Automaták, grammatikák, membrán rendszerek

Néhány eredmény klasszikus, illetve természet motiválta számítási modellel kapcsolatban

Habilitációs tézisfüzet

Gazdag Zsolt

ELTE Informatikai Kar
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék

2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ebben a dolgozatban a szerzőnek a PhD fokozat megszerzése óta elért tudományos eredményeit foglaljuk össze. A dolgozat meghatározó része az új elvű – ezen belül is a természet motiválta – számítások körébe tartozó membrán rendszerekkel kapcsolatos eredményeinket ismerteti ([11, 13, 16, 17, 18, 19] publikációk). Ezen túl bemutatjuk még az automaták és formális nyelvek elméletének egyes klasszikus modelljeihez kapcsolódó eredményeinket is ([10, 12, 15, 20, 21] publikációk). Ezen dolgozatok közül sok egyszerzős vagy PhD hallgatóval közös munka. A többszerzős publikációk esetében elmondható, hogy az eredményeket közös munka révén, közösen gondolkodva értük el, és a szerzők közel azonos mértékben járultak hozzá a kapott eredményekhez.

A dolgozat úgy íródott, hogy önmagában is érthető legyen. Ugyanakkor – a témák változatossága miatt – nem volt lehetőség arra, hogy minden fogalmat precízen bevezessünk és minden tétel bizonyítását vázoljuk. Mindazonáltal igyekszünk kiemelni azokat az alapötleteket, melyek az adott témában újszerűnek bizonyultak. Megpróbáljuk továbbá kimerítően áttekinteni a vonatkozó irodalmat és közben elhelyezni munkáinkat az adott tudományterületen. A dolgozatban *tézisnek* fogjuk nevezni az egy témát alaposabban körüljáró eredményeket, míg *tételnek* azokat, melyek egy szűkebb területre korlátozódnak.

1. Az elért tudományos eredmények

A PhD fokozat megszerzése óta a kutatásaink két fő területre irányultak. Egyrészt membrán rendszerek bonyolultsági kérdéseit vizsgáltuk. Másrészt a formális nyelvek egyes klasszikus modelljeihez, nevezetesen a véges automatákhoz és a környezetfüggetlen grammatikákhoz szorosan kapcsolódó formális nyelvi eszközöket tanulmányoztunk. A következőkben először rövid áttekintést adunk ezen kutatások motivációjáról, és egyben vázoljuk is a dolgozat további részének szerkezetét. Ezután részletesen is ismertetjük az elért eredményeket.

1.1. A kutatási területek bemutatása

Jelenleg a fő kutatási területünk az aktív membrános P rendszerek számítási erejének vizsgálata. A membrán rendszerek (más néven P rendszerek) [46] olyan biológiai ihletésű számítási modellek, melyek az élő sejtekben végbemenő egyes folyamatokat modellezik formális nyelvi eszközökkel. Egy membrán rendszer membránokkal határolt számítási egységek, úgynevezett régiók hierarchikus rendszere. Minden régió tartalmaz egy objektumokból álló multihalmazt, és rendelkezik egy a régiókban végbemenő folyamatokat kontroláló szabályhalmazzal. Ezen szabályokat alkalmazva a régiókban szereplő objektumok változhatnak akár úgy is, hogy közben a membránokon keresztül mozognak. Sőt, a membrán rendszerek egy változatában, az aktív membrános P rendszerekben [47] olyan szabályok is alkalmazhatók, melyek segítségével a kezdeti membránstruktúra megváltoztatható.

A membrán rendszerek egy számítási lépése maximálisan párhuzamos módon történik. Ez azt jelenti, hogy a rendszer egy lépése során nem maradhat egy olyan objektum sem a régiókban, melyre lehetett volna megfelelő szabályt alkalmazni. A membrán rendszer számítása addig tart, amíg van olyan objektum, amire a rendszer tud valamilyen szabályt alkalmazni.

Ezen rendszerek képesek az algoritmikusan nehéz problémák hatékony megoldásra, köszönhetően annak, hogy a membrán szétosztó szabályokkal exponenciálisan sok régió készíthető lineáris idő alatt, valamint annak, hogy a régiókban a számítás párhuzamosan folyik. A 1.2.2 alfejezetben először a jól ismert SAT problémára (azaz az ítéletkalkulusbeli KNF-ben adott formulák kielégíthetőségének problémájára) adunk egy újszerű megoldást ilyen rendszerekkel.

Ha az aktív membrános P rendszerekben bizonyos komponensek használatát megtiltjuk (például nem minden típusú szabály alkalmazható), akkor ezen rendszerek kiszámítási ereje csökkenhet akár oly mértékben is, hogy csak triviális problémák megoldására képesek. A 1.2.2. alfejezet második részében azt vizsgáljuk, hogy az alkalmazható szabály tipusok milyen minimális halmaza szükséges ezen rendszerekben ahhoz, hogy képesek legyenek **NL**- vagy akár **P**-teljes problémák megoldására.[1]

A 1.3. részben először a kontrollált grammatikák osztályába tartozó úgynevezett random-context grammatikákkal kapcsolatos eredményeinket mutatjuk be (1.3.1. alfejezet). A kontrollált grammatikák jellemzően olyan környezetfüggetlen (röviden CF) grammatikákon alapuló számítási modellek, melyekben az alap CF grammatika levezetéseit valamilyen kontroll mechanizmus alapján szelektáljuk, és ezáltal egy olyan eszközt kapunk, ami képes nem CF nyelvek generálására is. Az ilyen grammatikák bevezetésének és vizsgálatának motivációja az, hogy a CF grammatikák bizonyos felhasználási területen nem elég kifejezőek, míg a náluk sokkal kifejezőbb környezetfüggő grammatikák esetén az úgynevezett szóprobléma eldöntése már nehéz, **PSPACE**-teljes.

A szövegfeltételes grammatikák a CF grammatikák azon általánosítási, ahol minden r szabályhoz hozzárendelünk egy (jellemzően reguláris) R_r nyelvet, és r csak akkor alkalmazható egy levezetésben, ha alkalmazható mint CF szabály, és az aktuális mondatforma eleme R_r-nek. Ezen grammatikák egy sokat kutatott speciális változatai a random context grammatikák [54]. Mi ezek úgynevezett tiltó változatait vizsgáltuk, és sikerült megmutatnunk, hogy a rajtuk a [35]-ben bevezetett szintaktikus megszorítások nem jelentenek szemantikus megszorítást, azaz a számítási erő korlátozását.

A 1.3.2. rész témája a nemdeterminisztikus véges automaták irányíthatósága. Az irányíthatóság a véges automaták elméletének egy sokat kutatott, alapvető fogalma. Determinisztikus véges automaták (DVA-k) esetében ez a következőt jelenti. Egy A DVA irányítható, ha van olyan u szó (az irányító szó), hogy az u által az A állapothalmazán indukált leképezés konstans függvény. Az irányíthatósággal kapcsolatban az egyik legalapvetőbb probléma a következő: adjunk felső korlátot az irányítható DVA-k legrövidebb irányító szavainak hosszára az automaták állapotszámának függvényében. A jól ismert Černý sejtés szerint, minden irányítható n-állapotú DVA-hoz létezik legfeljebb $(n-1)^2$ hosszú irányító szó. Az irányíthatóság többféleképpen is kiterjeszthető nemdeterminisztikus véges automatákra. Mi ezek közül három olyat vizsgáltunk,

[1] A dolgozatban használni fogjuk a klasszikus bonyolultsági osztályok közismert jelöléseit: $\mathbf{P}, \mathbf{NP}, \mathbf{L}, \mathbf{NL}, \mathbf{PSPACE}$. Ezek pontos definíciója megtalálható például [53]-ban.

melyek először a [30] munkában jelentek meg. Mindegyik kiterjesztés esetében a korábbinál nagyságrendekkel jobb felső korlátot adtunk a legrövidebb irányító szavak hosszára. Két esetben a megadott becslés, a létező alsó korlátok figyelembevételével, aszimptotikusan optimálisnak is bizonyult.

A 1.3.3. alfejezet témája az automaták és formális nyelvek elméletében jól ismert Kleene-tétel egy általánosítása. A klasszikus Kleene tétel azt mondja ki, hogy egy formális nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel DVA-val, ha van őt jelölő reguláris kifejezés. A tétel alapján a DVA-kkal vagy a reguláris kifejezésekkel ekvivalens reprezentációk bármelyikét használhatjuk egy adott feladathoz, attól függően, hogy melyiknek az alkalmazása kényelmesebb.

Mivel egy formális nyelvi szó szimbólumok egymást követő sorozata, az ilyen szavakkal csak időben lineáris folyamatokat modellezhetünk. Azaz velük az egymással párhuzamosan zajló, esetleg egymással konkuráló folyamatok modellezésére nincs mód. Ez motiválta a szavaknál komplexebb objektumok (például fák, biszavak, gráfok, stb.) formális nyelvi eszközökkel való vizsgálatát. Sok alapkutatás témája az, hogy hogyan lehet Kleene tételét ezen komplexebb objektumokat tartalmazó halmazokra általánosítani. Mi a tétel biszavakból álló nyelvekre való általánosíthatóságát vizsgáltuk.

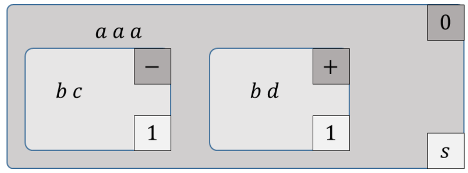
A továbbiakban részletesen is ismertetjük az elért eredményeket. Minden témakör elején igyekszünk alaposan körüljárni a szóban forgó kutatási témát. Megadjuk az eredmények megértéséhez szükséges fogalmakat is. Mindazonáltal feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van az olyan alapvető formális nyelvi eszközökkel, mint például az *ábécé*, a *szó*, a *formális nyelv* fogalma vagy az alapvető nyelvi műveletek jelölése és definíciója.

1.2. Aktív membrános P rendszerek bonyolultsága

A membrán rendszereket Gheorghe Păun vezette be a 2000-es évek elején [46] azért, hogy az élő sejtekben végbemenő folyamatokat formálisan is modellezhesse velük. A membrán rendszerek elmélete azóta egy széles körben és aktívan kutatott tudományággá vált. Ezen rendszerek számos változatát definiálták és vizsgálták. A különböző változatok megismerése végett ajánljuk az olvasó figyelmébe a [49] munkát. A membrán rendszerek egy sokat kutatott változata az aktív membrános P rendszerek [47]. Ezen rendszerekben úgynevezett membrán feloldó és membrán szétosztó szabályok is alkalmazhatók, melyekkel a rendszer képes megváltoztatni a régiók struktúráját. Amint az hamar kiderült, ezen rendszerek képesek – a bennük lévő masszív párhuzamosság segítségével – algoritmikusan nehéz problémák megoldására (lásd például a [1, 11, 17, 44, 45, 51] munkákat és a bennük lévő további hivatkozásokat). A fejezetben közölt eredményeink két téma köré csoportosulnak. Egyrészt a Sat problémát megoldó membrán rendszereket vizsgáltunk. Másrészt azt vizsgáltuk, hogy milyen típusú szabályok szükségesek ahhoz, hogy ezek a rendszerek egyáltalán képesek legyenek nem triviális problémák megoldására.

1.2.1. Fogalmak és jelölések

Ahogy azt már említettük, egy aktív membrános P rendszer membránok által határolt régiók hierarchikus rendszere. A membránok rendelkeznek egy címkével



1. ábra. Egy egyszerű aktív membrános P rendszer egy konfigurációja

és egy úgynevezett polaritással, ami $+, -$ vagy 0 lehet. A régiókban objektumok multihalmazai vannak, melyeken a rendszer – a régiókhoz rendelt szabályok segítségével – műveleteket végezhet. A multihalmazokat, konvencionálisan, a membrán rendszer objektum ábécéje feletti szavakkal reprezentáljuk. Egy aktív membrános P rendszer egy konfigurációját ábrázoltunk szemléletesen az 1. ábrán (a membránok címkéjét, illetve polaritását rendre a megfelelő régió jobb alsó, illetve felső sarkában tüntettük fel). Ugyanezt a konfigurációt reprezentálhatjuk az $[aaa[bc]_1^-[bd]_1^+]_s^0$ szóval is, ahol például $[bc]_1^-$ jelöli azt a membránt, melynek tartalma bc, címkéje 1, polarizációja pedig negatív. Ezen rendszerek formális definíciója a következő.

1. Definíció. *Egy aktív membrános P rendszer egy olyan* $\Pi = (\Gamma, H, \mu, w_1, \ldots, w_m, R)$ *struktúra, ahol*

- m *a rendszer kezdeti rangja, azaz a kezdőkonfigurációban elhelyezkedő régiók száma;*
- Γ *az objektumok ábécéje;*
- H *a membrán címkék halmaza;*
- μ *a kezdeti membránstruktúra, melyben* m *membrán szerepel úgy, hogy minden membrán* 0 *polaritású és rendelkezik egy* H*-beli címkével (több membrán is rendelkezhet ugyanazzal a címkével); a legkülső membránt skin-nek nevezzük;*
- $w_1, \ldots, w_m \subseteq \Gamma^*$ *multihalmazok, az egyes membránok kezdeti tartalmai (feltesszük, hogy a kezdőkonfiguráció membránjainak van egy rögzített felsorolása, mely segítségével ezek a multihalmazok a megfelelő membránokhoz rendelhetők); és*
- R *az alábbi típusú szabályok halmaza:*
  - *(a)* $[a \to v]_h^e$*, ahol* $e \in \{+, -, 0\}$, $h \in H, a \in \Gamma$ *és* $v \in \Gamma^*$
    *(*evolúciós *szabályok, melyek alkalmazhatósága függ a membrán polaritásától, de magát a membránt a szabályok alkalmazása nem érinti);*
  - *(b)* $a[\ ]_h^{e_1} \to [b]_h^{e_2}$*, ahol* $e_1, e_2 \in \{+, -, 0\}$, $h \in H$ *és* $a, b \in \Gamma$
    *(*befelé kommunikáló *szabályok, melyek segítségével egy* a *objektum beküldhető egy* h *címkéjű membránba; az* a *és a membrán polaritása is megváltozhat a művelet során);*

(c) $[a]_h^{e_1} \to [\ ]_h^{e_2} b$, *ahol* $e_1, e_2 \in \{+, -, 0\}$, $h \in H$ *és* $a, b \in \Gamma$
*(*kifelé kommunikáló *szabályok, melyek segítségével egy a objektum kiküldhető egy h címkéjű membránból annak szülő membránjába; az a és a membrán polaritása is megváltozhat a művelet során);*

(d) $[a]_h^{e} \to b$, *ahol* $e \in \{+, -, 0\}$, $h \in H$ *és* $a, b \in \Gamma$
*(*membrán feloldó *szabályok, melyek alkalmazásával egy objektum képes feloldani egy membránt, maga az objektum megváltozhat a művelet során, és a feloldott membrán teljes tartalma – objektumok és membránok – a szülő membránba kerül; a skin-membrán viszont nem oldódhat fel);*

(e) $[a]_h^{e_1} \to [b]_h^{e_2}[c]_h^{e_3}$, *ahol* $e_1, e_2, e_3 \in \{+, -, 0\}$, $h \in H$ *és* $a, b, c \in \Gamma$
*(*membrán szétosztó *szabályok, melyek segítségével egy elemi membrán – azaz egy olyan membrán ami nem tartalmaz további membránokat – két új, esetleg különböző polaritású membránra osztódhat; az osztódást kiváltó a objektumból keletkező b és c objektum rendre a két új membránba kerül; az eredeti membrán összes, az osztódást kiváltó a-tól különböző objektuma ha tud, akkor evolválódik, majd megduplázódik és egy-egy másolat rendre a két új membrán egyikébe kerül; a skin-membrán nem osztódhat, még akkor sem ha elemi).*

Egy aktív membrános P rendszer az alábbi, úgynevezett maximálisan párhuzamos elven működik: egy lépés során a rendszer minden objektumhoz nemdeterminisztikusan hozzárendel egy megfelelő szabályt (azaz egy olyan szabályt ami megfelel az objektumnak, valamint az őt tartalmazó membrán címkéjének és polaritásának) úgy, hogy az objektumokhoz hozzárendelt szabályok S multihalmaza a következőket teljesíti: (i) a rendszer bármely objektumához legfeljebb egy szabály van rendelve S-ből, (ii) a rendszer egy membránja legfeljebb egy S-beli szabály alkalmazásában játszhat szerepet (emlékezzünk vissza, hogy az evolúciós szabályok nem érintik közvetlenül azt a membránt, melyben végrehajtódnak), és (iii) S maximális méretű azon multihalmazok között, melyek teljesítik az (i) és (ii) tulajdonságot.

Az aktív membrános P rendszereknél – ahogy a membrán rendszereknél általában – egy számítás eredményét az határozza meg, hogy a kezdőkonfigurációból indított számítás során milyen objektumok kerülnek ki a környezetbe. Ahhoz, hogy a membrán rendszerek számítási erejét össze tudják hasonlítani a klasszikus számítási modellek erejével, bevezették az úgynevezett felismerő P rendszereket [50]. Egy *felismerő P rendszer* egy olyan Γ objektumábécével rendelkező Π P rendszer, melyre teljesülnek a következők:

- Π rendelkezik egy kitüntetett bemeneti membránnal,
- Γ tartalmaz két kitüntetett elemet, a *yes*-t és a *no*-t,
- Π összes számítása megáll, és vagy mindegyik számítás pontosan egy *yes*-t, vagy mindegyik pontosan egy *no*-t küld a környezetbe (további objektumok mindkét esetben kikerülhetnek a környezetbe),
- *yes* vagy *no* objektum csak Π utolsó lépése során kerülhet a környezetbe.

Egy Π felismerő P rendszer bemenete egy olyan M Γ feletti multihalmaz, amit a számítás kezdetekor Π bemeneti membránban helyezünk el. Π számításának eredménye az M-en pedig a *yes* és *no* objektumok közül az, amit Π az M bemenettel indítva az utolsó lépésében a környezetbe küld.

Az aktív membrános felismerő P rendszerek működésének megértését segítendő, az alábbi példában bemutatunk egy ilyen rendszert. Ez a rendszer azt az egyszerű kérdést dönti el, hogy a bemenet tartalmaz-e legalább két a-t. A megadott rendszer egy úgynevezett *polarizációmentes* membrán rendszer lesz, ami azt jelenti, hogy a rendszer minden membránja ugyanazt a polarizációt használja, ami ráadásul a számítás során nem változhat. Világos, hogy ebben az esetben a polarizációnak nincs szerepe, ezért ilyen esetekben a szabályok megadásakor a polarizáció jelölését általában elhagyjuk.

1. Példa. Legyen $\Pi = (\{a, b_1, b_2, b_3, \#, yes, no\}, \{s, 1, 2\}, \mu, w_1, w_2, w_3, R)$ az a membrán rendszer, ahol $\mu = [[[\ ]_1]_2]_s$, az 1 címkéjű membrán tartalma $w_1 = b_1$, a skin (azaz s címkéjű) és a 2 címkéjű membrán tartalma rendre $w_2 = w_3 = \emptyset$, a bemeneti membrán az 1 címkéjű membrán, R pedig a következő szabályok halmaza:

1. $[b_i \to b_{i+1}]_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$, $[b_3 \to no]_j$ $(j \in \{1, 2\})$, $[no]_j \to no$ $(j \in \{1, 2\})$, $[no]_s \to [\ ]_s\, no$,
2. $[a]_1 \to \#$, $[a]_2 \to yes$, $[yes]_s \to [\ ]_s\, yes$.

Π működése a következő. Az első lépésben b_1 b_2-re változik és attól függően, hogy van-e egy a a rendszerben vagy nincs, az 1 címkéjű membrán feloldódik vagy sem. Ha nem oldódik fel, b_2 két lépésen belül *no*-ra változik, majd a következő lépésekben ez a *no* kikerül a környezetbe. Ha az első lépésben feloldódik az 1 címkéjű membrán, akkor a második lépés során a következők történnek: b_2 b_3-ra változik, és attól függően, hogy van-e egy a a rendszerben vagy nincs, a 2 címkéjű membrán feloldódik vagy sem. Ha nem oldódik fel a 2-es membrán, akkor – az első lépésnél vázolt esethez hasonlóan – egy *no* kikerül a környezetbe. Ha a 2 es membrán feloldódik, akkor megjelenik egy *yes* a skin-ben (*no* pedig nem jelenik meg). Végül ez a *yes* kikerül a környezetbe. Ezek alapján belátható, hogy Π valóban azt dönti el, hogy a bemenet tartalmaz-e legalább két a-t. Az is látszik ugyanakkor, hogy egy triviálisan egyszerű probléma eldöntéséhez is aránylag komplex membrán rendszert kellett megkonstruálnunk.

Ahogy a Turing-gépek, úgy a membrán rendszerek is végesen reprezentálható számítási modellek. Ugyanakkor a Turing-gépek rendelkeznek egy cellákra osztott, potenciálisan végtelen szalaggal is, melyen kellő számú cellát felhasználhatnak a számításaik során. Azt, hogy mennyi cella kerül valójában felhasználásra jellemzően a bemenet mérete határozza meg. Az aktív membrános P rendszerekben viszont nincs mód arra, hogy a komponenseket – azaz a szabályokat, kezdeti membránstruktúrát, stb. – előzetesen felkészítsük tetszőleges méretű bemenet kezelésére. Ezért a membrán számítások elméletében (hasonlóan a Boole hálózatok elméletéhez) egy adott problémát nem egyetlen membrán rendszer, hanem ezek egy *uniform* családja dönt el (szokás még vizsgálni membrán rendszerek úgynevezett *semi-uniform* családjait is, melyeket mi majd később, a vonatkozó eredményeink kapcsán fogunk ismertetni). Legyen $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ felismerő membrán rendszerek egy családja. $\mathbf{\Pi}$-t *uniformnak* nevezzük, ha van olyan M (determinisztikus) Turing-gép, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re, ha M a bemenetén megkapja az 1^n szót (azaz az n unáris reprezentációját), akkor a $\Pi(n)$ egy reprezentációjával a kimenetén áll meg.

Legyen P egy eldöntési probléma és $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ felismerő membrán rendszerek egy uniform családja. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{\Pi}$ *eldönti* P-t, ha P minden I n méretű bemenetére, elindítva $\Pi(n)$-t az I egy megfelelő elkódolásával a bemeneti membránjában, a membrán rendszer akkor és csak akkor küld a környezetébe *yes*-t, ha I *pozitív* bemenete P-nek, azaz I egy olyan bemenet, melyre *igen* a válasz P szerint.

A fentiek alapján, ahhoz hogy $\mathbf{\Pi}$-t felhasználva eldönthessük, hogy a P egy I bemenete pozitív bemenete-e, először meg kell konstruálni $\Pi(n)$-t (ahol n az I mérete) és ki kell számolni az I egy megfelelő elkódolását. Nyilvánvaló, hogy ezen konstrukciók során olyan eszközöket (például Turing-gépeket) szabad csak használni, melyek nem képesek maguk is eldönteni, hogy I pozitív bemenet-e, hiszen ellenkező esetben nem lehetünk biztosak abban, hogy ezt a kérdést maga a membrán rendszer dönti el. Legyen $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ felismerő membrán rendszerek egy uniform családja. Legyen továbbá $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ Turing-géppel kiszámítható függvények egy-egy osztálya. $\mathbf{\Pi}$-t $(\mathbf{E}, \mathbf{F})$-uniformnak nevezzük, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- Az a Turing-gép, ami minden $n \in \mathbb{N}$ esetén kiszámolja a $\Pi(n)$ egy reprezentációját választható olyannak, hogy az általa kiszámolt függvény F-ben van, és

- van olyan $e \in E$ függvény, hogy P minden I n méretű bemenetére, $e(I)$ egy a $\Pi(n)$ objektum ábécéje feletti, I-t kódoló multihalmaz.

Tehát például ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy P $\mathbf{NP}$-teljes probléma megoldható-e felismerő membrán rendszerekkel, akkor egy olyan $(\mathbf{E}, \mathbf{F})$-uniform $\mathbf{\Pi}$ membrán rendszer családot kell találnunk P eldöntésére, ahol $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ olyan osztályok, melyek (feltehetően) valódi részhalmazai $\mathbf{NP}$-nek (azaz $\mathbf{E}$-t és $\mathbf{F}$-et választhatjuk például $\mathbf{P}$-nek). A felismerő membrán rendszerekkel kapcsolatban további hasznos információk találhatók a [49] könyv 12. fejezetében.

Legyen $\mathcal{F}$ felismerő membrán rendszerek egy osztálya, $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ pedig Turing-géppel kiszámolható függvények osztályai. Ekkor $(\mathbf{E}, \mathbf{F})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ jelöli azon problémák osztályát, melyek eldönthetők *polinom időben* $\mathcal{F}$-beli membrán rendszerek $(\mathbf{E}, \mathbf{F})$-uniform családjaival.

A felismerő rendszerek bevezetésekor számos olyan eredmény született született, ahol egy $\mathbf{NP}$-teljes problémának aktív membrános P rendszereken alapuló $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$-uniform megoldását adták meg. Megjegyezzük, hogy ezekben a munkákban a $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$-uniformitás még nem jelent meg explicit módon a jelölésekben, azaz a $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ jelölés és a $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$-uniform kifejezés helyett rendre a $\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ jelölést és *polinomiálisan uniform* kifejezést használták, lásd például a fejezet elején felsorolt hivatkozásokat.

A továbbiakban az aktív membrános P rendszerek különböző osztályival kapcsolatos eredményeinket ismertjük. Ehhez szükségünk lesz az alábbi jelölésekre.

Rendre $\mathcal{AM}$ és $\mathcal{AM}^0$ jelöli az aktív membrános és a polarizáció mentes aktív membrános felismerő P rendszerek osztályát. Legyen $\mathcal{F}$ aktív membrános felismerő P rendszerek egy osztálya. Ha $\mathcal{F}$ azon részosztályát vizsgáljuk, ahol bizonyos típusú szabályok használata nem megengedett, akkor ezt úgy jelöljük, hogy az illető szabály típust azonosító betűt negatív előjellel beírjuk az $\mathcal{F}$ alsó indexébe. A következő azonosítókat fogjuk használni: e - evolúciós, i - befelé kommunikáló, o - kifelé kommunikáló, d - membrán feloldó és v - membrán szétosztó szabályok. Hasonlóan, ha $\mathcal{F}$ azon részosztályát vizsgáljuk, ahol a fenti szabály típusok mellett még más típusú szabályok is alkalmazhatók, akkor a szabály típusát azonosító betűt pozitív előjellel írjuk be az $\mathcal{F}$ alsó indexébe. Ha azt akarjuk jelölni, hogy egy t által jelölt szabály típus valamely t' által jelölt megszorított formában használható, akkor t-t negatív előjellel, t'-t pedig pozitívval írjuk be $\mathcal{F}$ alsó indexébe.

Az alábbi jelöléseket is használni fogunk. Tetszőleges d konstansra, $\mathcal{F}_{h\leq d}$ jelöli $\mathcal{F}$ azon részosztályát, melyben a membrán rendszerek olyanok, hogy a működésük során a rendszerben a membrán struktúra mélysége legfeljebb d. Hasonlóan, $\mathcal{F}_{w\leq d}$ jelöli azon részosztályt, ahol a membrán rendszerek működése során a membrán struktúra szélessége (azaz a membrán struktúrában az azonos szinten lévő membránok száma) legfeljebb d.

Ezek a jelölések egymással kombinálhatók, ekkor a negatív és pozitív előjelű betűket, a jobb olvashatóság kedvéért összevonjuk. Tehát például $\mathcal{AM}^0_{-dv+c}$ jelöli az $\mathcal{AM}$ azon részosztályát, ahol a membrán rendszerek polarizáció mentesek, nem használhatnak membrán feloldó és membrán szétosztó szabályokat, de a klasszikus aktív membrános szabályokon kívül használhatnak még membrán létrehozó (c mint *creation*) szabályokat (ezen szabályok pontos definícióját később adjuk meg). Megjegyezzük, hogy a fenti jelölésrendszer, bár követi a membránszámítások elméletében bevett szokásokat, ilyen egységes módon csak a tézisfüzetben leírtak könnyebb átláthatósága miatt lettek bevezetve. Ugyanis gyakran előfordul, hogy az idézett munkák egymáshoz képest kissé eltérő jelöléseket használnak azonos tulajdonságú membrán rendszerek esetén is. Ezen jelölések változtatások nélküli használata a tézisfüzetben könnyen félreértéseket okozhatna.

1.2.2. Az elért eredmények

A Sat probléma megoldása. Az aktív membrános P rendszerek elméletében az egyik legtöbbet kutatott probléma a Sat probléma, azaz annak eldöntése, hogy egy φ konjunktív normálformában adott ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e vagy sem. A továbbiakban formula alatt egy ilyen formulát fogunk érteni.

A Sat probléma megoldására jellemzően a következő elven működő membrán rendszerek születtek (lásd például a 12.4. fejezetet [49]-ben). Tegyük fel, hogy egy Π aktív membrános P rendszer egy olyan φ formulát kódoló bemenetet kap, ami n ítéletváltozót és m klózt $(n, m \geq 1)$ tartalmaz. Ekkor Π n lépés alatt elkészít a bemeneti membránból 2^n példányt úgy, hogy n-szer szétosztja ezt a membránt. Az i-ik osztódás $(1 \leq i \leq n)$ során kapott másolatok rendre az i-ik változó *igaz* illetve *hamis* kiértékelését reprezentálják. Mindeközben Π számon tartja az új membránokban, hogy az eddig kiértékelt változók alapján mely φ-beli klózok értékelődnek igazra a megfelelő interpretációban. Az n-ik osztódás után az n ítéletváltozó összes interpretációjának megfelel egy Π-beli membrán, benne azon φ-beli klózokat reprezentáló objektumokkal, melyek igazak a megfelelő interpretációban. Ekkor Π megvizsgálja, hogy van-e olyan membránja ami tartalmazza az összes φ-beli klózt reprezentáló objektumot. Ha talál ilyen membránt akkor *yes*-t küld a környezetbe, egyébként pedig *no*-t. Az ezen algoritmust implementáló membrán rendszerek időigénye a bemenő formula méretében polinomiális, ahol a formula méretét a formulában szereplő változók és klózok száma együttesen határozza meg.

Mi a SAT megoldására az alábbi, újfajta megközelítést alkalmaztuk [16] (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért a konjunktív normálformában adott formulákat klózok halmazának, a klózokat pedig literálok halmazának tekintjük). Legyen C egy klóz és x egy C-ben nem előforduló ítéletváltozó. Legyen továbbá $C_1 = C \cup \{x\}$ és $C_2 = C \cup \{\neg x\}$. Belátható, hogy C pontosan akkor kielégíthető ha a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmaz kielégíthető. Nevezzük a fenti műveletet *inverz rezolúciós lépésnek* (ugyanis ez a művelet nem más, mint a jól ismert ítéletkalkulusbeli rezolúciós lépés „megfordítása"). Tekintsünk egy φ $\{x_1, \dots, x_n\}$ ítéletváltozók feletti m klózból álló formulát ($n, m \geq 0$). Belátható, hogy az alábbi algoritmus, amit *inverz rezolúciós algoritmus* nevezünk, φ kielégíthetőségét dönti el.

Algoritmus InvRez
input: φ
output: *igen* ha φ kielégíthető, egyébként *nem*
for $i = 1 \dots n$ **do**
  $\varphi' := \emptyset$
  foreach $C \in \varphi$ **do**
    if $x_i \notin C$ **then** $\varphi' := \varphi' \cup \{C \cup \{x_i\}, C \cup \{\neg x_i\}\}$
  $\varphi := \varphi'$
if $|\varphi| = 2^n$ **then return** $false$
else return $true$.

A fenti algoritmus megvalósításához [16]-ban olyan P rendszereket használtunk, melyeket kiterjesztettünk a következő, úgynevezett *membrán átcímkéző szeparációs szabályokkal*: $[\ ]_{h_1} \to [K]_{h_2}[O-K]_{h_3}$, ahol h_1, h_2 és h_3 membrán címkék, O a membrán rendszer objektum ábécéje, K pedig O egy nemüres, valódi részhalmaza. Egy ilyen szabály csak akkor alkalmazható, ha h_1 egy elemi membrán és tartalmaz legalább egy K-beli és egy $O-K$ beli objektumot (lásd például [49]). Ekkor a szabály alkalmazásával a h_1 címkéjű membránból keletkezik egy h_2 címkéjű és egy h_3 címkéjű membrán. Továbbá a h_1 címkéjű membrán összes K-beli objektuma a h_2 címkéjű membránba kerül, az összes többi objektum pedig a h_2 címkéjűbe (ha van az egyes objektumokra alkalmazható evolúciós szabály, akkor ezek az objektumok evolválódnak is ezen lépés során). Első eredményünk a SAT probléma membrán rendszerekkel való eldöntésével kapcsolatban a következő:

1. TÉTEL ([16]). *A* SAT *probléma eldönthető polarizációmentes aktív membránós felismerő P rendszerek egy* $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *uniform családjával úgy, hogy a következők teljesülnek.*

- *A $\mathbf{\Pi}$-beli membrán rendszerek nem használnak membrán szétosztó szabályokat, de*
- *használnak membrán átcímkéző szeparációs szabályokat, és*
- $\Pi(n)$ $O(n)$ *időben képes eldönteni egy* φ n *változót tartalmazó formula kielégíthetőségét.*

A fenti tételben szereplő $\mathbf{\Pi}$ membrán rendszer jelentősége a következő. Amíg a korábban létező implementációk egy φ n változót és m klózt tartalmazó formula kielégíthetőségét n-től és m-től függő polinomiális időben döntötték el, addig $\mathbf{\Pi}$ ezt n-ben polinomiális időben is képes megtenni. Mivel $m = O(3^n)$, a futási idő a mi megoldásunkban jobbnak tekinthető a korábbiaknál. Ugyanakkor a mi megoldásunk megköveteli azt, hogy egy n változót tartalmazó φ formulára, a φ kielégíthetőségét eldöntő $\Pi(n)$ minden φ változóit tartalmazó C klózra rendelkezzen egy C-t reprezentáló objektummal. Ez azt jelenti, hogy a membrán rendszerünk szükségszerűen nem lehet polinomiálisan uniform. Ezért [17]-ben, a fenti megoldáson alapulva, egy úgynevezett *polinomiálisan semi-uniform* membrán rendszer családot adtunk meg a SAT eldöntésére. Ez alatt a következőket értjük.

Legyen P egy eldöntési probléma. Jelöljük I_P-vel a P bemeneteit (hatékonyan) kódoló szavak halmazát. Legyen továbbá $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(I) \mid I \in I_P\}$ felismerő membrán rendszerek egy családja. $\mathbf{\Pi}$-t *polinomiálisan semi-uniformnak* nevezzük, ha megadható egy olyan polinom időigényű determinisztikus Turing-gép, ami P minden I bemenetére, ha a bemenő szalagján megkapja az I-t kódoló I_P-beli szót, akkor polinom időben a kimenetére írja a $\Pi(I)$ egy reprezentációját. Továbbá $\mathbf{\Pi}$ *eldönti* P-t, ha a P minden I bemenetére, $\Pi(I)$ akkor és csak akkor küld a környezetébe *yes*-t, ha I pozitív bemenete P-nek.

2. TÉTEL ([17], 2. TÉTEL). *A* SAT *probléma eldönthető polarizációmentes aktív membrános felismerő P rendszerek egy* $\mathbf{\Pi} = \{\Pi(\varphi) \mid \varphi$ *a* SAT *egy bemenete*$\}$ *polinomiálisan semi-uniform családjával úgy, hogy a következők teljesülnek.*

- *A $\mathbf{\Pi}$-beli membrán rendszerek nem használnak membrán szétosztó szabályokat, de*
- *használnak membrán átcímkéző szeparációs szabályokat, és*
- $\Pi(\varphi)$ $O(n)$ *időben képes eldönti* φ *kielégíthetőségét, ahol* n *a* φ*-beli változók száma.*

A fenti eredmények után nyitott kérdés maradt, hogy vajon lehet-e az inverz rezolúciós algoritmuson alapulva *polinomiálisan uniform* megoldását adni a SAT problémának. Ezt a kérdést a [11] dolgozatban vizsgáltuk, és membrán létrehozó szabályok segítségével sikerült pozitív választ adni a fenti kérdésre. *Membrán létrehozó* szabálynak nevezünk egy $a \to [b]_h^e$ szabályt (a, b egy objektum, $h \in H, e \in \{+, -, 0\}$). Egy ilyen szabály segítségével egy a objektumból létrehozható egy olyan h címkéjű, e polaritású membrán, melyben egyetlen objektum szerepel csak, a b. A membrán létrehozó szabályok alkalmazása elterjedt a felismerő P rendszerek elméletében (lásd például [49], 12. fejezet). [11]-ben valójában kétféle megoldását is megadtuk Sat-nak: az első megoldásban polarizációmentes a megadott membrán rendszer, a másodikban nem. Ugyanakkor az első megoldásban a polarizációmentesség ára az, hogy az ott használt membrán szétosztó szabályok átcímkézhetik a szétosztott membránokat (az ilyen szabályokat *átcímkéző membrán szétosztó* szabályoknak nevezzük).

1. tézis ([11]).

1. Sat *eldönthető aktív membrános felismerő P rendszerek egy olyan polinomiálisan uniform családjával, melyre a következők teljesülnek.*
   - *A* $\mathbf{\Pi}$*-beli membrán rendszerekben a membrán létrehozó szabályok használata megengedett, és*
   - *egy* φ n *változót és* m *klózt* $(m, n \geq 1)$ *tartalmazó formula esetén* $\Pi(\varphi)$ $O(n)$ *időben eldönti* φ *kielégíthetőségét.*
2. Sat *eldönthető* **polarizációmentes** *aktív membrános felismerő P rendszerek olyan polinomiálisan uniform családjával melyre teljesülnek az 1. pontban leírt tulajdonságok, és a* $\mathbf{\Pi}$*-beli membrán rendszerekben az átcímkéző membrán szétosztó szabályok használata megengedett.*

Megjegyezzük, hogy [25]-ben szintén membrán létrehozó szabályokat alkalmaztak, és adtak a Sat megoldására olyan membrán rendszereket, melyek időigénye a formulában szereplő változók számában lineáris. Ugyanakkor a mi eredményűnk nem összehasonlítható a [25]-belivel, mert ott a membrán rendszerek működése a jelen dolgozatban definiálttól – és az aktív membrános P rendszerek elméletében megszokottól – kissé eltér (erről bővebben a [11]-ben írtunk).

Szintaktikai megszorítás és számítási erő. Az aktív membrános P rendszerek elméletében egy sokat kutatott téma az, hogy vajon milyen szabályok szükségesek ezekben a rendszerekben ahhoz, hogy algoritmikusan nehéznek számító problémákat is meg tudjunk oldani velük. Hamar kiderült, hogy membrán szétosztó szabályok nélkül **P** a felső korlát ezen rendszerek számítási erejére nézve [56], és ugyanez a helyzet a polarizációmentes rendszerek esetén is ha membrán feloldó szabályok használata nem megengedett [23]. Sőt, Păun nevezetes sejtése szerint [48], már maga a polarizáció hiánya is elegendő lehet ahhoz, hogy ezen rendszerek legfeljebb **P**-beli problémákat legyenek képesek megoldani csak. Ezt a sejtést eddig csak speciális esetekben sikerült bizonyítani, például akkor amikor csak úgynevezett szimmetrikus, azaz $[a]_i \to [b]_i[b_i]$ alakú membrán osztó szabályok megengedettek [37], vagy amikor a kezdeti membrán struktúra lineárisan egymásba ágyazott membránok láncolata, és a rendszer csak membrán feloldó és membrán szétosztó szabályokat alkalmazhat [55].

Păun sejtésének alapvető fontossága abban rejlik, hogy bizonyítása esetén kiderülne, hogy a polarizáció használata elengedhetetlen az aktív membrános P rendszerekben ahhoz, hogy algoritmikusan nehéz problémákat is megoldhassunk velük. Ugyanakkor a sejtés bizonyítására tett erőfeszítések során kiderült az is, hogy bizonyos membrán rendszerekkel nemhogy algoritmikusan nehéz, de akár **P**-beli problémák megoldása sem lehetséges. [38]-ban például megfigyelték, hogy a [23]-ban megadott $\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{-d}} = \mathbf{P}$ jellemzésben a $\mathbf{P}$ alsó korlát abból fakad, hogy a vizsgált membrán rendszer családok polinomiálisan uniformak. Sőt, [38]-ban azt is sikerült megmutatni, hogy kellően szigorú uniformitási feltételek esetén ezen rendszerek számítási erejére nézve a felső korlát $\mathbf{NL}$, azaz például $(\mathbf{L}, \mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{-d}} \subseteq \mathbf{NL}$. Ezek az eredmények olyan kutatások sorát indították el, ahol azt vizsgálták, hogy kellően szigorú uniformitási feltételek mellett milyen típusú szabályok szükségesek ahhoz, hogy valamely $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{P}$ bonyolultsági osztályban nehéznek számító problémát oldhassunk meg membrán rendszerekkel (lásd például [13, 18, 19, 33, 38, 39, 40, 41]). Az $\mathcal{AM}^0_{-d}$ osztályba tartozó membrán rendszerek számítási erejéről végül például kiderült, hogy az legfeljebb akkora lehet, mint azon eszközöké, melyeket a membrán rendszerek megkonstruálására, illetve a megoldandó probléma bemeneteinek elkódolására használunk (lásd például a 4.3. tételt [36]-ban). Ez azt jelenti, hogy nincs olyan nem triviális probléma, amire lehetne olyan megoldást adni, ahol a megoldás eszköze maga a membrán rendszer és nem a membrán rendszert vagy a probléma bemenetének elkódolását kiszámító eszköz. Ez az eredmény is azt igazolja, hogy érdemes vizsgálni – kellően szigorú uniformitási feltételek mellett – a szintaktikailag megszorított membrán rendszerek számítási erejét. Annál is inkább, mert – meggyőződésünk szerint – a membrán rendszerek kiszámítási erejével kapcsolatos nyitott kérdések vizsgálata közelebb vihet bennünket a klasszikus bonyolultsági osztályok között fennálló, jelenleg még nem bizonyított kapcsolatok feltárásához. A továbbiakban ehhez a kutatási vonalhoz kapcsolódó eredményeinket ismertetjük.

A [13] dolgozatban az $\mathbf{NL}$-teljes ELÉRHETŐSÉG probléma membrán rendszerekkel való megoldási lehetőségeit vizsgáltuk. Ezt a problémát a következőképpen definiáljuk. Adott egy G irányított gráf és annak s és t csúcsai. A feladat annak eldöntése, hogy van-e G-ben út s-ből t-be. Első látásra úgy tűnhet, hogy ennek a problémának könnyű semi-uniform felismerő P rendszerekkel való megoldását adni. Valóban, legyen $\langle G, s, t\rangle$ az ELÉRHETŐSÉG probléma egy bemenete és legyen $\Pi_{\langle G,s,t\rangle}$ az az aktív membrános P rendszer, melynek egyetlen membránja van, a skin membrán, objektumai a G csúcsai, a skin membrán kezdeti tartalma s, a szabályhalmaz pedig olyan evolúciós szabályokból áll, melyek G élei alapján vannak definiálva (lásd például a 2. tétel bizonyítását [40]-ben). Ekkor $\Pi_{\langle G,s,t\rangle}$ működése során pontosan akkor jelenik meg a skin membránban a t, ha $\langle G, s, t\rangle$ pozitív bemenet. Ugyanakkor nem világos, hogyan lehet $\Pi_{\langle G,s,t\rangle}$-t megfelelő komponensekkel kiegészíteni úgy, hogy egy felismerő P rendszert kapjunk. Ahogy azt az előbb említett tétel bizonyításában is olvashatjuk, az ott megadott P rendszernek lehetnek olyan számításai, melyek a *yes* és a *no* szimbólumot is előállítják, ami ellentmond a felismerhető P rendszerek klasszikus definíciójának. Ezért [39]-ben a felismerő P rendszerek több alternatív definícióját is megadták, és megadták az ELÉRHETŐSÉG ezen definícióknak megfelelő semi-uniform megoldásait. Uniform megoldást azonban nem adtak a problémára. Mi [13]-ban három különböző *uniform* megoldását adtuk az ELÉRHETŐSÉG problémának.

2. TÉZIS ([13]). ELÉRHETŐSÉG $\in (\mathbf{L}, \mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ *ahol*

1. $\mathcal{F} = \mathcal{AM}_{h\leq 1,-dv}$ *vagy*

2. $\mathcal{F} = \mathcal{AM}^0_{h\leq 1,-v}$ *vagy*

3. $\mathcal{F} = \mathcal{AM}^0_{h\leq 1,-v,+c}$.

Mivel Elérhetőség **NL**-teljes, és membrán rendszerek tetszőleges $\mathcal{F}$ osztályára $(\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre, adódik a következő eredmény:

1. Következmény. $\mathbf{NL} \subseteq (\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$ *ahol* $\mathcal{F}$ *a következő típusú membrán rendszer családok egyike:* $\mathcal{AM}_{h\leq 1,-dv}$, $\mathcal{AM}^0_{h\leq 1,-v}$ *vagy* $\mathcal{AM}^0_{h\leq 1,-v,+c}$.

Érdekes kérdés annak vizsgálata, hogy vajon a 2. tézisben említett membrán rendszerek képesek-e **P**- vagy akár **NP**-teljes problémák megoldására. Ismert, hogy $\mathbf{PSPACE} \subseteq (\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{-v,+c}}$ [24], azaz ha a membránstruktúra mélységére nincs felső korlát, akkor a polarizációmentes aktív membránós P rendszerek membrán létrehozó szabályokkal **PSPACE**-teljes problémák megoldására is képesek.

A [19] munkában azt mutattuk meg, hogy a membrán szétosztó szabályok nélküli polarizációmentes aktív membránós P rendszerek esetén is adható a 2. tézisben megadott eredménynél erősebb, ha a membránstruktúra mélységére nincs felső korlát. Valójában azt sikerült megmutatni, hogy bizonyos feltételek mellett, tetszőleges Turing-gép szimulálható az időigény romlása nélkül olyan polarizációmentes aktív membránós P rendszerekkel, melyekben a membrán szétosztó szabályok nem használhatók. Ezen eredmény precíz kimondásához be kell vezetnünk néhány fogalmat. Legyen $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény, melyre $\log n \leq t(n)$. Azt mondjuk, hogy t *tár-megkonstruálható*, ha van olyan $O(t(n))$ tárkorlátos (off-line) Turing-gép, ami az 1^n szóval a bemenetén indítva az $f(n)$ érték unáris reprezentációját írja a kimenetére. Legyen Π egy membrán rendszer. Π egy C konfigurációjának mérete a C-ben szereplő membránok és objektumok száma. Π *tárigénye* pedig azon konfigurációk maximális *mérete*, melyeket Π elérhet a kezdőkonfigurációból indítva. [19]-ben a következőt sikerült bizonyítani:

3. tézis ([19]). *Legyen* $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy olyan függvény, hogy* $\log t(n)$ *tár-megkonstruálható, és legyen* M *egy* $t(n)$*-időigényű Turing-gép. Akkor* M *szimulálható felismerő P rendszerek egy* $\mathbf{\Pi}$ $(\mathbf{L}, \mathbf{SPACE}(\log t(n)))$*-uniform családjával úgy, hogy a következők teljesülnek:*

- *A* $\mathbf{\Pi}$ *tagjai* $\mathcal{AM}^0_{-v}$*-beli P rendszerek, és*
- *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén,* $\Pi_M(n)$ *egy* $O(t(n))$ *időben és* $O(t^2(n))$ *tárral működő membrán rendszer.*

Ezt az eredményt [18]-ban sikerült megjavítani polinomiális időigényű Turing-gépek szimulációja esetén. Nevezzünk egy evolúciós szabályt *unit-evolúciós* szabálynak, ha a jobb oldalán pontosan egy objektum szerepel. Jelöljük u-val a szabályok ezen típusát. Ekkor teljesül a következő állítás.

3. tétel ([18], 3. tétel). *Legyen* M *egy polinom időigényű Turing-gép. Akkor* M *szimulálható polinom időben* $\mathcal{AM}^0_{-vioe,+u}$*-beli felismerő P rendszerek egy* $\mathbf{\Pi}$ $(\mathbf{L},\mathbf{L})$*-uniform családjával.*

Azt kaptuk tehát, hogy polarizációmentes aktív membrános P rendszerek képesek polinom idejű Turing-gépek uniform módon hatékonyan szimulálni már akkor is, ha csak membrán feloldó és unit-evolúciós szabályokat használhatnak. [40]-ben egy **P**-teljes probléma megoldására adtak hasonló tulajdonságokkal rendelkező membrán rendszer családot, de ott a megoldás semi-uniform volt, és a felhasznált evolúciós szabályok közül nem mind volt unit-evolúciós.

Mivel membrán szétosztó szabályok nélkül csak **P**-beli problémák oldhatók meg [56], felhasználva ezt az eredményt, valamint $(\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{-vioe,+u}}$ zártságát a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve, adódik a következő eredmény.

2. Következmény. $\mathbf{P} = (\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{-vioe,+u}}$.

Ezen eredmény kapcsán felmerül az a kérdés, hogy vajon melyek az alkalmazható szabályok típusainak legszűkebb olyan halmazai, melyekkel egy aktív membrános P rendszer még képes **P**-teljes problémákat megoldani. Nyitott kérdés például az, hogy csupán membrán feloldó szabályokkal (azaz evolúciós szabályok nélkül) is megoldhatók-e **P**-teljes problémák ezen rendszerekkel ([36] 4.3. tételéből tudjuk, hogy feloldó szabályok elhagyásával már nem tudnánk **P**-beli problémákat $(\mathbf{L},\mathbf{L})$-uniform módon megoldani, feltéve persze, hogy $\mathbf{L} \subsetneq \mathbf{P}$).

Ezen kérdés által motiválva, [18]-ban bemutattunk két további olyan membrán rendszer családot, melyek csak bizonyos típusú szabályokat alkalmazva is képesek **P**-teljes problémák megoldására. Minkét esetben használhatják a rendszerek a membránok polaritását, de az egyik esetben csak kifelé kommunikáló szabályokat, a másikban pedig csak membrán szétosztó és membrán feloldó szabályokat alkalmaznak. Tehát egyik esetben sem alkalmazhatnak a rendszerek például evolúciós szabályokat. Továbbá a második megoldás olyan, a rendszer működése során a membrán struktúrában az azonos szinten lévő membránok száma mindig legfeljebb kettő.

A fent vázolt membrán rendszerekkel a következő, általunk Horn3SatNorm-nak nevezett problémát oldottuk meg [18]-ban. Adott egy φ zérusrendű konjunktív normálforma úgy, hogy minden tag vagy egyetlen pozitív literálból áll vagy két negatív és legfeljebb egy pozitív literált tartalmaz. A feladat annak eldöntése, hogy φ kielégíthető-e. Ha egy φ formula klózai teljesítik ezen feltételeket, akkor minden φ-beli klóz vagy egy ítéletváltozó vagy egy olyan klóz, ami ekvivalens egy $(x \wedge y) \rightarrow z$ alakú formulával, ahol x, y ítéletváltozók, z pedig vagy egy ítéletváltozó vagy egy azonosan hamis formula. Az ilyen alakú klózok pedig – mint kiderült – különösen alkalmasak arra, hogy membrán rendszereket használjunk azon ítéletváltozók megkeresésére, melyeknek igaznak kell lenniük ahhoz, hogy φ igaz legyen egy interpretációban. Ezt felhasználva kaptuk a következő eredményt.

4. tézis ([18], 1. és 2. tétel). Horn3SatNorm $\in (\mathbf{L},\mathbf{L})$-$\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$, *ahol*

1. $\mathcal{F} = \mathcal{AM}_{-dvie}$ *vagy*
2. $\mathcal{F} = \mathcal{AM}_{w\leq 2,-ioe}$.

Mivel Horn3SatNorm **P**-teljes, kapjuk, hogy **P** alsó korlát a 4. tézisben szereplő membrán rendszerek számítási erejére nézve. A **P** felső korlát az $\mathcal{AM}_{-dvie}$-

beli membrán rendszerek esetében ismert [56], míg az $\mathcal{AM}_{w\leq 2,-ioe}$-beli rendszerek esetében belátható az előbb említett [56]-beli eredmény bizonyításának általánosításával. Kapjuk tehát a **P** osztály következő jellemzéseit.

3. Következmény. $\mathbf{P} = (\mathbf{L},\mathbf{L})\text{-}\mathbf{PMC}_{\mathcal{F}}$, *ahol* $\mathcal{F}$ *a következő típusú membrán rendszer családok egyike:* $\mathcal{AM}_{-dvie}$ *vagy* $\mathcal{F} = \mathcal{AM}_{w\leq 2,-ioe}$.

1.3. Klasszikus formális nyelvi modellekkel kapcsolatos eredmények

1.3.1. Random context grammatikák

Ebben a fejezetben a CF grammatikák egyfajta általánosításait, az úgynevezett random context grammatikákat vizsgáljuk. A CF grammatikákat Noam Chomsky vezette be az 1950-es években azért, hogy a természetes nyelvek mondataiban a szavak közötti kapcsolatokat modellezze velük [5]. Ugyanakkor ezen grammatikák jelennek meg az akkoriban elterjedő programozási nyelvek szintaxisának megadásában használt Backus–Naur-formában (azaz BNF-ben) is. Jelentőségük napjainkra sem csökkent, sőt újabb területeken is intenzíven használatosak. Példa erre a mostanában igen széles körben használt XML nyelvekben történő alkalmazásuk a dokumentumtípus-definíció (DTD) megadására.

Kiderült azonban az is, hogy néhány természetes nyelvben előfordulnak olyan nyelvtani struktúrák, melyeket nem lehet CF grammatikákkal megfelelően modellezni. Ilyenek például az úgynevezett *cross-serial függőségek* (lásd például [32]). Ezt a legegyszerűbben az $L_{\text{cross}} = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 0\}$ formális nyelvvel tudjuk szemléltetni. Látható, hogy ezen nyelv szavaiban az azonos hosszú a és c betűből álló részszavak között tetszőleges hosszú b betűkből álló szó állhat, és hasonló feltételek teljesülnek a b, c és d betűkből álló részszavakra.

Felmerült tehát az igény arra, hogy a CF grammatikáknál nagyobb kifejező erejű, de még mindig hatékonyan kezelhető grammatikákat használjanak. Ez vezetett odáig, hogy számos olyan grammatika-típus született, ami a CF grammatikákon alapul, de azoknál nagyobb kifejező erővel bír (ilyenek például a mátrix grammatikák, regulárisan kontrollált grammatikák, programozott grammatikák és szövegfeltételes grammatikák). Mi ezek közül behatóbban a szövegfeltételes grammatikák osztályába tartozó úgynevezett random context grammatikákkal foglalkoztunk.

Egy G *random context grammatika* (röviden RCG) [54] egy olyan $G = (V, \Sigma, R, S)$ rendszer, ahol V és Σ rendre a *nemterminális* és *terminális* szimbólumok ábécéje, $S \in V$ a *kezdőszimbólum*, és R pedig $(A \to \alpha, P, Q)$ alakú $(A \in V, \alpha \in (V \cup \Sigma)^*, P, Q \subseteq V)$ *átírási szabályok* halmaza. A szabályokban megadott P és Q halmazokat rendre *engedélyező* és *tiltó* halmazoknak nevezzük, G-t pedig *engedélyezőnek* (rendre *tiltónak*) mondjuk, ha az összes G-beli szabályban üres a tiltó (rendre az engedélyező) halmaz. A G által meghatározott *egylépéses levezetési relációt* (jele $\Rightarrow_G$) a következőképpen definiáljuk. Tetszőleges $u_1, u_2, \alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ és $A \in V$ esetén, $u_1 A u_2 \Rightarrow_G u_1 \alpha u_2$ akkor és csak akkor, ha van olyan $P, Q \subseteq V$, hogy $(A \to \alpha, P, Q) \in R$, és

1. minden P-beli nemterminális szerepel $u_1 A u_2$-ben, és

2. nincs olyan Q-beli nemterminális, ami szerepel u_1Au_2-ben.

A *G által generált nyelvet* $L(G)$-vel jelöljük és a szokásos módon definiáljuk: $L(G) = \{u \in \Sigma^* \mid u \Rightarrow_G^* u\}$, ahol $\Rightarrow_G^*$ a $\Rightarrow_G$ reflexív, tranzitív lezártja.

Jelölje $\mathcal{L}(\mathrm{RCG}_{-\lambda}), \mathcal{L}(\mathrm{RCG}), \mathcal{L}(\mathrm{CF}), \mathcal{L}(\mathrm{CS})$ rendre a törlő szabályok nélküli random context, a random context, a környezetfüggetlen és a környezetfüggő grammatikák által generált nyelvek, RE pedig a rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát. Ismertek a következő eredmények (lásd például [6]): $\mathcal{L}(\mathrm{CF}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{RCG}_{-\lambda}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{CS})$, valamint $\mathcal{L}(\mathrm{RCG}) = \mathrm{RE}$. Ezek szerint a random context grammatikák számítási ereje a Turing-gépekével egyezik meg, ha a λ-szabályok használata megengedett. [35]-ben ezért bizonyos megszorításokat vezettek be a P és Q halmazokra, és azt vizsgálták, hogy vajon ezen megszorításokkal hogyan változik a random context grammatikák számítási ereje. Egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ random context grammatikát *megszorítottnak* (röviden rRCG-nek) nevezünk, ha a következő (†) tulajdonságok teljesülnek:

- Minden $(A \to \alpha, P, Q) \in R$ szabályra $|P| + |Q| = 1$ és
- bármely két $(A \to \alpha_1, P_1, Q_1)$ és $(A \to \alpha_2, P_2, Q_2)$ R-beli szabályra, $P_1 = P_2$ és $Q_1 = Q_2$.

Tehát ha G egy rRCG, akkor minden (r, P, Q) szabály esetén vagy a P vagy a Q halmaz üres, a másik pedig egyelemű. Továbbá a P és a Q halmazok az azonos nemterminálist átíró szabályok esetében megegyeznek, tehát ezen grammatikák esetén már maga az átírandó a nemterminális határozza meg az engedélyező és tiltó halmazokat.

Jelölje $\mathcal{L}(\mathrm{rRCG})$ és $\mathcal{L}(\mathrm{rRCG}_{-\lambda})$ rendre a megszorított és a törlő szabályok nélküli megszorított grammatikákkal generálható nyelvek osztályát. A [7] és a [35] munkákban bizonyítást nyert, hogy $\mathcal{L}(\mathrm{rRCG}) = \mathcal{L}(\mathrm{RCG})$ és $\mathcal{L}(\mathrm{rRCG}_{-\lambda}) = \mathcal{L}(\mathrm{RCG}_{-\lambda})$. [7]-ben azt is sikerült megmutatni, hogy az engedélyező random context grammatikák esetében sem jelentenek a fenti (†) feltételek megszorítást a kifejező erőre nézve, akár megengedett a törlő szabályok használata, akár nem. Az viszont nyitott kérdés maradt, hogy vajon a tiltó megszorított random context grammatikák is ekvivalensek-e a tiltó random context grammatikákkal. Sőt, még az is nyitott maradt, hogy egyáltalán képesek-e a tiltó random context grammatikák nem CF nyelv generálására.

Az elért eredmények. Ahogy korábban említettük, a környezetfüggetlen nyelvtanok nem képesek modellezni a cross-serial függőségeket, így generálni például az $L_{\mathrm{cross}} = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 0\}$ nyelvet. A [10] munkában megmutattuk, hogy a tiltó random context grammatikák képesek egy L_{cross}-hoz hasonló nyelv generálására. A [10]-beli konstrukció könnyen módosítható úgy, hogy a megadott random context grammatika λ-mentes legyen. Adódik tehát a következő eredmény, ahol $\mathcal{L}(\mathrm{rfRCG})$ (rendre $\mathcal{L}(\mathrm{rfRCG}_{-\lambda})$) jelöli a tiltó (rendre λ-mentes tiltó) megszorított random context grammatikák által generált nyelvek osztályát.

4. TÉTEL ([10], 1. TÉTEL). $\mathrm{CF} \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{rfRCG}_{-\lambda})$ *és* $\mathrm{CF} \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{rfRCG})$.

A [12] munkában egy a fentinél erősebb eredményt sikerült bizonyítani. Megmutattuk, hogy a tiltó random context grammatikák esetében sem jelenti a (†) megszorítás a generatív erő csökkenését, ha a λ-szabályok használata megengedett.

5. TÉZIS ([12], 4. TÉTEL). $\mathcal{L}(\text{rfRCG}) = \mathcal{L}(\text{fRCG})$.

Ezen tétel bizonyításának alapja a [12] dolgozatban általunk bevezetett *komplemens nemterminális-párok* használata volt. Legyen G egy tiltó RCG, és B valamint B' a G két nemterminálisa. B és B' akkor alkot komplemens nemterminális-párt, ha G ben a B baloldalú szabályok alkalmazását csak a B' nemterminális tilthatja, a B' baloldalú szabályokét pedig csak B.

Tekintsünk egy G tiltó RCG-t. Ha egy G-vel ekvivalens G' tiltó rRCG-t szeretnénk megadni, akkor használhatjuk a komplemens nemterminális-párokat a következőképpen. Legyen $r : (A \to \alpha, \emptyset, Q)$ a G egy szabálya, és tegyük fel, hogy Q az $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ tiltó nemterminálisokat tartalmazza. Ekkor r-nek megfeleltethető G'-ben egy olyan $r' : (A \to \alpha\beta, \emptyset, Q')$ szabály, ahol β' az $A_1, \ldots A_n$ nemterminálisok komplemens párjaiból álló szó, Q pedig az A komplemens párja. Látható, hogy G' egy sikeres (azaz terminális betűkből álló szót eredményező) levezetésében csak akkor alkalmazható r', ha az alkalmazásakor a mondatforma nem tartalmazza az $A_1, \ldots, A_n$ nemterminálisok egyikét sem. Ily módon, ahogy az $A_1, \ldots, A_n$ bármelyike tiltja az r alkalmazását G-ben, úgy ezek bármelyike meggátolja r' alkalmazását G'-ben (legalábbis a sikeres levezetésekben).

[12]-ben olyan random context grammatikákat is vizsgáltunk, melyekben a (†) megszorítást egy kicsit gyengítettük: megengedtük olyan szabályokat is, ahol az engedélyező és tiltó halmazok mindegyike üres. Az így kapott grammatikákat *gyengén megszorított random context grammatikáknak* neveztük. Jelölje $\mathcal{L}(\text{wrRCG})$ az ezen grammatikákkal generálható nyelvek osztályát. A komplemens nemterminális-párok használatával sikerült megmutatni a következőt.

6. TÉZIS ([12], 6. KÖVETKEZMÉNY). *Legyen $L \in \text{RE}$. Akkor megadható olyan L-t generáló G gyengén megszorított random context grammatika, melyben legfeljebb csak egy engedélyező nemterminális szerepel.*

Mivel $\mathcal{L}(\text{fRCG}) \subsetneq \text{RE}$, a fenti eredmény optimális a nyelvtanban előforduló engedélyező nemterminálisok számát illetően.

1.3.2. Véges automaták irányíthatósága

Ebben a részben a nemdeterminisztikus véges automaták irányíthatóságával kapcsolatos eredményeinket ismertetjük. *Nemdeterminisztikus véges automata* (röviden NVA) alatt egy olyan (Q, Σ, δ) rendszert értünk, ahol Q az állapotok véges halmaza, Σ a bemenő jelek ábécéje, $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ pedig az átmenetfüggvény (mivel a szokásos végállapothalmazra most nem lesz szükségünk, ezt elhagytuk a definícióból). Ha minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén $|\delta(q, a)| = 1$, akkor A-t *determinisztikus véges automatának* (röviden DVA-nak) nevezzük. δ a szokásos módon kiterjeszthető a $Q \times \Sigma^*$ halmazra (az egyszerűség kedvéért δ ezen kiterjesztését szintén δ-val fogjuk jelölni).

Egy $A = (Q, \Sigma, \delta)$ DVA-t *irányíthatónak* nevezünk, ha van olyan $u \in \Sigma^*$, hogy $\delta(q, u) = \delta(p, u)$, minden $q, p \in Q$ esetén. Ekkor u-t *irányító szónak* nevezzük. Černý megmutatta [3], hogy minden n-hez létezik olyan n állapotú DVA, melynek legrövidebb irányító szava $(n-1)^2$ hosszú. Ugyanakkor megsejtette azt is, hogy nem is adható olyan n állapotú automata melynek legrövidebb irányító szava hosszabb mint $(n-1)^2$. Černýnek sikerült igazolnia sejtését azon esetekben, amikor $n \leq 5$ [4]. Általános esetben viszont az ezidáig legjobb felső közelítés $\frac{n^3-n}{6}$ [52]. A Černý-sejtéshez kapcsolódó kérdések vizsgálata a mai napig is egy sokat kutatott terület.

Az irányíthatóság fogalma természetes módon kiterjeszthető NVA-kra is: egy $A = (Q, \Sigma, \delta)$ NVA irányítható, ha van olyan $u \in \Sigma^*$, hogy $\delta(q, u) = \delta(p, u)$, minden $q, p \in Q$ esetén. [30]-ban ezen kívül még két további természetes kiterjesztését vizsgálták az irányíthatóságnak. Azóta az NVA-k irányító szavainak hosszát többen is vizsgálták mind általános (például [31, 34]), mind pedig speciális esetekben (például [27, 28, 29]). Mi [15]-ben szintén a [30]-ban bevezetett irányíthatósági fogalmakat vizsgáltuk, és adtunk meg mindhárom esetben az addig létezőknél aszimptotikusan jobb felső korlátokat az irányító szavak hosszára.

Az elért eredmények. Szükségünk lesz az alábbi definíciókra. Legyen $A = (Q, \Sigma, \delta)$ egy NVA. Egy $u \in \Sigma^*$ szó az A

1-*irányító szava*, ha van olyan $q \in Q$, hogy minden $p \in Q$ esetén, $\delta(p, u) = \{q\}$,

2-*irányító szava*, ha minden $p, q \in Q$ esetén, $\delta(p, u) = \delta(q, u)$, és

3-*irányító szava*, ha van olyan $q \in Q$, hogy minden $p \in Q$ esetén, $q \in \delta(p, u)$.

Minden $i \in \{1, 2, 3\}$-ra bevezetjük a következő fogalmakat is. Egy A NVA-t i-*irányíthatónak* nevezünk, ha van A-t i-irányító szó. Legyen A egy i-irányítható automata. Ekkor $d_i(A)$ jelöli az A legrövidebb irányító szavainak hosszát. Legyen továbbá $d_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a következő függvény ($\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát):

$$d_i(n) = \max\{d_i(A) \mid A \text{ egy } n \text{ állapotú } i\text{-irányítható automata}\}.$$

Mi [15]-ben a d_i függvények felső korlátjait vizsgáltuk. Ezekre a függvényekre az addig ismert legjobb alsó és felső korlátok a következők voltak:

$d_1(n) = \Omega(2^n)$ és $d_1(n) = O(3^n)$ [31],

$d_2(n) = \Omega(2^n)$ [2] és $d_2(n) = O(n \cdot 4^n)$ [30],

$d_3(n) = \Omega(\sqrt[3]{3^n})$ [2] és $d_3(n) = O(2^n)$ [34].

A a következőképpen sikerült megjavítanunk ezen függvények felső korlátait.

7. TÉZIS ([15]). *$d_1(n) = O(2^n)$, $d_2(n) = O(2^n)$ és $d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4^n})$.*

Látható, hogy a d_1 és d_2 irányíthatóság tekintetében sikerült optimális felső korlátot adni.

1.3.3. Kleene-féle tétel binoid nyelvekre

A klasszikus reguláris nyelvekre vonatkozó Kleene-tételnek számos általánosítása létezik. Ezek közül talán a legismertebbek a véges faautomatákra és ezek súlyozott változataira vonatkozóak. A regularitás fogalmának más és más eszközökkel való jellemzése gyakorlati jelentőséggel bír, hisz ily módon bővül azon lehetőségek száma, melyek közül egy konkrét feladat megoldása során választani tudunk. Az újabb kutatási irányok közé tartozik Kleene tételének több dimenziós szavakból, például biszavakból álló nyelvekre való kiterjesztése. Ennek lehetőségét is széles körben vizsgálták már (lásd például [8, 9, 26, 42, 43] és a bennük lévő hivatkozásokat). A témakör egyik fontos eredménye ezen nyelvek monadikus másodrendű logikában (MSO) való definiálhatóságának és az úgynevezett zárójelező automatákkal való felismerhetőségének ekvivalenciája [9]. A továbbiakban a zárójelező automatákkal való felismerhetőséget – követve a vonatkozó irodalomban használt elnevezéseket – *regularitásnak* fogjuk nevezni. Kleene-típusú tétel reguláris bifélcsoport nyelvekre mi adtunk először [20]. Itt olyan nyelvi műveleteket definiáltunk melyek segítségével képesek voltunk jellemezni a reguláris bifélcsoport nyelvek osztályát.

Ahhoz, hogy az elért eredményeket részletesen is ismertetni tudjuk szükségünk lesz néhány fogalom bevezetésére. Sajnos azonban az összes felhasznált eszköz precíz bemutatása túlmutat a dolgozat keretein. A téma egy átfogó ismertetése megtalálható a [43] munkában. *Bifélcsoportnak* nevezünk egy olyan $(B, \bullet, \circ)$ struktúrát, ahol B egy nemüres halmaz, $\bullet$ és $\circ$ pedig két asszociatív művelet a B-n. Ezt a két műveletet rendre *horizontális szorzásnak* és *vertikális szorzásnak* nevezzük. Ha a két szorzás műveletnek van egy közös egységeleme, akkor az algebrát *binoidnak* nevezzük és $(B, \bullet, \circ, 1)$-gyel jelöljük, ahol 1 ezt a közös egységelemét jelöli. Legyen Σ egy ábécé. A Σ*-feletti szabad bifélcsoportot* és *binoidot* rendre $\Sigma^+(\bullet, \circ)$ és $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ jelöli. $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ egységelemét λ-val jelöljük és *üres biszónak* nevezzük. $\Sigma^+(\bullet, \circ)$ részhalmazait *bifélcsoport*, míg $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ részhalmazait *binoid nyelveknek* nevezzük.

A biszavaknak számos reprezentációja létezik. A dolgozatban mi $\Sigma \cup \{\bullet, \circ, (,)\}$-feletti *termekként* tekintünk majd rájuk. Például, az $a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet (e \circ f)$ egy biszót reprezentáló term. A biszavak felismerésére vezették be a zárójelező automatákat [9]. A *zárójelező automata* egy olyan $A = (S, H, V, \Sigma, \Omega, \delta, \gamma, I, F)$ rendszer, ahol S az *állapotok* véges, nem üres halmaza; H és V az S egy particionálása, H és V elemeit rendre *horizontális* és *vertikális állapotoknak* nevezzük; Σ a *bemenő jelek* ábécéje; Ω a *zárójel párok* véges halmaza; $\delta \subseteq (H \times \Sigma \times H) \cup (V \times \Sigma \times V)$ a *címkéző átmenetreláció*; $\gamma \subseteq (H \times \Omega \times V) \cup (V \times \Omega \times H)$ a *zárójelező átmenetreláció*, és végül $I, F \subseteq S$ rendre a *kezdő-* és *végállapot* halmaz. Intuitívan, egy A zárójelező automata egy *futása* egy w $\Sigma^+(\bullet, \circ)$-beli biszón vertikális és horizontális állapotok egy sorozatát határozza meg a következőképpen. A különböző típusú állapotok közötti váltás egy w-beli zárójel hatására történik a γ alapján, míg az „azonos szinten" lévő Σ-beli betűk beolvasásakor az állapotváltás a δ alapján történik. A akkor fogadja el w-t, ha van rajta sikeres, azaz kezdőállapotból induló és végállapotba érkező futása. Egy biszavakból álló L nyelvet *regulárisnak* nevezünk, ha van olyan zárójelező automata, ami pontosan az L-beli szavakat fogadja el.

Az elért eredmények. Ahogy azt már említettük, [20]-ban olyan bifélcsoport nyelveken értelmezett műveleteket kerestünk, melyek segítségével jellemezhető a zárójelező automatákkal definiált regularitás. Legyenek Σ és Z diszjunkt ábécék. Tekintsük a következő $(\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ)$-feletti műveleteket: *unió*, *horizontális* és *vertikális szorzás*, *horizontális* és *vertikális iteráció*, *ξ-helyettesítés*, valamint *ξ-iteráció* ($\xi \in Z$). Ezen műveletek többségének szemantikája a klasszikus formális nyelvekre definiált műveletek segítségével könnyen megadható, ezért most csak a ξ-helyettesítést (amit $\cdot_\xi$-vel fogunk jelölni) és a ξ-iterációt (jele: ${}^{*\xi}$) vizsgáljuk meg részletesebben. Legyen $\xi \in Z$, $w \in (\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ)$ és $L, L_1, L_2 \subseteq (\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ)$. Az *$L$ w-be való ξ-helyettesítését* a következőképpen definiáljuk. Ha $w = \xi$, akkor $L \cdot_\xi w = L$. Ha $w \in \Sigma \cup (Z - \{\xi\})$, akkor $L \cdot_\xi w = w$. Ha pedig $w = w_1 * \ldots * w_n$ ($n \geq 2, w_1, \ldots, w_n \in (\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ), * \in \{\bullet, \circ\}$), akkor $L \cdot_\xi w = (L \cdot_\xi w_1) * \ldots * (L \cdot_\xi w_n)$. Ezek után az L_1 nyelv L_2-be való ξ-helyettesítése és az L ξ-iteráltja a szokásos módon adódik: $L_1 \cdot_\xi L_2 = \bigcup_{w \in L_2} L_1 \cdot_\xi w$ és $L^{*\xi} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{i,\xi}$, ahol $L^{i,\xi} = L \cdot_\xi L^{i-1,\xi}$, ha $i \geq 1$, és $L^{0,\xi} = \{\xi\}$.

Könnyű belátni, hogy a reguláris bifélcsoport nyelvek az összes fent említett műveletere zártak, kivéve a ξ-iterációt. Az $\{a \bullet \xi \bullet b\}^{*\xi}$ kifejezés például egy olyan bifélcsoport nyelvet jelöl ami nem reguláris. Ezért [20]-ban – a megfelelő racionalitás fogalom meghatározása érdekében – a fenti ξ-iteráció egy megszorított változatát használtuk. Ennek definiálásához szükségünk van némi előkészületre. Legyen $w \in L$. Azt mondjuk, hogy *w ξ-iteráció megengedett*, ha *w nem* írható fel $w_1 * \xi * w_2$ alakban, ahol $* \in \{\bullet, \circ\}$ és $w_1, w_2 \in (\Sigma \cup Z)^*(\bullet, \circ)$. Egy $L \subseteq (\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ)$ bifélcsoport nyelv *ξ-iteráció megengedett*, ha minden L-beli szó ξ-iteráció megengedett. Végül *L megszorított ξ-iteráltját* $L^{\circledast\xi}$-vel jelöljük és a következőképpen definiáljuk. $L^{\circledast\xi} = L^{*\xi}$, ha L ξ-iteráció megengedett, és $L^{\circledast\xi} = \emptyset$ egyébként.

Ezek után egy $L \subseteq (\Sigma \cup Z)^+(\bullet, \circ)$ bifélcsoport nyelvet *racionálisnak* nevezünk, ha L megkapható biszavak véges halmazaiból az unió, a horizontális és a vertikális szorzás, a horizontális és a vertikális iteráció, a ξ-helyettesítés, valamint a megszorított ξ-iteráció ($\xi \in Z$) műveletek alkalmazásával. Jelölje Reg a reguláris, Rat pedig a racionális bifélcsoport nyelvek osztályát.

8. TÉZIS ([20]). $\mathsf{Reg} = \mathsf{Rat}$.

Jelölje MSO és Rec rendre az MSO formulákkal definiálható és a felismerhető bifélcsoport nyelvek osztályát (itt felismerhetőségen a véges algebrák segítségével történő algebrai felismerhetőséget értjük, bővebben lásd [43]-ban). Felhasználva az 8. tézist és [9] eredményeit kapjuk, hogy $\mathsf{Reg} = \mathsf{Rat} = \mathsf{MSO} = \mathsf{Rec}$.

A [20] eredményeit is bemutató [21] munkában azt vizsgáltuk, hogyan lehetne kiterjeszteni a bifélcsoport nyelvekre kapott fenti jellemzéseinket binoid nyelvekre. A regularitás, az MSO definiálhatóság és a felismerhetőség fogalmának kiterjesztése egyszerűen adódik ha meggondoljuk, hogy egy L binoid nyelvere $L - \{\lambda\}$ egy bifélcsoport nyelv. Ugyanakkor a racionalitás fogalmának kiterjesztése nehézségekbe ütközik, mert ellentéteben a reguláris bifélcsoport nyelvekkel, a reguláris binoid nyelvek már nem zártak a ξ-helyettesítésre. Legyen például $L_1 = \{\lambda\}$ és $L_2 = \{a \bullet (\xi \circ \eta \circ \xi) \bullet b\}^{*\eta}$. Ezek a nyelvek regulárisak, de az $L_1 \cdot_\xi L_2 = \{a \bullet \eta \bullet b\}^{*\eta}$ már nem az. A problémát az jelenti, hogy az üres biszó helyettesítése kitörli η előfordulásait az $\{a \bullet (\xi \circ \eta \circ \xi) \bullet b\}^{*\eta}$-beli szavakból. Ezért [21]-ben a binoid nyelvek esetében módosítottunk a ξ-helyettesítés definícióján.

A kapott műveletet *nemtörlő ξ-helyettesítésnek* neveztük és $\times_\xi$-vel jelöltük. Tetszőleges $L_1, L_2 \subseteq (\Sigma \cup Z)^*(\bullet, \circ)$ nyelvre és $\xi \in Z$-re, $L_1 \times_\xi L_2 = (L_1 - \{\lambda\}) \cdot_\xi L_2$. Ezek után egy L binoid nyelv ξ-iteráltja, azaz $L^{*\xi}$ a nemtörlő ξ-helyettesítés, azaz $\times_\xi$ iterációjaként adódik. Továbbá akkor mondjuk, hogy *L ξ-iteráció megengedett*, ha az $L - \{\lambda\}$ ξ-iteráció megengedett. Végül *L megszorított ξ-iteráltja* (jele: $L^{\times\xi}$) a következőképpen adódik. $L^{\times\xi} = L^{*\xi}$, ha L ξ-iteráció megengedett, és $L^{\times\xi} = \emptyset$ egyébként.

Legyen $\mathsf{Rat_{bn}}$ azon nyelvek osztálya, melyek megkaphatók a véges binoid nyelvekből az unió, a (binoid nyelvekre kiterjesztett) horizontális és vertikális szorzás, horizontális és vertikális iteráció, valamint a $\times_\xi$ és a $^{\times\xi}$ műveletek segítségével. Jelölje továbbá $\mathsf{Reg_{bn}}$, $\mathsf{MSO_{bn}}$ és $\mathsf{Rec_{bn}}$ rendre a zárójelező automatákkal felismerhető, a monadikus másodrendű formulákkal definiálható és az (algebrailag) felismerhető binoid nyelvek osztályát. [21]-ben bizonyítottuk a 8. tézis eredményeinek alábbi kiterjesztését binoid nyelvekre.

5. Tétel ([21]). *Tetszőleges L binoid nyelv és* $\mathsf{X} \in \{\mathsf{Rat}, \mathsf{Reg}, \mathsf{MSO}, \mathsf{Rec}\}$ *esetén,* $L \in \mathsf{X_{bn}} \Leftrightarrow L - \{\lambda\} \in \mathsf{X}$.

2. Folyamatban lévő kutatások

Jelenleg mind a szövegfeltételes grammatikák, mind az aktív membrános P rendszerek témakörében vannak folyó kutatásaink. Az első témakörben elkészült egy kézirat [22], amiben azt bizonyítjuk, hogy a csak megengedő szövegfeltételekkel rendelkező úgynevezett szemi-szövegfeltételes grammatikák generatív ereje szigorúan kisebb, mint a környezetfüggő grammatikáké. A [14] munkában azt bizonyítottuk, hogy a membrán létrehozó szabályokkal rendelkező polarizációmentes aktív membrános P rendszerek a **PSPACE** osztályt jellemzik, ha a rendszerek használhat úgynevezett annihilációs szabályokat. Ezen eredmények alapján egy folyóirat cikk elkészítésén is dolgozunk. Dolgozatunkban már volt szó a Păun-féle sejtésről. Bizonyos, meglehetősen speciális esetekben, már vannak elképzeléseink a sejtés igazolására. Azt reméljük, hogy ezen esetek vizsgálata közelebb vihet minket az eredeti sejtés bizonyításához.

Köszönetnyilvánítás. Köszönöm társszerzőimnek a közös munkát. Köszönöm továbbá tanszéki kollégáimnak a számos inspiráló beszélgetést, valamint a tanszéken eltöltött közel tíz év alatt tapasztalt baráti légkört. Végül szeretném megköszönni feleségemnek azt a türelmet, szeretetet és biztatást, amit a munkám során tőle kaptam.

3. Hivatkozások

[1] Alhazov, A., Pan, L., Păun, Gh.: Trading polarizations for labels in P systems with active membranes. Acta Inf. **41**(2-3) (2004), 111–144.

[2] Burkhard, H.V.: Zum Längenproblem homogener Experimente an determinierten und nicht-deterministischen Automaten. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, EIK, **12** (1976), 301–306.

[3] Černý, J.: A remark on homogeneous experiments with finite automata. *Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied* **14** (1964), 208–215 (in Slovak).

[4] Černý, J., Pirická, A., Rosenauerová, B.: On directable automata. Kybernetika **7**(4) (1971), 289–298.

[5] Chomsky, N.: Three models for the description of language, Information Theory, IEEE Transactions, **2**(3) (1956), 113–124.

[6] Dassow, J., Păun, G.: Regulated Rewriting in Formal Language Theory, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Vol. 18, Springer, Berlin (1989).

[7] Dassow, J., Masopust, T.: On Restricted Context-Free Grammars. Journal of Computer and System Sciences **78** (2012), 293–304.

[8] Dolinka, I.: Axiomatizing the identities of binoid languages. Theoretical Computer Science **372** (2007), 1–14.

[9] Ésik, Z., Németh, Z.L.: Higher dimensional automata, Journal of Automata, Languages and Combinatorics **9** (2004), 3–29.

[10] Gazdag, Z.: A note on context-free grammars with rewriting restrictions. In: A. Brodnik, G. Galambos (eds.), Proceedings of the 2010 Mini-Conference on Applied Theoretical Computer Science, University of Primorska Press, Koper (2011), 109–112.

[11] Gazdag, Z.: Solving SAT by P Systems with Active Membranes in Linear Time in the Number of Variables. In: Alhazov, A., Cojocaru, S., Gheorghe, M., Rogozhin, Y., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.) Membrane Computing: 14th International Conference, LNCS vol. 8340 (2014), 189–205.

[12] Gazdag, Z.: Remarks on some Simple Variants of Random Context Grammars. Journal of Automata Languages and Combinatorics **19**:(1-4) (2014), 81–92.

[13] Gazdag, Z., Gutiérrez-Naranjo, M.A.: Solving the ST-connectivity problem with pure membrane computing techniques. In: Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Sosík, P., Zandron, C. (eds.) Membrane Computing: 15th International Conference, LNCS vol. 8961 (2014), 215–228.

[14] Gazdag, Zs., Gutiérrez-Naranjo, M.A.: A Characterization of PSPACE with Antimatter and Membrane Creation. In: Macías-Ramos, L.F., Păun, Gh., Riscos-Núñez, A., Valencia-Cabrera, L. (eds.) Proceedings of the Thirteenth Brainstorming Week on Membrane Computing (2015), 159–178.

[15] Gazdag, Zs., Iván, Sz., Nagy-György, J.: Improved upper bounds on synchronizing nondeterministic automata. Information Processing Letters **109**:(17) (2009), 986–990.

[16] Gazdag, Z., Kolonits, G.: A new approach for solving SAT by P systems with active membranes. In: Csuhaj-Varjú, E., Gheorghe, M., Vaszil, G. (eds.) Proceedings of the 13th International Conference on Membrane Computing. CMC13 (2012), 211–220.

[17] Gazdag, Z., Kolonits, G.: A new approach for solving SAT by P systems with active membranes. In: Csuhaj-Varjú, E., Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Vaszil, G. (eds.) Membrane Computing: 13th International Conference, LNCS vol. 7762 (2013), 195–207.

[18] Gazdag, Z., Kolonits, G.: Remarks on the Computational Power of Some Restricted Variants of P Systems with Active Membranes. In: Leporati,

A., Zandron, C. (eds.) Proceedings of the 17th International Conference on Membrane Computing. CMC17 (2016), 137–160.

[19] Gazdag, Z., Kolonits, G., Gutiérrez-Naranjo, M.A.: Simulating Turing machines with polarizationless P systems with active membranes. In: Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Sosík, P., Zandron, C. (eds.) Membrane Computing: 15th International Conference, LNCS vol. 8961 (2014), 229–240.

[20] Gazdag, Z., Németh, Z.L.: A Kleene Theorem for Binoid Languages. In: Csuhaj-Varjú, E., Ésik Z. (eds.) Automata and Formal Languages: 12th International Conference, AFL 2008, Proceedings. Budapest: Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences (2008), 170–182.

[21] Gazdag Z., Németh, Z.L.: A Kleene Theorem for Bisemigroup and Binoid Languages. International Journal of Foundations of Computer Science **22**:(2) (2011), 427–446.

[22] Gazdag, Zs., Tichler, K.: On the Power of Permitting Semi-conditional Grammars. Manuscript (2017), elérhető: https://www.researchgate.net/profile/Zsolt_Gazdag

[23] Gutierrez-Naranjo, M.A., Perez-Jimenez, M.J., Riscos-Núñez, A., Romero-Campero, F.J.: On the Power of Dissolution in P Systems with Active Membranes. In: Freund, R., Păun, Gh., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.) Membrane Computing: 6th International Workshop, LNCS vol. 3850 (2006), 224–240.

[24] Gutiérrez-Naranjo, M.A., Pérez-Jiménez, M.J., Romero-Campero, F.J.: A linear solution for QSAT with membrane creation. In: Freund, R., Păun, Gh., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.) Membrane Computing: 6th International Workshop, LNCS vol. 3850 (2006), 241–252.

[25] Gutiérrez-Naranjo, M.A., Pérez-Jiménez, M.J., Romero-Campero, F.J.: A uniform solution to SAT using membrane creation. Theor. Comput. Sci. **371**(1-2) (2007), 54–61.

[26] Hashiguchi, K., Sakakibara, Y., Jimbo, S.: Equivalence of regular binoid expressions and regular expressions denoting binoid languages over free binoids. Theoretical Computer Science **312** (2004), 251–266.

[27] Imreh, B., Imreh, Cs., Ito, M.: On monotonic directable nondeterministic automata. J. Autom. Lang. Comb., **8**(3) (2003), 539–547.

[28] Imreh, B., Imreh, Cs., Ito, M.: On directable nondeterministic trapped automata. Acta Cybernet., **16** (2003), 37–45.

[29] Imreh, Cs., Ito, M.: On monogenic nondeterministic automata. Acta Cybernet., **18** (2008), 777–782.

[30] Imreh, B., Steinby, M.: Directable nondeterministic automata. Acta Cybernet. **14** (1999), 105–115.

[31] Ito, M., Shikishima-Tsuji, K.: Some results on directable automata. Theory is Forever, LNCS, vol. 3113 (2014), 125–133.

[32] Jurafsky, D., Martin, J.H.: Speech and Language Processing: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA (2000).

[33] Kolonits, G.: A Solution of Horn-SAT with P Systems Using Antimatter. In: Membrane Computing: 16th International Conference, LNCS vol. 9504 (2015), 236–250.

[34] Martyugin, P.V.: Lower bounds for length of carefully synchronizing words. Presented at Satellite Workshop on Words and Automata of the International Computer Science Symposium in Russia (CSR'06), St. Petersburg, 2006.

[35] Masopust, T.: Simple restriction in context-free rewriting. *Journal of Computer and System Sciences* **76** (2010), 837–846.

[36] Murphy, N.: Uniformity conditions for membrane systems: uncovering complexity below P. Ph.D. thesis, National University of Ireland, Maynooth (2010).

[37] Murphy, N., Woods, D.: Active Membrane Systems Without Charges and Using Only Symmetric Elementary Division Characterise P. In: Eleftherakis, G., Kefalas, P., Păun, Gh., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.) Membrane Computing: 8th International Workshop, LNCS vol. 4860 (2007), 367–384.

[38] Murphy, N., Woods, D.: A Characterisation of NL Using Membrane Systems without Charges and Dissolution. In: Calude, C.S., da Costa, J.F.G., Freund, R., Oswald, M., Rozenberg, G. (eds.) Unconventional Computing: 7th International Conference, LNCS vol. 5204 (2008) 164–176.

[39] Murphy, N., Woods, D.: On acceptance conditions for membrane systems: characterisations of **L** and **NL**. In Neary, T., Woods, D., Seda, T., Murphy, N., eds.: Proceedings International Workshop on The Complexity of Simple Programs, Cork, Ireland, Volume 1 of Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science., Open Publishing Association (2009), 172–184.

[40] Murphy, N., Woods, D.: The computational power of membrane systems under tight uniformity conditions. Natural Computing **10**(1) (2011), 613–632.

[41] Murphy, N., Woods, D.: Uniformity is weaker than semi-uniformity for some membrane systems. Fundam. Inf. **134**(1-2) (2014), 129–152.

[42] Németh, Z.L.: Automata on infinite biposets. Acta Cybernetica **18** (2006), 765–797.

[43] Németh, Z.L.: Higher dimensional automata. PhD Thesis, University of Szeged (2007).

[44] Pan, L., Alhazov, A., Ishdorj, T.-O.: Further remarks on P systems with active membranes, separation, merging, and release rules. Soft Computing **9**(9) (2004), 686–690.

[45] Pan, L., Ishdorj, T.-O.: P systems with active membranes and separation rules. Journal of Universal Computer Science **10**(5) (2004), 630–649.

[46] Păun, Gh.: Computing with membranes. *J. Comput. Syst. Sci.* **61**(1) (2000), 108–143.

[47] Păun, Gh.: P Systems with Active Membranes: Attacking NP-Complete Problems. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics* **6**(1) (2001), 75–90.

[48] Păun, Gh.: Further twenty six open problems in membrane computing. In: Third Brainstorming Week on Membrane Computing. Fénix Editora, Sevilla (2005), 249–262.

[49] Păun, Gh., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.): The Oxford Handbook of Membrane Computing. Oxford University Press, Oxford, England (2010).

[50] Pérez-Jiménez, M.J., Romero-Jiménez, Á., Sancho-Caparrini, F.: A polynomial complexity class in P systems using membrane division. In: Csuhaj-Varjú, E., Kintala, C., Wotschke, D., Vaszil, G. (eds.) Proceeding of the 5th Workshop on Descriptional Complexity of Formal Systems. DCFS 2003 (2003), 284–294.

[51] Pérez-Jiménez, M.J., Romero-Campero, F.J.: Trading Polarization for Bistable Catalysts in P Systems with Active Membranes. In: Mauri, G., Păun, Gh., Pérez-Jiménez, M.J., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds.) Membrane Computing: 5th International Workshop, LNCS vol. 3365 (2005), 373–388.

[52] Pin, J.-E.: On two combinatorial problems arising from automata theory. Ann. Discrete Math. **17** (1983), 535–548.

[53] Sipser, M.: Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning, Boston, USA (2013).

[54] van der Walt, A.P.J.: Random context languages. *Inform. Process.* **71** (1972), 66–68.

[55] Woods, D., Murphy, N., Pérez-Jiménez, M.J., Riscos-Núñez, A.: Membrane Dissolution and Division in P. In: Calude, C.S., da Costa, J.F.G., Dershowitz, N., Freire, E., Rozenberg, G. (eds.) Unconventional Computation: 8th International Conference, LNCS vol. 5715 (2009), 262–276.

[56] Zandron, C., Ferretti, C., Mauri, G.: Solving NP-Complete Problems Using P Systems with Active Membranes. In: Unconventional Models of Computation, UMC'2K: Proceedings of the Second International Conference on Unconventional Models of Computation. Springer London, London (2001), 289–301.