.$$

1. Számítsuk ki az $f := \operatorname{grad} F$ vektormezőnek a

$$\varphi(t) := (\cos(t), \sin(t), t) \qquad (t \in [0,2\pi])$$

útra vett vonalintegrálját!

2. Számítsuk ki az f vektormező rotációját!

3. Határozzuk meg a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \in \mathfrak{C}^1$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{C}^1$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathfrak{C}^1$ függvényeket úgy, hogy

$$w(r) := (y, h(x), g(x,y)) = \operatorname{grad} u(r) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

teljesüljön! Miért van **w**-nek vektorpotenciálja?

4. Számítsuk ki az $\int_\Psi w$ felületi integrált!

Útm.

1. Világos, hogy

$$\operatorname{grad} F(r) = (0, -z^2\sin(yz), \cos(yz) - yz\sin(yz)) \qquad (r = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

így

$$\int_\varphi w = F(1,0,2\pi) - F(0,0,0) = 2\pi.$$

2. $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}\operatorname{grad} F = 0$.

3. Mivel

$$y \equiv \partial_1 u(x,y,z),$$

ezért alkalmas $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{D}$ függvény esetén

$$u(x,y,z) \equiv xy + a(y,z).$$

Mivel

$$h(x) \equiv \partial_2 u(x,y,z) \equiv x + \partial_1 a(y,z),$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számra, ill. $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \in \mathfrak{D}$ függvényre

$$a(y,z) \equiv cy + b(z).$$

Végül

$$g(x,y) \equiv \partial_3 u(x,y,z) \equiv b'(z),$$

így alkalmas $d \in \mathbb{R}$ esetén $b'(z) \equiv d$, ahonnan

$$b(z) \equiv dz + e,$$

ahol $e \in \mathbb{R}$. Így

$$\begin{aligned} u(x,y,u) &= xy + cy + dz + e, \\ h(x) &= x + c, \\ g(x,y) &= d. \end{aligned}$$

A w vektormezőnek van vektorpotenciálja, hiszen $\mathbb{R}^3$ csillagtartomány, $w \in \mathfrak{C}^1$, továbbá

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = 0.$$

4. Ha $\mathcal{R}_\Psi = \Gamma$, és

$$V := \left\{ r \in \mathbb{R}^3 : \ |r| = 1 \right\},$$

akkor a Gauß-tétel következtében

$$\int_\Psi w = \int_V \operatorname{div} w = \int_V \Delta u = 0. \quad \blacksquare$$

Tárgymutató

magnetosztatika, 483