Habilitációs előadás vázlata

Eldönthetetlen problémák

Gazdag Zsolt

A Számításelmélet kurzus 8-ik előadása.

Szakok: Programtervező informatikus Bsc A és B szakirány.

Szükséges előfeltételek: Bevezetés a matematikába 2.

Az előadás célja: Először olyan nyelvet keresünk, amit nem lehet Turing-géppel felismerni. Ezután megmutatjuk, hogy az eldönthető nyelvek osztálya valódi része a Turing-felismerhető nyelvek osztályának. Végül definiáljuk a visszavezetéseket, melyek segítségével további problémákról látjuk be, hogy nem eldönthetőek.

Az előadás vázlata

- Emlékeztető: RE jelöli a rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát (ami megegyezik a Turing-felismerhető nyelvek osztályával) és R jelöli a rekurzív (azaz eldönthető) nyelvek osztályát.
- Azért, hogy szemléltessük, hogy a nagyon egyszerű (kevés állapottal rendelkező) Turing-gépek is képesek bonyolult viselkedésre, ismertetjük a Szorgos Hód Turing-gépeket. Megnézzük a két- és három állapotú Szorgos Hódot, és az eddig ismert legjobb jelöltek komplexitását 4, 5 és 6 állapot esetén.
- Megmutatjuk, hogy a Turing-gépek elkódolhatók $\{0,1\}$ ábécé feletti szavakkal. Megadjuk a diagonális nyelv (L_d) és az univerzális nyelv (L_u) definícióját: $L_d = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$ és $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.
- A Cantor-féle diagonalizácós módszerrel megmutatjuk, hogy a diagonális nyelv nem Turing-felismerhető, azaz $L_d \notin$ RE.
- Megmutatjuk, hogy $L_u \in$ RE úgy, hogy vázolunk egy úgynevezett univerzális Turing-gépet, ami pontosan azokat az $\langle M, w\rangle$ Turing-gép–bemenet párosokat fogadja el, melyekre $w \in L(M)$.
- Megmutatjuk, hogy $L_u \notin$ R. Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Feltesszük, hogy $L_u \in$ R. Akkor legyen M egy olyan Turing-gép, ami L_u-t dönti el. M-ből megkonstruálunk egy M' Turing-gépet, ami L_d-t dönti el. Ez nyilvánvalóan ellentmondás, tehát $L_u \notin$ R.
- Definiáljuk a visszavezetéseket: egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv visszavezethető egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre (jele: $L_1 \leq L_2$), ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható függvény, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén, $u \in L_1 \Leftrightarrow f(u) \in L_2$. Tapasztalataink alapján itt fontos hangsúlyozni, hogy ekkor nem csak $u \in L_1 \Rightarrow f(u) \in L_2$ teljesül, hanem $u \notin L_1 \Rightarrow f(u) \notin L_2$ is.

- Megmutatjuk, hogy ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in \mathrm{R}$ (rendre $L_2 \in \mathrm{RE}$), akkor $L_1 \in \mathrm{R}$ (rendre $L_1 \in \mathrm{RE}$).
- Definiáljuk a Turing-gépek megállási problémáját: $L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M$ megáll w-n$\}$.
- Tétel: $L_h \in \mathrm{RE} - \mathrm{R}$, azaz L_h bonyolultsága megegyezik L_u bonyolultságával. A bizonyítás lépései:
  - $L_u \leq L_h$,
  - $L_h \leq L_u$.