Simon Péter

Bázisok, framek, waveletek

Simon Péter

# Bázisok, framek, waveletek

egyetemi tankönyv

Budapest, 2018

**Simon Péter**

# Bázisok, framek, waveletek

egyetemi tankönyv

Budapest, 2018

Ez a tankönyv az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával
(a támogatás száma: TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0003)
készült tanulmány felhasználásával íródott.

ISBN 978-615-00-3527-7

*Andreának*

# Tartalomjegyzék

# Előszó

Ebben a könyvben bázisokkal, framekkel és waveletekkel foglalkozunk. Rövid áttekintést adunk a legfontosabb fogalmakról, definíciókról és tételekről ezek vonatkozásában, úgymint: *szeparábilis terek, zárt rendszerek, bázisok, dualitási elv, a bázis-probléma, az együtthatók tere, bázisok ekvivalenciája, feltétlen bázisok, framek, $L^p$-beli bázisok, waveletek.* Számos esetben közöljük a szóban forgó állítás (egy lehetséges) bizonyítását is. Olyan frekventált speciális eseteket is érintünk, mint például a trigonometrikus- vagy a diadikus Fourier-analízis, a *biortogonális,* valamint az *ortogonális* (*Fourier-*) *sorok, a Haar-, Schauder-, Franklin-, Walsh-, Ciesielski-rendszer, waveletrendszerek, Gábor-framek, függvényterek.* Az *Appendix*-ben összefoglaljuk a funkcionálanalízis, a mérték- és integrálelmélet, a valós függvénytan, a függvényterek interpolációja, az approximáció-elmélet azon klasszikus eredményeit, amelyekre a tárgyalás során utalás történik. Az *Irodalomjegyzékben* azokat a forrásokat soroljuk fel, amelyekre a könyv megírásakor támaszkodtunk. A belső hivatkozásokat általában mellőzzük, de minden eredmény, ami említésre kerül, megtalálható a felsorolt művekben.

# 1. fejezet

# Szeparábilis terek

## 1.1. Szeparábilis metrikus terek

Bevezetésképpen emlékeztetünk a szeparábilitás fogalmára, és felidézünk néhány, a továbbiakban is fontos szerepet játszó példát.

Legyen ehhez adott az $(X, \rho)$ metrikus tér. Azt mondjuk, hogy ez a tér *szeparábilis*, ha van olyan $Y \subset X$ részhalmaz, amely legfeljebb megszámlálható és az $\overline{Y}$ lezárására

$$\overline{Y} = X$$

teljesül. (Röviden: az $Y$ *sűrű* az $X$-ben.)

Az $\overline{Y} = X$ feltétel nyilván ekvivalens azzal, hogy a

$$K_r(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\} \qquad (a \in X, r > 0)$$

*környezetekkel* bármely $r > 0$ mellett teljesül az, hogy

$$X = \bigcup_{y \in Y} K_r(y).$$

Más szóval tehát tetszőleges $x \in X$ elem és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $y \in Y$, amellyel

$$\rho(x,y) < \varepsilon.$$

Ha itt az $Y$ halmaz véges, akkor $\overline{Y} = Y$ miatt az $X$ is véges halmaz.

## 1.2. Példák szeparábilis terekre

$1^o$ Legyen $X := \mathbf{K}$ és

$$\rho(x,y) := |x-y| \qquad (x,y \in \mathbf{K}).^1$$

$2^o$ Tekintsük az $n$ pozitív egész szám mellett az $X := \mathbf{K}^n$ halmazt, valamint az

$$1 \le p \le +\infty$$

„kitevőt”, és az

$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$$

vektorok távolságát értelmezzük az alábbiak szerint:

$$\rho_p(x,y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_i - y_i| : i = 1, ..., n\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

$3^o$ $X := C[0,1]$ és

$$\rho(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} \qquad (f,g \in C[0,1]).$$

$4^o$ Az előbbi $1 \le p \le +\infty$ kitevővel legyen[2]

a) $X := \ell_p$, és ha

$$x = (x_n, n \in \mathbf{N}),\ y = (y_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_p,$$

akkor

$$\rho_p(x,y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^\infty |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbf{N}\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

ill.

---

[1] A továbbiakban $\mathbf{C}$ a komplex, $\mathbf{R}$ a valós-, $\mathbf{Q}$ a racionális, $\mathbf{Z}$ az egész, $\mathbf{N}$ a természetes számok halmazát jelöli. A $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ szimbólumok helyett esetenként (ezek együttes jelölésére) azt írjuk, hogy $\mathbf{K}$. Jól ismert, hogy a most tekintett „szokásos” metrika értelmében $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

[2] Egy $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktérrel adódó absztrakt $L^p(\mathcal{X})$ terek speciális eseteként kapjuk (a mérték alkalmas megválasztásával) az $\ell_p := \{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$ $(p < +\infty)$, valamint az $\ell_\infty := \{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sup_n |x_n| < +\infty\}$ sorozattereket, továbbá az $L^p(I)$ $(I \subset \mathbf{R}$ intervallum) Lebesgue-féle függvénytereket.

b) az $X := L^p[0,1]$ választással az $f, g \in L^p[0,1]$ függvényekre

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int_0^1 |f-g|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \text{vraisup}\,\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

(A későbbiekben röviden $\ell_p$, ill. $L^p$ térként fogjuk ezeket a példákat említeni.) Ha $p < +\infty$, akkor az $\ell_p$ és az $L^p$ szeparábilis.

## 1.3. Normált terek szeparábilitása

Mit jelent a szeparábilitás akkor, ha az $X$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ test felett és a $\rho$ metrikát egy, az $X$-en értelmezett $\|.\|$ norma indukálja? Legyen adott tehát az $(X, \|.\|)$ normált tér, ami a

$$\rho(x,y) := \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

metrikára nézve szeparábilis. Ha az $\mathcal{U} \subset X$ részhalmaz sűrű az $X$-ben, akkor nyilván az

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}] := \left\{ \sum_{y \in \mathcal{U}_0} \alpha_y y \in X : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U},\ \text{az } \mathcal{U}_0 \text{ véges}, \alpha_y \in \mathbf{K}\ \ (y \in \mathcal{U}_0) \right\}$$

halmaz – az $Y$ *lineáris burka* – is sűrű az $X$-ben.[3] Vezessük be a következő definíciót: azt fogjuk mondani, hogy az $Y \subset X$ részhalmaz ($X$-beli) *zárt rendszer*, ha

$$\overline{\mathcal{L}[Y]} = X.$$

Tehát minden szeparábilis normált térben van egy legfeljebb megszámlálható zárt rendszer. Könnyű belátni, hogy ez fordítva is igaz. Hiszen, ha az $Y$ egy legfeljebb megszámlálható zárt rendszer az $X$-ben, akkor az

$$\mathcal{L}_{rac}[Y] := \left\{ \sum_{y \in Y_0} \alpha_y y \in X : Y_0 \subset X,\ \text{az } Y_0 \text{ véges},\ \operatorname{Re}\alpha_y, \operatorname{Im}\alpha_y \in \mathbf{Q}\ \ (y \in Y_0) \right\}$$

halmaz megszámlálható és

$$\overline{\mathcal{L}_{rac}[Y]} = \overline{\mathcal{L}[Y]} = X.$$

Valóban, a „megszámlálható” kitétel nyilvánvaló, az

$$\overline{\mathcal{L}_{rac}[Y]} = X$$

[3] Ui. az $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}[\mathcal{U}]$ tartalmazás miatt ekkor $X = \overline{\mathcal{U}} \subset \overline{\mathcal{L}[\mathcal{U}]} \subset X$ és így $\overline{\mathcal{L}[\mathcal{U}]} = X$.

egyenlőséghez pedig legyen

$$x \in X,\, \varepsilon > 0$$

esetén valamilyen véges $Y_0 \subset Y$ halmazzal

$$z := \sum_{y \in Y_0} \alpha_y y \in \mathcal{L}[Y]$$

olyan, hogy

$$\|x - z\| < \varepsilon.$$

Ha a $\delta > 0$ szám tetszőleges, akkor válasszuk a „racionális" $\beta_y \in \mathbf{K}$ együtthatókat[4] úgy, hogy

$$|\alpha_y - \beta_y| < \delta \qquad (y \in Y_0),$$

és legyen

$$v_\delta := \sum_{y \in Y_0} \beta_y y.$$

Világos, hogy $v_\delta \in \mathcal{L}_{rac}[Y]$, továbbá

$$\|x - v_\delta\| \le \|x - z\| + \|z - v_\delta\| < \varepsilon + \sum_{y \in Y_0} |\alpha_y - \beta_y| \cdot \|y\| \le \varepsilon + \delta \cdot \sum_{y \in Y_0} \|y\|.$$

Alkalmas $\delta$-ra

$$\delta \cdot \sum_{y \in Y_0} \|y\| < \varepsilon,$$

amikor is $\|x - v_\delta\| < 2\varepsilon$.

## 1.4. Euklideszi terek szeparábilitása

Legyen most az $(X, \langle, \rangle)$ (nem véges dimenziós) euklideszi tér, ami az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in X)$$

normára nézve szeparábilis. Ha a

$$z = (z_n, n \in \mathbf{N})$$

[4] Tehát $\mathrm{Re}\,\beta_y,\, \mathrm{Im}\,\beta_y \in \mathbf{Q} \quad (y \in Y_0)$.

rendszer zárt és lineárisan független az $X$-ben, akkor a Schmidt-féle ortogonalizáció alapján feltehető, hogy minden $k, j \in \mathbf{N}$ indexre

$$\langle z_k, z_j \rangle = \delta_{kj} := \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ \\ 1 & (k = j). \end{cases}$$

(Röviden: a $z$ egy *ortonormált rendszer* (ONR).) Ekkor az ismert Bessel-azonosság (ld. 10.3.) alapján minden $x \in X$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén a következőt írhatjuk:

$$\delta_n(x) := \min \left\{ \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z_k \right\| : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \right\} =$$

$$= \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle x, z_k \rangle z_k \right\| =: \|x - S_n(x)\|.$$

A $z$ rendszer zártsága miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$ és

$$\sum_{k=0}^{M} \alpha_k z_k \in \mathcal{L}[\{z_k \in X : k \in \mathbf{N}\}]$$

lineáris kombináció, hogy

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{M} \alpha_k z_k \right\| < \varepsilon.$$

Mivel akármelyik $x \in \mathbf{X}$ elemre a $(\delta_n(x))$ sorozat nyilván monoton fogyó:

$$\delta_{n+1}(x) \leq \delta_n(x) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért bármely

$$M \leq n \in \mathbf{N}$$

esetén

$$\|x - S_n(x)\| = \delta_n(x) \leq \delta_M(x) \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{M} \alpha_k z_k \right\| < \varepsilon.$$

Tehát

$$\|x - S_n(x)\| < \varepsilon \qquad (M \leq n \in \mathbf{N}),$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$S_n(x) \to x \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, z_k \rangle z_k.$$

Így többek között minden $\varepsilon > 0$ mellett az $x$-et az $\varepsilon$-nál jobban approximáló, az

$$\mathcal{L}[z] := \mathcal{L}[\{z_k \in X : k \in \mathbf{N}\}]$$

altérbeli elem választható egy – csak az $x$-től függő – végtelen sor alkalmas részletösszegeként. A továbbiakban azokat a – nem feltétlenül euklideszi-tereket – fogjuk vizsgálni, amelyek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

## 1.5. Megjegyzések

i) Külön is felhívjuk a figyelmet arra a nyilvánvaló tényre, hogy ha ugyanazon az $X$ halmazon más és más metrikát adunk meg, akkor az így kapott metrikus terek között lehet szeparábilis is meg nem szeparábilis is (azaz a szeparábilitás „metrikától függő" tulajdonság). Legyen pl. az $X$ egy nem üres halmaz és

$$\rho(x, y) := 1 \qquad (x, y \in X, x \neq y).$$

Az így kapott $(X, \rho)$ (*diszkrét*) metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha az $X$ véges vagy megszámlálható.

ii) Könnyű megmutatni, hogy az $\ell_\infty$ nem szeparábilis. Tekintsük ui. azt az $\ell \subset \ell_\infty$ halmazt, amelyre

$$\ell := \{x \in \ell_\infty : x_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbf{N}\}.$$

Ekkor bármely $y \in \ell_\infty$ esetén az

$$\ell \cap K_{1/2}(y)$$

metszethalmaz legfeljebb 1-elemű[5]. Így minden olyan $Y \subset \ell_\infty$ halmazra, amelyik sűrű az $\ell_\infty$-ben (és ezért

$$\ell_\infty = \bigcup_{y \in Y} K_{1/2}(y))$$

igaz a következő: az $Y$ számossága legalább annyi, mint az $\ell$ számossága. Ez utóbbi viszont kontinuum számosságú[6].

[5] Világos, hogy az $x, y \in \ell$, $x \neq y$ sorozatokra $\rho_\infty(x, y) = 1$.

[6] Az $(\ell \setminus \{y \in \ell : \lim y = 1\}) \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-n-1} \in [0, 1] \setminus \{k2^{-m} : m \in \mathbf{N}, k = 1, ..., 2^m\} =: A$ megfeleltetés ui. bijekció és az $A$ halmaz kontinuum számosságú.

iii) Általában egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret szeparábilisnak nevezünk, ha van olyan legfeljebb megszámlálható $Y \subset X$ halmaz, amely mindenütt sűrű az $X$-ben: $\overline{Y} = X$. A $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ halmazrendszer *topologikus bázis,* ha bármely $A \in \mathcal{T}$ („nyílt") halmaz előállítható $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként.[7] Válasszunk ki ekkor minden $\emptyset \neq A \in \mathcal{B}$ halmazból egy elemet: $x_A \in A$. Ekkor az

$$Y := \{x_A \in X : A \in \mathcal{B}\}$$

halmaz mindenütt sűrű, azaz $\overline{Y} = X$. Tehát ha van a térnek legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa, akkor a tér szeparábilis. Ugyanakkor megmutatható, hogy ez a kijelentés nem megfordítható. Legyen ui. $X := \mathbf{R}$, a $\mathcal{T}$ topológiát pedig definiáljuk a következőképpen: az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz úgymond *nyílt,* ha $A = \emptyset$, vagy minden $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$, hogy

$$[a, a + r) \subset A.$$

Világos, hogy a $\mathcal{T}$ halmazrendszer topológia és

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R},$$

azaz az $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ tér szeparábilis. Ha viszont a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ részhalmazrendszer topologikus bázis, akkor tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ esetén $[a, a + 1) \in \mathcal{T}$, azaz alkalmas $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ halmazzal

$$[a, a + 1) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B.$$

Így van olyan $B_a \in \mathcal{B}_0$, amellyel $a \in B_a$. Mivel $B_a \subset [a, a + 1)$, ezért egyúttal

$$a = \min B_a.$$

Világos, hogy

$$a, c \in \mathbf{R},\ a \neq c \Longrightarrow B_a \neq B_c.$$

Tehát a $\mathcal{B}$-ben „legalább" annyi halmaznak kell lenni, mint ahány valós szám van, azaz a $\mathcal{B}$ számossága legalább kontinuum.

iv) Az $(X, \rho)$ metrikus tér viszont akkor és csak akkor szeparábilis, ha van a térben legfeljebb megszámlálható topologikus bázis. Ha ui. az $Y \subset X$ legfeljebb megszámlálható, $\overline{Y} = X$ és

$$\mathcal{B} := \{K_r(y) : y \in Y\ ,\ 0 < r \in \mathbf{Q}\} \cup \{\emptyset\},$$

[7] Nyilvánvaló, hogy pl. a $\mathcal{T}$ topológia egyúttal topologikus bázis is.

akkor a $\mathcal{B}$ nyilván legfeljebb megszámlálható és (könnyen meggondolhatóan) topologikus bázis.

v) Érdemes kiemelni, hogy mit is jelent egy $(X, \rho)$ metrikus tér szeparábilitása: van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ (következésképpen legfeljebb megszámlálható) „indexhalmaz” és az $X$-nek olyan

$$Y := \{y_n \in X : n \in \mathcal{N}\}$$

részhalmaza, hogy bármely $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $n \in \mathcal{N}$ indexszel

$$\rho(x, y_n) < \varepsilon.$$

vi) Ha az $(X, \|.\|)$ normált térben van véges $Y$ zárt rendszer, akkor

$$\overline{\mathcal{L}[Y]} = \mathcal{L}[Y] = X$$

miatt az $X$ véges dimenziós. Ezért a későbbiekben általában feltesszük, hogy az $X$ nem véges dimenziós.

vii) Legyen

$$Y := \{y_n \in X : n \in \mathbf{N}\}$$

zárt rendszer az $X$-ben. Ekkor bármely $x \in X$ elem és $\varepsilon > 0$ szám mellett van olyan $\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbf{N})$ számsorozat, hogy az

$$\{n \in \mathbf{N} : \alpha_n \neq 0\}$$

halmaz véges és

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n \right\| < \varepsilon.$$

Érdemes kihangsúlyozni, hogy adott $x \in X$ mellett az előbbi $\alpha$ sorozat minden tagja függ a $\varepsilon$-tól.

viii) Tehát (folytatva az előbbi megjegyzést) $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas

$$\sum_k \alpha_k y_k \in \mathcal{L}[Y]$$

lineáris kombinációval

$$\left\| x - \sum_k \alpha_k y_k \right\| < \varepsilon.$$

Ha $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ és

$$\sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j \in \mathcal{L}[Y]$$

olyan, hogy

$$\Big\| x - \sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j \Big\| < \tilde{\varepsilon},$$

akkor a

$$\sum_k \alpha_k y_k, \ \sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j$$

kombinációknak általában „semmi közük egymáshoz”.

ix) Ugyanakkor tegyük fel, hogy $x \in X$ és

$$e_n \in X \qquad (n \in \mathbf{N})$$

olyan sorozat, hogy alkalmas

$$\alpha_k \in \mathbf{K} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel az

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \in \mathcal{L}[\{e_k \in X : k \in \mathbf{N}\}]$$

lineáris kombinációra (részletösszegre)

$$\|x - S_n\| < \varepsilon.$$

Mivel a feltételezés szerint

$$S_n \to x \qquad (n \to \infty),$$

ezért tetszőleges $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ számot megadva létezik olyan $k \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\|x - S_{n+k}\| < \tilde{\varepsilon}.$$

A közelítés kívánt „pontosságát” javítva, azaz az $\varepsilon$-t az $\tilde{\varepsilon}$-ra cserélve az

$$S_{n+k} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+k} \alpha_j e_j$$

közelítés meghatározásakor a „régi” adatokat (tehát az $\alpha_0, ..., \alpha_n$ együtthatókat) fel tudtuk használni.

# 2. fejezet

# Bázisok

## 2.1. A bázis fogalma

Számos gyakorlati probléma matematikai modellezésekor (pl. fizikai jelenségek leírásakor) használunk vonatkoztatási rendszereket. A koordinátarendszer használata nagyban leegyszerűsíti a modell numerikus kiértékelését, és magát a problémát is jobban áttekinthetővé teszi. A legegyszerűbbek a véges sok paraméterrel leírható folyamatok, amikor tehát a matematikai modell alapja egy véges dimenziós tér. Ilyenkor általában eléggé kézenfekvő a vonatkoztatási rendszer megválasztása. Más a helyzet a végtelen sok paraméterrel jellemezhető folyamatok leírását illetően. Ekkor a megfelelő vonatkoztatási rendszer (bázis) megválasztása több problémát vethet fel, sőt, előfordulhat, hogy a „szokásos” értelemben vett koordinátarendszer nem is adható meg.

Legyen (a továbbiakban is) az $(X, \|.\|)$ Banach-tér,

$$z = (z_k, k \in \mathbf{N})$$

pedig az $X$-beli elemeknek egy sorozata („rendszere”). Ekkor a $z$ rendszert $X$-beli (Schauder-) *bázisnak* nevezzük, ha minden $x \in X$ esetén egyértelműen megadható olyan $\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbf{N})$ számsorozat, hogy

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n.$$

Világos, hogy minden bázis egyúttal egy lineárisan független elemrendszer. Ha a térben van bázis, akkor a tér nyilván szeparábilis is. Sokáig nyitott volt a Banach által felvetett kérdés („bázis-probléma”): van-e minden szeparábilis Banach-térben bázis?

A negatív választ *P. Enflo* adta meg 1972-73-ban: van olyan szeparábilis Banach-tér, amelyben nincs bázis. (A kérdésre később még röviden visszatérünk.)

Tekintsük az alábbi példákat.

$1^o$ Az előzőek szerint bármely szeparábilis Hilbert-térben van bázis.

$2^o$ Az

$$\ell_p, L^p \qquad (1 \leq p < +\infty)$$

terekben (amikor tehát a norma a nullelemtől való távolságot jelenti) van bázis. Pl. az $\ell_p$-ben a

$$(\delta_{nk}, n \in \mathbf{N}) \qquad (k \in \mathbf{N})$$ [1]

sorozatok nyilván bázist alkotnak.

$3^o$ Az

$$X := C[0,1],\ \|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \qquad (f \in C[0,1])$$

térben (a későbbiekben röviden $C[0,1]$-et fogunk írni) van bázis. Tegyük fel ui., hogy az

$$A := \{t_n \in [0,1] : n \in \mathbf{N}\}$$

halmazra a következők teljesülnek:

- az $A$ sűrű a $[0,1]$ intervallumban,
- $t_0 = 0$, $t_1 = 1$,
- $t_k \neq t_j \ \ (k \neq j \in \mathbf{N})$.

Minden ilyen $A$ halmaz esetén legyen a

$$\varphi_n \in C[0,1] \qquad (n \in \mathbf{N})$$

„töröttvonal" (az $x_0, ..., x_n$ pontokra vonatkozóan) a következő függvény:

$$\varphi_0(x) := 1,\ \varphi_1(x) := x \qquad (x \in [0,1]),$$

továbbá $n \geq 2$ esetén

$$\varphi_n(x) := 0 \qquad (0 \leq x \leq t_{n1}, \text{ vagy } t_{n2} \leq x \leq 1))$$

[1] Itt és később is a $\delta_{nk}$ a „szokásos" Kronecker-szimbólum: $\delta_{nn} := 1$ és $\delta_{nk} := 0 \ \ (k \neq n)$.

és
$$\varphi_n(t_n) := 1.$$
(Itt $t_{n1}$ ($t_{n2}$) jelöli a $t_0, ..., t_{n-1}$ pontok közül a legnagyobb (legkisebb), a $t_n$-nél kisebb (nagyobb) pontot.)

Belátható, hogy az $A$ halmaz által így generált $(\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ *Schauder-szerű rendszer* bázis a $C[0,1]$-ben, azaz bármely $f \in C[0,1]$ függvényhez egyértelmű-en van olyan, az
$$\alpha_n \in \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$
számokból álló sorozat, hogy (az egyenletes konvergencia értelmében)
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n.$$
Az is igaz, hogy az előbbi sor
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$
ún. $n$-edik részletösszege az $f$ függvényt a $t_0, ..., t_n$ pontokban interpoláló (lineáris) *spline*.

Mindehhez azt vegyük észre, hogy ha $f \in C[a,b]$ és az
$$\alpha_k \in \mathbf{R} \qquad (k \in \mathbf{N})$$
együtthatókkal
$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k,$$
azaz az
$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$
részletösszegek egyenletesen konvergálnak az $f$-hez, akkor
$$(*) \qquad \alpha_0 = f(0),\ \alpha_1 = f(1),\ \alpha_n = f(t_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_k(t_n) \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}).$$

A most már tetszőleges $f \in C[0,1]$ függvényre az előbbi $(*)$ együtthatókkal definiált fenti $S_n$ $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegek a

$$t_0, ..., t_n$$

pontokra nézve lineáris spline-ok. A $(*)$ rekurzióból rögtön következik, hogy az $S_n$ „interpolál":

$$S_n(x) = f(x) \qquad (x \in \{t_0, ..., t_n\},\, n \in \mathbf{N}).$$

Legyen az $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a $\delta > 0$ pedig az $f$ függvény egyenletes folytonossága szerint létező olyan szám, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \qquad (x, y \in [a,b], |x - y| < \delta).$$

Az alappontok sűrűn vannak a $[0,1]$-ben, ezért megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindex", amellyel minden $N < n \in \mathbf{N}$ esetén a $[0,1]$ intervallumnak a

$$t_0, ..., t_n$$

pontok által meghatározott

$$\tau_n := \{t_0, ..., t_n\}$$

felosztása már a $\delta$-nál finomabb: ha $u, v \in \tau_n$ szomszédosak ebben a felosztásban, akkor

$$|u - v| < \delta.$$

Legyen $x \in [0,1]$, az

$$u, v \in \tau_n \qquad (N < n \in \mathbf{N})$$

pedig olyan szomszédos alappontok a $\tau_n$-ben, hogy

$$u \le x \le v.$$

Ekkor

$$|f(x) - S_n(x)| \le |f(x) - f(u)| + |f(u) - S_n(x)| =$$
$$|f(x) - f(u)| + |S_n(u) - S_n(x)| \le$$
$$|f(x) - f(u)| + |S_n(u) - S_n(v)| = |f(x) - f(u)| + |f(u) - f(v)| < \varepsilon,$$

így

$$\|f - S_n\|_\infty < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$\|f - S_n\|_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

vagy más szóval (az egyenletes konvergencia értelmében)

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n.$$

## 2.2. A bázisok jellemzése, dualitási elv

Legyen a

$$z = (z_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszer bázis az $(X, \|.\|)$ normált térben. Ekkor bármely $x \in X$ esetén egyértelműen megadható az $x$-et előállító

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n$$

végtelen sor. Jelöljük itt $z_n^*(x)$-szel az előállításban szereplő $\alpha_n$ együtthatót, valamint $S_n(x)$-szel a szóban forgó sor $n$-edik részletösszegét:

$$z_n^*(x) := \alpha_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így definiált

$$z_n^* : X \to \mathbf{K}$$

*koordináta-funkcionálok* mindegyike nyilván lineáris. Ugyanez áll az

$$S_n : X \to X$$

*részletösszeg-operátorokra* is. Később (ld. 2.4.) megmutatjuk, hogy igaz az alábbi két (ekvivalens) állítás: bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén $z_n^* \in X^*$ és $S_n \in L(X)$.

Emlékeztetünk arra, hogy $X^*$, ill. $L(X)$ jelöli az $X \to \mathbf{K}$ korlátos lineáris funkcionálok, ill. az $X \to X$ korlátos lineáris operátorok (Banach-) terét a „szokásos” funkcionál-, ill. operátornormával ellátva. Hacsak nem okoz félreértést, ez utóbbiakat is $\|.\|$-val fogjuk jelölni: $\varphi \in X^*$, ill. $T \in L(X)$ esetén[2]

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

ill.

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Mivel bármely $x \in X$ elemre

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

(azaz az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat *erősen konvergens* az $X$-en), ezért (a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) miatt)

$$C := \sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$$

és

$$\|z_n^*\| \leq \frac{2C}{\|z_n\|} \qquad (n \in \mathbf{N})^3.$$

Legyen

$$z^* := (z_n^*, n \in \mathbf{N}).$$

A $z$ rendszer bázis, ezért

$$z_n^*(z_k) = \delta_{nk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}),$$

más szóval a $z$ és a $z^*$ rendszer „együtt” egyfajta ortogonalitási relációnak tesz eleget. Ennek fényében vezessük be a következő definíciót: azt mondjuk, hogy az

$$x_n \in X,\ \varphi_n \in X^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszerek *biortogonálisak*, ha

$$\varphi_n(x_k) = \delta_{nk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum(\varphi_n(x)x_n) \qquad (x \in X)$$

[2] A lineáris operátorok helyettesítési értékeire (ahol ez nem lenne félrevezető, vagy tipográfiailag egyszerűsíti a jelölést) a „szabványos” $T(x)$ szimbólum helyett egyszerűen $Tx$-et írunk.

[3] Ui. $\|z_n^*(x)z_n\| = |z_n^*(x)| \cdot \|z_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq \|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\| \leq 2C$ $(n = 1, 2, ...)$, ill. $\|z_0^*(x)z_0\| = |z_0^*(x)| \cdot \|z_0\| = \|S_0(x)\| \leq C$ $(x \in X, \|x\| \leq 1)$.

végtelen sort[4] az $x$ elem *biortogonális sorának* nevezzük.

Amennyiben tehát a $z$ bázis az $X$-ben, úgy a $z, z^*$ rendszerek biortogonálisak.

Ha az $x = (x_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer zárt az $X$-ben, akkor legfeljebb egy, vele biortogonális $X^*$-beli rendszer létezik. Legyen ui. a

$$\varphi_n \in X^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és a

$$\psi_n \in X^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszer egyaránt ilyen, amikor is bármely $n, k \in \mathbf{N}$ indexre

$$(\varphi_n - \psi_n)(x_k) = 0.$$

Ekkor persze az $x_j$-k által kifeszített $\mathcal{L}[x]$ altér tetszőleges $t \in \mathcal{L}[x]$ elemére is

$$(\varphi_n - \psi_n)(t) = 0.$$

Mivel $\overline{\mathcal{L}[x]} = X$ és

$$\varphi_n - \psi_n \in X^*,$$

így a $\varphi_n - \psi_n$ különbség folytonos, ezért egyúttal

$$(\varphi_n - \psi_n)(t) = 0 \qquad (t \in X)$$

is igaz. Következésképpen $\varphi_n = \psi_n$.

Tegyük fel, hogy az $(X, \|.\|)$ normált tér esetén az

$$x_n \in X,\, \varphi_n \in X^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszerek biortogonálisak és legyen

$$X_n := \overline{\mathcal{L}[\{x_k \in X :\ n \neq k \in \mathbf{N}\}]} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\varphi_n(x) = 0 \qquad (x \in X_n)$$

és $\varphi_n(x_n) = 1$, ezért $x_n \notin X_n$. Ezzel kapcsolatos az alábbi értelmezés: azt mondjuk, hogy az

$$y_n \in X \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[4]Tehát a $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) x_k \quad (n \in \mathbf{N})$ összegekből álló sorozatot.

elemekből álló rendszer *minimális*, ha bármely $n \in \mathbf{N}$ természetes számra

$$y_n \notin \overline{\mathcal{L}[\{y_k \in X : n \neq k \in \mathbf{N}\}]}.$$

Az előbbiek szerint tehát, ha egy $X$-beli rendszernek van biortogonális társa, akkor a szóban forgó rendszer minimális. Könnyű megmutatni, hogy ez fordítva is igaz. Legyen ui. az

$$x_n \in X \qquad (n \in \mathbf{N})$$

elemek alkotta rendszer minimális, akkor a Hahn–Banach-tétel (ld. 10.2.) egyik következményeként tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ választással van olyan $\varphi_n \in X^*$ funkcionál, amelyre $\varphi_n(x_n) = 1$ és a $\varphi_n$ a zárt

$$\overline{\mathcal{L}[\{x_k \in X : \mathbf{N} \ni k \neq n\}]}$$

altéren nulla.

Mutassuk meg, hogy minden minimális rendszer egyúttal független is. Legyen ui. adott az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ minimális rendszer az $X$-ben és

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k \in \mathcal{L}[x].$$

Ha itt valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett $\beta_n \neq 0$, akkor nyilván

$$x_n \in \mathcal{L}[\{x_k \in X : \mathbf{N} \ni k \neq n\}],$$

ami viszont ellentmond az $x$ minimalitásának. Könnyű ugyanakkor meggondolni, hogy nem minden lineárisan független rendszer minimális. Hiszen, ha az $Y$ egy olyan lineárisan független, zárt rendszer az $X$-ben, hogy $X \neq \mathcal{L}[Y]$, akkor bármely

$$x \in X \setminus \mathcal{L}[Y]$$

elemre az $\{x\} \cup Y$ rendszer lineárisan független, de nyilván nem minimális. Ui.

$$x \in \overline{\mathcal{L}[Y]} \; (= X).$$

A minimalitás tehát a lineáris függetlenség, mint „algebrai" tulajdonság egyfajta „topologikus" megszorítása.

Foglaljuk most össze azokat az ismérveket, amelyeknek egy $X$-beli elemekből álló $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis eleget tesz:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{i) a } z \text{ zárt rendszer;} \\ \\ \text{ii) a } z \text{ minimális rendszer;} \\ \\ \text{iii) } \sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty, \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

ahol

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N})$$

és a $z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a $z$-vel biortogonális rendszer.

Megmutatható, hogy a most felsorolt (szükséges) feltételek elégségesek is ahhoz, hogy a $z$ rendszer bázis legyen. Más szóval igaz az alábbi *alaptétel*:

**2.2.1. Tétel.** *Az $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer akkor és csak akkor bázis az $X$-ben, ha teljesülnek a* (2.2.1) *feltételek.*

Valóban, ha a (2.2.1) feltételrendszer igaz, akkor bármely $k \in \mathbf{N}$ esetén

$$S_n(z_k) = z_k \qquad (k \leq n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\lim_{n \to \infty} S_n(z_k) = z_k.$$

Tehát az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat a zárt $z$ rendszer tagjain konvergens. Következésképpen a (2.2.1) iii) feltétel miatt alkalmazható a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.), miszerint az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat erősen konvergál az

$$X \ni x \mapsto x$$

(identikus) leképezéshez.

Alkalmazzuk az előbbi 2.2.1. Tételt az $X$ helyett az $X^*$-ra, a $z$ helyett a $z^*$-ra. Jelöljük ehhez $\mathcal{U}$-val a $z^*$ rendszer $X^*$-beli lezárását. Ekkor az $\mathcal{U}$ egy zárt altér az $X^*$-ban, a $z^*$ pedig nyilván zárt rendszer az $\mathcal{U}$-ban. Adott $n \in \mathbf{N}$ esetén legyen továbbá $z_n^{**} \in X^{**}$ az a funkcionál, amelyre

$$z_n^{**}(\varphi) := \varphi(z_n) \qquad (\varphi \in X^*).$$

A Hahn–Banach-tétel (ld. 10.2.) következményeit figyelembe véve

$$\|z_n^{**}\| = \|z_n\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy (az $X$ tér $X^{**}$-ba való

$$\Phi_x(\varphi) := \overline{\varphi(x)} \qquad (x \in X,\, \varphi \in X^*)$$

kanonikus beágyazására nézve) a $z$ azonosítható a

$$(z_n^{**}, n \in \mathbf{N})$$

rendszerrel. Ilyen értelemben is tehát az $X^*$-beli $z^*$ rendszernek a $z$ a biortogonális társa. A gondolatmenetet folytatva belátható, hogy a most vizsgált esetben teljesülnek a (2.2.1) feltételek. Sőt, $S_n^*$-gal $(n \in \mathbf{N})$ jelölve (az $\mathcal{U}$-beli) $z^*$ rendszer szerint vett $n$-edik részletösszeg-operátort, a következő tételt kapjuk (*dualitási elv*):

**2.2.2. Tétel.** *A $z^*$ rendszer bázis az $\mathcal{U}$-ban és*

$$\|S_n^*\| = \|S_n\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 2.2.1. Tételben szereplő (2.2.1) iii) feltétel felhasznál egy, a rendszeren „kívüli" eszközt is, ti. a $z^*$ (a $z$-vel) biortogonális rendszert. Hogyan lehet kizárólag a $z$ rendszer segítségével eldönteni azt, hogy az bázis-e vagy sem? Ezzel kapcsolatos a

**2.2.3. Tétel.** *Legyen adott egy $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer az $(X, \|.\|)$ Banach-térben. Tegyük fel, hogy $z_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor a $z$ pontosan abban az esetben bázis az $\overline{\mathcal{L}[z]}$ altérban, ha van olyan $B > 0$ konstans, hogy*

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} \beta_k z_k\Big\| \le B\cdot \|x\| \qquad \Big(x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z],\, n \in \mathbf{N}\Big). \tag{2.2.2}$$

Ugyanis egyrészt világos, hogy minden bázis rendelkezik a (2.2.2) tulajdonsággal. Másrészt, ha a (2.2.2) feltétel teljesül, akkor bármely $m, n \in \mathbf{N}$ és a (2.2.2)-ben szereplő $x$ elem esetén

$$\Big\|\sum_{k=m}^{n} \beta_k z_k\Big\| \le 2B\cdot \|x\|,$$

ezért a $z$ lineárisan független rendszer[5]. A

$$z_n^*(x) := \beta_n \qquad \Big(x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z],\, n \in \mathbf{N}\Big)$$

egyenlőséggel definiált

$$z_n^* : \mathcal{L}[z] \to \mathbf{K}$$

lineáris funkcionálok korlátosak:

$$|z_n^*(x)| = |\beta_n| = \frac{\|\beta_n z_n\|}{\|z_n\|} \le \frac{2B\cdot \|x\|}{\|z_n\|} \qquad \Big(n \in \mathbf{N}, x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z]\Big).$$

A Hahn–Banach-tétel (ld. 10.2.) alapján a $z_n^*$ $(n \in \mathbf{N})$ funkcionál (a normája megtartásával) kiterjeszthető az $\overline{\mathcal{L}[z]}$-ra (a kiterjesztést is $z_n^*$-gal fogjuk jelölni). Az így értelmezett

$$z^* := (z_n^*, n \in \mathbf{N})$$

rendszer és a $z$ nyilván biortogonálisak. A (2.2.2) feltétel miatt az

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k \quad (x \in \mathcal{L}[z], n \in \mathbf{N})$$

operátorok az $\mathcal{L}[z]$-n – és így az $\overline{\mathcal{L}[z]}$-n is – egyenletesen korlátosak. Mivel bármely $x \in \mathcal{L}[z]$ elemre

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x,$$

ezért a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) alapján ugyanez igaz $x \in \overline{\mathcal{L}[z]}$ mellett is.

A (2.2.2) tulajdonságból kiindulva vezessük be a következő fogalmat. Valamilyen $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ lineárisan független rendszer és

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z]$$

esetén legyen

$$\varrho(x) := \sup\Big\{\Big\|\sum_{k=0}^{n} \beta_k z_k\Big\| : n \in \mathbf{N}\Big\}.$$

[5]Ti. $m = n$ esetén $|\beta_n|\cdot \|z_n\| \le 2B\cdot \|x\|$, ha tehát $x = 0$, akkor $\beta_n = 0$.

A

$$B_z := \sup\{\varrho(x) : \ x \in \mathcal{L}[z], \|x\| \le 1\}$$

számot (vagy a $+\infty$-t) a $z$ rendszer *Banach-konstansának* nevezzük. A 2.2.3. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy amennyiben a $z$ zárt rendszer az $X$-ben, akkor az alábbi ekvivalencia teljesül:

$$\text{a } z \text{ bázis az } X\text{-ben} \iff B_z < +\infty.$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{L}[z]$ helyen nyilván

$$\varrho(x) \ge \|x\|,$$

ezért $B_z \ge 1$. Ha pl. az $(X, \langle,\rangle)$ Hilbert-térről van szó és a $z$ ONR az $X$-ben, akkor

$$\varrho(x) = \|x\| \qquad (x \in \mathcal{L}[z])^6,$$

más szóval $B_z = 1$.

## 2.3. Bázis-probléma (CAP)

A 2.2.1. Tétel egy adott rendszerről dönti el, hogy az bázis-e a térben vagy sem. Hogyan lehet magáról az $(X, \|.\|)$ Banach-térről eldönteni, hogy van-e benne bázis? Ennek egy szükséges feltételét fogalmazzuk meg az alábbiakban.

Vezessük be ehhez a következő jelölést:

$$K(X) := \{A \in L(X) : \ A \text{ kompakt}\}$$

(az $L(X)$-beli kompakt operátorok[7] halmaza). Tetszőlegesen választott

$$\emptyset \ne Y \subset X, \, Y \ne \{0\}$$

korlátos részhalmaz egy félnormát indukál az $L(X)$-ben az alábbiak szerint:

$$\|A\|_Y := \sup\{\|A(x)\| : x \in Y\} \qquad (A \in L(X)).^8$$

[6]Ekkor ui. (a fenti jelölésekkel) $\varrho(x) = \sup\{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2} : n \in \mathbf{N}\} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2} = \|x\|$.

[7]Emlékeztetünk rá, hogy egy $A \in L(X)$ operátort akkor nevezünk *kompaktnak,* ha bármelyik $X$-beli korlátos $Y$ részhalmaznak az $A$ által létesített $A[Y]$ képe (az $X$-ben) relatív kompakt, azaz az $\overline{A[Y]}$ lezárás kompakt. Ismeretes, hogy a $K(X)$ halmaz (a kompozíció képzésre nézve) kétoldali ideál az $L(X)$ algebrában. Ha pl. az $A$ képe $(A[X])$ véges dimenziós, akkor $A \in K(X)$.

[8]Mivel $\|A(x)\| \le \|A\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \sup\{\|y\| : y \in Y\} < +\infty$ $(x \in Y)$, ezért $\|A_Y\| < +\infty$.

Ha a $z$ bázis az $X$-ben és az $\emptyset \neq Y \subset X$ halmaz kompakt, akkor könnyen belátható, hogy az $Y$ halmazon az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat (ld. 2.2.1. Tétel) egyenletesen konvergens. Sőt, bármely erősen (azaz pontonként) konvergens

$$A_n \in L(X) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

operátorsorozat esetén igaz, hogy tetszőleges kompakt $\emptyset \neq Y \subset X$ halmazon az $(A_n)$ sorozat (pontonként) egyenletesen konvergens. Ti. legyen

$$A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x) \qquad (x \in X),$$

ekkor a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) miatt

$$\Delta_n := A_n - A \in L(X) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

továbbá

$$\sigma := \sup_n \|\Delta_n\| < +\infty.$$

Az

$$X \ni x \mapsto \|\Delta_n(x)\|$$

operátor folytonossága és az $Y$ halmaz kompaktsága alapján van olyan $x_n \in Y$, hogy

$$\|\Delta_n\|_Y = \|\Delta_n(x_n)\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A szóban forgó állításunk azt jelenti, hogy

$$\|\Delta_n\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha ez nem lenne igaz, akkor egy alkalmas

$$n_k \in \mathbf{N} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

indexsorozattal és egy $C > 0$ konstanssal

$$\|\Delta_{n_k}\|_Y = \|\Delta_{n_k}(x_{n_k})\| \geq C \qquad (k \in \mathbf{N})$$

teljesülne. Az $Y$ halmaz kompakt lévén feltehető, hogy az $(x_{n_k})$ sorozat konvergens és

$$x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in Y.$$

Az $(A_n)$ sorozatról mondottak szerint

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_{n_k}(x) = 0.$$

Ugyanakkor

$$\|\Delta_{n_k}(x)\| \geq \|\Delta_{n_k}(x_{n_k})\| - \|\Delta_{n_k}(x - x_{n_k})\| \geq$$
$$C - \|\Delta_{n_k}\| \cdot \|x - x_{n_k}\| \geq C - \sigma \cdot \|x - x_{n_k}\| \to C \qquad (k \to \infty).$$

Következésképpen

$$\liminf_{k\to\infty} \|\Delta_{n_k}(x)\| \geq C > 0,$$

ami ellentmond a feltételezésünknek.

Mivel bármely $n \in \mathbf{N}$ indexre[9] $S_n \in K(X)$, ezért minden $A \in L(X)$ operátorra teljesül az, hogy

$$A \circ S_n \in K(X).$$

Az előbb mondottakra (is) hivatkozva bármely $\varepsilon > 0$ szám és

$$\emptyset \neq Y \subset X,\, Y \neq \{0\}$$

kompakt halmaz mellett van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel[10]

$$\|S_n - I\|_Y = \sup\{\|S_n(x) - x\| : x \in Y\} \leq \varepsilon.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\|A \circ S_n - A\|_Y = \sup\{\|A(S_n(x)) - A(x)\| : x \in Y\} =$$

$$\sup\{\|A(S_n(x) - x)\| : x \in Y\} \leq \|A\| \cdot \|S_n - I\|_Y \leq \|A\| \cdot \varepsilon.$$

Ezzel azt láttuk be, hogy tetszőlegesen adott $\{0\} \neq Y \subset X$ (nem üres) kompakt részhalmaz, valamint akármelyik $A \in L(X)$ operátor és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $B \in K(X)$, hogy

$$\|B - A\|_Y < \varepsilon.$$

Tehát a $\|.\|_Y$ félnormára nézve a $K(X)$ halmaz sűrű az $L(X)$-ben. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy teljesül a *kompakt approximációs tulajdonság* (compact approximation property – CAP). Következésképpen, ha egy Banach-tér nem rendelkezik a CAP-pal, akkor nincs benne bázis.

[9] Az $S_n[X]$ képhalmaz nyilván véges dimenziós altér.

[10] Az $I(x) := x$ $(x \in X)$ jelölést használva.

Az utóbbi tulajdonságú terek konstrukciójához (azaz a bázisprobléma „megoldásához") tekintsünk egy

$$\Phi : L(X) \to \mathbf{K}$$

lineáris funkcionált. Ha az

$$\emptyset \neq Y \subset X,\, Y \neq \{0\}$$

korlátos halmaz, akkor a $\Phi$ funkcionált *$Y$-korlátosnak mondjuk,* ha egy alkalmas, legfeljebb az $Y$-tól függő $C_Y > 0$ konstanssal

$$|\Phi(A)| \leq C_Y \cdot \|A\|_Y \qquad (A \in L(X)).$$

Legyen ezek után $A \in L(X)$ és $\varepsilon > 0$, a $B \in K(X)$ pedig olyan, hogy

$$\|A - B\|_Y < \varepsilon.$$

Ekkor

$$|\Phi(A) - \Phi(B)| = |\Phi(A - B)| \leq C_Y \cdot \|A - B\|_Y \leq C_Y \cdot \varepsilon.$$

Innen világos, hogy ha létezik az $X$ térnek olyan $Y \neq \{0\}$ nem üres kompakt részhalmaza és olyan $Y$-korlátos

$$\Phi : L(X) \to \mathbf{K}$$

lineáris funkcionál, amelyre

$$\Phi(B) = 0 \qquad (B \in K(X)),$$

továbbá valamilyen $A \in L(X)$ esetén $\Phi(A) \neq 0$, akkor a szóban forgó Banach-tér nem rendelkezik a kompakt approximációs tulajdonsággal.

Tekintsük a

$$W := \{w_n : n \in \mathbf{N}\}$$

Walsh (–Paley)-függvényrendszert (ld. 5.4.). A keresett $(X, \|.\|)$ térről feltesszük, hogy

$$W \subset X \subset L^1[0,1],\,[11]$$

$$\|f\|_1 \leq \|f\| \qquad (f \in X)$$

és

$$\sup\{\|w\| : w \in W\} < +\infty.$$

[11] Tehát az $X$ bármely $f$ eleme $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ típusú Lebesgue-integrálható függvény.

A $W$ halmaz a függvényszorzásra, mint multiplikatív műveletre nézve csoportot alkot. Jelentse a $\mathcal{G}$ a $W$ csoport véges részcsoportjainak a halmazát. Egy $G \in \mathcal{G}$ részcsoportnak a számosságát a $|G|$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha pl. $0 < n \in \mathbf{N}$ és

$$G := W_n := \{r_k : k = 0, ..., n-1\}$$

(ahol $r_k$ a $k$-adik Rademacher-függvény (ld. 2.6.)), akkor nyilván

$$W_0 := \{w_0\},\ W_n \in \mathcal{G}.$$

Valamely $A \in L(X)$ operátor és $G \in \mathcal{G}$ részcsoport esetén legyen

$$\Phi_G(A) := \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{w \in G} \langle w, A(w) \rangle := \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{w \in G} \int_0^1 wA(w).$$

Ekkor a

$$\Phi_n := \Phi_{W_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(nyilván lineáris funkcionál-)sorozatra

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(I) = 1.$$

Megmutatható továbbá, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(B) = 0 \qquad (B \in K(X)).$$

Valóban, ha $B \in K(X)$, akkor a $\overline{B[W]}$ halmaz kompaktsága (azaz teljesen korlátossága) miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható véges sok

$$g_0, ..., g_m \in X$$

elem (valamilyen $m \in \mathbf{N}$ mellett) úgy, hogy ha $n \in \mathbf{N}$, akkor egy

$$\nu_n = 0, ..., m$$

indexre

$$\|B(w_n) - g_{\nu_n}\| < \varepsilon.$$

Így – alkalmazva a

$$|\langle w, g \rangle| \leq \|g\|_1 \cdot \|w\|_\infty = \|g\|_1 \leq \|g\| \qquad (w \in W, g \in X)$$

becslést – azt mondhatjuk, hogy

$$|\Phi_n(B)| = \frac{1}{2^n}\cdot \left|\sum_{k=0}^{2^n-1} \langle w_k, B(w_k)\rangle\right| \leq$$

$$\frac{1}{2^n}\cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} |\langle w_k, B(w_k) - g_{\nu_k}\rangle| + \frac{1}{2^n}\cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} |\langle w_k, g_{\nu_k}\rangle| \leq \varepsilon + \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^n}\cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} |\langle w_k, g_l\rangle|.$$

Mivel

$$\lim_{j\to\infty} \langle w_j, g\rangle = 0 \qquad (g \in X),$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} |\langle w_k, g_{\nu_k}\rangle| = 0$$

is igaz. Mindez azt jelenti, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(B)| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(B) = 0$$

már triviálisan következik.

Sőt, ha megadható véges

$$Y_n \subset X \qquad (N_0 < n \in \mathbf{N})$$

halmazoknak olyan sorozata (valamilyen $N_0 \in \mathbf{N}$ indexszel), hogy egy alkalmas $C > 0$ együtthatóval

- $|\Phi_n(A) - \Phi_{n-1}(A)| \leq C\cdot \|A\|_{Y_n} \qquad (N_0 < n \in \mathbf{N}, A \in L(X))$ és
- $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \max\{\|f\| : f \in Y_n\} < +\infty$,

akkor létezik a

$$\Phi(A) := \lim_{n\to\infty} \Phi_n(A) \qquad (A \in L(X))$$

limeszfunkcionál is, ami egy alkalmas $Y \subset X$ nem üres kompakt halmazra $Y$-korlátos. Ezt igazolandó válasszunk ui. egy olyan pozitív számokból álló $(\beta_n, n \in \mathbf{N})$ sorozatot, amelyre $\beta_{N_0} := 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$$

és

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \alpha_n \beta_n < +\infty,$$

ahol

$$\alpha_n := \max\{\|f\| : f \in Y_n\} \qquad (N_0 < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $\alpha_{N_0} := 1$. Ekkor az

$$Y := \{0\} \bigcup \Big( \bigcup_{n=N_0}^{\infty} \{f/(\alpha_n \beta_n) : f \in Y_n\} \Big)$$

halmaz kompakt és[12]

$$|\Phi_k(A) - \Phi_{k-1}(A)| \leq C \cdot \|A\|_{Y_k} = C\alpha_k\beta_k \cdot \|A\|_{Y_k/(\alpha_k\beta_k)} \leq$$

$$C\alpha_k\beta_k \cdot \|A\|_Y \leq C\gamma\alpha_k\beta_k \cdot \|A\| \qquad (N_0 < k \in \mathbf{N}).$$

Tehát bármely $N_0 < n < m$ indexpárra

$$|\Phi_n(A) - \Phi_m(A)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} (\Phi_{k-1}(A) - \Phi_k(A)) \right| \leq$$

$$C\gamma \cdot \|A\| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

így a $(\Phi_n(A))$ sorozat valóban konvergens. Ugyanakkor az

$$Y_{N_0} := \left\{ w_k \in W : k < 2^{N_0} \right\}$$

halmazzal

$$|\Phi_{N_0}(A)| \leq \frac{1}{2^{N_0}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{N_0}-1} \|A(w_k)\| \leq \|A\|_{Y_{N_0}} \leq \|A\|_Y,$$

amiből bármely $N_0 < n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|\Phi_n(A)| \leq |\Phi_{N_0}(A)| + \sum_{k=N_0+1}^{n} |\Phi_k(A) - \Phi_{k-1}(A)| \leq$$

[12] A $\gamma := \sup\{\|f\| : f \in Y\}$ jelöléssel.

$$\leq \left(1 + C\cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \alpha_k \beta_k\right)\cdot \|A\|_Y =: q\cdot \|A\|_Y,$$

ezért egyúttal

$$|\Phi(A)| \leq q\cdot \|A\|_Y$$

következik. Más szóval a $\Phi$ funkcionál $Y$-korlátos. Az előbbiek szerint tehát a most vizsgált Banach-térben nem igaz a CAP.

A (nem triviális) részletek mellőzésével a következőket jegyezzük meg csupán. Legyen az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ egy valószínűségi mértéktér (Kolmogorov-mező), a $\mathcal{B}$ pedig az $\Omega$ rész-szigma-algebráinak egy megszámlálható halmaza. Ha $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$, akkor $E_{\mathbf{B}}$ jelentse a $\mathbf{B}$-re vonatkozó feltételes várható érték operátort. Feltesszük, hogy

$$\{\emptyset, \mathcal{X}\} \in \mathcal{B},$$

valamint a $\mathcal{B}$ *teljes* a következő értelemben: ha

$$f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$$

(a $\mu$-re nézve) integrálható függvény és

$$E_{\mathbf{B}} f = 0 \qquad (\mathbf{B} \in \mathcal{B}),$$

akkor $f = 0$. Az előbbi integrálható $f$ esetén legyen továbbá

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{\mathbf{B}\in\mathcal{B}} \|E_{\mathbf{B}}(|f - E_{\mathbf{B}} f|)\|_\infty$$

(az $f$ ún. BMO-normája).

Válasszuk speciálisan az $\mathcal{X} := [0,1)$ halmazt, az $\Omega$ legyen a $[0,1)$ intervallum Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, ill. legyen a $\mu$ mérték a megfelelő Lebesgue-mérték. A

$$[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \qquad (n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., 2^n - 1)$$

*diadikus intervallumokra* nézve lépcsős függvények halmaza pedig legyen $\mathcal{L}$. Végül, egy fenti tulajdonságú $\mathcal{B}$ esetén jelöljük $VMO(\mathcal{B})$-vel az $\mathcal{L}$ halmaz $\|.\|_{\mathcal{B}}$-normában való lezártját. Ekkor a $(VMO(\mathcal{B}), \|.\|_{\mathcal{B}})$ szeparábilis Banach-tér.

Belátható, hogy alkalmas $\mathcal{B}$-re a $(VMO(\mathcal{B}), \|.\|_{\mathcal{B}})$ tér rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amelyek a fentiekben a CAP tagadását eredményezték. Más szóval: ekkor a $(VMO(\mathcal{B}), \|.\|_{\mathcal{B}})$ térben nincs Schauder-bázis.

## 2.4. Az együtthatók tere

Az $(X, \|.\|)$ normált térbeli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis esetén definiáljuk az $\widehat{X}_z$ teret az alábbiak szerint:

$$\widehat{X}_z := \left\{(a_n, n \in \mathbf{N}) :\ a_n \in \mathbf{K}\ \ (n \in \mathbf{N}), \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \in X\right\}.$$

A (számsorozatok körében) szokásos műveletekre nézve az előbbi $\widehat{X}_z$ halmaz nyilván vektortér a $\mathbf{K}$ felett, az

$$|a|_z := \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k z_k\right\| :\ n \in \mathbf{N}\right\} \qquad (a = (a_n, n \in \mathbf{N}) \in \widehat{X}_z)$$

módon definiált $|.|_z$ leképezés pedig norma az $\widehat{X}_z$-n. Egyszerűen megmutatható, hogy ez az $\widehat{X}_z$ tér a $|.|_z$ normára nézve Banach-tér.

Jelöljük $\Phi$-vel azt a

$$\Phi : \widehat{X}_z \to X$$

leképezést, amire

$$\Phi(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \qquad (a = (a_n, n \in \mathbf{N}) \in \widehat{X}_z).$$

Világos, hogy ez a $\Phi$ egy invertálható, lineáris operátor. Mivel

$$\|\Phi(a)\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k z_k\right\|,$$

ezért

$$\|\Phi(a)\| \le |a|_z \qquad (a \in \widehat{X}_z),$$

más szóval a $\Phi$ korlátos is. Így a Banach-féle inverz-tétel (ld. 10.8.) miatt a

$$\Phi^{-1} : X \to \widehat{X}_z$$

inverz leképezés is korlátos (lineáris) operátor. Tehát van olyan $M > 0$ konstans, amellyel

$$|\Phi^{-1}(x)|_z = \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k\right\| : n \in \mathbf{N}\right\} \le M\cdot \|x\| \qquad (x \in X)$$

teljesül.

Ezzel beláttuk azt a korábban már említett tényt, miszerint

$$S_n \in L(X) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

## 2.5. Ekvivalens bázisok

Legyen a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer az $(X, \|.\|_X)$ Banach-térben, az $u = (u_n, n \in \mathbf{N})$ pedig az $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-térben egy-egy bázis. Azt mondjuk, hogy a $z, u$ rendszerek *ekvivalens bázisok*, ha

$$\widehat{X}_z = \widehat{Y}_u.$$

A korábban mondottak alapján pl. egy szeparábilis Hilbert-térben bármely két ortonormált bázis ekvivalens. A Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) miatt ekvivalens $z, u$ bázisok esetén vannak olyan $A, B > 0$ konstansok, hogy minden

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z]$$

elemre

$$(*) \qquad A \cdot \|v\|_X \le \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k \right\|_Y \le B \cdot \|v\|_X$$

teljesül. Vegyük észre, hogy a $(*)$ reláció nem csupán bázisokra, hanem tetszőleges rendszerekre is megfogalmazható.

Ezzel kapcsolatos az alábbi értelmezés: tegyük fel, hogy a $z = (z_k, k \in \mathbf{N})$ és az $u = (u_k, k \in \mathbf{N})$ egy-egy lineárisan független rendszer (rendre) az $X$-ben és az $Y$-ban. Azt mondjuk, hogy a $z, u$ *ekvivalens rendszerek*, ha alkalmas $A, B > 0$ konstansokkal a fenti $(*)$ becslés teljesül minden $\mathcal{L}[z]$-beli

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k$$

elemre.

Vezessük be a következő jelölést: a $(z, u) \in [X, Y]$ szimbólum jelentse azt, hogy az $X$-beli $z$ rendszer ekvivalens az $Y$-beli $u$ rendszerrel. Nyilvánvaló, hogy ha a $z$

és az $u$ egy-egy bázis a megfelelő terekben, akkor az előbbi két értelmezés egymással ekvivalens. Ebben az esetben a $z^*, u^*$ (a $z$-vel, ill. az $u$-val) biortogonális rendszerekre

$$(z^*, u^*) \in [X^*, Y^*].$$

A $(*)$ feltétel teljesülése nyilván azt jelenti, hogy a

$$T(z_n) := u_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

utasítással értelmezett

$$T : \mathcal{L}[z] \to \mathcal{L}[y]$$

lineáris operátor (*kanonikus izomorfizmus*) folytonos. Speciálisan, ha a $z, u$ rendszerek ekvivalens bázisok, akkor a $T$ kiterjeszthető egy $X$-ről az $Y$-ra ható lineáris homeomorfizmussá. Ha még az is teljesül, hogy a $z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N})$ az $X^*$-ban, az $u^* = (u_n^*, n \in \mathbf{N})$ pedig az $Y^*$-ban bázis, akkor a

$$T^*(u_n^*) := z_n^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

hozzárendeléssel definiált

$$T^* : Y^* \to X^*$$

kanonikus izomorfizmusról könnyen megmutatható, hogy az a $T$ adjungáltja. Ezért

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Ha csak annyit tudunk, hogy a $z$ bázis az $X$-ben, valamint

$$(z, u) \in [X, Y]$$

és az $u$ zárt rendszer az $Y$-ban, akkor a $(*)$ miatt az $u$-ra fennállnak a (2.2.1) feltételek, azaz a 2.2.1. Tétel alapján az $u$ bázis az $Y$-ban.

Tegyük fel most azt, hogy az $X$ térben[13] adott egy $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis, legyen a $(z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a $z$-vel biortogonális rendszer. A következő tétel a $z$-nek megfelelő ekvivalens bázisok konstrukciójára ad lehetőséget, egyúttal a bázisok egyfajta „stabilitási" tulajdonságát is kifejezi.

[13] A továbbiakban $\|.\|_X$ helyett is $\|.\|$-t írunk.

**2.5.1. Tétel.** *Ha az $y = (y_n, n \in \mathbf{N})$ olyan $X$-beli rendszer, amelyre*

$$\delta := \sum_{n=0}^{\infty} \|z_n - y_n\| \cdot \|z_n^*\| < 1,$$

*akkor az $y$ bázis az $X$-ben és ekvivalens a $z$-vel.*

Legyen ui.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} z_n^*(x) z_n \in X$$

esetén

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} z_n^*(x) y_n.$$

Ez utóbbi sor konvergens, mivel bármely

$$m, n \in \mathbf{N},\ m \leq n$$

mellett

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} z_k^*(x) y_k \Big\| \leq \Big\| \sum_{k=m}^{n} z_k^*(x)(y_k - z_k) \Big\| + \Big\| \sum_{k=m}^{n} z_k^*(x) z_k \Big\| \leq$$

$$\|x\| \cdot \sum_{k=m}^{n} \|z_k - y_k\| \cdot \|z_k^*\| + \Big\| \sum_{k=m}^{n} z_k^*(x) z_k \Big\| \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

A

$$T : X \to X$$

operátor nyilván lineáris és

$$\|T(x)\| \leq \|T(x) - x\| + \|x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n^*(x)| \cdot \|z_n - y_n\| + \|x\| \leq$$

$$\Big( \sum_{n=0}^{\infty} \|z_n^*\| \cdot \|z_n - y_n\| + 1 \Big) \cdot \|x\| = (\delta + 1) \cdot \|x\| \qquad (x \in X)$$

miatt korlátos is. Továbbá (ugyanígy)

$$\|T(x)\| \geq \|x\| - \|T(x) - x\| \geq (1 - \delta) \cdot \|x\| \quad (x \in X),$$

tehát a $T$ injektív és a $T[X]$ képhalmaz zárt altér az $X$-ben.

Megmutatjuk, hogy az $y$ zárt rendszer. Különben a Hahn–Banach-tétel (ld. 10.2.) miatt lenne olyan

$$0 \neq \varphi \in X^*$$

funkcionál, hogy

$$\varphi(y_k) = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor viszont

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n^*(x)\varphi(z_n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n^*(x)\varphi(z_n - y_n)\right| \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n^*\| \cdot \|z_n - y_n\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = \delta \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| \qquad (x \in X),$$

ami $\delta < 1$ alapján nem lehetséges. Végül,

$$X = \overline{\mathcal{L}[y]} \subset \overline{\mathcal{L}[T[X]]} = \overline{T[X]},$$

így $T[X] = X$. A $T \in L(X)$ operátor tehát bijekció, amiből (a Banach-féle inverz tételt (ld. 10.8.) is figyelembe véve) a 2.5.1. Tétel minden állítása már következik.

## 2.6. Feltétlen bázisok

Emlékeztetünk a zárt rendszer és a bázis viszonyát illetően egy momentumra: míg a (megszámlálható) rendszer zártságának a fogalma nem tételez fel semmiféle sorbarendezést sem a rendszer elemei között, addig a bázis (mint többek között zárt rendszer) fogalma kötődik (az indexezéssel megvalósított) sorbarendezéshez.

Legyen adott az $(X, \|.\|)$ Banach-térben egy $Y \subset X$ megszámlálható, lineárisan független, zárt rendszer és vezessük be a következő jelölést: valamilyen

$$t : \mathbf{N} \to Y$$

bijekció esetén legyen

$$y^t := (t(n), n \in \mathbf{N})$$

(az $Y$ elemei „ $t$-sorrendben"). Az $Y$ zárt rendszert illetően a kérdés az, hogy van-e olyan előbbi $t$ bijekció, hogy az $y^t$ rendszer bázis az $X$-ben?

A következő két példa a kérdést illetően a szélsőségekre világít rá.

$1^o$ Tekintsük a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ térben az

$$Y := \{[0,1] \ni x \mapsto x^n : n \in \mathbf{N}\}$$

halmazt. Az ismert Weierstrass-tétel szerint az $Y$ egy (megszámlálható) zárt rendszer a $C[0,1]$-ben, de a Müntz-tétel (ld. 10.6.) értelmében nincs olyan

$$t : \mathbf{N} \to Y$$

bijekció, amelyre az $y^t$ rendszer bázis lenne a $C[0,1]$-ben. (Ui. bármelyik ilyen $t$ esetén az $y^t$ nem minimális rendszer.)

$2^o$ Ha az $(X, \langle,\rangle)$ Hilbert-tér[14], az $Y \subset X$ pedig egy olyan megszámlálható, zárt rendszer, amelyre

$$\langle x, y\rangle = \delta_{xy} \qquad (x, y \in Y)$$

fennáll (az $Y$ egy ONR), akkor a Riesz–Fischer-tétel (ld. 10.3.) miatt bármely

$$t : \mathbf{N} \to Y$$

bijekcióra az $y^t$ bázis az $X$-ben.

Vegyük észre, hogy ha valamilyen

$$t_0 : \mathbf{N} \to Y$$

bijekció esetén az $y^{t_0}$-nak van biortogonális társa, legyen ez

$$\Phi : \mathbf{N} \to X^*,$$

akkor bármely

$$t : \mathbf{N} \mapsto Y$$

bijekció mellett az $y^t$ és a

$$\Phi \circ t_0^{-1} \circ t$$

biortogonális. Mivel az $Y$ zárt rendszer, ezért az előbbi $y^t$-nek ez az egyetlen biortogonális társa, amit a $\Phi$-ből ugyanazzal az átrendezéssel kapunk, mint az $y^t$-t az $y^{t_0}$-ból. Ha tehát az $y^{t_0}$ és az $y^t$ is bázis az $X$-ben,

$$y^{t_0} =: (y_n, n \in \mathbf{N})$$

[14]Tehát $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in X)$.

és

$$\sigma := t_0^{-1} \circ t,$$

akkor bármely $x \in X$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^*(x) y_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_{\sigma_n}^*(x) y_{\sigma_n} \ (= x).$$

A fentiek motiválják a következő definíciót: azt mondjuk, hogy az $X$-beli

$$z = (z_n, n \in \mathbf{N})$$

bázis *feltétlen bázis* az $X$-ben, ha minden

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

permutációra a

$$z \circ \sigma = (z_{\sigma_n}, n \in \mathbf{N})$$

rendszer bázis az $X$-ben.

Ekkor tehát a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n^*(x) z_n \qquad (x \in X)$$

végtelen sor minden átrendezése konvergens (és konvergál az $x$-hez). Megmutatható, hogy ez utóbbi a következővel ekvivalens: bármely $x \in X$ és

$$\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbf{N}) : \mathbf{N} \to \{-1, 1\}$$

(„előjel”-) sorozat esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z_n^*(x) z_n$$

sor konvergens.

Jelöljük a fenti előjelsorozatok halmazát $\ell_{\pm}$-szal és legyen

$$S_n^{\varepsilon}(x) := \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k z_k^*(x) z_k \qquad (x \in X,\ n \in \mathbf{N},\ \varepsilon = (\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_{\pm}).$$

A 2.5.1. Tételhez hasonlóan mutatható meg, hogy igaz a

**2.6.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer zárt és minimális az $X$-ben. Ekkor a*

$$\sup\{\|S_n^\varepsilon\| \ : \ n \in \mathbf{N}, \varepsilon \in \ell_\pm\} < +\infty$$

*feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy a $z$ feltétlen bázis legyen az $X$-ben.*

Ha a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ feltétlen bázis, akkor bármely $\varepsilon \in \ell_\pm$ mellett az $(S_n^\varepsilon, n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat

$$T_z^\varepsilon : X \to X$$

erős limesze, azaz a

$$T_z^\varepsilon(x) := \lim_{n\to\infty} S_n^\varepsilon(x) \qquad (x \in X)$$

hozzárendeléssel definiált operátor korlátos lineáris operátor az $X$-en. Mivel

$$x = T_z^\varepsilon(T_z^\varepsilon(x)) \qquad (x \in X),$$

ezért

$$\|T_z^\varepsilon(x)\| \geq \frac{\|x\|}{\|T_z^\varepsilon\|} \qquad (x \in X).$$

Sőt, igaz a következő tétel.

**2.6.2. Tétel.** *Az $X$-beli zárt és minimális $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer pontosan akkor feltétlen bázis az $X$-ben, ha*

i) *minden $\varepsilon \in \ell_\pm$ mellett $T_z^\varepsilon \in L(X)$ és*

ii) *vannak olyan $A, B > 0$ konstansok, hogy*

$$(*) \qquad A\cdot \|x\| \leq \|T_z^\varepsilon(x)\| \leq B\cdot \|x\| \qquad (x \in X,\ \varepsilon \in \ell_\pm).$$

Az itteni $(*)$ feltételt a következő ekvivalens alakban is megfogalmazhatjuk. Legyen az

$$r_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvény 1 szerint periodikus,

$$r_0(x) := \begin{cases} +1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \end{cases}$$

és

$$r_n(x) := r_0(2^n x) \qquad (x \in [0,1],\, n \in \mathbf{N}).$$

Az

$$R := (r_n, n \in \mathbf{N})$$

*Rademacher-rendszerről* megmutatható, hogy minden olyan $\varepsilon \in \ell_\pm$ esetén, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \neq -1,$$

egyértelműen létezik egy $t \in [0,1]$ szám úgy, hogy

$$\varepsilon = (r_n(t), n \in \mathbf{N}).$$

Mivel nyilván tetszőleges $t \in [0,1]$ mellett

$$(r_n(t), n \in \mathbf{N}) \in \ell_\pm,$$

ezért a

$$T_z^t(x) := \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t) z_k^*(x) z_k \qquad (t \in [0,1],\, x \in X)$$

jelöléssel a $(*)$ ekvivalens a következővel:

$$(**) \qquad A\cdot \|x\| \leq \|T_z^t(x)\| \leq B\cdot \|x\| \qquad (x \in X,\, t \in [0,1]).$$

## 2.7. Riesz-bázisok

Legyen adott az $(X, \langle, \rangle)$ szeparábilis Hilbert-térben egy

$$z = (z_n, n \in \mathbf{N})$$

(nem feltétlenül ortonormált) teljes rendszer. (A szóban forgó rendszer indexezésére később az $\mathbf{N}$ helyett az egész számok $\mathbf{Z}$ halmazát is fogjuk időnként használni.) Feltesszük, hogy az $X$-ben van a $z$-vel biortogonális rendszer, legyen ez

$$z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N}).$$

Azt mondjuk, hogy a $z$ rendszer *Bessel-szerű*, ha bármely $y \in X$ esetén[15]

$$(\langle y, z_n^* \rangle, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2,$$

[15] A jelölést illetően ld. 2.8. i) megjegyzés.

azaz
$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, z_n^* \rangle|^2 < +\infty.$$

Megmutatjuk, hogy az ilyen rendszerek bizonyos értelemben „közel” állnak az ortonormált rendszerekhez. Legyen ehhez az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis az $X$-ben, ekkor a Riesz–Fischer-tétel (ld. 10.3.) miatt minden $y \in X$ elemhez egyértelműen megadható olyan $\tilde{y} \in X$ elem, hogy
$$\langle y, z_n^* \rangle = \langle \tilde{y}, x_n \rangle \qquad (n \in \mathbf{N}).$$
Az
$$A(y) := \tilde{y} \qquad (y \in X)$$
megfeleltetéssel értelmezett
$$A : X \to X$$
operátor nyilván lineáris és
$$A(z_n) = x_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
továbbá az ismert Gelfand-tétel (ld. 10.1.) miatt korlátos is. Könnyű belátni, hogy az előbb mondottak „megfordítása” is igaz, nevezetesen, ha az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis az $X$-ben, $A \in L(X)$ és
$$x_n = A(z_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
akkor a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer Bessel-szerű.

A fentiek alapján tehát egy $z$ Bessel-szerű rendszer esetén van olyan $M > 0$ konstans, amellyel
$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, z_n^* \rangle|^2 \leq M \cdot \|y\|^2 \qquad (y \in X)$$
igaz.

Speciálisan, ha az $(\alpha_n)$ olyan együttható-sorozat, amelynek legfeljebb véges sok tagja különbözik a nullától, akkor az
$$y := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n$$

választással nyilván

$$\langle y, z_n^* \rangle = \alpha_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n \right\|.$$

A Bessel-szerű rendszerek egyfajta „belső” jellemzését adja a következő állítás:

**2.7.1. Tétel.** *A fenti $z$ rendszer pontosan akkor Bessel-szerű, ha létezik olyan $A \in L(X)$ pozitív hermitikus operátor, amellyel*

$$A(z_n) = z_n^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*igaz.*

Nevezzük a $z$-t *Hilbert-szerűnek*, ha tetszőleges

$$\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$$

sorozathoz egyértelműen létezik olyan $y^{(\alpha)} \in X$ elem, amelyre

$$\alpha_n = \langle y^{(\alpha)}, z_n^* \rangle \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megmutatható, hogy a $z$ pontosan akkor Hilbert-szerű, ha van olyan $B \in L(X)$ operátor és $(x_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis az $X$-ben, hogy

$$z_n = B(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá minden $\ell_2$-beli $(\alpha_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat mellett egy alkalmas $y \in X$ elemmel

$$y^{(\alpha)} = B(y)$$

és

$$\alpha_n = \langle y, x_n \rangle \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\|B(y)\| \leq \|B\| \cdot \|y\| = \|B\| \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2}.$$

Így, ha az $\alpha_n$-ek az előbbi $(*)$-ban szereplő együtthatók, akkor

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n B(x_n)\right\| = \left\|B\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n\right)\right\| \le$$

$$(**) \qquad \|B\|\cdot \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n\right\| = \|B\|\cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2}.$$

Mivel $\|B\| > 0$ nyilván igaz, ezért a következő állítást kaptuk: ha a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer Hilbert-szerű, akkor van olyan $m > 0$ konstans, amivel bármely $\alpha \in \ell_2$ esetén

$$\|\alpha\|_{\ell_2} \ge m\cdot \|y^{(\alpha)}\|.$$

A Hilbert-szerű rendszerekre is megadható egy „belső” kritérium, nevezetesen igaz a

**2.7.2. Tétel.** *A $z$ rendszer akkor és csak akkor Hilbert-szerű, ha valamilyen $A \in L(X)$ hermitikus operátorral*

$$z_n = A(z_n)^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*teljesül.*

Azokat az $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszereket, amelyek egyszerre Bessel-szerűek és Hilbert-szerűek, *Riesz–Fischer-rendszereknek* nevezzük. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a $z$ pontosan akkor Riesz–Fischer-rendszer, ha van olyan

$$A : X \to X$$

lineáris homeomorfizmus, amellyel az $(A(z_n), n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis az $X$-ben. Ekkor alkalmas $m, M > 0$ konstansokkal

$$m\cdot \|y\| \le \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, z_n^*\rangle|^2} \le M\cdot \|y\| \qquad (y \in X),$$

ami nem más, mint az ismert Parseval-egyenlőség általánosítása Riesz–Fischer-rendszerekre. Megmutatható, hogy az ilyen rendszerek feltétlen bázisok az $X$-ben, amelyeket *Riesz-bázisoknak* nevezünk.

Ha tehát a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Riesz-bázis, akkor a $(*), (**)$ becslések alapján valamilyen $c, C > 0$ állandókkal

$$(***) \qquad c \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2} \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n \right\| \leq C \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2}$$

igaz minden olyan $(\alpha_n)$ együttható-sorozatra, amelynek legfeljebb véges sok tagja nullától különböző. Más szóval a $(***)$ teljesül tetszőleges

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n \in \mathcal{L}[z]$$

lineáris kombinációra. Legyen $(c_n) \in \ell_2$, ekkor bármely

$$m, n \in \mathbf{N},\, n < m$$

esetén a $(***)$ alapján

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} c_k z_k \right\| \leq C \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{m} |c_k|^2} \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

amiből a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_k$ sor konvergenciája következik.

**2.7.1. Lemma.** *A $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha van olyan $T \in L(\ell_2, X)$ korlátos lineáris operátor, hogy $\mathcal{R}_T = X$, továbbá*[16]

$$T(e^{(n)}) = z_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*és alkalmas $C, c > 0$ konstansokkal*

$$c \cdot \|a\|_{\ell_2} \leq \|T(a)\| \leq C \cdot \|a\|_{\ell_2} \qquad (a \in \ell_2).$$

Valóban, ha $\ell$ jelenti az olyan számsorozatok halmazát, amelyeknek legfeljebb véges sok tagja különbözik a nullától, akkor könnyen beláthatóan az $\ell$ egy mindenütt sűrű altere az $\ell_2$-nek. Világos, hogy minden gond nélkül értelmezhető a

$$T(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \qquad (a = (a_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell)$$

[16] Az $\ell_2$-beli $e^{(n)} := (\delta_{nk}, k \in \mathbf{N}) \quad (n \in \mathbf{N})$ bázissal.

(nyilván lineáris)

$$T : \ell \to X$$

operátor és

$$T(e^{(n)}) = z_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Riesz-bázis, akkor a $(***)$ becslések miatt

$$c\cdot \|a\|_{\ell_2} \leq \|T(a)\| \leq C\cdot \|a\|_{\ell_2} \qquad (a \in \ell).$$

A $T$ operátor (egyenletesen) folytonos is, hiszen az előbbiekből

$$\|T(a) - T(b)\| = \|T(a-b)\| \leq C\cdot \|a-b\| \qquad (a, b \in \ell)$$

következik. Ezért a $T$ egyértelműen kiterjeszthető az $\ell_2$-re (a kiterjesztett operátort is $T$-vel jelölve), nevezetesen: ha $\alpha \in \ell_2$ és az

$$(a^{(n)}, n \in \mathbf{N}) : \mathbf{N} \to \ell$$

sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha - a^{(n)}\|_{\ell_2} = 0,$$

akkor

$$\|T(a^{(n)}) - T(a^{(m)})\| = \|T(a^{(n)} - a^{(m)})\| \leq$$
$$\leq C\cdot \|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell_2} \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

miatt létezik a

$$T(\alpha) := \lim_{n\to\infty} T(a^{(n)})$$

határérték, ami nem függ az $\alpha$-t „előállító” előbbi $(a^{(n)})$ sorozattól, csak magától az $\alpha$-tól. Világos továbbá, hogy a $(***)$ miatt

$$c\cdot \|\alpha\|_{\ell_2} = c\cdot \lim_{n\to\infty} \|a^{(n)}\|_{\ell_2} \leq \lim_{n\to\infty} \|T(a^{(n)})\| =$$

$$\|T(\alpha)\| = \lim_{n\to\infty} \|T(a^{(n)})\| \leq C\cdot \lim_{n\to\infty} \|a^{(n)}\|_{\ell_2} = C\cdot \|\alpha\|_{\ell_2}.$$

Így többek között a kiterjesztett

$$T : \ell_2 \to X$$

operátor korlátos lineáris operátor, következésképpen folytonos is.

Nyilvánvaló, hogy a $T$ operátor az $\ell$-et az

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}[\{z_n \in X : n \in \mathbf{N}\}]$$

halmazra képezi le. Mivel a feltételek szerint a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer Riesz-bázis, ezért az $\mathcal{L}$ mindenütt sűrű altér az $X$-ben. Így tetszőleges $y \in X$ elemhez van olyan, az

$$y_n \in \mathcal{L} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

elemekből álló sorozat, amelyre

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor $y_n \in \mathcal{L}$ miatt alkalmas $a^{(n)} \in \ell$ elemmel

$$y_n = T(a^{(n)})$$

és

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell_2} \leq \frac{1}{c} \cdot \|y_n - y_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

alapján létezik az

$$a := \lim_{n\to\infty} a^{(n)} \in \ell_2$$

határérték. A $T$ folytonosságából következően

$$T(a) = \lim_{n\to\infty} T(a^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Ez azt jelenti, hogy a $T$ operátor az $\ell_2$-t az $X$-re képezi le, azaz $\mathcal{R}_T = X$.

Ezzel beláttuk, hogy a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer Riesz-bázis volta elegendő a 2.7.1. Lemma állításaihoz. Fordítva, ha a $T$ eleget tesz a most mondott lemma feltételeinek, akkor minden $x \in X$ elemhez egy alkalmas $a \in \ell_2$ sorozattal $x = T(a)$. Ha a $b \in \ell_2$ is ilyen lenne: $x = T(b)$, akkor

$$0 = \|T(a) - T(b)\| = \|T(a - b)\| \geq c \cdot \|a - b\|_{\ell_2}$$

miatt

$$\|a - b\|_{\ell_2} = 0 \Longrightarrow a = b.$$

Ezért minden $x \in X$ elemhez egyértelműen létezik az előbbi

$$a = (a_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$$

sorozat. Továbbá

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n)}$$

miatt

$$x = T(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T(e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n.$$

Más szóval a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis. Innen

$$\langle x, z_n^* \rangle = a_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

adódik, így a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Bessel-szerű.

Ha

$$b = (b_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$$

és $y = T(b)$, akkor az előbbiek alapján

$$\langle y, z_n^* \rangle = b_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Hilbert-szerű is, következésképpen Riesz-bázis.

Ha a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer zárt és a $(***)$ igaz, akkor nyilván értelmezhető a 2.7.1. Lemmabeli $T$ operátor. Következésképpen a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Riesz-bázis. Összefoglalva a fentieket ezért az alábbiakat mondhatjuk:

**2.7.2. Lemma.** *A $(z_n, n \in \mathbf{N})$ zárt rendszer akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha a $(* * *)$ feltétel igaz.*

Ekkor tetszőleges $x \in X$ elem egyértelműen állítható elő

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n$$

alakban alkalmas

$$\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$$

sorozattal. Továbbá a $(* * *)$ minden $\alpha \in \ell_2$ sorozatra is teljesül, ill. tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\frac{1}{C} \cdot \|x\| \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, z_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{c} \cdot \|x\|$$

(azaz a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer egy frame (ld. 3.1.)).

Tekintsük pl. az $X := L^2(\mathbf{R})$ (valós) vektorteret a „szokásos”

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \qquad (f, g \in L^2(\mathbf{R}))$$

skaláris szorzással, amikor is

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx} \qquad (f \in L^2(\mathbf{R})).$$

Jól ismert, hogy az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-tér. Legyen a $h$ az alábbi „kalap”-függvény:

$$h(x) := \begin{cases} 1 + x & (-1 \le x \le 0) \\ \\ 1 - x & (0 \le x \le 1) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]), \end{cases}$$

valamint

$$h_j(x) := h(x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z}).$$

Nem nehéz megmutatni, hogy a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a

$$V_0 := \overline{\mathcal{L}[\{h_j \in X : j \in \mathbf{Z})\}]}$$

zárt altérben.

Ti. belátható, hogy az előbbi $(***)$ feltétel fennáll a

$$c := \frac{1}{3},\ C := 1$$

konstansokkal. Tekintsük ui. ehhez először is az

$$f, g \in \mathcal{L}[\{h_j \in X : j \in \mathbf{Z}\}]$$

(valós) függvényeket:

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_j$$

és

$$g = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \beta_j h_j$$

(ahol tehát legfeljebb véges sok $\alpha_j, \beta_j$ együttható különbözik a nullától). Ekkor

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} f(x+k)g(x+k)\,dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} \sum_{j,l=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h(x+k-j)\beta_l h(x+k-l)\,dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} (\alpha_k h(x) + \alpha_{k+1} h(x-1))(\beta_k h(x) + \beta_{k+1} h(x-1))\,dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} (\alpha_k + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)x)(\beta_k + (\beta_{k+1} - \beta_k)x)\,dx =$$

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4\alpha_k \beta_k + \alpha_k \beta_{k+1} + \alpha_{k+1} \beta_k).$$

Vezessük be a következő leképezéseket: tetszőleges, a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$$

feltételnek eleget tevő $a = (a_n, n \in \mathbf{Z})$ számsorozat esetén legyen

$$U(a) := (a_{n-1}, n \in \mathbf{N})$$

és

$$H(a) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n.$$

Mivel az előbbiek szerint az

$$\alpha_k := \beta_k := a_k \qquad (n, m \in \mathbf{Z},\ n < m \ \text{ és } \ k = n, ..., m),$$

ill.

$$\alpha_k := \beta_k := 0 \qquad (k > m, \ \text{vagy} \ k < n)$$

jelöléssel a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k h_k \right\|^2 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4\alpha_k^2 + 2\alpha_k \alpha_{k+1}) \le$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=n}^{m} a_k^2 \to 0 \qquad (n, m \to \infty, \ \text{vagy} \ n, m \to -\infty),$$

ezért a $H(a)$-t definiáló végtelen sor $\|.\|$-ban konvergens és $H(a) \in V_0$. Világos, hogy az $U$ operátor adjungáltja $(U^*)$ a következő: a fenti $a = (a_n, n \in \mathbf{Z})$ sorozatokra

$$U^*(a) = (a_{n+1}, n \in \mathbf{Z}),$$

valamint

$$\|U(a)\|_{\ell_2} = \|U^*(a)\|_{\ell_2} = \|a\|_{\ell_2}$$

és

$$|\langle U(a), a\rangle_{\ell_2}| = |\langle U^*(a), a\rangle_{\ell_2}| \le \|a\|_{\ell_2}^2.$$

Ha tehát

$$f := H(a) \in \mathcal{L}[\{h_j \in X : j \in \mathbf{Z}\}],$$

akkor[17]

$$\|f\|^2 = \langle H(a), H(a)\rangle = \frac{1}{6} \cdot \langle (4I + U + U^*)(a), a\rangle_{\ell_2} \le$$

$$\frac{1}{6} \cdot (4\|a\|_{\ell_2}^2 + |\langle U(a), a\rangle_{\ell_2}| + |\langle U^*(a), a\rangle_{\ell_2}|) \le \|a\|_{\ell_2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\|f\|^2 = \langle H(a), H(a)\rangle = \frac{1}{6} \cdot \langle (4I + U + U^*)(a), a\rangle_{\ell_2} \ge$$

$$\frac{1}{6} \cdot (4\|a\|_{\ell_2}^2 - |\langle U(a), a\rangle_{\ell_2}| - |\langle U^*(a), a\rangle_{\ell_2}|) \ge \frac{1}{3} \cdot \|a\|_{\ell_2}.$$

---

[17] Az $I(a) := a$ jelöléssel.

Mutassuk meg, hogy van olyan $(c_j, j \in \mathbf{Z})$ együtthatósorozat, hogy a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j|^2$$

összeg véges és a

$$\varphi := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j h_j$$

függvényre a

$$\varphi_j(x) := \varphi(x-j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z})$$

eltoltak ortonormált bázist alkotnak a fenti $V_0$-ban. Ehhez először is emlékeztetünk arra, hogy az[18]

$$\varepsilon_k(x) := e^{\imath kx} \qquad (x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{Z})$$

függvények rendszere (a trigonometrikus rendszer) ortogonális bázist alkot az $(L^2[-\pi,\pi], \|.\|_2)$ térben. A Riesz–Fischer-tétel (ld. 10.3.) szerint az

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon_k \qquad (f \in L^2[-\pi,\pi])$$

Fourier-sorfejtés révén az $L^2[-\pi,\pi]$ azonosítható a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty$$

feltételnek eleget tevő $(a_k, k \in \mathbf{Z})$ számsorozatok terével.[19] Mivel ekkor

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k-1}\varepsilon_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_1 f,$$

ezért a fenti $U$ operátor azonosítható az

$$f \mapsto \varepsilon_1 f$$

leképezéssel.

[18] $\imath := \sqrt{-1}$.

[19] Ennek megfelelően a $H$ operátor is tekinthető úgy, mint az $L^2[-\pi,\pi]$-n értelmezett leképezés.

Valamely $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén tekintsük az

$$M_g(f) := gf \qquad (f \in L^2[-\pi, \pi])$$

előírással definiált $M_g$ operátort. Ekkor $U = M_{\varepsilon_1}$. Következésképpen

$$\frac{1}{6} \cdot (4I + U + U^*) = \frac{1}{6} \cdot (4I + M_{\varepsilon_1} + M_{\varepsilon_1}^*) = M_{(2+\cos)/3}.$$

Legyen ezek után

$$g := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \cos}}$$

és

$$c := M_g(e^{(0)}).$$

A részletszámításokat mellőzve azt kapjuk, hogy a $\varphi := H(c)$ függvényre a fenti $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált. Mivel az $e^{(0)}$ a konstans 1 függvénnyel ($\mathbf{1}$) azonosítható az előbb mondott értelemben, ezért

$$\varphi = H(M_g(\mathbf{1})) = H(g).$$

Az utóbbi kiszámításához tekintsük a $g$ függvény trigonometrikus Fourier-sorát:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \varepsilon_n,$$

ahol a $g$ páros volta miatt

$$c_{-n} = c_n \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

és

$$c_n := \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2 + \cos x}}\, dx \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Innen

$$\varphi = H(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h_n$$

következik. Mivel

$$H(\varepsilon_j g) = H(U^j(g)) = \varphi_j \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

és

$$h = H(e^{(0)}) = H(M_g(1/g)),$$

valamint

$$\frac{1}{g(x)} = \sqrt{(2+\cos x)/3} \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j \varepsilon_j,$$

így[20]

$$h = H\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j \varepsilon_j g\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j \varphi_j.$$

A $h$ függvény tehát kifejezhető a $\varphi_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ függvények szerinti ($\|.\|$-ban konvergens) sor összegeként. Ezért

$$h \in \overline{\mathcal{L}[\{\varphi_j \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]},$$

amiből

$$h_k \in \overline{\mathcal{L}[\{\varphi_j \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]}$$

is rögtön következik. Az előzményeket is figyelembe véve innen

$$\overline{\mathcal{L}[\{\varphi_j \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]} = V_0,$$

azaz a $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $V_0$-ban.

Az előbbiekben bevezetett $M_g$ „szorzás-operátorokkal" kapcsolatos az alábbi lemma.

**2.7.3. Lemma.** *Tegyük fel, hogy* $g \in L^\infty[-\pi,\pi]$ *és*

$$q_0 := \sup\{\gamma \geq 0 : |g(x)| \geq \gamma \ \ (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi])\}.$$

*Ekkor az*

$$M_g : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$$

*leképezés korlátos lineáris operátor és*

$1^o$ $|g(x)| \geq q_0$ (m.m. $x \in [-\pi,\pi]$);

$2^o$ $\|g\|_\infty \cdot \|f\| \geq \|M_g(f)\| \geq q_0 \cdot \|f\|$ $(f \in L^2[-\pi,\pi])$;

$3^o$ *ha* $q \geq 0$ *és* $\|M_g(f)\| \geq q \cdot \|f\|$ $(f \in L^2[-\pi,\pi])$, *akkor* $q \leq q_0$.

[20] Más szóval a $b_j$-k az $1/g$ függvény Fourier-együtthatói.

Valóban, az

$$\|M_g(f)\| \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\| \qquad (f \in L^2[-\pi,\pi])$$

becslés, továbbá az $M_g$ lineáritása meglehetősen nyilvánvaló. Tegyük fel indirekt módon, hogy a

$$\{|g| < q_0\} := \{x \in [-\pi,\pi] : |g(x)| < q_0\}$$

halmaz (a $\mu$ Lebesgue-mértékre nézve) pozitív mértékű:

$$\mu(\{|g| < q_0\}) > 0.$$

Mivel

$$\{|g| < q_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|g| < q_0 - 1/n\},$$

ezért van olyan $0 < n \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\mu(\{|g| < q_0 - 1/n\}) > 0.$$

A $q_0$ definíciója miatt viszont ekkor létezik olyan

$$q_0 - 1/n < \gamma \leq q_0,$$

hogy

$$|g(x)| \geq \gamma \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]),$$

így

$$\mu\{|g| < \gamma\}) = 0.$$

Világos azonban, hogy

$$\{|g| < q_0 - 1/n\} \subset \{|g| < \gamma\},$$

tehát

$$\mu(\{|g| < q_0 - 1/n\}) = 0,$$

szemben az előbb mondottakkal.

Következésképpen fennáll az $1^o$ becslés, amiből

$$\|M_g(f)\| \geq q_0 \cdot \|f\| \qquad (f \in L^2[-\pi,\pi])$$

már nyilván következik.

Tegyük fel ismét csak indirekt módon, hogy valamilyen $q > q_0$ konstanssal

$$\|M_g(f)\| \geq q\cdot \|f\| \qquad (f \in L^2[-\pi,\pi]).$$

Ekkor (ld. a $q_0$ definíciója)

$$\mu(\{|g| < q\}) > 0.$$

A fentiekkel analóg gondolatmenettel kapjuk, hogy valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén az

$$A := \{|g| < q - 1/n\}$$

halmazra $\mu(A) > 0$. Legyen $f := \chi_A$, amikor is

$$q\cdot \|f\| \leq \|M_g(f)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)\chi_A(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_A |g(x)|^2\, dx} \leq (q - 1/n)\cdot \sqrt{\mu(A)}.$$

Mivel

$$\|f\| = \sqrt{\mu(A)} > 0,$$

ezért innen $q \leq q - 1/n$ következik, ami persze nem igaz. Más szóval valóban fennáll, hogy $q \leq q_0$.

A most tárgyalt példát általánosítva legyen a $h \in L^2(\mathbf{R})$ tetszőleges valós függvény és az előbbiek mintájára tekintsük a $h$ függvény $h_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ eltoltjait. Ez utóbbiakra az alábbi tétel igaz.

**2.7.3. Tétel.** *Legyen*

$$t_j := \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)h_j(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)h(x-j)\, dx \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

*és tegyük fel, hogy van olyan $g \in L^\infty[-\pi,\pi]$ függvény, amelynek a (trigonometrikus) Fourier-sora*

$$t_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2t_j \cos(jx) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

*alakú. Ekkor a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer a zárt*

$$V_0 := \overline{\mathcal{L}[\{h_j \in X : j \in \mathbf{Z})\}]}$$

*altérben akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha alkalmas $\alpha > 0$ konstanssal*

$$g(x) \geq \alpha \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]).$$

*Az utóbbi esetben van olyan $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, amellyel a $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $V_0$-ban, ahol*

$$\varphi_j(x) := \varphi(x-j) \qquad (x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{Z}).$$

Tegyük fel ui. először azt, hogy a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a $V_0$-ban. Ekkor a 2.7.1. Lemma szerint a

$$T(a) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n \qquad \Big(a = (a_n, n \in \mathbf{Z}), \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty\Big)$$

előírással definiált $T$ operátor[21] korlátos lineáris leképezés és

$$c \cdot \|a\|_{\ell_2} \leq \|T(a)\| \leq C \cdot \|a\|_{\ell_2}.$$

Ha $T^*$ jelöli a $T$ adjungáltját, akkor a szóban forgó $a = (a_n, n \in \mathbf{Z})$ sorozatokra

$$\|T(a)\|^2 = \langle T(a), T(a)\rangle = \langle T^*T(a), a\rangle_{\ell_2}.$$

Könnyű megadni a $T^*T$ operátor

$$\mathcal{M} = (t_{ij})_{i,j=-\infty}^{+\infty}$$

„mátrix”-reprezentációját:

$$T^*T(a) = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} t_{ij} a_j, i \in \mathbf{Z}\right),$$

ahol

$$t_{ij} = \langle T^*T(e^{(j)}), e^{(i)}\rangle_{\ell_2} =$$
$$\langle T(e^{(j)}), T(e^{(i)})\rangle = \langle h_j, h_i\rangle = \langle h, h_{i-j}\rangle = t_{i-j} \qquad (i, j \in \mathbf{Z}).$$

Tehát

$$T^*T(a) = \mathcal{M}a.$$

Világos, hogy

$$t_{-k} = t_k \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

[21] Speciális esetként (amennyiben a $h$ az előbbi kalap-függvény) $T = H$.

ezért a $g$ függvény trigonometrikus Fourier-sorának a komplex alakja a következő:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_k \varepsilon_k.$$

Mutassuk meg, hogy az $M_g$ operátort meghatározó mátrix szintén $\mathcal{M}$ az alábbi értelemben: ha

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \varepsilon_k \in L^2[-\pi,\pi],$$

akkor

$$M_g(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k M_g(\varepsilon_k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l \varepsilon_l,$$

ahol

$$\beta_l := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} t_{l-j}\alpha_j \qquad (l \in \mathbf{Z}).$$

Ui. az $l \in \mathbf{Z}$ indexekre

$$\beta_l = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) e^{-\imath l x} dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} t_k e^{\imath k x} f(x) e^{-\imath l x} dx =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{t_k}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\imath(l-k)x} dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} t_k \alpha_{l-k} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} t_{l-j}\alpha_j$$

(ahol a második egyenlőség a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget is felhasználva

$$\left| \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) e^{-\imath l x} dx - \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} t_k e^{\imath k x} f(x) e^{-\imath l x} dx \right|^2 \le$$

$$\left( \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(x) - \sum_{k=-n}^{n} t_k e^{\imath k x} \right| \cdot |f(x)|\, dx \right)^2 \le$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(x) - \sum_{k=-n}^{n} t_k e^{\imath k x} \right|^2 dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \to 0 \qquad (n \to +\infty)$$

miatt következik).

Ha tehát $f \in L^2[-\pi,\pi]$ és a $\gamma$ az $f$ függvény (trigonometrikus) Fourier-együtthatóinak a sorozata, akkor a Parseval-egyenlőség alapján

$$\frac{t_k}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} M_g(f)(x)f(x)\,dx = \frac{t_k}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x)|f(x)|^2 dx =$$

$$\langle \mathcal{M}\gamma, \gamma\rangle_{\ell_2} = \langle T^*T(\gamma), \gamma\rangle_{\ell_2} = \|T(\gamma)\|^2 \geq 0.$$

Innen egyszerűen következik, hogy

$$g(x) \geq 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]).$$

Ha ui. a $\{g<0\}$ halmaz pozitív (Lebesgue-)mértékű:

$$\mu(\{g<0\}) > 0,$$

akkor a 2.7.3. Lemma bizonyításában látottakkal megegyező módon egy alkalmasan vett $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén az

$$A := \{g < -1/n\}$$

halmazra $\mu(A) > 0$ állna fenn. Ha viszont $f := \chi_A$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)|f(x)|^2 dx = \int_A g(x)\,dx \leq -\frac{\mu(A)}{n} < 0,$$

ami ellentmond az előbbieknek.

Beszélhetünk tehát az $M_{\sqrt{g}}$ operátorról, ahol a 2.7.1. Lemma és az előbbiek szerint

$$c\cdot \|f\|^2 = c\cdot \|\gamma\|_{\ell_2}^2 \leq \|T(\gamma)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} M_g(f)(x)f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} |M_{\sqrt{g}}(f)(x)|^2\,dx.$$

A 2.7.3. Lemma $3^o$ állítása miatt ezért

$$\sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2\pi c} \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi])$$

teljesül, azaz

$$g(x) \geq \alpha := 2\pi c > 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]).$$

Ezzel a 2.7.3. Tételbeli $\alpha$-ra vonatkozó állítás szükségességét beláttuk. Az elégségességhez legyen az

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k \varepsilon_k$$

trigonometrikus polinom[22]. Ha

$$g(x) \geq \alpha > 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi, \pi]),$$

akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_g(f)(x) f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) |f(x)|^2 dx \geq \alpha \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi\alpha \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma_k|^2.$$

A Parseval-egyenlőség szerint a $\gamma := (\gamma_k, k \in \mathbf{Z})$ jelöléssel

$$2\pi \cdot \|g\|_\infty \cdot \|\gamma\|_{\ell_2}^2 = \|g\|_\infty \cdot \|f\|^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} M_g(f)(x) f(x)\, dx =$$

$$2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} t_{k-j} \gamma_j \right) \cdot \overline{\gamma_k} =$$

$$2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\gamma_k} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) h(x-k+j)\, dx =$$

$$2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\gamma_k} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-j) h(x-k)\, dx =$$

$$2\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j h(x-j) \right|^2 dx,$$

[22] Tehát a $\{k \in \mathbf{Z} : \gamma_k \neq 0\}$ halmaz véges.

ezért

$$\sqrt{\|g\|_\infty}\cdot \|\gamma\|_{\ell_2} \geq \left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j h_j \right\| \geq \sqrt{\alpha}\cdot \|\gamma\|_{\ell_2}.$$

Így a $(***)$ jellemzést figyelembe véve a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a $V_0$-ban.

Most lássuk be, hogy van olyan $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, amellyel a $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $V_0$-ban, ahol

$$\varphi_j(x) := \varphi(x-j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z}).$$

A 2.7.1. Lemma szerint értelmezhető a $V_0$-ra képező

$$T(a) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n \qquad \left(a = (a_n, n \in \mathbf{Z}),\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty\right)$$

korlátos lineáris $T$ operátor. Az előbbiek szerinti $g \in L^\infty[-\pi,\pi]$ függvényre valamilyen $\alpha > 0$ számmal

$$g(x) \geq \alpha \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi])$$

és $M_g = T^*T$. Innen az is következik, hogy

$$g^{-1/2}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]).$$

Legyen a $g^{-1/2}$ függvény (trigonometrikus) Fourier-sora

$$c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2c_k \cos(kx),$$

ahol tehát

$$c_k := c_{-k} := \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{g(x)}}\, dx \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és a $c := (c_n, n \in \mathbf{Z})$ jelöléssel tekintsük a

$$\varphi := T(g^{-1/2}) := T(c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h_n$$

függvényt. Ekkor

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \langle T(\varepsilon_{-j} g^{-1/2}), T(\varepsilon_{-k} g^{-1/2}) \rangle = \langle T^*T(\varepsilon_{-j} g^{-1/2}), \varepsilon_{-k} g^{-1/2} \rangle =$$

$$\langle M_g M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_{-j}), M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_{-k})\rangle =$$
$$\langle M_{g^{-1/2}} M_g M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_{-j}), \varepsilon_{-k}\rangle = \langle \varepsilon_j, \varepsilon_k\rangle = \delta_{jk}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált.

Nyilvánvaló, hogy

$$\varphi_j \in V_0 \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

így

$$\widetilde{V_0} := \overline{\mathcal{L}[\{\varphi_j \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{R}\}]} \subset V_0.$$

Továbbá

$$\varphi_k = T M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_k) \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Az is világos, hogy az

$$M_{g^{-1/2}} : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

operátor invertálható és

$$M^{-1}_{g^{-1/2}} = M_{\sqrt{g}}.$$

Legyen ezek után az $F \in V_0$ tetszőleges. Mivel a $T$ operátor ráképez a $V_0$-ra, ezért egy alkalmas $f \in V_0$ függvénnyel $F = T(f)$, ahol a

$$G := M_{\sqrt{g}}(f)$$

jelöléssel

$$f = M_{g^{-1/2}}(G).$$

Fejtsük (trigonometrikus) Fourier-sorba a $G$-t:

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \varepsilon_n,$$

ekkor

$$F = T(M_{g^{-1/2}}(G)) = T\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_n)\right) =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n T(M_{g^{-1/2}}(\varepsilon_n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \varphi_n.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy $\widetilde{V_0} = V_0$, más szóval a $(\varphi_j, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázis a $V_0$-ban.

Tekintsük pl. a fenti $h$ *kalap-függvényt*:

$$h(x) := \begin{cases} 1+x & (-1 \le x \le 0) \\ 1-x & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1]), \end{cases}$$

akkor (a 2.7.3. Tétel jelöléseivel)

$$t_0 = \int_{-1}^{1} h^2(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$t_1 = \int_{-1}^{1} h(x)h(x-1)\,dx = \int_{0}^{1} h(x)h(x-1)\,dx = \int_{0}^{1} (1-x)x\,dx = \frac{1}{6},$$

$$t_j = \int_{-1}^{1} h(x)h(x-j)\,dx = 0 \qquad (j = 2,3,...).$$

A

$$g(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos x \qquad (x \in [-\pi,\pi])$$

függvény nyilván eleget tesz a 2.7.3. Tételbeli feltételeknek az $\alpha := 1/3$ konstanssal.

Legyen valamilyen $f \in L^1(\mathbf{R})$ függvény esetén most az $\widehat{f}$ az $f$ függvény *Fourier-transzformáltja,* azaz

$$\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi\imath tx}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Jól ismert, hogy az $\widehat{f}$ folytonos függvény, ill. a Fourier-transzformált értelmezése az $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$-ről kiterjeszthető az $L^2(\mathbf{R})$-re és ($f \in L^2(\mathbf{R})$ esetén ugyancsak az eddigi $\widehat{f}$ szimbólummal jelölve a kiterjesztés eredményét) $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$, valamint[23] $\|\widehat{f}\| = \|f\|$. Ekkor a 2.7.3. Tételbeli tetszőleges $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény $h_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ eltoltjaiból álló $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszerre igaz a

[23]Emlékeztetünk arra, hogy $\|\varphi\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2\,dt}$ $(\varphi \in L^2(\mathbf{R})$.

**2.7.4. Tétel.** *A* $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ *függvényrendszer a*

$$V_0 := \overline{\mathcal{L}[\{h_j \in X : j \in \mathbf{Z})\}]}$$

*zárt altérben akkor és csak akkor alkot Riesz-bázist, ha alkalmas* $0 < m \le M$ *konstansokkal*

$$m \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \le M \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

*Ekkor tetszőleges* $n \in \mathbf{Z}$ *mellett a*

$$h_{nj}(x) := 2^{n/2} h(2^n x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z})$$

*rendszer Riesz-bázis a*

$$V_n := \overline{\mathcal{L}[\{h_{nj} \in X : j \in \mathbf{Z}\}]}$$

*altérben.*

Legyenek ui. az $\alpha_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatók olyanok, amelyekre

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^2 < +\infty.$$

Ekkor az előbb említett $\|f\| = \|\widehat{f}\|$ izometria alapján

$$\left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_j \right\| = \left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \widehat{h}_j \right\|,$$

ahol

$$\widehat{h}_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-j) e^{-2\pi\imath t x} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi\imath (t+j) x} dt =$$

$$e^{-2\pi\imath j x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi\imath t x} dt =: e_j(x) \widehat{h}(x) \qquad (j \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$\left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_j \right\|^2 = \left\| \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j \right) \widehat{h} \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j(x) \right|^2 \cdot |\widehat{h}(x)|^2 dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j(x) \right|^2 \cdot |\widehat{h}(x+k)|^2 dx =$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j(x) \right|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 dx.$$

(Mivel

$$\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\widehat{h}(x+k)|^2 dx =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |\widehat{h}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x)|^2 dx = \|h\|^2 < +\infty,$$

ezért

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).)$$

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \leq M \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

igaz. A fentieket és a Parseval-egyenlőséget figyelembe véve

$$\left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_j \right\| \leq \sqrt{M} \cdot \sqrt{\int_0^1 \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j(x) \right|^2 dx} = \sqrt{M} \cdot \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^2},$$

azaz teljesül a $(***)$-beli jobb oldali egyenlőtlenség. Ugyanígy kapjuk a bal oldalit is, tehát (ld. 2.7.2. Lemma) a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ Riesz-bázis a $V_0$-ban.

Ha most ez utóbbiból indulunk ki, akkor legyen $\alpha > 0$ és

$$A_\alpha := \left\{ x \in [0,1] : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 > \alpha \right\}.$$

Feltehető, hogy valamilyen $\alpha$-ra az $A_\alpha$ halmaz (Lebesgue-)mértéke pozitív:

$$\mu(A_\alpha) > 0,$$

különben[24]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)| = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]).$$

Így

$$0 = \|\widehat{h}\| = \|h\|,$$

ami nyilván kizárható. A $\chi_{A_\alpha}$ karakterisztikus függvényt (trigonometrikus) Fourier-sorba fejtve kapjuk a

$$\chi_{A_\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n$$

előállítást, ahol a Parseval-egyenlőséget alkalmazva

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \int_0^1 \chi_{A_\alpha}(x)\,dx = \mu(A_\alpha) < +\infty.^{25}$$

Az előbbiek szerint

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n \right\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n e_n)\,\widehat{h} \right\|^2 = \int_0^1 \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(x) \right|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 dx =$$

$$\int_{A_\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 dx > \alpha^2 \cdot \mu(A_\alpha) = \alpha^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2.$$

A $(***)$ tulajdonság miatt

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n \right\| \le C \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2},$$

[24] Figyelembe véve, hogy $\{x \in [0,1] : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$.

[25] Megjegyezzük, hogy a Carleson-tétel miatt $\chi_{A_\alpha}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(x)$ (m.m. $x \in [0,1]$) is igaz.

ezért minden ilyen $\alpha$-ra $C > \alpha$. Következésképpen szükségszerűen igaz, hogy

$$\mu(A_\alpha) = 0 \qquad (\alpha \geq C),$$

speciálisan $\mu(A_C) = 0$. Tehát[26]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \leq M := C \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Analóg módon kapjuk a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \geq m := c > 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

alsó becslést is, ha az $A_\alpha$ $(\alpha > 0)$ helyett a

$$B_\alpha := \left\{ x \in [0,1] : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 < \alpha \right\}$$

halmazból indulunk ki.[27]

Nyilvánvaló, hogy

$$h_{0j} = h_j \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy a $(***)$-ban szereplő bármely $\alpha_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$\left\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k h_{nk} \right\| = \left\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k h_k \right\|,$$

azaz a $(***)$ egyszerre igaz a $(h_k, k \in \mathbf{Z})$ és tetszőleges $n \in \mathbf{Z}$ esetén a $(h_{nk}, k \in \mathbf{Z})$ rendszerekre. Más szóval a 2.7.4. Tétel második része már triviális.

Tekintsük példaként ismét a fenti $h$ kalap-függvényt. Ekkor

$$\widehat{h}(x) = \int_{-1}^{0} (t+1)e^{-2\pi\imath tx}\, dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-2\pi\imath tx}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

[26] Az $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2$ függvény 1 szerinti nyilvánvaló periodicitását is figyelembe véve.

[27] Ti. most a $\chi_{B_\alpha}$ függvényt fejtve Fourier-sorba azt mondhatjuk, hogy $\mu(B_\alpha) > 0 \Longrightarrow c < \alpha$. Így $\mu(B_\alpha) = 0$ $(0 < \alpha \leq c)$, többek között $\mu(B_c) = 0 \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \geq c$ $(\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$.

tehát

$$\widehat{h}(0) = \int_{-1}^{0} (t+1)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt = 1,$$

valamint $x \neq 0$ esetén (parciálisan integrálva)

$$\widehat{h}(x) = \left[(t+1)\frac{e^{-2\pi\imath tx}}{-2\pi\imath x}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2\pi\imath x}\cdot \int_{-1}^{0} e^{-2\pi\imath tx}\,dt +$$

$$\left[(1-t)\frac{e^{-2\pi\imath tx}}{-2\pi\imath x}\right]_{0}^{1} - \frac{1}{2\pi\imath x}\cdot \int_{0}^{1} e^{-2\pi\imath tx}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi^2 x^2} - \frac{1}{4\pi^2 x^2}\left(e^{2\pi\imath x} + e^{-2\pi\imath x}\right) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{2\pi^2 x^2} = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2.$$

Innen világos, hogy

$$0 \neq x \in \mathbf{Z} \Longrightarrow \widehat{h}(x) = 0,$$

ill., ha $x \notin \mathbf{Z}$, akkor

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{h}(x+k)|^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi(x+k))}{\pi(x+k)}\right)^4 =$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x+k)}\right)^4 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4.$$

Legyen az $l \in \mathbf{Z}$ olyan, hogy

$$|x-l| = \min\{|x-k| : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ekkor nyilván $|x-l| \leq 1/2$ és

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l+n)}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 + \sum_{l\neq n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l+n)}\right)^4 \leq 1 + \sum_{l\neq n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l+n)}\right)^4,$$

továbbá bármely $\mathbf{Z} \ni n \notin \{0, l\}$ egész számra

$$|x-l+n| \geq |n| - \frac{1}{2} \geq \frac{|n|}{2}.$$

Ezért $l = 0$ esetén

$$\sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l+n)}\right)^4 \le \frac{16}{\pi^4}\cdot \sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{n^4},$$

más szóval a

$$Q := 1 + \frac{16}{\pi^4}\cdot \sum_{0\neq n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{n^4}$$

jelöléssel

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4 \le Q.$$

Ha azonban $l \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l)}\right)^4 = \left(\frac{\sin(\pi(x-l))}{\pi(x-l)}\right)^4 \le 1.$$

Következésképpen

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4 \le 2 + Q,$$

vagyis a 2.7.4. Tételben az $M$ helyébe $2+Q$ írható.

Az említett tételbeli alsó becsléshez legyen $x \notin \mathbf{Z}$. Ha valamilyen $l \in \mathbf{Z}$ mellett

$$x \in [l + 1/4, l + 3/4],$$

akkor

$$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi(x-l)| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ezért

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4 \ge \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l)}\right)^4 = \left(\frac{\sin(\pi(x-l))}{\pi(x-l)}\right)^4 \ge \frac{1}{4\pi^4|x-l|^4} \ge \frac{1}{4\pi^4}.$$

Ha viszont egy $l \in \mathbf{Z}$ esetén

$$|x-l| < 1/4,$$

akkor vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (0 < |t| < 1/4).$$

Tehát

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right)^4 \geq \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-l)}\right)^4 = \left(\frac{\sin(\pi(x-l))}{\pi(x-l)}\right)^4 \geq \frac{1}{4}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $m := 1/(4\pi^4)$ választás megfelelő a 2.7.4. Tételben.

Negatív példaként mutassuk meg, hogy a

$$h := \chi_{[0,2]}$$

függvényre nem teljesül a 2.7.4. Tételbeli feltétel. Ui. az $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ választással

$$\widehat{h}(x) = \int_0^2 e^{-2\pi\imath xt}\,dt = \left[\frac{e^{-2\pi\imath xt}}{-2\pi\imath x}\right]_0^2 = \frac{1-e^{-4\pi\imath x}}{2\pi\imath x}.$$

Ezért

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{h}(x+k)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1-e^{-4\pi\imath(x+k)}}{x+k}\right|^2 =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\cdot\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1-e^{-4\pi\imath x)}}{x+k}\right|^2 = \frac{\sin^2(2\pi x)}{\pi^2}\cdot\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(x-k)^2}.$$

Legyen $0<\delta<1/4$ és $|x-1/2|<\delta$. Ekkor

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(x-k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(x-k)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(x-k)^2} <$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{k^2}+32+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2} = 32+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} =: q.$$

Világos, hogy bármely $m>0$ számmal a fenti $\delta$ megválasztható úgy, hogy

$$|x-1/2|<\delta \Longrightarrow \frac{q\cdot\sin^2(2\pi x)}{\pi^2} < m.$$

Mivel az $(1/2-\delta, 1/2+\delta)$ intervallum pozitív mértékű, ezért nem létezik a 2.7.4. Tételben említett $m>0$ szám.

A

$$h_j(x) := \chi_{[0,2]}(x-j) = \chi_{[j,j+2]}(x) \qquad (x\in\mathbf{R},\ j\in\mathbf{Z})$$

függvények tehát nem alkotnak Riesz-bázist a $V_0$-ban, ami valójában a 2.7.4. Tétel nélkül is „látszik”: nem teljesül ebben az esetben a $(***)$ feltétel. Legyen ui.

$$\alpha_k := (-1)^k \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és $N \in \mathbf{N}$. Ekkor

$$\left\|\sum_{k=0}^{N} \alpha_k h_k\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,j=0}^{N} \alpha_k \alpha_j h_k(x) h_j(x)\, dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \cdot \sum_{k=0, |k-j|\leq 1}^{N} \alpha_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(x) h_j(x)\, dx =$$

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 \cdot \int_{j}^{j+2} h_j^2(x)\, dx +$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\alpha_{j-1} \cdot \int_{j}^{j+1} h_j(x) h_{j-1}(x)\, dx + \alpha_{j+1} \cdot \int_{j+1}^{j+2} h_j(x) h_{j+1}(x)\, dx\right) +$$

$$\alpha_0 \alpha_1 \cdot \int_{1}^{2} h_0(x) h_1(x)\, dx + \alpha_N \alpha_{N-1} \cdot \int_{N}^{N+1} h_N(x) h_{N-1}(x)\, dx =$$

$$2 \cdot \sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \alpha_{j-1} = 2.$$

Ha tehát a $(***)$ bal oldala teljesülne, akkor

$$2 \geq c^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k|^2 = c^2 (N+1)$$

állna fenn minden $N \in \mathbf{N}$ mellett. Ilyen $c > 0$ szám nyilván nem létezik.

A Riesz-bázisok is rendelkeznek a 2.5.1. Tétellel analóg stabilitási tulajdonsággal, miszerint, ha a $(z_n, n \in \mathbf{N})$ Riesz-bázis valamilyen $X$ Hilbert-térben és az $(y_n, n \in \mathbf{N})$ olyan $X$-beli minimális rendszer, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n - y_n\|^2 < +\infty,$$

akkor az $(y_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer is Riesz-bázis.

Az $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszert *kvázi-normáltnak* nevezzük, ha

$$\inf\{\|z_n\| : n \in \mathbf{N}\} > 0 \text{ és } \sup\{\|z_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Nyilván minden $z$ Riesz-bázis (ld. $(***)$) kvázi normált. Sőt, ha a $z$ kvázi-normált feltétlen bázis, akkor Riesz-bázis. Igaz tehát az alábbi ekvivalencia:

**2.7.5. Tétel.** *Egy $X$-beli rendszer pontosan akkor Riesz-bázis, ha kvázi-normált feltétlen bázis.*

Ezzel kapcsolatos egy érdekes eredmény, miszerint van olyan kvázi-normált bázis, amelyik nem Riesz-bázis.

## 2.8. Megjegyzések

i) Tekintsük az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-teret, ekkor az ismert Riesz-reprezentációs tétel (ld. 10.7.) szerint bármely $\varphi \in X^*$ funkcionálhoz egyértelműen megadható olyan $a \in X$ elem, hogy

$$\varphi(x) = \langle x, a\rangle \qquad (x \in X)$$

és $\|\varphi\| = \|a\|$. Ezért a $\varphi$-t „azonosítva" az itt szereplő $a$-val, a $\varphi(x)$ helyett azt írjuk, hogy

$$\langle x, \varphi\rangle \qquad (x \in X).$$

Ilyen értelemben tehát a $z$ és a $z^*$ rendszerek biortogonalitása (ld. 2.2.) azt jelenti, hogy

$$\langle z_k, z_n^*\rangle = \delta_{nk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$[28]

Ha a $z$ ONR, akkor nyilván önmagával biortogonális.

ii) Legyen a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis az $(X, \|.\|)$ normált térben, a $z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N})$ pedig a $z$-vel biortogonális koordináta-funkcionálok rendszere. Ekkor bármely $x \in \mathcal{L}[z]$ esetén

$$\|z_n^*(x) z_n\| = |z_n^*(x)| \cdot \|z_n\| \leq 2\varrho(x),$$

[28]Gyakran használják tetszőleges normált tér esetén is a $z_n^*(z_k)$ szimbólum helyett a $\langle z_k, z_n^*\rangle$ jelölést.

így (ld. 2.2.)

$$\|z_n^*\| \le \frac{2B_z}{\|z_n\|} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát a $z$ normált rendszer, más szóval

$$\|z_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\|z_n^*\| \le 2B_z.$$

iii) A (2.2.1) feltételek közül a „legkritikusabb” a harmadik előírás. A későbbiekben (speciális bázisok kapcsán) külön is foglalkozunk ezzel a kérdéssel, módszert adva az $S_n$ $(n \in \mathbf{N})$ operátorok egyenletes korlátosságának a kezeléséhez.

iv) Ha a $(z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a $z$-vel biortogonális rendszer, akkor (ld. 2.4.)

$$\widehat{X}_z = \{(z_n^*(x), n \in \mathbf{N}) : x \in X\}.$$

v) Legyen (ld. 2.4.)

$$\|x\|_* := |(z_n^*(x), n \in \mathbf{N})|_z \qquad (x \in X),$$

akkor $\|.\|$, $\|.\|_*$ ekvivalens normák az $X$-en.

vi) Ha az $(X, \langle\rangle)$ szeparábilis Hilbert-tér, a $z$ pedig ortonormált bázis az $X$-ben, akkor a Riesz–Fischer-tétel (ld. 10.3.) miatt

$$\widehat{X}_z = \ell_2$$

és

$$|a|_z = \|a\|_{\ell_2} \qquad (a \in \widehat{X}_z),$$

a (ld. 2.4.)

$$\Phi : \widehat{X}_z \to X$$

leképezés pedig izomorfia és izometria.

vii) A 2.5.1. Tételre tekintettel világos, hogy ha az $(X, \|.\|)$ Banach-térben van bázis, akkor bármely, az $X$-ben sűrű halmaz elemeiből is kiválasztható $X$-beli bázis.

viii) Legyen szó pl. a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ térről. Láttuk (ld. 2.1.), hogy ebben minden Schauder-szerű rendszer bázis. Mivel a polinomok halmaza sűrű a $C[0,1]$-ben, ezért a $C[0,1]$-ben van (az egyenletes konvergenciára nézve) polinomokból álló bázis.

ix) Az előző megjegyzéssel kapcsolatos a következő érdekes probléma. Legyen

$$P = (P_n, n \in \mathbf{N})$$

egy polinomokból álló bázis a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ térben és jelöljük $\vartheta_n$-nel a $P_n$ polinom fokszámát:

$$\vartheta_n := \operatorname{grad} P_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$q_n := \max\{\vartheta_0, ..., \vartheta_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor – lévén a $P_0, ..., P_n$ polinomok legfeljebb $q_n$-edfokúak és lineárisan függetlenek –

$$q_n \geq n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és a $P$ bázis szerinti $n$-edik részletösszeg-operátor $(S_n)$ a $C[0,1]$ teret a legfeljebb $q_n$-edfokú polinomok $\mathcal{P}_{q_n}$ alterébe képezi. Amennyiben valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $q_n = n$, akkor bármely $R \in \mathcal{P}_{q_n}$ polinomra $S_n(R) = R$ teljesül, más szóval ekkor az

$$S_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_{q_n}$$

egy projekció. Ismeretes (ld. Lozinszkij–Harsiladze-tétel (10.5.)), hogy ebben az esetben (egy alkalmas $C > 0$ abszolút konstanssal)

$$\|S_n\| \geq C \cdot \ln q_n = C \cdot \ln n.$$

Mivel

$$\sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

ezért az

$$\{n \in \mathbf{N} : q_n = n\}$$

halmaz legfeljebb véges. A kérdés most már az, hogy mit lehet mondani a $(q_n/n)$ sorozatról.[29]

[29] A meglehetősen bő, idevágó irodalomból csak a P. Wojtaszczyk – K. Wozniakowski: *Orthonormal polynomial bases in function spaces* dolgozatra (ld. Irodalomjegyzék) hívjuk fel a figyelmet.

x) A Banach-konstans (ld. 2.2.) mintájára vezessük be a „feltétlen” Banach-konstans fogalmát. Legyen adott ehhez a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ lineárisan független rendszer az $(X, \|.\|)$ Banach-térben,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}[z]$$

esetén pedig legyen (ld. 2.6.)

$$\sigma(x) := \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \beta_k z_k \right\| : n \in \mathbf{N},\, \varepsilon = (\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_{\pm} \right\}.$$

A

$$B_z^* := \sup\{\sigma(x) : x \in \mathcal{L}[z],\, \|x\| \le 1\}$$

számot (vagy a $+\infty$-t) a $z$ rendszer *feltétlen Banach-konstansának* nevezzük. Ha a $z$ zárt rendszer, akkor pontosan abban az esetben lesz feltétlen bázis az $X$-ben, ha $B_z^* < +\infty$.

xi) Egy Hilbert-térben bármely $z$ zárt ONR (a Riesz–Fischer-tétel (ld. 10.3.) miatt) feltétlen bázis és $B_z^* = 1$.

xii) A 2.7.4. Tétel második része, miszerint a $(h_{nj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a $V_n$-ben $(n \in \mathbf{Z})$ egyszerűen következik a tétel első feléből. Ti. (adott $n, j \in \mathbf{Z}$ mellett) a

$$g(x) := 2^{n/2} h(2^n x + (2^n - 1)j) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

jelöléssel $h_{nj} = g_j$ és (megfelelő helyettesítéssel)

$$\widehat{g}(x) = 2^{n/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(2^n t + (2^n - 1)j) e^{-2\pi\imath xt} dt =$$

$$2^{-n/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-2\pi\imath x(y-(2^n-1)j)2^{-n}} dy = 2^{-n/2} e^{2\pi\imath x(2^n-1)j2^{-n}} \cdot \widehat{h}(x/2^n).$$

Tehát

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x+k)|^2 = 2^{-n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}((x+k)2^{-n})|^2 =$$

$$2^{-n} \cdot \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{2^n-1} |\widehat{h}((x + (q2^n + l))2^{-n})|^2 =$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}((x+l)2^{-n}+q|^2.$$

Legyen (az idézett tétel jelöléseivel)

$$A := \{z \in \mathbf{R} : m \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(z+k)|^2 \leq M\},$$

ekkor az $\mathbf{R} \setminus A$ halmaz nulla (Lebesgue-) mértékű. Ha

$$A_l := \{x \in \mathbf{R} : (x+l)2^{-n} \in A\} \qquad (l = 0, ..., 2^n - 1),$$

akkor a

$$B := \mathbf{R} \setminus \bigcap_{l=0}^{2^n-1} A_l$$

is nulla mértékű és $x \in \bigcap_{l=0}^{2^n-1} A_l$ esetén

$$m \leq \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}((x+l)2^{-n}+q)|^2 \leq M.$$

Ezért m.m. $x \in \mathbf{R}$ választással

$$m = 2^{-n} \cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} m \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x+k)|^2 \leq 2^{-n} \cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} M = M.$$

Következésképpen a $(h_{nj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a $V_n$-ben.

xiii) A (ld. 2.7.) $(***)$ jellemzésből (az előbbi megjegyzéstől függetlenül) triviálisan következik az, hogy ha a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ Riesz-bázis a $V_0$-ban, akkor egyúttal a $(h_{nj}, j \in \mathbf{Z})$ is Riesz-bázis a $V_n$-ben $(n \in \mathbf{Z})$ (ld. 2.7.4. Tétel). Ui. tetszőleges $\alpha_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ (legfeljebb véges sok $j$-re nem nulla) együtthatók esetén (véve az $y := 2^n x$ helyettesítést)

$$\left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_{nj} \right\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j 2^{n/2} h(2^n x - j) \right|^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h(y-j) \right|^2 dy} = \left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j h_j \right\|.$$

Ha tehát a $(***)$ igaz a $(h_j, j \in \mathbf{Z})$ rendszerre, akkor (ugyanazokkal a $c, C$ konstansokkal) a $(***)$ teljesül a $(h_{nj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszerre is.

xiv) Belátható (ld. 2.7.3. Tétel), hogy van olyan $\varphi \in V_0$ függvény, amelyre a[30]

$$(\tau_j \varphi, j \in \mathbf{Z})$$

ortonormált rendszer és minden ilyen $\varphi$-re egyúttal a $(\tau_j \varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer bázis a $V_0$-ban.

xv) A 2.7.4. Tételbeli ekvivalencia szükségességének a bizonyításában az alábbiak szerint is eljárhatunk. Legyen

$$x \in [0,1],\ 0 < k \in \mathbf{N}$$

és

$$f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

az az 1 szerint periodikus függvény, amelyre

$$f_k(t) := \sqrt{k} \qquad (x \le t < x + 1/k).$$

Ha most

$$a_n := \int_0^1 f_k(t) e_{-n}(t)\, dt \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

jelöli az $f_k$ (trigonometrikus) Fourier-együtthatóit, akkor egyrészt (ld. Carleson-tétel, ill. Parseval-egyenlőség)

$$f_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(x) \qquad (\text{m.m. } t \in [0,1])$$

és

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \int_0^1 |f_k(t)|^2 dt = 1.$$

[30] $\tau_j \varphi(x) := \varphi(x-j) \quad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z})$.

Másrészt (ld. 2.7.4. Tétel bizonyítása) láttuk, hogy

$$C = C\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \geq \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_n \right\|^2 = \left\| \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n \right) \widehat{h} \right\|^2 =$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(t) \right|^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(t+j)|^2 dt = \int_0^1 |f_k(t)|^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(t+j)|^2 dt =$$

$$k\cdot \int_x^{x+1/k} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(t+j)|^2 dt = \frac{F(x+1/k) - F(x)}{1/k},$$

ahol

$$F(z) := \int_0^z \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(t+j)|^2 dt \qquad (z \in [0,1]).$$

Az $F$ integrálfüggvény m.m. $z \in [0,1]$ esetén differenciálható és

$$F'(z) = \lim_{k\to+\infty} \frac{F(z+1/k) - F(z)}{1/k} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(z+j)|^2.$$

Tehát m.m. $x \in [0,1]$ (és így egyúttal m.m. $x \in \mathbf{R}$) helyen a fentiek alapján

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+j)|^2 = \lim_{k\to+\infty} \frac{F(x+1/k) - F(x)}{1/k} \leq C$$

is teljesül. (A

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+j)|^2 \geq c \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

alsó becslést ugyanígy kapjuk.)

xvi) Legyen valamilyen $a_n$ $(n \in \mathbf{N})$ számsorozat esetén

$$\Delta a_n := a_n - a_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ill.

$$\Delta^2 a_n := \Delta a_n - \Delta a_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az illető sorozat első-, ill. másodrendű *differencia-sorozata.* Tegyük fel, hogy valamilyen $1 < p \leq +\infty$ mellett az

$$(n^{1-1/p}a_n, n \in \mathbf{N}),\ (n^{2-1/p}\Delta a_n, n \in \mathbf{N})$$

sorozatok korlátosak és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2-1/p}|\Delta^2 a_n| < +\infty.$$

Ekkor jól ismert a trigonometrikus sorok elméletéből, hogy a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

koszinusz-sor egy alkalmas $f \in L^p[-\pi, \pi]$ függvény (trigonometrikus) Fourier-sora. Speciálisan, ha a 2.7.3. Tételbeli $t_j = t_{-j}$ $(j \in \mathbf{N})$ együtthatókra a

- $\sup_j j\cdot |t_j| < +\infty$,
- $\sup_j j^2\cdot |\Delta t_j| < +\infty$,
- $\sum_{j=0}^{+\infty} j^2\cdot |\Delta^2 t_j| < +\infty$

feltételek teljesülnek, akkor a

$$t_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} 2t_j \cos(jx)$$

sor egy $L^\infty[-\pi, \pi]$-beli függvény (trigonometrikus) Fourier-sora.

xvii) Ha pl. valamilyen $C > 0$ és $\alpha > 3$ paraméterrel (a 2.7.3. Tételben)

$$|h(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor belátható (ld. később), hogy alkalmas $C_\alpha > 0$ együtthatóval

$$|t_j| \leq C_\alpha j^{-\alpha} \qquad (0 < j \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor (ld. xvi))

$$j\cdot |t_j| \leq C_\alpha j^{-\alpha+1} \ \text{ és } \ j^2\cdot |\Delta^2 t_j| \leq C_\alpha j^{-\alpha+2} \qquad (0 < j \in \mathbf{N})$$

miatt a fenti • feltételek teljesülnek.

xviii) Nem nehéz belátni, hogy nincs olyan $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, amellyel a

$$(\tau_j h, j \in \mathbf{Z})$$

rendszer Riesz-bázis az $L^2(\mathbf{R})$-ben. Ha ui. valamilyen $h$ mégis ilyen lenne, akkor bármely $f \in L^2(\mathbf{R})$ esetén alkalmas $a_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \tau_j h$$

és

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 < +\infty$$

teljesülne. Innen

$$\widehat{f} = \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e_j \right) \cdot \widehat{h}$$

következne, ahol a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e_j$$

függvény 1 szerint periodikus. Mivel tetszőleges $F \in L^2(\mathbf{R})$ függvényhez van olyan $f \in L^2(\mathbf{R})$, amellyel $\widehat{f} = F$, ezért a következőt mondhatjuk: minden $F \in L^2(\mathbf{R})$ előállítható

$$F = G_F \widehat{h}$$

alakban alkalmas 1 szerint periodikus $G_F$ függvénnyel (ahol tehát

$$\|F - G_F \widehat{h}\| = 0,$$

azaz

$$F(x) = G_F(x) \widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})).$$

Ha itt

$$F(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor a fentiekből a $\widehat{h}$-ra a következőt kapjuk:

$$\widehat{h}(x) \neq 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Ha viszont $F := \chi_{[0,1]}$, akkor az előbb mondottakat figyelembe véve

$$F(x) = G_F(x)\widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

alapján

$$G_F(x) = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R} \setminus [0,1])$$

adódik. A $G_F$ periodikus 1 szerint, ezért egyúttal

$$G_F(x) = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R} \setminus [0,1]).$$

Ugyanakkor az

$$F(x) = 1 = G_F(x)\widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1])$$

egyenlőségnek is teljesülnie kellene, ami az előzőek szerint lehetetlen.

# 3. fejezet

# Előállítási rendszerek (framek)

Ebben a fejezetben a bázisfogalom egyfajta általánosításával foglalkozunk, röviden megadva a legalapvetőbb fogalmakat és tételeket.

## 3.1. A frame fogalma

Tekintsük a továbbiakban az $(X, \|.\|_X)$ normált teret, az $\mathcal{N}$ pedig legyen egy megszámlálható („index") halmaz, amelyen adott az

$$|.| : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$$

leképezés[1]. Erről feltételezzük, hogy bármely $k \in \mathbf{N}$ esetén az

$$\mathcal{N}_k := \{n \in \mathcal{N} : |n| \leq k\}$$

halmaz véges. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k.$$

Világos, hogy az $\mathcal{N}$ halmaz bármely

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k$$

[1]Legyen most $|n| := |.|(n) \quad (n \in \mathcal{N})$.

partíciójához[2] megadható olyan

$$|.| : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$$

függvény, hogy

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{N}_k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ilyen pl. az

$$|n| := \begin{cases} 0 & (n \in \mathcal{I}_0) \\ \\ k & (n \in \mathcal{I}_k \setminus \mathcal{I}_{k-1}) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, ...)$$

leképezés.

Ha pl. $N \in \mathbf{N}$ és a $\|.\|$ valamilyen norma az $\mathbf{R}^N$-en, akkor az $\mathcal{N} := \mathbf{N}^N$ vagy az $\mathcal{N} := \mathbf{Z}^N$ és az

$$|n| := \|n\| \qquad (n \in \mathcal{N})$$

választás nyilván megfelel a fenti elvárásoknak.

Tegyük fel, hogy adott egy

$$\varphi : \mathcal{N} \to X$$

$X$-beli „sorozat” és az

$$x_n := \varphi(n) \qquad (n \in \mathcal{N})$$

jelöléssel az

$$S_k := \sum_{n \in \mathcal{N}_k} x_n \qquad (k \in \mathbf{N})$$

*részletösszeg-sorozat* konvergál valamilyen $X$-beli $x$ elemhez:

$$\lim_{k \to \infty} \|x - S_k\|_X = 0.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ „végtelen sor” konvergens, és a következő írásmódot használjuk:

$$x = \sum_{n \in \mathcal{N}} x_n.$$

Világos, hogy ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ és

$$|n| := n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

[2]Amikor tehát az $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{N}$ véges és $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$.

akkor $S_k$ a $\sum(x_n)$ végtelen sor $k$-adik „klasszikus”

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n \qquad (k \in \mathbf{N})$$

részletösszegét jelenti. Legyen ugyanakkor pl.

$$\mathcal{N} := \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

és

$$|(r,s)| := \sqrt{r^2 + s^2} \qquad (r, s \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor az

$$S_k = \sum_{(r,s)\in\mathcal{N}_k} x_{(r,s)} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

azon $x_{(r,s)}$ elemek összege, amelyekre az

$$(r,s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

*rácspontok* a koordinátasíkon az origó középpontú $k$ sugarú körlemezben vannak. Hasonlóan, ha

$$|(r,s)| := \max\{|r|, |s|\} \qquad (r, s \in \mathbf{Z}),$$

akkor az $S_k$ a

$$[-k,k] \times [-k,k]$$

négyzetbe eső $(r,s)$ rácspontokra nézve jelenti az $x_{(r,s)}$ elemek összegét.

A most definiált konvergencia, ill. a $\sum_{n\in\mathcal{N}} x_n$ *sorösszeg* nyilván függ a $|.|$ függvény megadásától. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben tetszőleges fenti tulajdonságú $|.|$ esetén létezik a $\sum_{n\in\mathcal{N}} x_n$ összeg, ami független a $|.|$-től. Ebben az esetben azt fogjuk mondani, hogy a $\sum(x_n)$ sor *feltétlen konvergens.*

A fenti konvergencia-fogalom megvilágításához legyen valamilyen véges $\emptyset \neq \mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ esetén

$$S_{\mathcal{I}} := \sum_{n\in\mathcal{I}} x_n.$$

**3.1.1. Lemma.** *A $\sum(x_n)$ sor akkor és csak akkor feltétlen konvergens, ha alkalmas $x \in X$ elemmel bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan véges $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{N}$ halmaz, hogy az $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ feltételnek eleget tevő tetszőleges véges $\emptyset \neq \widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ halmaz esetén*

$$\left\|x - S_{\widetilde{\mathcal{N}}}\right\|_X < \varepsilon.$$

Ha ui. ez utóbbi feltétel teljesül valamilyen $x \in X$ elemmel és a

$$|.| : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$$

függvényre az $\mathcal{N}_k$ halmaz véges minden $k \in \mathbf{N}$ indexre, akkor bármely $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}$ (nem üres) véges halmazhoz létezik olyan $k_0 \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}_{k_0}.$$

Mivel $k \geq k_0$ $(k \in \mathbf{N})$ esetén az $\mathcal{N}_k$ véges és $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}_k$, ezért az

$$\mathcal{N}_* := \mathcal{N}_\varepsilon$$

választással

$$\|x - S_{\mathcal{N}_k}\|_X < \varepsilon.$$

Tehát a $\sum(x_n)$ sor feltétlen konvergens.

Fordítva, legyen most a $\sum(x_n)$ sor feltétlen konvergens,

$$x := \sum_{n \in \mathcal{N}} x_n$$

és indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett minden véges $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}$ (nem üres) halmazhoz alkalmas véges

$$\widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}, \mathcal{N}_* \subset \widetilde{\mathcal{N}}$$

halmazzal

$$\left\|x - S_{\widetilde{\mathcal{N}}}\right\|_X \geq \varepsilon.$$

Ha

$$|.| : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$$

az előbbi tulajdonságú függvény, akkor a feltétlen konvergencia miatt létezik olyan $k_0 \in \mathbf{N}$, hogy

$$\|x - S_{\mathcal{N}_k}\|_X < \varepsilon/2 \qquad (k \in \mathbf{N}, k \geq k_0).$$

Az indirekt feltétel szerint viszont valamilyen $\mathcal{N}^{(0)} \subset \mathcal{N}$ véges halmazzal $\mathcal{N}_{k_0} \subset \mathcal{N}^{(0)}$ és

$$\|x - S_{\mathcal{N}^{(0)}}\|_X \geq \varepsilon.$$

Ugyanakkor van olyan $\mathbf{N} \ni k_1 > k_0 + 1$, hogy

$$\mathcal{N}^{(0)} \subset \mathcal{N}_{k_1}$$

és
$$\left\|x - S_{\mathcal{N}_{k_1}}\right\|_X < \varepsilon/2$$
és í.t. Tehát teljes indukcióval így olyan $k_0 < k_1 < k_2 < ...$ indexsorozatot, valamint
$$\mathcal{N}^{(j)} \qquad (j \in \mathbf{N})$$
halmazsorozatot kapunk, amelyekkel $k_{j+1} > k_j + 1$, továbbá
$$\mathcal{N}_{k_j} \subset \mathcal{N}^{(j)} \subset \mathcal{N}_{k_{j+1}} \qquad (j \in \mathbf{N})$$
és
$$\left\|x - S_{\mathcal{N}_{k_j}}\right\|_X < \varepsilon/2 \qquad (j \in \mathbf{N}),$$
valamint
$$\|x - S_{\mathcal{N}^{(j)}}\|_X \geq \varepsilon \qquad (j \in \mathbf{N}).$$
Tekintsük ezek után a következő
$$|.|^* : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$$
függvényt:
$$|n|^* := \begin{cases} k_0 & (n \in \mathcal{N}_{k_0}) \\ \\ k_j & (n \in \mathcal{N}^{(j)} \setminus \mathcal{N}_{k_j}) \\ \\ k_j + 1 & (n \in \mathcal{N}_{k_{j+1}} \setminus \mathcal{N}^{(j)}) \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{N}).$$
Ekkor az értelemszerű
$$\mathcal{N}_k^* := \{n \in \mathcal{N} : |n|^* \leq k\} \qquad (k \in \mathbf{N})$$
jelöléssel
$$\left\|S_{\mathcal{N}_{k_j}^*} - S_{\mathcal{N}_{k_j-1}^*}\right\|_X = \left\|S_{\mathcal{N}^{(j)}} - S_{\mathcal{N}_{k_j}}\right\|_X \geq$$
$$\|x - S_{\mathcal{N}^{(j)}}\|_X - \left\|x - S_{\mathcal{N}_{k_j}}\right\|_X > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 \qquad (0 < j \in \mathbf{N}).$$
Ez azt jelenti, hogy a $|.|^*$ függvényre nézve a $\sum(x_n)$ sor divergál, szemben a feltételezéssel.

A fentiekben bevezetett feltétlen konvergenciával kapcsolatban az alábbiakat jegyezzük még meg. Az $\mathcal{N}$ indexhalmaz megszámlálhatósága miatt van olyan
$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathcal{N}$$

leképezés, amely bijekció. Legyen

$$S_k^{(\sigma)} := \sum_{n=0}^{k} x_{\sigma(n)} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

A 3.1.1. Lemma bizonyításával analóg módon látható be, hogy a $\sum(x_n)$ sor feltétlen konvergenciája ekvivalens a következővel: *van olyan* $x \in X$, *hogy tetszőleges*

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathcal{N}$$

*permutációra*

$$\lim_{k\to\infty} \|x - S_k^{(\sigma)}\|_X = 0.$$

Speciálisan, ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, akkor az

$$S_k^{(\sigma)} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

nem más, mint a $\sum(x_n)$ végtelen sor

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

permutációra nézve vett $\sum(x_{\sigma(n)})$ átrendezett sorának a $k$-adik részletösszege. Jól ismert az elemi analízisből, hogy egy végtelen sor feltétlen konvergenciája erősebb követelmény a szóban forgó sor konvergenciájánál. Nevezetesen, pl. egy valós számokból álló $\sum(x_n)$ végtelen sor akkor és csak akkor feltétlen konvergens, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

azaz, ha abszolút konvergens.[3]

A fejezet címében jelzett rendszerek definíciójához legyen adott egy $X^*$-beli

$$\mathbf{\Phi} = (\phi_n, n \in \mathcal{N})$$

és valamilyen $(Y, \|.\|_Y)$ normált tér esetén egy $Y$-beli

$$\mathbf{y} = (y_n, n \in \mathcal{N})$$

[3]Kevésbé triviális példa idézhető a Fourier-sorok elméletéből is (a részleteket illetően ld. később): az $f \in L^p[0, 2\pi]$ $(1 < p < +\infty)$ függvény $Sf$ trigonometrikus Fourier-sora $\|.\|_p$-normában konvergál az $f$-hez, de ez a konvergencia csak $p = 2$ esetén jelent egyúttal feltétlen konvergenciát. Más szóval, ha $p \neq 2$, akkor az $Sf$-nek van olyan átrendezése, amelyik $\|.\|_p$-normában divergál.

„sorozat”. Tehát

$$\mathbf{\Phi} : \mathcal{N} \to X^*$$

és

$$\mathbf{y} : \mathcal{N} \to Y,$$

ill.

$$\phi_n := \mathbf{\Phi}(n) \qquad (n \in \mathcal{N})$$

és

$$y_n := \mathbf{y}(n) \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

Ekkor a $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ párt *előállítási rendszernek* (közismert angol nevén *frame*-nek) nevezzük az $(X, Y)$-ra nézve, ha minden $x \in X$ esetén létezik a

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} \phi_n(x)\cdot y_n$$

„összeg” és az

$$F(x) := \sum_{n\in\mathcal{N}} \phi_n(x)\cdot y_n \qquad (x \in X)$$

hozzárendeléssel értelmezett

$$F : X \to Y$$

operátor lineáris homeomorfizmus.

Ha $X = Y$, akkor a $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ egy ún. előállítási rendszer az $X$-re nézve. Az $F$ leképezést *előállítási operátornak* (*frame operátornak*) hívjuk.

A Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.), valamint a Banach-féle inverz-tétel (ld. 10.8.) miatt alkalmasan megválasztott $0 < m, M < +\infty$ konstansokkal teljesül, hogy

$$(*) \qquad m\cdot \|x\|_X \leq \sup_{k\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{|n|\leq k} \phi_n(x)\cdot y_n \right\|_Y \leq M\cdot \|x\|_X \qquad (x \in X).$$

Az előbbi becslésben szereplő $M$-ek infimumát, ill. az $m$-ek szuprémumát *frame konstansoknak* nevezzük. Ha $m = M$, azaz

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{|n|\leq k} \phi_n(x)\cdot y_n \right\|_Y = M\cdot \|x\|_X \qquad (x \in X),$$

akkor azt mondjuk, hogy a $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ egy *szigorú frame.*

Megmutatható, hogy ha

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} := ((F^{-1})^*(\phi_n), n \in \mathcal{N})$$

és

$$\tilde{\mathbf{y}} := (F^{-1}(y_n), n \in \mathcal{N}),$$

akkor a $(\tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{y}})$ frame az $(Y, X)$-re vonatkozóan, aminek a frame operátora $F^{-1}$. Azt mondjuk, hogy a $(\tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{y}})$ a $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ *inverze.*

Tegyük fel, hogy az $Y^*$ duális tér[4] valamilyen sűrű részhalmazának minden $\Psi$ elemére konvergens a

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \Psi(y_n) \cdot \phi_n$$

„sor". Ekkor az $(\mathbf{y}, \mathbf{\Phi})$ frame az $(Y^*, X^*)$-ra nézve, aminek a frame operátora $F^*$. Hasonlóan, az $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{\Phi}})$ frame az $(X^*, Y^*)$-ra vonatkozóan, aminek a frame operátora $(F^{-1})^*$. Tehát az $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{\Phi}})$ a $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ inverze.

Az előállítási rendszereket kétféleképpen használhatjuk egy $x \in X$ elem reprezentációjára: erre a célra szolgálhat egyrészt az

$$\widehat{x} := (\phi_n(x), n \in \mathcal{N})$$

„sorozat", másrészt az $F(x) \in Y$ pont. Könnyű meggondolni, hogy mind a két reprezentáció egyértelmű, továbbá, hogy mindegyik stabil a szokásos értelemben.

Ha az

$$F(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \phi_n(x) \cdot y_n \qquad (x \in X)$$

egyenlőség mindkét oldalán alkalmazzuk az $F^{-1}$ operátort, akkor a biortogonális kifejtéssel (ld. 2.2.) analóg

$$x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \phi_n(x) \cdot \tilde{y}_n \qquad (x \in X)$$

kifejtést kapjuk (ami nyilván egy $X$-normában konvergens „sor"). Hasonlóan adódik (az inverzframet használva) a

[4] Tehát az $Y$-on értelmezett korlátos lineáris funkcionálok lineáris tere a „szokásos" funkcionálnormával.

$$z = \sum_{n\in\mathcal{N}} \tilde{\phi}_n(z)\cdot y_n \qquad (z \in Y)$$

előállítás is, amit az előzővel együtt *frame előállításoknak* nevezünk. Az ezekben szereplő

$$\phi_n(x),\ \text{ill. } \tilde{\phi}_n(z) \qquad (n \in \mathcal{N})$$

együtthatókat az $x \in X$, ill. a $z \in Y$ elem *frame együtthatóinak* hívjuk.

## 3.2. Előállítási rendszerek Hilbert-terekben

Annak az eldöntése, hogy egy adott $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{y})$ pár vajon előállítási rendszert alkot-e az $(X, Y)$-ra nézve vagy sem, általában nem egy egyszerű feladat. Abban az esetben viszont, ha az $X = Y$ egy Hilbert-tér, a helyzet lényegesen egyszerűbbé válik. Így például (ld. Riesz-féle reprezentációs tétel (ld. 10.7.)) a következő kérdés vethető fel: az

$$y_n := \phi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

esetben[5] mikor lesz egy $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer az $X$-re nézve előállítási rendszer? (Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az

$$\mathcal{N} := \mathbf{N},\ |n| := n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

esetre szorítkozva, az $X$-beli skaláris szorzást $\langle , \rangle$-val jelölve, az $\|.\|_X$ helyett $\|.\|$-t írva.[6]) Tehát (ld. 3.1.) mikor igaz, hogy minden $x \in X$ elemre létezik az

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle\cdot \phi_n \in X$$

összeg és az így definiált

$$F : X \to X$$

operátor lineáris homeomorfizmus? Ezzel kapcsolatos a

[5]Most tehát $\langle x, \phi_n\rangle = \Phi_n(x) = \langle x, y_n\rangle \quad (x \in X,\, n \in \mathbf{N})$.
[6]Amikor is $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in X)$.

**3.2.1. Tétel.** *A* $\mathbf{\Phi} = (\phi_n, n \in \mathbf{N})$ *rendszer pontosan akkor frame az* $X$ *Hilbert-térre nézve, ha vannak olyan* $0 < A \le B < +\infty$ *konstansok, amelyekkel*

$$(*) \qquad A\cdot \|x\|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \le B\cdot \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

*Ekkor az* $F$ *frame operátor pozitív definit és*

$$\langle F(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \qquad (x \in X).$$

Ha ui.

$$R(x) := (\langle x, \phi_n\rangle, n \in \mathbf{N}),$$

akkor a $(*)$ szerint az

$$R : X \to \ell_2$$

korlátos lineáris operátor. Legyen

$$R^* : \ell_2 \to X$$

az $R$ adjungáltja és

$$\ell_2^0 := \{(\xi_n^{(N)}, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2 : N \in \mathbf{N}\},$$

ahol $N \in \mathbf{N}$ esetén

$$\xi_n^{(N)} = 0 \qquad (N \le n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy az $(\ell_2, \|.\|_2)$ Hilbert-térben az $\ell_2^0$ mindenütt sűrű, továbbá

$$\langle R(x), c\rangle_{\ell_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle\cdot \overline{c_n} = \left\langle x, \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n \right\rangle =$$

$$\langle x, R^*(c)\rangle \qquad \left(c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2^0\right).$$

Ezért

$$R^*(c) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n \qquad (c \in \ell_2^0),$$

így az $\ell_2^0$ sűrűsége miatt egyúttal bármely $\xi = (\xi_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ esetén is

$$R^*(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n\phi_n.$$

Speciálisan tetszőleges $x \in X$ elemre a $\xi := R(x)$ választással létezik az

$$F(x) := R^*(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \cdot \phi_n$$

összeg. Más szóval az

$$F := R^* R : X \to X$$

operátor a kívánt alakú, ami nyilván lineáris is. Továbbá a $(*)$ feltétel miatt (az előbbi jelölésekkel)

$$\|F(x)\| \leq \|R^*\| \cdot \|\xi\|_2 = \|R^*\| \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2} \leq \|R^*\| \cdot \sqrt{B} \cdot \|x\|.$$

Ez azt jelenti, hogy az $F$ korlátos lineáris operátor (így folytonos is), amire

$$\langle F(x), x \rangle = \langle R^*(\xi), x \rangle = \langle \xi, R(x) \rangle_{\ell_2} = \|\xi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2,$$

tehát a $(*)$ alapján

$$\langle F(x), x \rangle \geq A \cdot \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

Következésképpen az $F$ pozitív (definit) lineáris operátor és mint ilyen, nyilván invertálható. Ha $\mathcal{R}_F = X$ (azaz az $F$ „ráképez” az $X$-re), akkor a Banach-féle inverz-tétel (ld. 10.8.) szerint az

$$F^{-1} : X \to X$$

is korlátos lineáris operátor, így folytonos is. Tehát az

$$F : X \to X$$

valóban homeomorfizmus.

Azt kell tehát még megmutatnunk, hogy tetszőleges $y \in X$ esetén van olyan $x \in X$, amellyel $F(x) = y$. Vezessük be ehhez valamilyen $0 \neq t \in \mathbf{R}$ paraméterrel az

$$F_t : X \to X$$

leképezést a következőképpen:

$$F_t(z) := z - tF(z) + ty \qquad (z \in X).$$

Ha egy $x \in X$ elem fixpontja az $F_t$-nek, azaz

$$F_t(x) = x,$$

akkor nyilván $F(x) = y$. Az ismert Banach–Tyihonov–Cacciopoli-fixpont-tételre (ld. 10.15.) hivatkozva így elég azt belátnunk, hogy alkalmas $t$ paraméter mellett az $F_t$ kontrakció. Ehhez először is vegyük észre, hogy

$$\|F_t(z) - F_t(v)\| = \|z - v - t(F(z) - F(v))\| =$$

$$\|(I - tF)(z - v)\| \leq \|I - tF\| \cdot \|z - v\| \qquad (z, v \in X)^7.$$

Megmutatjuk, hogy alkalmas $t > 0$ mellett

$$\|I - tF\| < 1.$$

Ui. a $(*)$ alapján

$$\langle (I - tF)(z), z\rangle = \|z\|^2 - t\langle F(z), z\rangle \leq (1 - tA) \cdot \|z\|^2 \qquad (z \in X, 0 \neq t \in \mathbf{R}).$$

Legyen itt $t := 1/B$, ekkor (figyelembe véve azt is, hogy az $I - tF$ operátor szintén önadjungált) azt mondhatjuk, hogy

$$\|I - tF\| = \sup_{\|z\| \leq 1} |\langle (I - tF)(z), z\rangle| \leq 1 - \frac{A}{B} < 1.$$

Ezzel beláttuk a $(*)$ egyenlőtlenségek teljesülésének a szükségességét.

Fordítva, ha létezik az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \cdot \phi_n \qquad (x \in X)$$

leképezés és az

$$F : X \to X$$

homeomorfizmus, akkor egyrészt

$$(**) \qquad \langle F(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \cdot \langle \phi_n, x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \qquad (x \in X).$$

---

[7]Ahol $I(w) := w \quad (w \in X)$.

Másrészt az $F$ korlátos lineáris operátor, ezért az előbbiek és a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 = \langle F(x), x\rangle \leq \|F(x)\|\cdot \|x\| \leq \|F\|\cdot \|x\|^2 \qquad (x \in X),$$

így a $(*)$ jobb oldala teljesül a $B := \|F\|$ választással[8]. Továbbá ($F^*$-gal az $F$ adjungáltját jelölve)

$$\langle x, F^*(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, \phi_n\rangle\cdot \langle \phi_n, y\rangle = \left\langle x, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle \phi_n, y\rangle}\cdot \phi_n\right\rangle =$$

$$(***) \qquad \left\langle x, \sum_{n=0}^{\infty}\langle y, \phi_n\rangle\cdot \phi_n\right\rangle \qquad (x, y \in X).$$

Innen

$$F^*(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle y, \phi_n\rangle\cdot \phi_n = F(y) \qquad (y \in X)$$

következik. Tehát az $F$ (és egyúttal az $F^{-1}$ is) önadjungált. A $(***)$ egyenlőségből a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy (ld. $(**)$) tetszőleges $x, y \in X$ mellett

$$|\langle F(x), y\rangle| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2}\cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, \phi_n\rangle|^2} = \sqrt{\langle F(x), x\rangle\cdot \langle F(y), y\rangle}.$$

Ha $x \in X$, akkor a

$$\psi(y) := \langle F(x), y\rangle \qquad (y \in X)$$

funkcionál normája nem más, mint $\|F(x)\|$, ezért[9]

$$\|F(x)\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\psi(y)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle F(x), y\rangle| \leq$$

$$\sqrt{\sup_{\|y\|\leq 1} \langle F(y), y\rangle}\cdot \sqrt{\langle F(x), x\rangle} = \sqrt{\|F\|}\cdot \sqrt{\langle F(x), x\rangle}.$$

[8] $\|F\| > 0$ nyilván feltehető.

[9] Emlékeztetünk arra, hogy – lévén az $F$ önadjungált – $\|F\| = \sup_{\|y\|\leq 1}\langle F(y), y\rangle$.

A fentieket figyelembe véve

$$\|x\|^2 = \|F^{-1}(F(x))\|^2 \leq \|F^{-1}\|^2 \cdot \|F(x)\|^2 \leq \|F^{-1}\|^2 \cdot \|F\| \cdot \langle F(x), x\rangle,$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 = \langle F(x), x\rangle \geq \frac{\|x\|^2}{\|F^{-1}\|^2 \cdot \|F\|} \qquad (x \in X).$$

Ezért igaz a $(*)$ bal oldala is az

$$A := \frac{1}{\|F^{-1}\|^2 \cdot \|F\|}$$

állandóval.

Ezzel a 3.2.1. Tételt beláttuk.

Tegyük fel, hogy a 3.2.1. Tételbeli $(*)$ feltétel (az ottani jelöléseket használva) igaz a $\phi_n \in X \;\; (n \in \mathbf{N})$ rendszerre és tekintsük az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \cdot \phi_n \qquad (x \in X)$$

frame operátort. Ekkor az

$$F^{-1}(\phi_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszerre is fennáll a $(*)$ az $A$ helyett a $B^{-1}$-gyel, a $B$ helyett pedig az $A^{-1}$ választással. Továbbá minden $x \in X$ elemre

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle \cdot \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \cdot F^{-1}(\phi_n),$$

és az itt szereplő végtelen sorok bármely átrendezése is konvergál az $x$-hez. (Tehát $F^{-1}(\phi_n) \;\; (n \in \mathbf{N})$ is frame (az ún. *duális frame*).)

Ti. az $F^{-1}$ inverzoperátor önadjungáltsága (és az $F$, így egyúttal az $F^{-1}$ pozitivitása) miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle F^{-1}(x), \phi_n\rangle|^2 =$$

$$\langle F(F^{-1}(x)), F^{-1}(x)\rangle = \langle F^{-1}(x), x\rangle.$$

A szóban forgó $(*)$ egyenlőtlenségek a pozitív operátorok nyelvén nem jelentenek mást, mint azt, hogy $BI - F \geq 0$ és $F - AI \geq 0$. Jól ismert (ld. 10.14.), hogy ha az

$$U, V : X \to X$$

korlátos lineáris operátorokra $U \geq 0$ és $V \geq 0$, valamint $UV = VU$ igaz, akkor $UV \geq 0$. Ha pl.

$$U := BI - F$$

és $V := F^{-1}$, akkor a fentiek szerint $F^{-1} \geq 0$, továbbá

$$UV = (BI - F)F^{-1} = BF^{-1} - I = VU$$

is nyilvánvaló. Ezért

$$BF^{-1} - I \geq 0$$

és hasonlóan

$$I - AF^{-1} \geq 0,$$

így

$$\langle (BF^{-1} - I)(x), x\rangle \geq 0 \text{ és } \langle (I - AF^{-1})(x), x\rangle \geq 0 \qquad (x \in X).$$

Más szóval

$$A \cdot \langle F^{-1}(x), x\rangle \leq \|x\|^2 \leq B \cdot \langle F^{-1}(x), x\rangle \qquad (x \in X),$$

ezért

$$B^{-1} \cdot \|x\|^2 \leq \langle F^{-1}(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle|^2 \leq A^{-1} \cdot \|x\|^2.$$

Továbbá

$$x = F(F^{-1}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F^{-1}(x), \phi_n\rangle \cdot \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle \cdot \phi_n,$$

és $x = F^{-1}(F(x))$ alapján analóg módon kapjuk az $x$-re vonatkozó másik előállítást.

Valamely $X$ Hilbert-térbeli előállítási rendszerek és a bázisok viszonyának a tisztázásához először is emlékeztetünk arra, hogy minden $X$-beli frame teljes, azaz egyúttal zárt rendszer is. Egy framet *egzaktnak* nevezünk, ha bármely elemének az elhagyása után a maradék rendszer már nem frame. Így egy $X$-beli teljes ONR egzakt és szigorú frame, amelynek a frame-konstansa 1 (ld. Parseval-formula).

Ha pl. az $(e_n, n \in \mathbf{N})$ ONR az $X$-ben, akkor az

$$e_1, e_1, e_2, e_2, ...$$

nem egzakt szigorú frame, az

$$e_1, e_2/2, e_3/3, ...$$

pedig zárt ortogonális rendszer, ami nem frame, a

$$2e_1, e_2, e_3, ...$$

egzakt nem szigorú frame, aminek a frame konstansai 1 és 2.

Legyen tehát a $\mathbf{\Phi} = (\phi_n, n \in \mathcal{N})$ egy előállítási rendszer az $X$-re nézve és $z \in X$ esetén jelöljük az $\widehat{\mathbf{X}}_z$ szimbólummal a

$$z = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \phi_n$$

előállításnak eleget tevő $(c_n, n \in \mathcal{N})$ (együttható) „sorozatok" halmazát. Pl. a $z$ elem frame kifejtéséből származó

$$\widehat{z} := (\phi_n(z), n \in \mathcal{N})$$

„sorozat" eleme az $\widehat{\mathbf{X}}_z$-nek. Ha egy $c = (c_n, n \in \mathcal{N})$ esetén

$$\|c\|_2 := \Big(\sum_{n \in \mathcal{N}} |c_n|^2\Big)^{1/2},$$

akkor a frame együtthatók az alábbi minimál-tulajdonsággal bírnak, nevezetesen (a fenti jelölésekkel) igaz a

**3.2.2. Tétel.** *Legyen a* $\mathbf{\Phi}$ *frame az* $X$ *Hilbert-térre nézve és* $z \in X$*. Ekkor bármely* $c \in \widehat{\mathbf{X}}_z$ *esetén*

$$\|\widehat{z}\|_2 \le \|c\|_2,$$

*valamint*

$$\|c\|_2^2 = \|\widehat{z}\|_2^2 + \|c - \widehat{z}\|_2^2.$$

A következő tétel az egzakt framekre ad jellemzést:

**3.2.3. Tétel.** *Legyen a* $\mathbf{\Phi} = (\phi_n, n \in \mathcal{N})$ *frame az* $X$ *Hilbert-térre nézve, a* $\tilde{\mathbf{\Phi}} = (\tilde{\phi}_n, n \in \mathcal{N})$ *pedig az inverze. A* $\mathbf{\Phi}$ *akkor és csak akkor egzakt, ha*

$$\langle \phi_n, \tilde{\phi}_n \rangle = 1 \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

*Továbbá, ha a* $\mathbf{\Phi}$ *egzakt frame, akkor a* $\mathbf{\Phi}$ *minimális rendszer*[10]*, ami a* $\tilde{\mathbf{\Phi}}$*-vel biortogonális.*

## 3.3. Gábor-framek

Példaként röviden felidézzük az igen intenzíven vizsgált, Gábor Dénesről elnevezett speciális frameket. Ehhez elöljáróban emlékeztetünk a $\mathcal{T}_\xi$, ill. az $\mathcal{M}_\xi$ *transzlációs,* ill. *modulációs* operátorokra: valamilyen $\xi \in \mathbf{R}^n$ vektor[11] és

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

függvény esetén legyen

$$\mathcal{T}_\xi f(t) := f(t - \xi) \qquad (t \in \mathbf{R}^n),$$

valamint[12]

$$\mathcal{M}_\xi f(t) := e^{2\pi\imath\langle t,\xi\rangle} f(t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$\mathcal{T}_\xi \mathcal{M}_\eta = e^{-2\pi\imath\langle \xi,\eta\rangle} \mathcal{M}_\eta \mathcal{T}_\xi \qquad (\xi, \eta \in \mathbf{R}^n).$$

Ha (a 3.3. pont hátralevő részében is) a

$$0 \neq g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

egy adott ún. *ablakfüggvény*, akkor legyen[13]

$$\mathbf{D}_g := \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C} : f\mathcal{T}_x g \in L^1 \ \ (x \in \mathbf{R}^n)\}.$$

[10] Ld. 2.2.

[11] A későbbiekben is $1 \leq n \in \mathbf{N}$.

[12] A „szokásos” $\langle t, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n t_i \xi_i \ \ (t = (t_1, ..., t_n),\ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n)$ skaláris szorzással.

[13] A továbbiakban az $L^s := L^s(\mathbf{R}^n) \quad (1 \leq s \leq +\infty)$ a Lebesgue-féle klasszikus függvénytereket jelöli.

A Hölder-egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy pl. $g \in L^q$ esetén

$$L^p \subset \mathbf{D}_g,$$

hacsak az $1 \leq p, q \leq +\infty$ kitevőkre

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Így pl. $L^2 \subset \mathbf{D}_g$ minden $g \in L^2$ függvényre. Különösen fontos a

$$g \in L^1 \cap L^\infty$$

eset, amikor könnyen láthatóan egyúttal minden $1 < p < +\infty$ mellett $g \in L^p$ is teljesül.[14] Ezért ekkor

$$L^p \subset \mathbf{D}_g \qquad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Legyen tehát a $g$ ablakfüggvény, $f \in \mathbf{D}_g$ és definiáljuk a $V_g f(x, y)$-t a következőképpen:

$$V_g f(x, y) := \int f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi\imath\langle t,y\rangle}\,dt \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy[15]

$$V_g f(x, y) = \langle f, \mathcal{M}_y \mathcal{T}_x g\rangle = e^{-2\pi\imath\langle y,x\rangle} \cdot \langle f, \mathcal{T}_x \mathcal{M}_y g\rangle.$$

Ha $g = 1$, akkor

$$V_g f(x, y) = \int f(t)e^{-2\pi\imath\langle t,y\rangle}\,dt = \widehat{f}(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

(az $f$ függvény Fourier-transzformáltja). Az így definiált

$$V_g f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{C}$$

leképezést az $f$ függvény *rövid idejű* (vagy *ablakos*) *Fourier-transzformáltjának* nevezzük (angolul STFT: *short-time Fourier transform*[16]). Gábor Dénes vizsgálataira utalva használatos még a *Gábor-transzformált* elnevezés is. Ha pl. $n = 1$, $\delta > 0$ és

[14] Ui. $\int |g|^p = \int_{\{|g|\leq 1\}} |g|^p + \int_{\{|g|>1\}} |g|^p \leq \int |g| + \|g\|_\infty^p \cdot \int_{\{|g|>1\}} 1 \leq \|g\|_1 + \|g\|_\infty^p \cdot \int |g|$, tehát $\int |g|^p \leq \|g\|_1 \cdot (1 + \|g\|_\infty^p) < +\infty$.

[15] Nem fog félreértést okozni, ha esetenként az $L^2$-beli $\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad (f, g \in L^2)$, ill. az $\mathbf{R}^n$-beli skaláris szorzásra ugyanazt a $\langle , \rangle$ szimbólumot használjuk.

[16] Gábor Dénes (1946).

$$\operatorname{supp} g \subset [-\delta, \delta],$$

akkor

$$V_g f(x,y) = \int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f(t)\overline{g(t+x)}e^{-2\pi\imath\langle t,y\rangle}\,dt \qquad (x,y \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy a $V_g$ operátor lineáris. Belátható továbbá, hogy $f, g \in L^2$ esetén a $V_g f$ egyenletesen korlátos.

Adott $g \in L^2$ ablakfüggvény és $\alpha, \beta > 0$ paraméterek mellett tekintsük az alábbi, ún. *Gábor-rendszert*:

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) := \{\mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g : k, j \in \mathbf{Z}^n\}.$$

Tehát $k, j \in \mathbf{Z}^n$ esetén

$$\mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g(x) = \mathcal{M}_{j\beta}g(x-k\alpha) = e^{2\pi\imath\langle x-k\alpha, j\beta\rangle}g(x-k\alpha) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).^{17}$$

Ha a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ rendszer frame az $(L^2, \|.\|)$ Hilbert-térre nézve,[18] akkor a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ egy ún. *Gábor-frame* (vagy más szóval *Weyl–Heisenberg-frame*). Az utóbbi esetben az

$$S = S_g^{\alpha,\beta}$$

frame operátor[19] a következő:

$$Sf := \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g\rangle \cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g =$$

$$\sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} V_g f(k\alpha, j\beta) \cdot \mathcal{M}_{j\beta}\mathcal{T}_{k\alpha}g \qquad (f \in L^2).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor egy $G \in L^2$ „duális” ablakfüggvénnyel a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ frame duálisa a $\mathcal{G}(G, \alpha, \beta)$ Gábor-frame. Mindebből tetszőleges $f \in L^2$ függvényre következnek az

[17] Általában egy $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ megszámlálható halmazra legyen $\mathcal{G}(g, \mathcal{S}) := \{\mathcal{T}_\xi\mathcal{M}_\eta g : (\xi, \eta) \in \mathcal{S}\}$. Speciálisan, ha $\alpha,\ \beta > 0$ és $\mathcal{S} := (\alpha\mathbf{Z}^n) \times (\beta\mathbf{Z}^n)$, akkor $\mathcal{G}(g, \mathcal{S}) = \mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$.

[18] $\|f\| := \|f\|_2 = \sqrt{\int |f(x)|^2\,dx} \quad (f \in L^2)$.

[19] Belátható, hogy $\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}(\alpha\beta)^{-1}(S_g^{\alpha,\beta})^{-1}g = g$.

$$f = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g\rangle\cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G\rangle\cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g$$

($\|.\|$-ban feltétlen konvergens) kifejtések.[20] Alkalmas $A, B > 0$ konstansokkal fennállnak továbbá az alábbi frame egyenlőtlenségek:

$$A\cdot \|f\|^2 \leq \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} |V_g f(k\alpha, j\beta)|^2 \leq B\cdot \|f\|^2,$$

$$B^{-1}\cdot \|f\|^2 \leq \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} |V_G f(k\alpha, j\beta)|^2 \leq A^{-1}\cdot \|f\|^2.$$

Ti. egyszerű számolással kapjuk a

$$(\mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta})^{-1}\, S\mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta} = S$$

felcserélhetőségi relációt, amiből az

$$S^{-1}\,(\mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g) = \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}(S^{-1}g)$$

egyenlőség már nyilván következik. Ez azt jelenti, hogy a $G := S^{-1}g$ függvény megfelel a mondottaknak.

Megjegyezzük, hogy mindezekből az

$$S^{-1} = \left(S_g^{\alpha,\beta}\right)^{-1}$$

inverzframe operátorra az adódik, hogy $S^{-1} = S_G^{\alpha,\beta}$, azaz

$$S^{-1}f = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G\rangle\cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G \qquad (f \in L^2).$$

---

[20] A fenti $f = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g\rangle\cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} V_g f(k\alpha, -j\beta)\cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G \quad (f \in L^2)$ előállítás tekinthető úgy is, mint az ablakos Fourier-transzformációra vonatkozó egyfajta rekonstrukciós formula.

Adott

$$\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

függvény és $y \in \mathbf{R}^n$ vektor esetén legyen

$$\Phi_y(x) := \Phi(x, y) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

és

$$\mathbf{I}_p\Phi(y) := \|\Phi_y\|_p \qquad (1 \le p \le +\infty),$$

valamint

$$\|\Phi\|_{p,q} := \|\mathbf{I}_p\Phi\|_q \qquad (1 \le p, q \le +\infty).$$

Mindezek után a $g \in L^2$ ablakfüggvény, $f \in \mathbf{D}_g$ és az előbbi $p, q$ „kitevők” mellett legyen

$$\|f\|_{M_{p,q}} := \|V_g f\|_{p,q}.$$

Így pl., ha $p, q < +\infty$, akkor

$$\|f\|_{M_{p,q}} = \left( \int \left( \int |V_g f(x, y)|^p dx \right)^{q/p} dy \right)^{1/q}.$$

Speciálisan

$$\|f\|_{M_{1,1}} = \|V_g f\|_1 = \int \int |V_g f(x, y)| \, dx \, dy.$$

Jelöljük $M_{p,q}$-val az

$$\|f\|_{M_{p,q}} < +\infty$$

feltételnek eleget tevő előbbi $f$-ek halmazát.[21] Belátható, hogy az

$$(M_{p,q}, \|.\|_{p,q})$$

pár Banach-tér, ami független a $g$ választásától (azaz a látszólag a $g$-től függő $\|.\|_{p,q}$ normák (adott $p, q$ esetén) ekvivalensek.)

[21] A $p = q = 1$ esetben szokás az $M_{1,1}$-et *Feichtinger-algebrának* is nevezni. Ekkor $f \in M_{1,1}$ azt jelenti, hogy $f, \widehat{f} \in L^1$.

**3.3.1. Tétel.** *Ha* $g \in M_{1,1}$ *és* $\alpha, \beta > 0$, *a* $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ *rendszer pedig Gábor-frame, akkor beláthatók az alábbiak:*

$1^o$ *a* $G := S^{-1}g$ *duális ablakfüggvény is* $M_{1,1}$*-beli;*

$2^o$ *az*

$$f = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g\rangle \cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G = \sum_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}G\rangle \cdot \mathcal{T}_{k\alpha}\mathcal{M}_{j\beta}g$$

*előállítások feltétlen konvergens sorok az* $\|.\|_{M_{p,q}}$*-normában* (*ha a* $p, q \geq 1$ *kitevők végesek, ill. gyenge*$^*$*-értelemben, ha* $p = +\infty$, *vagy* $q = +\infty$);

$3^o$ *az* $S_g^{\alpha,\beta}$ *frame operátor kiterjeszthető*

$$S_g^{\alpha,\beta} : L^p \to L^p \qquad (1 \leq p \leq +\infty)$$

*korlátos lineáris operátorrá.*

(Megjegyezzük, hogy $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2$ miatt $\|.\|_{M_{2,2}} = \|.\|_2$.)

Csak röviden érintjük azt a természetes kérdést, hogy milyen, a $g$ függvényre, ill. az $\alpha, \beta$ paraméterekre tett feltételek esetén lesz a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ rendszer Gábor-frame? Megmutatható ti., hogy tetszőleges $g \in L^2$ választással a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ nem feltétlenül Gábor-frame, még „kicsi” $\alpha, \beta > 0$ mellett sem. Ugyanakkor a $g$ függvények egy elég széles osztályára nézve megadhatók elégséges feltételek az $\alpha, \beta$-ra vonatkozóan, hogy azok fennállása esetén a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ Gábor-frame. Pl. egy $g \in L^\infty$ függvény esetén legyen

$$\|g\|_W := \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|(\mathcal{T}_k g)\chi_{[0,1]^n}\|_\infty = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|g \cdot \mathcal{T}_k \chi_{[0,1]^n}\|_\infty,$$

továbbá definiáljuk a $W$ ún. *Wiener-teret* a következőképpen:

$$W := \{g \in L^\infty : \|g\|_W < +\infty\}.$$

Könnyen belátható, hogy minden $1 \leq p < +\infty$ kitevővel a $W$ sűrű altér az $L^p$-ben, ill. valamennyi mérhető kompakt tartójú korlátos függvény $W$-beli. Legyen

$$W_C := \{f \in W : \text{ az } f \text{ folytonos}\},$$

ekkor $M_{1,1} \subset W_C$.

Ha $g \in W$ és $\alpha, \beta > 0$, akkor az

$$S = S_g^{\alpha,\beta} : L^2 \to L^2$$

frame operátor korlátos:

$$\|S\| \leq \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^n \cdot \|g\|_W^2,$$

és a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Bessel-szerű rendszer (ld. 2.7.).

A most bevezetett $W$ Wiener-tér jelentőségét a Gábor-framek szempontjából az a tény mutatja, hogy bármely $g \in W$ függvényre „elég kicsi" $\alpha,\beta > 0$ paraméterekkel a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ frame. Nevezetesen igaz a

**3.3.2. Tétel.** *Ha $g \in W$ és az $\alpha > 0$ paraméterre valamilyen $a,b > 0$ konstansokkal*

$$(*) \qquad a \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |g(x-k\alpha)|^2 \leq b \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

*teljesül, akkor alkalmas $\beta_0 > 0$ választással minden $0 < \beta \leq \beta_0$ mellett a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Gábor-frame.*

Ha $g \in L^2$ és a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Gábor-frame, akkor az

$$S_g^{\alpha,\beta} f \qquad (f \in L^2)$$

függvény Fourier-transzformáltjára egyszerű számolással az adódik, hogy

$$(**) \qquad \widehat{S_g^{\alpha,\beta}} f = S_{\widehat{g}}^{\beta,\alpha} \widehat{f} \qquad (f \in L^2).$$

Ha tehát $\widehat{g} \in W$ és az előbbi $(*)$ feltétel (a $g$ helyett a $\widehat{g}$-ra) teljesül, akkor a 3.3.2. Tételbeli $\mathcal{G}(\widehat{g},\beta,\alpha)$ rendszer Gábor-frame, azaz a $(**)$ alapján a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ is az. Igaz továbbá, hogy

$$n = 1,\ g \in L^2,\ \alpha,\beta > 0,\ \alpha\cdot\beta \leq 1$$

esetén a fenti $(*)$ feltétel szükséges ahhoz, hogy a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Gábor-frame legyen. Sőt, ha a $g$ kompakt tartójú, $\operatorname{supp} g \subset I$ valamilyen $I$ intervallummal és $|I| \leq 1/\beta$, akkor a $(*)$ elegendő is ahhoz, hogy a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Gábor-frame legyen. Speciálisan, ha itt $\alpha\cdot\beta = 1$ és $g := \chi_{[0,1]}$, akkor a $\mathcal{G}(g,\alpha,1/\alpha)$ rendszer ON bázis az $L^2$-ben.

**3.3.3. Tétel.** (Dualitási elv.) *Legyen* $g \in L^2$ *és* $\alpha, \beta > 0$. *Ekkor a következő két kijelentés egymással ekvivalens:*

a) *a* $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ *rendszer frame az* $L^2$*-re nézve az* $A, B$ *frame konstansokkal;*

b) *a* $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ *Riesz–Fischer-rendszer az* $L^2$*-ben, amelynek (az általa kifeszített zárt altérre vonatkozóan) a frame konstansai* $\alpha\cdot\beta\cdot A$ *és* $\alpha\cdot\beta\cdot B$.

(Ha itt az $\alpha$-t, $\beta$-t rendre az $1/\beta$-ra, $1/\alpha$-ra cseréljük, akkor a következő állítást kapjuk (ld. 3.4. xxiv) megjegyzés): a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ Riesz–Fischer-rendszer voltából $\alpha\cdot\beta \geq 1$ adódik.)

Az a feladat, hogy adott $g \in L^2$ függvényre milyen $\alpha, \beta > 0$ mellett lesz a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ rendszer Gábor-frame, meglehetősen nehéz és bonyolult. Legyen ehhez

$$\mathcal{F}(g) := \{(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)^2 : \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) \text{ Gábor-frame}\}.$$

A Gábor-analízis egyik alapkérdése az $\mathcal{F}(g)$ halmaz meghatározása. Ha pl. $n = 1$ és $g := \chi_{[0,1]}$, akkor az $\mathcal{F}(g)$ bizonyos fraktál-tulajdonságokkal rendelkezik, ill. az

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}(g)$$

reláció erősen függ az $\alpha, \beta$ számelméleti tulajdonságaitól. (Magát az $\mathcal{F}(g)$ halmazt a mai napig nem sikerült meghatározni.) Bizonyos függvényekre ismert csupán a teljes válasz, azaz az $\mathcal{F}(g)$ halmaz szerkezete. Így pl. 1 dimenzióban $(n = 1)$ :

$1^o$ a

$$g(t) := e^{-\pi t^2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvénnyel a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ akkor és csak akkor Gábor-frame, ha $\alpha\cdot\beta < 1$.

$2^o$ Ugyanez mondható akkor is, ha

$$g(t) := \frac{1}{e^t + e^{-t}} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

vagy

$$g(t) := e^{-|t|} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ill. (a Fourier-transzformációra gondolva), ha

$$g(t) := \frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

$3^o$ A

$$g(t) := e^{-t}\chi_{[0,+\infty)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

választással a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ pontosan akkor lesz Gábor-frame, ha $\alpha\cdot\beta \leq 1$. Speciálisan a $\mathcal{G}(g,\alpha,1/\alpha)$ Riesz-bázis az $L^2$-ben. A $\widehat{g}$ Fourier-transzformáltat figyelembe véve ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha

$$g(t) := \frac{1}{1+2\pi\imath t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

$4^o$ A $g$ függvény *pozitív definit,* ha bármely $1 \leq N \in \mathbf{N}$, valamint

$$x_1 < x_2 < ... < x_N$$

és

$$y_1 < y_2 < ... < y_N$$

valós számok esetén a

$$(g(x_j - y_k))_{j,k=1}^{N} \in \mathbf{R}^{N\times N}$$

mátrix determinánsa nemnegatív. Legyen a $g \in L^2$ ilyen és tegyük fel, hogy *véges típusú,* azaz valamilyen $2 \leq M \in \mathbf{N}$ mellett a $\widehat{g}$ Fourier-transzformáltra igaz a következő:

$$\widehat{g}(x) = \prod_{k=1}^{M} \frac{1}{1+2\pi\imath\delta_k x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\delta_k \in \mathbf{R} \qquad (k = 1, ..., M).$$

Ekkor

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha,\beta) \in (0,+\infty)^2 : \alpha\cdot\beta < 1\}.$$

Speciálisan (ld. pl. $2^o$) ilyen függvények a következők:

$$g(t) := e^{-|t|} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$g(t) := e^{-t}t^r\chi_{[0,+\infty)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}, r = 1, 2, ...),$$

$$g_{a,b}(t) := \left(e^{-at} - e^{-bt}\right)\chi_{[0,+\infty)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R},\ a, b > 0),$$

$$g_{a,b}(t) := e^{at}\chi_{[0,+\infty)}(-t) + e^{-bt}\chi_{[0,+\infty)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}, a, b > 0),$$

$$g = f * h,$$

ahol az $f, h$ pozitív definit véges típusú függvények. Igaz továbbá, hogy ha

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)^2 : \alpha\cdot \beta < 1\},$$

akkor pl. az $\mathcal{F}(\widehat{g})$ is ugyanez a halmaz. (Példaként ld. $2^o, 3^o$.) Megjegyezzük, hogy a fenti $M \geq 2$ feltétel lényeges. Ha ui. a véges típusú függvények definíciójában $M = 1$, azaz valamilyen $\delta > 0$ paraméterrel

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{1 + 2\pi\imath\delta x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$g(t) = e^{-t/\delta}\chi_{[0,+\infty)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ebben az esetben viszont (ld. $3^o$)

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)^2 : \alpha\cdot \beta \leq 1\}.$$

(Emlékeztetünk a pozitív definit függvények *Schoenberg-féle jellemzésére*: a $g$ akkor és csak akkor ilyen, ha alkalmas

$$u, v \in \mathbf{R},\ u < v$$

mellett a $g$ függvény Laplace-transzformáltja értelmezve van a

$$\mathbf{C}_{uv} := \{z \in \mathbf{C} : u < \mathrm{Re} z < v\}$$

sávban és az

$$Lg(z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz} g(t)\, dt \qquad (z \in \mathbf{C}_{uv})$$

jelöléssel

$$\frac{1}{Lg(z)} = Ce^{-\gamma z^2 + \delta z}\cdot \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \gamma_k z)e^{-z\gamma_k} \qquad (z \in \mathbf{C}_{uv}),$$

ahol a

$$C, \gamma, \delta, \gamma_k \in \mathbf{R} \qquad (k = 1, 2, ...)$$

paraméterekre $C > 0$ és $\gamma \geq 0$, valamint

$$0 < \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty.)$$

$5^o$ Egy $c = (c_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_1(\mathbf{Z})$ sorozatra legyen

$$\widehat{c}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi \imath kx} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Definiáljuk ezek után egy pozitív definit véges típusú $h \in L^2$ függvény esetén az $L_h^2$ függvényosztályt azon $f \in L^2$ függvények halmazaként, amelyekre

$$f = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k d_l \mathcal{T}_k \mathcal{M}_l h$$

teljesül az

$$\inf\{|\widehat{c}(x)| \cdot |\widehat{d}(x)| : x \in \mathbf{R}\} > 0$$

feltételnek eleget tevő (egyébként tetszőleges)

$$c, d \in \ell_1(\mathbf{Z})$$

együttható-sorozatokkal. Ekkor bármely $g \in L_h^2$ függvényre

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)^2 : \alpha \cdot \beta < 1\}.$$

Ha például

$$h(t) := e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor a

$$G(t) := \frac{1}{e^t + e^{-t}} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvény $L_h^2$-beli, így

$$\mathcal{F}(G) = \{(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)^2 : \alpha \cdot \beta < 1\}.$$

## 3.4. Megjegyzések

i) Tegyük fel (ld. 3.1.), hogy a $\sum(x_n)$ sor feltétlen konvergens az $(X, \|.\|_X)$ normált térben és

$$x := \sum_{n\in\mathcal{N}} x_n.$$

Nem nehéz belátni, hogy ekkor bármely korlátos lineáris

$$A : X \to Y$$

operátorra[22] a $\sum(Ax_n)$ sor is feltétlen konvergens és

$$Ax = \sum_{n\in\mathcal{N}} Ax_n.$$

Valóban, ha adott az $\varepsilon > 0$ szám, akkor egy véges $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}$ halmazzal

$$\left\|x - S_{\widetilde{\mathcal{N}}}\right\|_X < \varepsilon,$$

hacsak a véges $\widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ halmazra $\mathcal{N}_* \subset \widetilde{\mathcal{N}}$. Ezért

$$\left\|Ax - \sum_{n\in\widetilde{\mathcal{N}}} Ax_n\right\|_Y \leq \|A\|\cdot \|x - S_{\widetilde{\mathcal{N}}}\|_X \leq \|A\|\cdot \varepsilon.$$

Mindez pontosan azt jelenti, amit állítottunk.

ii) (*Parciális összegzés.*) Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy most valamilyen $1 \leq M \in \mathbf{N}$ esetén (a 3.1. pontban bevezetett jelölésekkel)

$$\mathcal{N} = \mathbf{Z}^M \times \mathbf{Z}^M.$$

Legyen továbbá a $\sum(x_{(k,l)})$ sor feltétlen konvergens és

$$x := \sum_{(k,l)\in\mathcal{N}} x_{(k,l)}.$$

Ekkor bármely $k \in \mathbf{Z}^M$ vektorra az

$$S_{kN} := \sum_{l\in\mathbf{Z}^M,\, \|l\|_2\leq N} x_{(k,l)} \qquad (N \in \mathbf{N})$$

[22] Az $(Y, \|.\|_Y)$ normált térrel.

*parciális részletösszegeknek* létezik a

$$z_k := \lim_{N\to\infty} S_{kN}$$

határértéke, a $\sum(z_k)$ sor feltétlen konvergens és

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^M} z_k = x.$$

Hasonlóan, minden $l \in \mathbf{Z}^M$ mellett az

$$S_{Nl} := \sum_{k\in\mathbf{Z}^M,\, \|k\|_2\le N} x_{(k,l)} \qquad (N\in\mathbf{N})$$

összegeknek létezik az

$$y_l := \lim_{N\to\infty} S_{Nl}$$

határértéke, a $\sum(y_l)$ sor feltétlen konvergens és

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}^M} y_l = x.$$

Formálisan tehát azt írhatjuk, hogy

$$\sum_{(k,l)\in\mathbf{Z^M}\times\mathbf{Z}^M} x_{(k,l)} = \sum_{k\in\mathbf{Z}^M}\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}^M} x_{(k,l)}\right) = \sum_{l\in\mathbf{Z}^M}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^M} x_{(k,l)}\right).$$

iii) Az előállítási rendszer definíciójában (ld. 3.1. az ottani jelölésekkel) szereplő

$$F(x) := \sum_{n\in\mathcal{N}} \phi_n(x)\cdot y_n \qquad (x\in X)$$

leképezésre nyilvánvaló, hogy $F \in L(X,Y)$. Világos továbbá, hogy az említett definícióban

$$\phi_n(x) = 0 \qquad (n\in\mathcal{N})$$

egy $x\in X$ esetén pontosan akkor teljesül, ha $x=0$, azaz a $\mathbf{\Phi}$ teljes rendszer az $X$-re nézve. Továbbá az $\mathcal{L}[\mathbf{y}]$ sűrű az $Y$-ban, más szóval a $\mathbf{y}$ zárt rendszer az $Y$-ban.

iv) Ha az $x = (x_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer bázis (ld. 2.1.) az $X$-ben, akkor az $(x^*, x)$ egy frame (ld. 3.1.) az $X$-re vonatkozóan. Sőt (ld. 2.5.), ha $(x, y) \in [X, Y]$ (azaz az $x, y$ ekvivalens bázisok), akkor az $(x^*, y)$ az $(X, Y)$-ra, az $(x, y^*)$ pedig az $(Y, X)$-re nézve frame.

v) A 3.2.1. Tételben szereplő

$$(*) \qquad A\cdot \|x\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \leq B\cdot \|x\|^2 \qquad (x \in X)$$

feltétel unitér invariáns, azaz, ha az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-térrel az

$$U : X \to X$$

egy unitér operátor, akkor a $(*)$ ekvivalens az

$$A\cdot \|U(x)\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle U(x), U(\phi_n)\rangle|^2 \leq B\cdot \|U(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

becsléssel. Így az $(U(\phi_n), n \in \mathbf{N})$ rendszer is frame, mégpedig ugyanazokkal a frame-konstansokkal. Mindez igaz marad akkor is, ha az $U$ operátor nem feltétlenül unitér, de valamilyen $\tau > 0$ számmal igaz rá az, hogy

$$\langle U(x), U(z)\rangle = \tau\cdot \langle x, z\rangle \qquad (x, z \in X).$$

vi) Legyen adott most unitér operátoroknak egy $(U_n, n \in \mathbf{N})$ sorozata, valamint egy $x \in X$ elem. Az ($X$-re vonatkozó) előállítási rendszereknek (ld. 3.1.) egy fontos osztályát alkotják az $x$ *elem által generált* $(U_n(x), n \in \mathbf{N})$ alakú framek. (Ekkor az $x$-et *generáló* („anya”) *elemnek* is szokás nevezni.)

vii) Ha tehát fennáll az előbbi (ld. v)) $(*)$ tulajdonság, akkor (ld. az $R^*$ értelmezését a 3.2.1. Tétel bizonyításában) tetszőleges $c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ sorozat esetén konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$$

végtelen sor. Nem nehéz meggondolni, hogy ha

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n,$$

akkor az $y$-t definiáló sor bármely átrendezése is az $y$-hoz konvergál. Mindez „benne van” az alábbi kijelentésben:

*bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan véges $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{N}$ halmaz, hogy ha az $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$ is véges és $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{N}_1$, akkor*

$$\left\| y - \sum_{n\in\mathbf{N}_1} c_n\phi_n \right\| < \varepsilon.$$

Valóban, válasszuk az $\mathbf{N}_0$ halmazt úgy, hogy

$$\sum_{n\in\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_0} |c_n|^2 < \varepsilon$$

teljesüljön. Ha

$$\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$$

és az $\mathbf{N}_1$ véges, akkor legyen

$$\tilde{c}_n := c_n \qquad (n \in \mathbf{N}_1),$$

ill.

$$\tilde{c}_n := 0 \qquad (n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_1).$$

Nyilván

$$\tilde{c} := (\tilde{c}_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$$

és

$$\|c - \tilde{c}\|_2 < \varepsilon,$$

továbbá

$$\left\| y - \sum_{n\in\mathbf{N}_1} c_n\phi_n \right\| = \|R^*(c) - R^*(\tilde{c})\| \le \|R^*\|\cdot \|c - \tilde{c}\|_2 \le \|R^*\|\cdot \varepsilon.$$

viii) A $(*)$-ban (ld. v)) szereplő $A, B$ frame konstansokat illetően az alábbiakat mondhatjuk:

$$\sup_{\|x\|\le 1} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \langle F(x), x\rangle = \|F\| \le B,$$

következésképpen az „optimális” $B$ konstans a $(*)$-ban $\|F\|$. Hasonlóan (ld. fent) $\|F^{-1}\| \le 1/A$, tehát az „optimális” $A$ konstans a $(*)$-ban $1/\|F^{-1}\|$.

ix) A (ld. 3.2.)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle \cdot \phi_n$$

frame kifejtésben (adott $x \in X$ esetén) szereplő

$$\widehat{x}(n) := \langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle \qquad (n \in \mathbf{N})$$

együtthatók nem egyértelműek (szemben pl. a bázisok szerinti előállításokkal). Nevezetesen előfordulhat, hogy az $x$ elem az

$$\widehat{x} := (\widehat{x}(n), n \in \mathbf{N})$$

sorozat helyett esetleg más együtthatókkal felírt (a $\phi_n$-ek szerinti) sor összegeként is megkapható. Ha viszont $x \in X$ és alkalmas $c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ sorozattal

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \phi_n,$$

akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2.$$

Itt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $c = \widehat{x}$, azaz

$$c_n = \widehat{x}(n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ui.

$$\|\widehat{x}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2 = \langle x, F^{-1}(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle \phi_n, F^{-1}(x)\rangle =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle F^{-1}(\phi_n), x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{\widehat{x}(n)} = \langle c, \widehat{x}\rangle_{\ell_2}.$$

Mindezek alapján azt kapjuk, hogy

$$\|c\|_2^2 = \|c - \widehat{x} + \widehat{x}\|_2^2 = \|c - \widehat{x}\|_2^2 + \|\widehat{x}\|_2^2 + \langle c - \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_{\ell_2} + \langle \widehat{x}, c - \widehat{x}\rangle_{\ell_2} =$$

$$\|c - \widehat{x}\|_2^2 + \|\widehat{x}\|_2^2 \geq \|\widehat{x}\|_2^2,$$

amiből az állításunk már nyilvánvaló.

x) Az előző megjegyzésben érintett egyértelműségi kérdéssel (is) kapcsolatosak az alábbi ekvivalenciák: (az eddigi jelöléseket megtartva) az $1^o - 5^o$ állítások egymással ekvivalensek, ahol

$1^o$ bármely $x \in X$ esetén egyértelműen létezik olyan $c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ sorozat, amellyel

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n;$$

$2^o$ az

$$R(x) = (\langle x, \phi_n \rangle, n \in \mathbf{N}) \qquad (x \in X)$$

leképezés értékkészlete megegyezik az $\ell_2$-vel;

$3^o$ vannak olyan $\alpha, \beta > 0$ konstansok, amelyekkel tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és

$$c_k \in \mathbf{K} \qquad (k = 0, ..., n)$$

esetén

$$\alpha \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2} \le \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k \right\| \le \beta \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2};$$

$4^o$ megadható olyan

$$T : X \to X$$

invertálható korlátos lineáris operátor és olyan $X$-beli $(\Phi_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis, hogy

$$\phi_n = T(\Phi_n) \qquad (n \in \mathbf{N});$$

$5^o$ ha

$$g_{jk} := \langle \phi_j, \phi_k \rangle \qquad (j, k \in \mathbf{N}),$$

akkor a

$$G(c) := \left( \sum_{k=0}^{\infty} g_{jk} c_k, j \in \mathbf{N} \right) \qquad (c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2)$$

előírással definiált

$$G : \ell_2 \to \ell_2$$

operátor pozitív és invertálható.

Ui. elöljáróban jegyezzük meg, hogy az $R$ operátor $\mathcal{R}_R$ értékkészlete sűrű altere az $\ell_2$-nek. Valóban, mindez nyilvánvaló következménye a már többször idézett $(*)$ (ld. v)) szerint igaz

$$\|R(x) - R(y)\|_2^2 = \|R(x-y)\|_2^2 \geq A\cdot \|x-y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

becslésnek.[23] Viszont

$$1^o \iff \text{ az } R^* : X \to X \text{ invertálható.}$$

Ez utóbbi azonban (a Hahn–Banach-tétel egyik ismert következményét (ld. 10.2.) és az $\mathcal{R}_R$ altér zártságát felhasználva) könnyen láthatóan azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{R}_R = \ell_2$, ami a $2^o$ kijelentés. Az $R^*$ operátor korlátos lineáris bijekció, ezért a Banach-féle inverz-tétel (ld. 10.8.) miatt az inverze is az. Mindebből a $3^o$-ban szereplő $\alpha, \beta$ konstansok létezése következik, azaz

$$1^o \Longrightarrow 3^o.$$

Legyen a $\Phi_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis és a $3^o$-at feltételezve

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n := \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \Phi_n\rangle \cdot \Phi_n \in X$$

esetén definiáljuk a $T(x)$-et a következőképpen:

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n.$$

(Mivel $c = (c_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$, ezért világos, hogy a $T(x)$ definíciója korrekt.) Ekkor $\|x\| = \|c\|_2$ és

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n \right\| \geq \alpha\cdot \|c\|_2 = \alpha\cdot \|x\|.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\|T(x)\| \leq \beta\cdot \|x\| \qquad (x \in X),$$

[23] Ti. legyen az $y_n = R(x_n)$ $(x_n \in X,\, n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Ekkor $A\cdot \|x_n - x_m\|^2 \leq \|y_n - y_m\|^2 \to 0$ $(n, m \to \infty)$ miatt létezik az $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ határérték. Innen az $R$ folytonossága alapján $y = \lim_{n\to\infty} R(x_n) = R(x) \in \mathcal{R}_R$ adódik, azaz az $\mathcal{R}_R$ valóban zárt.

így a $T$ invertálható korlátos lineáris operátor, amivel

$$T(\Phi_n) = \phi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

triviálisan teljesül. Más szóval igaz a

$$3^o \Longrightarrow 4^o$$

következtetés is. Ha viszont most a $4^o$-et tételezzük fel, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n\right) = 0$$

egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n = 0,$$

azaz azzal, hogy $c_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát

$$4^o \Longrightarrow 1^o.$$

Végül, ha $n \in \mathbf{N}$ és $c_k \in \mathbf{K}$ $(k = 0, ..., n)$, akkor a

$$c := (c_0, ..., c_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$$

jelöléssel

$$\langle G(c), c\rangle_{\ell_2} = \sum_{k,j=0}^{n} \langle \phi_k, \phi_j\rangle \cdot c_k \overline{c_j} = \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k \right\|^2.$$

Következésképpen a $3^o$ ekvivalens az $5^o$-tel.

xi) Tehát (ld. 2.7.) a fenti $1^o - 5^o$ feltételek bármelyikének a teljesülése azt jelenti, hogy a $\phi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ rendszer Riesz-bázis. Megjegyezzük, hogy ha a $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ frame, de nem Riesz-bázis, akkor megadható olyan véges $\mathcal{I} \subset \mathbf{N}$ indexhalmaz, amellyel a $(\phi_n, n \in \mathbf{N} \setminus \mathcal{I})$ frame az $L^2$-re nézve.

xii) Tegyük fel, hogy az $(X, \langle,\rangle)$ Hilbert-tér esetén a $(*)$ feltétel (ld. v)) igaz és legyen $0 < \lambda < 2/B$, valamint

$$\delta := \delta_\lambda := \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\}.$$

Ha $x \in X$ és az $F$ frame operátorral

$$x_0 := 0,\ x_{n+1} := x_n + \lambda F(x - x_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

és

$$\|x - x_n\| \leq \delta^n \cdot \|x\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban,

$$AI \leq F \leq BI$$

miatt[24]

$$(1 - \lambda B)I \leq I - \lambda F \leq (1 - \lambda A)I.$$

Ezért

$$\|I - \lambda F\| \leq \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} = \delta < 1.$$

Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén igaz az

$$\|x - x_n\| \leq \delta^n \cdot \|x\|$$

becslés, akkor

$$\|x - x_{n+1}\| = \|x - x_n - \lambda F(x - x_n)\| = \|(I - \lambda F)(x - x_n)\| \leq$$

$$\|I - \lambda F\| \cdot \|x - x_n\| \leq \delta \cdot \delta^n \cdot \|x\| = \delta^{n+1} \cdot \|x\|.$$

Tehát a szóban forgó becslésben az $n$ helyett $(n+1)$-et is írhatunk. Mivel $0 < \delta < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \delta^n = 0,$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

már nyilván következik.

Megjegyezzük, hogy $n = 1$ esetén

$$x_1 = \lambda F(x) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \cdot \phi_n,$$

[24] $I(x) := x \quad (x \in X)$.

azaz a fenti (az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ sorozatot meghatározó) *frame algoritmus* „bemenő" paraméterei az

$$\langle x, \phi_n \rangle \qquad (n \in \mathbf{N})$$

frame együtthatók. Könnyen belátható, hogy a frame algoritmusban a $\lambda$ paraméter optimális értéke[25]:

$$\lambda_* := \frac{2}{A+B}.$$

Ekkor

$$\min\{\max\{|1-\lambda A|, |1-\lambda B|\} : 0 < \lambda < 2/B\} = \delta_{\lambda_*} = \frac{B-A}{B+A}.$$

xiii) Tegyük fel, hogy az v)-beli $(*)$-ban $A = B = 1$ (azaz a $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ egy ún. *Parseval-frame*) és

$$\|\phi_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ frame ortonormált bázis. Ti. a $(*)$ szerint

$$1 = \|\phi_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \phi_m, \phi_n \rangle|^2 = 1 + \sum_{m \neq n = 0}^{\infty} |\langle \phi_m, \phi_n \rangle|^2 \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Innen már világos, hogy

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0 \qquad (m, n \in \mathbf{N},\, m \neq n).$$

xiv) Az előző megjegyzés mintegy „megfordításaként" lássuk be, hogy ha a szóban forgó $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ frame az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-térben, akkor (az $F$ frame operátorral) az $(F^{-1/2}(\phi_n), n \in \mathbf{N})$ is frame, amelynek mindkét frame konstansa 1 (a $(\phi_n)$ frame által meghatározott *kanonikus Parseval-frame*). Ui. az $F$ operátor pozitív, így minden további nélkül beszélhetünk (a szintén pozitív (ld. 10.14.))

$$F^{-1/2} = \left(F^{-1}\right)^{1/2}$$

[25] Abban az értelemben, hogy a $\delta_\lambda$ a lehető legkisebb legyen. A geometriai interpretációt illetően az $(\mathbf{R}^2, \|.\|_\infty)$ normált térben az $(1,1)$ pontnak az $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}, y = Bx/A\}$ altértől (egyenestől) vett távolságáról van szó. Mivel az $(1,1)$-től $\delta > 0$ távolságra lévő pontok ekkor egy négyzetet alkotnak (aminek a középpontja az $(1,1)$, a négyzet belsejében (külsejében) lévő pontok pedig az $(1,1)$-től kisebb (nagyobb) távolságra vannak, mint $\delta$), ezért ezt a négyzetet úgy kell „megszerkeszteni", hogy egyetlen közös (csúcs)pontja legyen az említett egyenessel.

operátorról. Ha $x \in X$, akkor[26]

$$x = F^{-1/2}(F(F^{-1/2}(x))) = F^{-1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\langle F^{-1/2}(x), \phi_n\rangle \cdot \phi_n\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle x, F^{-1/2}(\phi_n)\rangle \cdot F^{-1/2}(\phi_n),$$

amiből

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\langle x, F^{-1/2}(\phi_n)\rangle|^2$$

következik. (Megjegyezzük, hogy általában az $F^{-1/2}(\phi_n) \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ elemek nem normáltak, ezért az előző megjegyzésben mondottak nem alkalmazhatók az $(F^{-1/2}(\phi_n), n \in \mathbf{N})$ frame esetében, más szóval az $(F^{-1/2}(\phi_n), n \in \mathbf{N})$ nem feltétlenül ortonormált bázis.

xv) Ha a $(\phi_n, n \in \mathbf{N})$ frame, akkor az $F$ frame operátor $F^{-1}$ inverze a fentiek szerint (ld. 3.2.) a következő:

$$F^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, F^{-1}(\phi_n)\rangle \cdot F^{-1}(\phi_n) \qquad (x \in X).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(F^{-1}(\phi_n), n \in \mathbf{N})$ duális frame (ld. 3.2.) frame operátora nem más, mint az $F$ frame operátor $F^{-1}$ inverze.

xvi) Ha a $(\phi_n, n \in \mathcal{N})$ a 3.2.3. Tételben szereplő egzakt frame és az $A, B$ jelölik a frame konstansokat, akkor a $(*)$-ból (ld. v)) könnyen belátható, hogy

$$A \le \|\phi_n\|^2 \le B \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

xvii) Az eddig mondottakból következően tehát egy $\mathbf{\Phi}$ rendszer az $X$ Hilbert-térre nézve pontosan akkor egzakt frame (ld. 3.2.), ha a $\mathbf{\Phi}$ feltétlen bázis az $X$-ben (ld. 2.6.) és teljesülnek az előbbi megjegyzésbeli egyenlőtlenségek.

xviii) A történeti hátteret illetően csak utalunk az alábbiakra. Neumann János fogalmazta meg még 1932-ben azt a sejtést, hogy az

$$f_{kj}(t) := e^{2\pi\imath jt} \cdot e^{-\pi(t-k)^2} \qquad (t \in \mathbf{R}, k, j \in \mathbf{Z})$$

[26] $FF^{-1/2} = F^{-1/2}F$ alapján.

függvények véges lineáris kombinációi $\|.\|_2$-ban mindenütt sűrű alteret alkotnak az $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ térben. Világos, hogy ha

$$g_0(t) := e^{-\pi t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor (ld. 3.3.) a

$$\mathcal{G}(g_0, 1, 1) = \{\mathcal{T}_k \mathcal{M}_j g_0 : k, j \in \mathbf{Z}\}$$

rendszer elemei a következők:

$$\mathcal{T}_k \mathcal{M}_j g_0(t) = \mathcal{M}_j g_0(t-k) = e^{2\pi \imath j(t-k)} \cdot e^{-\pi \imath (t-k)^2} =$$

$$e^{-2\pi \imath jk} \cdot e^{2\pi \imath jt} \cdot e^{-\pi \imath (t-k)^2} \qquad (t \in \mathbf{R}, j, k \in \mathbf{Z}),$$

más szóval

$$\mathcal{G}(g_0, 1, 1) = \left\{ e^{-2\pi \imath jk} \cdot f_{kj} : k, j \in \mathbf{Z} \right\}.$$

xix) Gábor Dénes 1946-ban már azt vélelmezte, hogy (az előbbi megjegyzésben) minden $f \in L^2$ függvény alkalmas

$$c_{kj} \in \mathbf{C} \qquad (k, j \in \mathbf{Z})$$

együtthatókkal előállítható

$$f = \sum_{k,j \in \mathbf{Z}} c_{kj} f_{kj}$$

alakú sor összegeként. Mindkét sejtés egzakt vizsgálatára, ill. igazolására csak az 1970-es években került sor. Kiderült, hogy (ld. később) az $\alpha$, $\beta > 0$ paraméterek mellett a

$$\mathcal{G}(g_0, \alpha, \beta) = \{\mathcal{T}_{k\alpha} \mathcal{M}_{j\beta} g_0 : k, j \in \mathbf{Z}\}$$

akkor és csak akkor Gábor-frame, ha $\alpha \cdot \beta < 1$. Tehát pl. a $\mathcal{G}(g_0, 1, 1)$ nem frame, ill. az

$$f = \sum_{k,j \in \mathbf{Z}} c_{kj} f_{kj}$$

egyenlőség csak disztribúció-értelemben áll fenn, még olyan „jó” függvényekre is, mint az ismert Schwartz-osztálybeliek.

xx) Mintegy „negatív” példaként tekintsük a

$$g_1 := \chi_{[0,1]},\ \alpha := 2,\ \beta > 0$$

esetet. Könnyű meggondolni, hogy a

$$\mathcal{G}(g_1, 2, \beta) = \{\mathcal{T}_{2k}\mathcal{M}_{j\beta}g_1 : k, j \in \mathbf{Z}\}$$

nem Gábor-frame. Ui.

$$\mathcal{T}_{2k}\mathcal{M}_{j\beta}g_1(t) = \mathcal{M}_{j\beta}g_1(t-2k) = e^{2\pi\imath j\beta(t-2k)}\chi_{[0,1]}(t-2k) =$$

$$e^{-4\pi\imath j\beta k}e^{2\pi\imath j\beta t}\cdot\chi_{[2k,2k+1]}(t) \qquad (t \in \mathbf{R},\ k, j \in \mathbf{Z}).$$

Nyilvánvaló, hogy ha az $f \in L^2$ függvényre

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [2k+1, 2k+2]$$

teljesül, akkor az $f$ nincs benne a $\mathcal{G}(g_1, 2, \beta)$ által kifeszített altér lezártjában. Tehát a $\mathcal{G}(g_1, 2, \beta)$ nem lehet frame az $L^2$-re vonatkozóan.

xxi) Emlékeztetünk a $W$ Wiener-tér fogalmára (ld. 3.3.):

$$W := \{h \in L^\infty : \|h\|_W < +\infty\},$$

ahol

$$\|h\|_W = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|(\mathcal{T}_k h)\chi_{[0,1]^n}\|_\infty = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|h\cdot\mathcal{T}_k\chi_{[0,1]^n}\|_\infty.$$

Ha $g \in W$, $\alpha, \beta > 0$ és $x, y \in \mathbf{R}^n$, akkor legyen

$$\Delta_{\alpha,\beta}g(x,y) := \sup_{\|u\|_2\le\alpha,\ \|v\|_2\le\beta} |V_g g(x+u, y+v) - V_g g(x,y)|.$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha_0, \beta_0 > 0$ mellett

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\alpha_0,\beta_0}g(x,y)\,dx\,dy < 1.$$

Ekkor tetszőleges

$$(\alpha, \beta) \in (0, \alpha_0] \times (0, \beta_0]$$

esetén a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ frame az $L^2$-re nézve.

xxii) Valamilyen $g \in W$, $\alpha, \beta > 0$ mellett legyen a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ Gábor-frame. Megmutatható, hogy ha $h \in W$ és a $\|g - h\|_W$ „elég" kicsi, akkor a $\mathcal{G}(h, \alpha, \beta)$ is Gábor-frame.

xxiii) A 3.3.1. Tétel után felvetett kérdéssel kapcsolatosak az alábbi eredmények: legyen

$$n = 1,\ g \in L^2 := L^2(\mathbf{R}),\ \alpha, \beta > 0.$$

Ekkor

$1^o$ ha a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ frame az $L^2$-re nézve, akkor $\alpha \cdot \beta \leq 1$;

$2^o$ a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ akkor és csak akkor Riesz-bázis (ld. 2.7.) az $L^2$-ben, ha a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ Gábor-frame és $\alpha \cdot \beta = 1$;

$3^o$ ha az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto xg(x)$$

függvény $L^2$-beli, a $g$ differenciálható, $g' \in L^2$ és a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ Gábor-frame, akkor $\alpha \cdot \beta < 1$. Ugyanez igaz akkor is, ha (ld. 3.3.) $g \in M_{1,1}$.

xxiv) Külön is emeljük ki az előbbi $3^o$ állítás alábbi átfogalmazását: ha a $g \in L^2$ függvény differenciálható, a $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ pedig Gábor-frame, akkor vagy az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto xg(x)$$

leképezés nem $L^2$-beli, vagy $g' \notin L^2$. Más szóval

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |xg(x)|^2 dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(x)|^2 dx \right) = +\infty.$$

Mivel

$$\widehat{g'}(x) = 2\pi \imath \widehat{g}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért mindez a Fourier-transzformáció nyelvén megfogalmazva a

$$\|g'\| = \|\widehat{g'}\|$$

Parseval-egyenlőség szerint azt jelenti, hogy

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |xg(x)|^2 dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |x\widehat{g}(x)|^2 dx \right) = +\infty.$$

A jól ismert

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2dx\leq\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot|g(x)|^2dx}\cdot\sqrt{\int x^2\cdot|\widehat{g}(x)|^2dx}$$

egyenlőtlenség alapján világos a párhuzam a fentiek és a Heisenberg-féle határozatlansági reláció között. Jegyezzük meg továbbá, hogy $\alpha\cdot\beta>1$ esetén a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ nem teljes rendszer az $L^2$-ben, ill., ha a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Riesz–Fischer-rendszer (ld. 2.7.), akkor $\alpha\cdot\beta\geq 1$. (Az, hogy csak az $\alpha\cdot\beta$ szorzat „érdekes" nem meglepő. Legyen ui. $r>0$ esetén

$$g_r(t):=\sqrt{r}g(rt)\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

Ekkor az a tény, hogy a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ teljes rendszer (vagy frame, vagy Riesz-bázis, vagy Riesz–Fischer-rendszer) azzal ekvivalens, hogy a $\mathcal{G}(g_r,\alpha/r,r\beta)$ is a jelzett tulajdonságú rendszer.)

xxv) Legyen $g\in L^2$ és $\alpha,\beta>0$, továbbá tegyük fel, hogy a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ rendszer Gábor-frame. Ha az $S$ frame operátorral a $G:=S^{-1}g$ függvény a duális ablakfüggvény (ld. 3.3.1. Tétel), akkor a

$$\mathcal{G}(g,1/\beta,1/\alpha),\ \mathcal{G}(G,1/\beta,1/\alpha)$$

rendszerek biortogonálisak. A most megfogalmazott (nem triviális) *biortogonalitási reláció* felhasználható a fenti $1^o-3^o$ kijelentések részbeni bizonyításához. Ti. a biortogonalitás miatt

$$\alpha\cdot\beta=\langle g,G\rangle=\langle g,S^{-1}g\rangle=\langle S^{-1/2}g,S^{-1/2}g\rangle=\|S^{-1/2}g\|^2.$$

Mivel a $\mathcal{G}(S^{-1/2}g,\alpha,\beta)$ rendszer a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ által meghatározott Parseval-frame (ld. xiii)), ezért mindkét frame konstansa $A=B=1$. Ugyanakkor a $\sqrt{B}$ felső korlátja a frame elemek normáinak (és $g\neq 0$), így

$$0<\|S^{-1/2}g\|\leq 1.$$

Az előbbiek szerint tehát $\alpha\cdot\beta\leq 1$. Hasonlóan, ha a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ Riesz-bázis (ld. 2.7.) az $L^2$-ben, akkor a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ egyszerre Parseval-frame és bázis. Következésképpen (ld. xiv) megjegyzés) a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ortonormált bázis az $L^2$-ben, amiből

$$\alpha\cdot\beta=\|S^{-1/2}g\|=1$$

következik.

xxvi) Ha a pozitív definit véges típusú (ld. 3.3.) $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény esetén

$$Zh(x,y) := Z_1 h(x,y) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(x-k)e^{2\pi\imath ky} \qquad (x,y \in \mathbf{R})$$

a $h$ függvény *Zak-transzformáltja,* akkor tetszőleges

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_l \mathcal{T}_k \mathcal{M}_l h \in L_h^2$$

függvényre (a könnyen ellenőrizhető általános

$$Z(\mathcal{T}_k \mathcal{M}_l g)(x,y) = e^{2\pi\imath(lx-ky)} Zg(x,y-l) \qquad (x,y \in \mathbf{R},\ k,l \in \mathbf{Z})$$

egyenlőség és a Zak-transzformált második koordinátában való 1 szerinti periodicitása miatt)[27]

$$Zf(x,y) = \widehat{c}(-y)\widehat{d}(x) Zh(x,y) \qquad (x,y \in \mathbf{R}).$$

Az $L_h^2$ függvényosztály definíciója alapján innen világos, hogy a $Zf$, $Zh$ transzformáltak zérushelyei megegyeznek. Következésképpen, ha (a mondott követelményeknek eleget tevő) $h, H$ függvények zérushelyeinek a halmaza különböző, akkor $L_h^2 \neq L_H^2$.

xxvii) Ha (ld. 3.3.) $g \in M_{1,1}$, akkor az

$$\{(\alpha,\beta) \in (0,+\infty)^2 : \text{ a } \mathcal{G}(g,\alpha,\beta) \text{ Gábor-frame}\}$$

halmaz nyílt az $\mathbf{R}^2$-ben (a „szokásos" topológia értelmében).

xxviii) Röviden kitérünk az előbbi megjegyzésben említett speciális transzformáció hátterére. Ehhez elöljáróban tekintsünk egy

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

(Lebesgue-)mérhető függvényt[28] és tegyük fel, hogy egy $0 < p < +\infty$ esetén

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

[27] Emlékeztetőül: $\widehat{c}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi\imath kx} \quad (x \in \mathbf{R},\ c = (c_k, k \in \mathbf{Z}) \in \ell_1(\mathbf{Z}))$.

[28] Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ kitevővel.

Ekkor tetszőleges $\alpha > 0$ és m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ helyen a

$$c_j(x) := f(x - j\alpha) \qquad (j \in \mathbf{Z}^n)$$

definícióval értelmezett $c(x) := (c_j(x), j \in \mathbf{Z}^n)$ sorozat $\ell_p(\mathbf{Z}^n)$-beli. Valóban, a „megszokott” periodizálás szerint

$$+\infty > \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p dx = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \int_{j\alpha+[0,\alpha]^n} |f(x)|^p \, dx =$$

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \int_{[0,\alpha]^n} |f(x + j\alpha)|^p \, dx = \int_{[0,\alpha]^n} \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |f(x + j\alpha)|^p \, dx,$$

tehát m.m. $x \in [0, \alpha]^n$ mellett

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |f(x + j\alpha)|^p = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |f(x - j\alpha)|^p < +\infty.$$

Az utóbbi összegnek az $x$ minden változójabeli (nyilvánvaló) $\alpha$ szerinti periodicitását figyelembe véve egyúttal m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ pontban is

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |f(x - j\alpha)|^p < +\infty.$$

Speciálisan, ha $f \in L^1$, akkor

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |f(x - j\alpha)| < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

ezért minden ilyen $x$-re és bármely $y \in \mathbf{R}^n$ vektorra abszolút konvergens a

$$(*) \qquad \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(x - j\alpha) e^{2\pi\imath\alpha\langle j,y\rangle}$$

sor. Ha $f \in L^2$, akkor m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ esetén a fenti $c(x)$ sorozat $\ell_2(\mathbf{Z}^n)$-beli. Figyelembe véve tehát az

$$\alpha^{-n/2} \cdot e^{2\pi\imath\alpha\langle j,y\rangle} \qquad (y \in \mathbf{R}^n, j \in \mathbf{Z}^n)$$

($n$-változós) trigonometrikus rendszer $L^2[0, 1/\alpha]^n$-beli ortonormáltságát azt mondhatjuk, hogy az előbbi $(*)$ sor m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ mellett az $y$ változóban a

$$\|\varphi\|_* := \sqrt{\int_{[0,1/\alpha]^n} |\varphi(y)|^2 \, dy} \qquad (\varphi \in L^2[0, 1/\alpha]^n)$$

norma szerint konvergens. Sőt, ha a $\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}$ összegzés a

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j\in\mathbf{Z}^n,\|j\|_2\le N}$$

határértéket jelenti, akkor a Carleson-tétel miatt a $(*)$ sor m.m. $y\in\mathbf{R}^n$ esetén pontonként is konvergál (ugyanoda, mint $\|.\|_*$-ban).

xxix) A fentiek motiválják a következő definíciót: ha $f\in L^1$, vagy $f\in L^2$ és $\alpha>0$, akkor a

$$Z_\alpha f(x,y):=\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(x-j\alpha)e^{2\pi\imath\alpha\langle j,y\rangle}\qquad(\text{m.m. } x,y\in\mathbf{R}^n)$$

módon értelmezett

$$Z_\alpha f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$$

leképezést az $f$ függvény *Zak-transzformáltjának* nevezzük. Például legyen

$$n=1 \text{ és } f:=\chi_{[0,1)}.$$

Ekkor

$$Z_\alpha f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\chi_{[0,1)}(x-k\alpha)e^{2\pi\imath\alpha ky}=e^{2\pi\imath\alpha[x/\alpha]y}\qquad(x,y\in\mathbf{R},\ \alpha>0),$$

ahol $[x/\alpha]$ az $x/\alpha$ szám egészrészét jelenti.

xxx) Megjegyezzük, hogy a most értelmezett transzformációt először Gelfand használta differenciálegyenletek vizsgálatakor, bár valójában már Gaussnál is előfordul. Később Weil terjesztette ki a definíciót lokálisan kompakt Abel-csoportokra. Brezin szintén differenciálegyenletek vizsgálatakor alkalmazta a szóban forgó transzformációt, amit ezért szoktak *Weil–Brezin-leképezésnek* is nevezni.

xxxi) Soroljuk fel a Zak-transzformáció néhány (többé-kevésbé nyilvánvaló) tulajdonságát (a pontonkénti egyenlőségek a szóban forgó helyeket illetően m.m. értendők):

**a)** $Z_\alpha f(x, y + k/\alpha) = Z_\alpha f(x, y) \quad (f \in L^1 \cup L^2,\ k \in \mathbf{Z}^n)$;

**b)** $Z_\alpha f(x + k\alpha, y) = e^{2\pi\imath\alpha\langle k,y\rangle} \cdot Z_\alpha f(x, y) \quad (f \in L^1 \cup L^2, k \in \mathbf{Z}^n)$;

**c)** $Z_\alpha(\mathcal{T}_u\mathcal{M}_v f)(x, y) = e^{2\pi\imath\langle v,x-u\rangle} \cdot Z_\alpha f(x - u, y - v) \quad (f \in L^1 \cup L^2)$;

**d)** $\|Z_\alpha f\|_\infty \le (1 + 1/\alpha)^n \cdot \|f\|_W \quad (f \in W)$;

**e)** $f(x) = \alpha^n \cdot \int_{[0,1/\alpha]^n} Z_\alpha f(x, y)\, dy \quad (f \in L^1)$;

**f)** $\widehat{f}(y) = \int_{[0,\alpha]^n} Z_\alpha f(x, y) e^{-2\pi\imath\langle x,y\rangle} dx \quad (f \in L^1)$;

**g)** $Z_\alpha f(x, y) = \alpha^{-n} \cdot e^{2\pi\imath\langle x,y\rangle} \cdot Z_{1/\alpha}\widehat{f}(y, -x) \quad (f, \widehat{f} \in L^1)$;

**h)** $\int_{[0,\alpha]^n} \int_{[0,1/\alpha]^n} |Z_\alpha f(x, y)|^2 dx\, dy = \alpha^{-n} \cdot \|f\|^2 \quad (f \in L^2)$.

Az **e)** *inverziós formulához* vegyük figyelembe, hogy m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ helyen

$$|Z_\alpha f(x, y)| \le \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |f(x - k\alpha)| < +\infty \qquad (y \in [0, 1/\alpha]^n).$$

Ezért ilyen $x$-ekre az alábbi összegzés és integrálás felcserélhető:

$$\int_{[0,1/\alpha]^n} Z_\alpha f(x, y)\, dy = \int_{[0,1/\alpha]^n} \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f(x - k\alpha) e^{2\pi\imath\alpha\langle k,y\rangle} dy =$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \int_{[0,1/\alpha]^n} f(x - k\alpha) e^{2\pi\imath\alpha\langle k,y\rangle} dy = \alpha^{-n} \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Analóg módon kapjuk az **f)** egyenlőséget is. A **g)** állítás az ismert

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f(x + k\alpha) = \alpha^{-n} \cdot \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \widehat{f}(k/\alpha) e^{2\pi\imath\langle k,x/\alpha\rangle}$$

Poisson-féle szummációs formulából következik, ha azt az $\mathcal{M}_y\mathcal{T}_x\tilde{f}$ függvényre írjuk fel (ahol

$$\tilde{f}(t) := f(-t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).)$$

Végül, a **h)** egyenlőséghez alkalmazzuk a Parseval-egyenlőséget a m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ esetén $\ell_2(\mathbf{Z}^n)$-beli $(f(x - k\alpha), k \in \mathbf{Z}^n)$ sorozatra:

$$\int_{[0,1/\alpha]^n} |Z_\alpha f(x, y)|^2 dy = \alpha^{-n} \cdot \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |f(x - k\alpha)|^2.$$

Innen

$$\int_{[0,\alpha]^n}\int_{[0,1/\alpha]^n}|Z_\alpha f(x,y)|^2 dx\,dy =$$

$$\alpha^{-n}\cdot\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\int_{[0,\alpha]^n}|f(x-k\alpha)|^2 dx = \alpha^{-n}\cdot\|f\|^2$$

rögtön adódik.

xxxii) Jelöljük egy $x \in \mathbf{R}$ szám törtrészét így: $\langle x\rangle$. Következésképpen

$$x = \langle x\rangle + n_x,$$

ahol az

$$\langle x\rangle \in [0,1),\ n_x \in \mathbf{Z}$$

számok egyértelműek minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Mutassuk meg, hogy bármely $f \in L^1$ és $h \in W$ függvény esetén m.m. $x \in \mathbf{R}$ helyen a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x\rangle + k)h(x-k)|$$

összeg véges. Valóban,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x\rangle+k)h(x-k)|\,dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_j^{j+1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x\rangle+k)h(x-k)|\,dx =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x+j\rangle+k)h(x+j-k)|\,dx =$$

$$\int_0^1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x\rangle+k)|\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}|h(x+j-k)|\,dx =$$

$$\int_0^1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(x+k)|\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}|h(x+j)|\,dx \le$$

$$\|h\|_W\cdot\int_0^1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(x+k)|\,dx = \|h\|_W\cdot\|f\|_1 < +\infty.$$

Ezért m.m. $x \in \mathbf{R}$ mellett

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(\langle x\rangle+k)h(x-k)| < +\infty.$$

xxxiii) A most mondottak szerint van értelme a következő definíciónak: az

$$f \in L^1,\, h \in W$$

függvények $f \bullet h$ *Zak-konvolúciója* legyen az alábbi függvény:

$$f \bullet h(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\langle x \rangle + k)h(x-k) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Az előbbiek alapján tehát $f \bullet h \in L^1$ és

$$\|f \bullet h\|_1 \leq \|h\|_W \cdot \|f\|_1.$$

A Fourier-transzformáció és a „szokásos" konvolúció (ld. 10.10.) kapcsolatára utalva az alábbi állítás indokolja a fenti *konvolúció* szóhasználatot:

$$Z(f \bullet h) = Zf \cdot Zh.$$

Ugyanis m.m. $x, y \in \mathbf{R}^n$ választással

$$Z(f \bullet h)(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f \bullet h(x+j)e^{-2\pi\imath jy} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\langle x+j \rangle + k)h(x+j-k)e^{-2\pi\imath jy} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\langle x \rangle + k)h(x+j-k)e^{-2\pi\imath jy} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\langle x \rangle + k)e^{-2\pi\imath ky} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x+j-k)e^{-2\pi\imath (j-k)y} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\langle x \rangle + k)e^{-2\pi\imath ky} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x+j)e^{-2\pi\imath jy} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-k)e^{2\pi\imath ky} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x-j)e^{2\pi\imath jy} = Zf(x,y) \cdot Zh(x,y).$$

xxxiv) A Zak-transzformáció (ld. xxix)) és a Gábor-framek (ld. 3.3.) kapcsolatát illetően az alábbi állításokat idézzük: legyen $\alpha > 0$ és

$$g \in L^2 = L^2(\mathbf{R}^n) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$1^o$ az illető Gábor-frame

$$S_g^{\alpha,1/\alpha} : L^2 \to L^2$$

frame operátora akkor és csak akkor korlátos operátor, ha $Z_\alpha g \in L^\infty$;

$2^o$ a $\mathcal{G}(g, \alpha, 1/\alpha)$ rendszer akkor és csak akkor Gábor-frame (azaz Riesz-bázis (ld. 2.7.)), ha alkalmas $a, b > 0$ számokkal

$$a \le |Z_\alpha g(x,y)| \le b \qquad (\text{m.m. } x, y \in \mathbf{R}^n);$$

$3^o$ az előbbi $\mathcal{G}(g, \alpha, 1/\alpha)$ akkor és csak akkor ortonormált bázis az $L^2$-ben, ha

$$\alpha^n \cdot |Z_\alpha g(x,y)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } x, y \in \mathbf{R}^n).$$

A most mondott állítások mögött az alábbi általános tétel húzódik meg: legyen $g, h \in L^2$ és (ld. 3.3.)

$$S_{g,h}^{\alpha,\beta} f := \sum_{k,j \in \mathbf{Z}^n} \langle f, \mathcal{T}_{k\alpha} \mathcal{M}_{j\beta} g \rangle \cdot \mathcal{T}_{k\alpha} \mathcal{M}_{j\beta} h \qquad (f \in L^2,\ \alpha, \beta > 0).$$

Ekkor

$$Z_\alpha(S_{g,h}^{\alpha,\beta} f) = \alpha^n \cdot \overline{Z_\alpha g} \cdot Z_\alpha h \cdot Z_\alpha f \qquad (f \in L^2).$$

xxxv) A fentiekben érintett 1 dimenziós ($n = 1$) eredmények magasabb dimenzióra való kiterjesztését illetően illusztrációul idézzük az alábbiakat. Legyen tehát az

$$\mathcal{A} \in \mathbf{K}^{(2n) \times (2n)} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

invertálható mátrix,

$$\mathcal{S} := \mathcal{A}(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}^n)$$

és $g \in L^2$. Ekkor (ld. xxv)):

$1^o$ ha a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ rendszer frame az $L^2 = L^2(\mathbf{R}^n)$-re nézve, akkor

$$0 < |\det \mathcal{A}\,| \leq 1;$$

$2^o$ a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ akkor és csak akkor Riesz-bázis (ld. 2.7.) az $L^2$-ben, ha frame, és ugyanakkor $|\det \mathcal{A}\,| = 1$;

$3^o$ ha a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ Riesz–Fischer-rendszer (ld. 2.7.), akkor $|\det \mathcal{A}\,| \geq 1$.

Igaz továbbá, hogy az alábbi állítások egymással ekvivalensek:

$4^o$ $|\det \mathcal{A}\,| \leq 1$;

$5^o$ van olyan $g \in L^2$, hogy a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ teljes rendszer az $L^2$-ben;

$6^o$ van olyan $g \in L^2$, hogy a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ frame az $L^2$-re nézve.

Hasonlóan, ekvivalensek a következő kijelentések:

$7^o$ $|\det \mathcal{A}\,| = 1$;

$8^o$ van olyan $g \in L^2$, hogy a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ Riesz-bázis az $L^2$-ben;

$9^o$ van olyan $g \in L^2$, hogy a $\mathcal{G}(g,\mathcal{S})$ ortonormált bázis az $L^2$-ben.

Legyen $g \in L^2$ és $\alpha, \beta > 0$, valamint

$$\mathcal{R}(x) = \left(\mathcal{R}_{kl}(x)\right)_{k,l\in\mathbf{Z}^n} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

az a végtelen mátrix, amelynek a komponensei a következők:

$$\mathcal{R}_{kl}(x) := \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} g(x + j\alpha - l/\beta)\cdot \overline{g(x + j\alpha - k/\beta)} \qquad (k,l \in \mathbf{Z}^n).$$

Az alábbi ekvivalenciák igazak:

$10^o$ a $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ akkor és csak akkor frame az $L^2$-re nézve, ha megadhatók olyan pozitív $a, b > 0$ számok, amelyekkel m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ esetén az $\mathcal{R}(x)$ spektruma $[a,b]$-beli. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy tetszőlegesen választott $(c_k, k \in \mathbf{Z}^n) \in \ell_2(\mathbf{Z}^n)$ sorozatra

$$a\cdot \|c\|_2^2 \leq \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \left| \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} c_k g(x + j\alpha - k/\beta)\right|^2 \leq b\cdot \|c\|_2^2 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Végül, mindez azzal egyenértékű, hogy egy alkalmas $G \in L^2$ (duális-)ablakfüggvénnyel fennáll az alábbi ortogonalitási reláció:

$$(*) \qquad \langle G, \mathcal{M}_{l/\alpha}\mathcal{T}_{k/\beta}g\rangle = (\alpha\cdot\beta)^n \cdot \delta_{k0}\delta_{l0} \qquad (k, l \in \mathbf{Z}^n)$$

(ahol a $\delta_{k0}, \delta_{l0}$ a „szokásos" Kronecker-féle szimbólumok). Megjegyezzük, hogy az előbb említett $G$ függvény a következő alakú:

$$G(x) = \beta^n \cdot \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \overline{\Gamma_{0j}(x)}\chi_{[0,\alpha)^n}(x - j\alpha) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol a

$$\Gamma(x) = (\Gamma_{kj}(x))_{k,j\in\mathbf{Z}^n} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

végtelen mátrix a

$$P_{ls}(x) := g(x + l\alpha - s/\beta) \qquad (x \in \mathbf{R}^n, l, s \in \mathbf{Z}^n)$$

komponensű

$$P(x) = (P_{ls}(x))_{l,s\in\mathbf{Z}^n} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

mátrix segítségével eleget tesz a

$$\Gamma(x)P(x) = I \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n)$$

mátrix-egyenlőségnek. Következésképpen maga az előbbi $(*)$ ortogonalitás szinte triviális:

$$\langle G, \mathcal{M}_{l/\alpha}\mathcal{T}_{k/\beta}g\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} G(x)\overline{g(x - k/\beta)}e^{-2\pi\imath lx/\alpha}dx =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} G(x + j\alpha)\overline{g(x + j\alpha - k/\beta)}e^{-2\pi\imath lx/\alpha}dx =$$

$$\beta^n \cdot \int_{[0,\alpha]^n} \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \overline{\Gamma_{0j}(x)P_{jk}(x)}e^{-2\pi\imath lx/\alpha}dx =$$

$$\beta^n \cdot \int_{[0,\alpha]^n} \delta_{k0}e^{-2\pi\imath lx/\alpha}dx = (\alpha\cdot\beta)^n\delta_{k0}\delta_{l0}.$$

xxxvi) Az előbbiekhez kapcsolódik az alábbi Gábor-frame konstrukció. Nevezetesen, legyen $\alpha, \beta > 0$, a

$$\sigma : \mathbf{R}^n \to \ell_2(\mathbf{Z}^n)$$

Lebesgue-mérhető vektor értékű függvény az $\alpha$ szerint periodikus és olyan, hogy

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \sigma_j(x)\overline{g(x + j\alpha - k/\beta)} = \delta_{k0} \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n, k \in \mathbf{Z}^n).$$

Ekkor a

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \sup_{x\in[0,\alpha]^n} |\sigma_j(x)| < +\infty$$

feltétel elegendő ahhoz, hogy a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ rendszer Gábor-frame legyen. Továbbá a

$$G(x) := \beta^n \cdot \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \sigma_j(x)\chi_{[0,\alpha]^n}(x - j\alpha) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvénnyel a $\mathcal{G}(G, \alpha, \beta)$ frame a $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ frame duálisa (ld. 3.2.).

xxxvii) Nem tárgyaljuk részleteiben az általános

$$\mathcal{G}(g, \mathcal{S}) \qquad (\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$$

alakú Gábor-rendszereket, azaz, amikor az $\mathcal{S}$ nem

$$(\alpha\mathbf{Z}^n) \times (\beta\mathbf{Z}^n) \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

alakú (tehát az ún. *irreguláris Gábor-rendszereket*). Annyit jegyzünk meg csupán, hogy az egyik alapvető nehézség az ilyen rendszerek vizsgálatakor a következő: egy irreguláris Gábor-frame duálisa nem feltétlenül Gábor-frame. Amint már mondtuk, a reguláris esetben a frame operátor felcserélhető az

$$\mathcal{M}_{k\alpha}\mathcal{T}_{j\beta} \qquad (k, j \in \mathbf{Z}^n)$$

transzformációval, az irreguláris esetben ez már nem igaz. Példaként említjük meg, hogy $n = 1$ mellet a

$$g(t) := e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

esetben ismertek azok az $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^2$ „index"-halmazok, amelyekre a $\mathcal{G}(g, \mathcal{S})$ frame az $L^2$-re nézve.

# 4. fejezet

# Bázisok $L^p$ terekben

## 4.1. Biortogonális sorfejtések

Legyen a továbbiakban valamilyen $1 \le p < +\infty$ mellett

$$X := L^p := L^p[0,1]$$

a „szokásos" (valós) Lebesgue-tér. A Riesz-féle reprezentációs tétel (ld. 10.7.) szerint ekkor az $X^*$ duális tér azonosítható azzal az $L^q$ térrel, amelyre $1 < q \le +\infty$ és

$$(*) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ahol az „azonosítás" a következőt jelenti: bármely $G \in X^*$ esetén egyértelműen létezik olyan $h \in L^q$ függvény, hogy

$$G(f) = \int_0^1 fh \qquad (f \in L^p).$$

Igaz továbbá, hogy itt[1]

$$\|G\| = \|h\|_q.$$

Ha tehát egy $L^p$-beli

$$\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszernek a

$$\Psi = (\psi_n, n \in \mathbf{N})$$

[1]Emlékeztetőül: $\|G\| = \sup\{|G(f)| : f \in L^p,\ \|f\|_p \le 1\}$.

rendszer a biortogonális társa (ld. 2.2.), akkor

$$\psi_n \in L^q \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és az $f \in L^p$ függvény biortogonális sora a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\varphi_n$$

függvénysor, ahol

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f\psi_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tegyük fel, hogy a $\Phi$ rendszer zárt és minimális az $L^p$-ben. Ekkor (ld. 2.2.) a fenti $\Psi$ egyértelműen létezik és a 2.2.1. Tétel szerint a $\Phi$ pontosan akkor bázis az $L^p$-ben, ha

$$\sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Az

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\varphi_k \qquad (f \in L^p,\, n \in \mathbf{N})$$

egyenlőséggel értelmezett $S_n$ (részletösszeg-)operátorokról a következőket mondhatjuk:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left( \int_0^1 f(t)\psi_k(t)dt \right) \varphi_k(x) = \int_0^1 f(t)K_n(x,t)\,dt \qquad (x \in [0,1]),$$

ahol

$$K_n(x,t) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(t) \qquad (x,t \in [0,1])$$

(a $\Phi$ rendszer $n$-edik *magfüggvénye*). Ismét csak a Riesz-reprezentáció (ld. 10.7.) alapján (a $(*)$ egyenlőségnek eleget tevő $q$-val)

$$\|S_n(f)\|_p = \sup\left\{ \left| \int_0^1 S_n(f)g \right| : g \in L^q, \|g\|_q \le 1 \right\} \qquad (n \in \mathbf{N},\, f \in L^p),$$

amiből

$$\|S_n\| = \sup\{\|S_n(f)\|_p : f \in L^p, \|f\|_p \leq 1\} =$$

$$\sup\left\{\sup\left\{\left|\int_0^1 S_n(f)g\right| : g \in L^q, \|g\|_q \leq 1\right\} : f \in L^p, \|f\|_p \leq 1\right\}$$

adódik. A $p > 1$ feltétel mellett[2] az ismert

$$|uv| \leq \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q} \qquad (u, v \in \mathbf{R})$$

egyenlőtlenséget felhasználva viszont bármely

$$f \in L^p,\ g \in L^q,\ \|f\|_p,\ \|g\|_q \leq 1$$

és $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\left|\int_0^1 S_n(f)g\right| \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)| \cdot |K_n(x,t)|^{1/p} \cdot |g(x)| \cdot |K_n(x,t)|^{1/q}\, dt\, dx \leq$$

$$\int_0^1 \frac{|f(t)|^p}{p} \left(\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx\right) dt + \int_0^1 \frac{|g(x)|^q}{q} \left(\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dt\right) dx.$$

Ha

$$K_n^{(1)}(t) := \int_0^1 |K_n(y,t)|\, dy \qquad (t \in [0,1]),$$

valamint

$$K_n^{(2)}(x) := \int_0^1 |K_n(x,v)|\, dv \qquad (x \in [0,1]),$$

továbbá

$$\|K_n\|_{(1,\infty)} := \|K_n^{(1)}\|_\infty < +\infty$$

és

$$\|K_n\|_{(\infty,1)} := \|K_n^{(2)}\|_\infty < +\infty,$$

akkor

$$\|S_n\| \leq \frac{1}{p} \cdot \|K_n\|_{(1,\infty)} + \frac{1}{q} \cdot \|K_n\|_{(\infty,1)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ha $p = 1$, akkor

$$\|S_n\| \leq \|K_n\|_{(1,\infty)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezzel beláttuk a következő állítást:

[2] Ekkor $1 < q < +\infty$.

**4.1.1. Tétel.** *Legyen* $1 \le p < +\infty$ *és tegyük fel, hogy a* $\Phi$ *rendszer zárt és minimális az* $L^p$*-ben. Ha* $p > 1$ *és*

$$\sup\{\|K_n\|_{(1,\infty)},\ \|K_n\|_{(\infty,1)} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

*vagy* $p = 1$ *és*

$$\sup\{\|K_n\|_{(1,\infty)} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

*akkor a* $\Phi$ *bázis az* $L^p$*-ben.*

A $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer $L^p$-beli zártsága $(1 \le p < +\infty)$ ekvivalens a következővel (a $\Phi$ „*teljessége*”): az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

feltételnek eleget tevő $1 < q \le +\infty$ kitevővel bármely $0 \ne g \in L^q$ függvényhez van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy

$$\int_0^1 g\varphi_n \ne 0.$$

Ui. tetszőleges $X$ Banach-tér és egy $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer esetén a $z$ zártságából következik, hogy minden $\varphi \in X^*$ funkcionálra a $\varphi = 0$ feltétel azzal egyenértékű, hogy[3]

$$\varphi(z_n) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Fordítva, ha a $z$ olyan rendszer, hogy bármely $0 \ne \varphi \in X^*$ esetén valamilyen $n \in \mathbf{N}$ indexre $\varphi(z_n) \ne 0$, akkor $\overline{\mathcal{L}[z]} = X$. Különben a Hahn–Banach-tétel egyik következménye (ld. 10.2.) alapján lenne olyan $0 \ne \varphi \in X^*$, amely az $\overline{\mathcal{L}[z]}$ (zárt) altéren nulla.

A 4.1.1. Tételt kissé általánosabb formában is megfogalmazhatjuk, egyúttal a „hiányzó” $p = +\infty$ esetet is vizsgálva. Legyen ui. $1 \le p, q \le +\infty$ és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

valamint tegyük fel, hogy az $L^p$-beli $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ rendszernek van $L^q$-beli biortogonális társa: $\Psi = (\psi_n, n \in \mathbf{N})$, azaz

$$\int_0^1 \varphi_n \psi_k = \delta_{nk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).^4$$

[3]Vegyük figyelembe, hogy a $\varphi$ folytonos.

[4]Ha $p < +\infty$, akkor a $\Phi$-vel biortogonális rendszer eleve csak az $L^q$-ban lehet, ezért ekkor elég azt feltenni, hogy a $\Phi$ minimális rendszer (ld. 2.2.). A $p = +\infty$ esetben viszont – lévén az $L^\infty$ duálisa az $L^1$-nél bővebb – nem elég a $\Phi$ minimalitása.

Az

$$S_n(f) \qquad (n \in \mathbf{N},\ f \in L^\infty)$$

előállítására vonatkozó, a 4.1.1. Tétel kimondása előtt kapott

$$S_n(f)(x) = \int_0^1 f(t)K_n(x,t)\,dt \qquad (x \in [0,1])$$

integrálformula nyilván $p = +\infty$ mellett is igaz és ekkor

$$\|S_n\| \leq \|K_n\|_{(\infty,1)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát $1 < p < +\infty$ és

$$\sup\{\|K_n\|_{(1,\infty)}, \|K_n\|_{(\infty,1)} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

ill. $p = 1$ és

$$\sup\{\|K_n\|_{(1,\infty)} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

vagy $p = +\infty$ és

$$\sup\{\|K_n\|_{(\infty,1)} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

akkor a $\Phi$ bázis az $\overline{\mathcal{L}[\Phi]}$ (zárt) altérben.[5]

A dualitási elv (ld. 3.3.3. Tétel) az $L^p$-beli bázisok esetén a következő állítást jelenti:

**4.1.2. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $1 < p < +\infty$ és a $\Phi$ rendszer bázis az $L^p$-ben. Ekkor a ($\Phi$-vel biortogonális) $\Psi$ rendszer bázis az $L^q$-ban, ahol*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Azt ui. tudjuk, hogy a $\Psi$ bázis az $\overline{\mathcal{L}[\Psi]}$ altérben (a lezárást a $\|.\|_q$ normában értve). Elég tehát azt belátni, hogy a $\Psi$ zárt rendszer az $L^q$-ban. Ha viszont nem lenne az, akkor a teljesség sem állna fenn. Így lenne olyan $0 \neq f \in L^p$ függvény, amelyre

$$\widehat{f}(n) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Viszont a $\Phi$ bázis az $L^p$-ben, ezért ekkor

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\varphi_n = 0,$$

ami nyilván ellentmondás.

[5] A lezárást a $\|.\|_p$ normában értve.

## 4.2. Fourier-sorfejtések

Legyen most az $(X, \|.\|)$ olyan Banach-tér, amelyre $X \subset L^1$ és

$$\|f\|_1 \leq \|f\| \qquad (f \in X).$$

Tegyük fel, hogy az $X$-beli

$$\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszerre az alábbiak teljesülnek:

$$(*) \qquad \begin{cases} \text{i)} \quad \text{bármely } f \in X \text{ és } n \in \mathbf{N} \text{ esetén } f\varphi_n \in L^1; \\ \\ \text{ii)} \quad \int_0^1 \varphi_n \varphi_k = \delta_{nk} \quad (k, n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\Phi$ egy $X$-beli *ortonormált rendszer.* Mivel az i) szerint

$$\varphi_n \in L^2 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért a ii) feltétel miatt a $\Phi$ a „szokásos" értelemben is (azaz az $L^2$ Hilbert-térben) egy ONR. Ha $X \subset L^2$, akkor az i) automatikusan teljesül.

A feltételek alapján rögtön adódik, hogy $L^\infty \subset X^*$, így bármely $f \in L^\infty$ függvénnyel a

$$X \ni g \mapsto \int_0^1 fg$$

funkcionál $X^*$-beli[6]. Megmutatjuk, hogy ugyanez teljesül a

$$X \ni g \mapsto \int_0^1 \varphi_n g \qquad (n \in \mathbf{N})$$

funkcionálokra is (amelyeket a $(*)$ i) feltétel alapján definiálhattunk). Legyen ui. valamilyen $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\varphi_{nk} \in L^\infty \qquad (k \in \mathbf{N})$$

a következő függvény:

$$\varphi_{nk}(x) := \begin{cases} \varphi_n(x) & (|\varphi_n(x)| \leq k) \\ \\ 0 & (|\varphi_n(x)| > k) \end{cases} \qquad (x \in [0, 1]).$$

[6]Ui. $L^\infty \subset (L^1)^* \subset X^*$. A szóban forgó funkcionál linearitása nyilvánvaló, továbbá $|\int_0^1 fg| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\| \quad (g \in X)$.

Az

$$F_k(g) := \int_0^1 \varphi_{nk} g \qquad (g \in X,\ k \in \mathbf{N})$$

egyenlőséggel értelmezett funkcionálokra egyrészt $F_k \in X^*$ nyilván fennáll.[7] Másrészt (pl. a Lebesgue-féle konvergencia tétel alapján) az $(F_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat az $X$ téren erősen konvergál a

$$X \ni g \mapsto \int_0^1 \varphi_n g$$

funkcionálhoz,[8] ami ezért a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) miatt valóban korlátos.

A fenti $(*)$ feltételek szerint tehát a $\Phi$ önmagával biortogonális rendszert alkot, ezért (ld. 2.2.) egyúttal minimális. Az $f \in X$ függvény biortogonális sora most a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \int_0^1 f\varphi_k \Big) \varphi_k$$

ortogonális sor. Két speciális esetet fogunk vizsgálni:

$1^o$ $X := C[0,1]$, $\|.\| := \|.\|_\infty$;

$2^o$ $X := L^p$, $\|.\| := \|.\|_p \quad (1 \le p \le +\infty)$.

Ekkor a $(*)$-beli i) kikötés miatt

$$\varphi_n \in L^p \cap L^q \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A továbbiakban a következő terminológiát követjük:

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f\varphi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[7] Az $F_k$ linearitása világos. Ugyanakkor $|F_k(g)| \le k \cdot \|g\|_1 \le k \cdot \|g\| \quad (g \in X)$.

[8] Tehát tetszőleges $g \in X$ választással $\int_0^1 \varphi_n g = \lim_{k\to\infty} F_k(g)$, hiszen $\varphi_{nk} g \to \varphi_n g \quad (k \to \infty)$ és $|\varphi_{nk} g| \le |\varphi_n g| \in L^1 \quad (k \in \mathbf{N})$ miatt $\int_0^1 \varphi_{nk} g \to \int_0^1 \varphi_n g \quad (k \to \infty)$.

az $f$ függvény $n$-edik $\Phi$-*Fourier-együtthatója,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\varphi_k$$

az $f$ függvény $\Phi$-*Fourier-sora,*

$$L_n(x) := \int_0^1 |K_n(x,t)|\, dt = \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t) dt \Big| \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbf{N})$$

a $\Phi$ rendszer $n$-edik *Lebesgue-függvénye,* ahol tehát most (ld. 4.1.) a $\Phi$ rendszer $n$-edik magfüggvénye

$$K_n(x,t) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \qquad (x, t \in [0,1],\ n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$\|K_n\|_{(1,\infty)} = \|K_n\|_{(\infty,1)} = \|L_n\|_\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért a 4.1.1., 4.1.2. Tételekből következik a

**4.2.1. Tétel.** *Legyen*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (1 \le p, q \le +\infty)$$

*esetén*

$$\varphi_n \in L^p \cap L^q \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

*és tegyük fel, hogy a* $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ *rendszer ortonormált. Ha*

$$\sup\{\|L_n\|_\infty :\ n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

*akkor a* $\Phi$ *bázis az* $\overline{\mathcal{L}[\Phi]}$ *altérben* (*a lezárást akár a* $\|.\|_p$, *akár a* $\|.\|_q$ *normában értve*). *Speciálisan, ha a* $\Phi$ *zárt rendszer az* $L^p$*-ben, akkor a* $\Phi$ *bázis az* $L^p$*-ben és* $p \ne 1$ *esetén az* $L^q$*-ban is.*

Ortonormált rendszerek esetén a dualitási elv (ld. 3.3.3. Tétel) a következő alakot ölti:

**4.2.2. Tétel.** *Ha a* $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ *ortonormált rendszer bázis valamelyik* $L^p$ *térben* $(1 < p < +\infty)$ *és az*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*feltételnek eleget tevő* $1 < q < +\infty$ *kitevővel*

$$\varphi_n \in L^p \cap L^q \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

*akkor minden*

$$r \in [p \wedge q, p \vee q]$$

*mellett*[9] *a* $\Phi$ *bázis az* $L^r$*-ben.*

Tudjuk ui., hogy a $\Phi$ bázis az $L^q$-ban, ezért (ld. 2.2.) a $\Phi$ teljes az $L^p$-re is és az $L^q$ térre nézve is. Így a $\Phi$ teljes az $L^r$-re vonatkozóan, következésképpen a $\Phi$ zárt rendszer az $L^r$-ben. Mivel az $S_n$ $(n \in \mathbf{N})$ részletösszeg-operátorok (ld. 2.2.) akár mint $L^p \to L^p$, akár mint $L^q \to L^q$ lineáris operátorok egyenletesen korlátosak, ezért a Riesz–Thorin-féle interpolációs tétel (ld. 10.4.) értelmében egyúttal mint $L^r \to L^r$ lineáris operátorok is egyenletesen korlátosak.

Ha a 4.2.1. Tételben $p = 1$, akkor

$$\|S_n\| = \|L_n\|_\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt igaz a

**4.2.3. Tétel.** *Az* $L^1$*-beli* $\Phi$ *zárt ONR akkor és csak akkor bázis az* $L^1$*-ben, ha*

$$\sup\{\|L_n\|_\infty : \ n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Analóg állítás igaz az

$$(X, \|.\|) := (C[0,1], \|.\|_\infty)$$

esetben is, mivel ekkor is fennáll az

$$\|S_n\| = \|L_n\|_\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőség.

[9] $p \wedge q := \min\{p, q\}$, ill. $p \vee q := \max\{p, q\}$. Így $L^{p \vee q} \subset L^r \subset L^{p \wedge q}$ $\quad (p \wedge q \le r \le p \vee q)$.

Legyen adott az $L^2$-ben egy $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ zárt ONR, amire

$$\varphi_n \in L^\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesül. Tudjuk (ld. 1.4.), hogy a $\Phi$ bázis az $L^2$-ben. Ebből és a $\Phi$ rendszer valamelyik $L^p$-beli $(1 < p < +\infty,\ \text{de}\ p \neq 2)$ bázis voltából a 4.2.2. Tétel szerint következik, hogy a $\Phi$ egyúttal bázis bármely $L^p$ és $L^2$ közti $L^r$ térben is.[10] A 2.2.1. Tétel értelmében ahhoz, hogy az $L^p$-ben zárt $\Phi$ rendszer az $L^p$-ben bázis legyen, szükséges és elégséges feltétel a $\Phi$ szerinti $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ részletösszeg-operátorok egyenletes korlátossága.[11] Már korábban is említettük, hogy az előbb idézett alaptétel követelményei közül ez a „legkritikusabb”, általában a legnehezebben belátható feltétel. Az alábbiakban ennek a kérdésnek a kezelésére mutatunk be egy gyakran alkalmazható módszert.

Tegyük fel, hogy az $S_n$-ek rendelkeznek a következő tulajdonsággal: van olyan pozitív $M$ szám, hogy bármely

$$n \in \mathbf{N},\ y > 0,\ f \in L^1$$

esetén[12]

$$(**) \qquad |\{|S_n(f)| > y\}| \leq M \cdot \frac{\|f\|_1}{y}.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat *egyenletesen gyengén* $(1,1)$ *típusú*. Innen már – a Marcinkiewicz-féle interpolációs tétel (ld. 10.4.) alapján – következik az

$$S_n : L^p \to L^p \qquad (n \in \mathbf{N})$$

operátorok egyenletes korlátossága minden $1 < p \leq 2$ kitevőre.[13] Mivel a feltételeink szerint a $\Phi$ teljes rendszer az $L^2$-ben, így bármely $L^q$ térre $(q \geq 2)$ nézve is teljes. Ezért (ld. 4.1.) tetszőleges $1 \leq p \leq 2$ mellett a $\Phi$ zárt rendszer az $L^p$-ben, azaz $1 < p \leq 2$ esetén az $L^p$-ben bázis is. A dualitási elvet (ld. 3.3.3. Tétel) alkalmazva kapjuk tehát azt, hogy a $\Phi$ bázis minden $L^p$ $(1 < p < +\infty)$ térben, és ha $\|S_n\|_{(p,p)}$ jelöli az

$$S_n : L^p \to L^p \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[10] $L^p \subset L^r \subset L^2 \quad (2 < p < +\infty)$, vagy $L^2 \subset L^r \subset L^p \quad (1 < p < 2)$.

[11] Tehát $\sup_n \|S_n\| < +\infty$.

[12] $\{|S_n(f)| > y\} := \{x \in [0,1] : |S_n(f)(x)| > y\}$.

[13] A $\Phi$ bázis az $L^2$-ben, ezért az $S_n : L^2 \to L^2 \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok eleve egyenletesen korlátosak.

operátor normáját, akkor az

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

feltételnek eleget tevő $1<q<+\infty$ kitevővel

$$\|S_n\|_{(p,p)}=\|S_n\|_{(q,q)}.$$

A fenti $(**)$ becslés bizonyításához igen hasznos segédeszköz az alábbi, önmagában is érdekes állítás (*Calderon–Zygmund-felbontás* (ld. 10.12.)):

**4.2.1. Lemma.** *Legyen* $f\in L^1$ *és*

$$y>\|f\|_1>0.$$

*Ekkor vannak olyan*

$$g\in L^\infty,\ h\in L^1$$

*függvények és*

$$I_k\subset[0,1]\qquad(k\in\mathbf{N})$$

*egymásba nem nyúló intervallumok, hogy*

i) $f=g+h,\ \|g\|_\infty\le Cy,\ \|g\|_1\le\|f\|_1;$

ii) *a* $h$ *függvény* $\operatorname{supp} h$ *tartójára*[14]

$$\operatorname{supp} h\subset\Omega:=\bigcup_{k=0}^\infty I_k,$$

*továbbá*[15]

$$|\Omega|\le C\cdot\frac{\|f\|_1}{y};$$

iii) *minden* $k\in\mathbf{N}$ *indexre* $\int_{I_k}h=0$ *és*

$$y\le\frac{1}{|I_k|}\cdot\int_{I_k}|h|\le Cy,$$

[14] $\operatorname{supp} h:=\overline{\{x\in[0,1]:h(x)\ne0\}}$ (ahol a felülhúzás az illető halmaz lezárását jelenti a számegyenes szokásos topológiájára nézve).

[15] Egy Lebesgue-mérhető $U\subset[0,1]$ halmaz Lebesgue-mértékét az $|U|$ szimbólummal jelölve.

*ahol a $C>0$ egy abszolút konstans.*[16]

Ha $f\in L^1$, $n\in\mathbf{N}$ és az $y>\|f\|_1$ adott,[17] akkor[18]

$$|\{|S_n(f)|>y\}|\le|\{|S_n(g)|>y/2\}|+|\{|S_n(h)|>y/2\}|=:M_1+M_2.$$

Mivel

$$M_1\le\frac{4}{y^2}\cdot\|S_n(g)\|_2^2\le\frac{4}{y^2}\cdot\|g\|_2^2\le\frac{4}{y^2}\cdot\|g\|_\infty\cdot\|g\|_1\le 4C^2\cdot\frac{\|f\|_1}{y},$$

ezért elegendő az $M_2$-vel foglalkozni:

$$M_2=\big|\{x\in\Omega:|S_n(h)(x)|>y/2\}\big|+\big|\{x\in[0,1]\setminus\Omega:|S_n(h)(x)|>y/2\}\big|=:$$

$$M_{21}+M_{22}.$$

Nyilván

$$M_{21}\le|\Omega|\le C\cdot\frac{\|f\|_1}{y},$$

valamint

$$M_{22}\le\frac{2}{y}\cdot\int_{[0,1]\setminus\Omega}|S_n(h)|=\frac{2}{y}\cdot\int_{[0,1]\setminus\Omega}\left|\int_0^1 h(t)K_n(x,t)\,dt\right|dx=$$

$$\frac{2}{y}\cdot\int_{[0,1]\setminus\Omega}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\int_{I_j}h(t)K_n(x,t)\,dt\right|dx=$$

$$\frac{2}{y}\cdot\int_{[0,1]\setminus\Omega}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\int_{I_j}h(t)[K_n(x,t)-K_{nj}(x)]\,dt\right|dx,$$

ahol a

$$K_{nj}\in L^1\qquad(j\in\mathbf{N})$$

(„egyváltozós") függvények (egyelőre) tetszőlegesek. Ezért[19]

$$M_{22}\le\frac{2}{y}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\int_{I_j}|h(t)|\cdot\int_{[0,1]\setminus\Omega}|K_n(x,t)-K_{nj}(x)|\,dx\,dt.$$

---

[16] Ez a későbbiekben esetenként sorról-sorra változhat.

[17] Nyilván feltehető, hogy $f\neq 0$, azaz $\|f\|_1>0$.

[18] Mivel $|S_n(f)|\le|S_n(g)|+|S_n(h)|$, ezért $\{|S_n(f)|>y\}\subset\{|S_n(g)|>y/2\}\cup\{|S_n(h)|>y/2\}$.

[19] A szukcesszív integrálást biztosító Fubini-tételt is alkalmazva.

Tegyük fel, hogy az itteni

$$K_{nj} : [0,1] \to \mathbf{R} \qquad (n, j \in \mathbf{N})$$

függvények megválaszthatók úgy, hogy egy alkalmas $A > 0$ mellett minden $j \in \mathbf{N}$ indexre és m.m. $t \in I_j$ helyen

$$\sup \left\{ \int_{[0,1]\setminus\Omega} |K_n(x,t) - K_{nj}(x)|\, dx : n \in \mathbf{N} \right\} \leq A.$$

Ekkor

$$M_{22} \leq \frac{2A}{y} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{I_j} |h| \leq \frac{2AC}{y} \sum_{j=0}^{\infty} y \cdot |I_j| = 2AC \cdot |\Omega| \leq \frac{2AC^2}{y} \cdot \|f\|_1.$$

A Calderon–Zygmund-felbontás (ld. 4.2.1. Lemma) előbbi alkalmazásában a $K_n$ $(n \in \mathbf{N})$ magfüggvények konkrét alakjától függően – szükség esetén – használhatjuk még a következő „trükköt" is. Valamilyen (korlátos) $I$ intervallum esetén legyen $\widetilde{I}$ az az intervallum, amelynek a középpontja megegyezik az $I$ középpontjával és

$$|\widetilde{I}| = 2|I|.$$

Ha $I \subset [0,1]$, akkor tekintsük a

$$DI := \widetilde{I} \cap [0,1]$$

intervallumot. Nyilván $|DI| \leq 2|I|$. Írjuk az előző becslésekben az $\Omega$ helyébe a

$$D\Omega := \bigcup_{j=0}^{\infty} DI_j$$

halmazt. Mivel $|D\Omega| \leq 2|\Omega|$, ezért most

$$M_{21} := \left| \{ x \in D\Omega : |S_n(h)(x)| > y/2 \} \right| \leq \frac{2C}{y} \cdot \|f\|_1.$$

Ha a $K_{nj}$-k megadhatók úgy, hogy egy alkalmas $B > 0$ mellett minden $j \in \mathbf{N}$ indexre és m.m. $t \in I_j$ esetén

$$\sup \left\{ \int_{[0,1]\setminus D\Omega} |K_n(x,t) - K_{nj}(x)|\, dx : n \in \mathbf{N} \right\} \leq B$$

teljesül, akkor

$$M_{22} := |\{x \in [0,1] \setminus D\Omega : |S_n(h)(x)| > y/2\}| \leq \frac{2BC^2}{y} \cdot \|f\|_1.$$

Legyen pl. az $(\varepsilon_n, n \in \mathbf{N})$ egy $(0,1)$-beli számokból álló nullasorozat, $n \in \mathbf{N}$ és

$$K_n(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{x-t} & (x,t \in [0,1], |x-t| \geq \varepsilon_n) \\ 0 & (x,t \in [0,1], |x-t| < \varepsilon_n) \end{cases} \qquad (x,t \in [0,1]).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor – $t_{0j}$-vel jelölve az $I_j$ $(j \in \mathbf{N})$ intervallum középpontját – a

$$K_{nj}(x) := K_n(x, t_{0j}) \qquad (x \in [0,1],\, n \in \mathbf{N})$$

választással

$$\int_{[0,1]\setminus D\Omega} |K_n(x,t) - K_{nj}(x)|\, dx \leq$$

$$2|t - t_{0j}| \cdot \int_{|I_j|}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{2|t-t_{0j}|}{|I_j|} \leq 2 \qquad (t \in I_j,\, j \in \mathbf{N})$$

igaz. Megmutatható, hogy bármely $f \in L^1$ és m.m. $x \in [0,1]$ mellett létezik a

$$H(f)(x) := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t) K_n(x,t) dt$$

határérték (az $f$ függvény *Hilbert-transzformáltja*). Az előzőek szerint tehát a $H$ operátor gyengén $(1,1)$ típusú.

## 4.3. Feltétlen bázisok $L^p$ terekben

Legyen az $1 \leq p < +\infty$ kitevő esetén az $1 < q \leq +\infty$ a „konjugált" kitevő, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

és tegyük fel, hogy az $L^p$-beli

$$\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszernek van biortogonális társa, legyen ez (az $L^q$-ban) a

$$\Psi = (\psi_n, n \in \mathbf{N}).$$

Ha $f \in L^p$, akkor az

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f\psi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal tekintsük az $f$ függvény

$$Q_\Phi(f) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} [\widehat{f}(n)\varphi_n]^2\right)^{1/2}$$

*kvadratikus variációját.* (A $Q_\Phi$ leképezést a $\Phi$ rendszer *Paley-függvényének* nevezik.)

Az $L^p$-beli feltétlen bázisokkal kapcsolatos a

**4.3.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $1 \leq p < +\infty$ és a $\Phi$ zárt, minimális rendszer az $L^p$ térben. Ekkor a $\Phi$ pontosan abban az esetben feltétlen bázis az $L^p$-ben, ha alkalmas (csak a $p$-től függő) $A_p, B_p > 0$ konstansokkal*

$$A_p \cdot \|f\|_p \leq \|Q_\Phi(f)\|_p \leq B_p \cdot \|f\|_p$$

*teljesül minden $f \in L^p$ esetén.*[20]

A 4.3.1. Tétel közvetlen folyománya, hogy ha $p \neq 2$, a $\Phi$ ONR és feltétlen bázis az $L^p$-ben, akkor

$$\sup\{\|\varphi_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Különben ui. (a

$$q := \sup\{\|\varphi_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\}$$

jelöléssel)

$$\|f\|_p \leq \frac{1}{A_p} \cdot \|Q_\Phi(f)\|_p \leq \frac{q}{A_p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{q}{A_p} \cdot \|f\|_2 \qquad (f \in L^p)$$

teljesülne, ami $p > 2$ mellett nyilván nem lehet. A $p < 2$ eset ebből már a dualitási elv (ld. 3.3.3. Tétel) alapján következik.

[20] Röviden: $\|f\|_p \sim \|Q_\Phi(f)\|_p$.

A $Q_\Phi$ operátor és a feltétlen bázisokkal kapcsolatban bevezetett $T_\Phi^t$ $(t \in [0,1])$ operátorok (ld. 2.6.)[21] között a *Hincsin-egyenlőtlenség* teremt kapcsolatot:[22]

**4.3.1. Lemma.** *Bármely $0 < p < +\infty$ mellett megadhatók olyan (csak a $p$-től függő) $C_p, D_p > 0$ konstansok, hogy tetszőleges $a = (a_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ esetén*

$$C_p \cdot \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k \right\|_p \leq D_p \cdot \|a\|_2 .$$

Legyen már most

$$t \in [0,1),\ x \in [0,1],\ f \in \mathcal{L}[\Phi]$$

és $1 \leq p < +\infty$. Ekkor az

$$a_k := \widehat{f}(k)\varphi_k(x) \qquad (k \in \mathbf{N})$$

választással nyilván $a \in \ell_2$ és

$$\|a\|_2 = Q_\Phi(f)(x),$$

továbbá

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t) = T_\Phi^t(f)(x).$$

Ezért

$$(Q_\Phi(f)(x))^p = \|a\|_2^p \sim \int_0^1 |T_\Phi^t(f)(x)|^p \, dt,$$

más szóval

$$\|Q_\Phi(f)\|_p^p \sim \int_0^1 \left( \int_0^1 |T_\Phi^t(f)(x)|^p \, dt \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 |T_\Phi^t(f)(x)|^p \, dx \right) dt = \int_0^1 \|T_\Phi^t(f)\|_p^p \, dt.$$

[21] Ahol most $T_\Phi^t(f) := \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)\widehat{f}(k)\varphi_k$ $(t \in [0,1],\ f \in L^p)$.

[22] Az $(r_n, n \in \mathbf{N})$ Rademacher-rendszert illetően ld. 2.6. Megmutatható, hogy amennyiben valamilyen $b_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ együtthatókkal $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k r_k(x)$ sor m.m. $x \in [0,1]$ helyen konvergens (Rademacher). Ha viszont $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 = +\infty$, akkor a szóban forgó $\sum_{k=0}^{\infty} b_k r_k(x)$ sor m.m. $x \in [0,1]$ esetén divergens (Kolmogorov).

Ha tehát a $\Phi$ feltétlen bázis az $L^p$-ben, akkor (ld. 2.6.) az

$$A\cdot \|f\|_p \le \|T^t_\Phi(f)\| \le B\cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p,\, t \in [0,1])$$

becslések alapján

$$\|T^t_\Phi(f)\|_p \sim \|f\|_p \Longrightarrow \|Q_\Phi(f)\|_p \sim \|f\|_p.$$

Fordítva, ha $\|Q_\Phi(f)\|_p \sim \|f\|_p$, akkor bármely $f \in \mathcal{L}[\Phi]$ és $t \in [0,1)$ esetén

$$\|T^t_\Phi(f)\|_p \sim \|Q_\Phi(T^t_\Phi(f))\|_p = \|Q_\Phi(f)\|_p \sim \|f\|_p.$$

## 4.4. Megjegyzések

i) A $\Phi$ rendszert illetően a $(*)$ feltételek (ld. 4.2.) lényegesek ahhoz, hogy a $\Phi$ bázis szerinti kifejtések „Fourier-szerűek” legyenek. (Különben a $\Phi$ nem alkot önmagával biortogonális rendszert.) Ezzel kapcsolatos a következő állítás: van olyan $\Phi$ ONR, amely bázis az $L^1$-ben, de a $\Phi$ nem képez önmagával biortogonális rendszert. Sőt, van olyan $f \in L^2$ függvény, hogy az $f$-nek a $\Phi$ szerinti biortogonális kifejtésében nem minden együttható Fourier-együttható.

ii) Megmutatjuk viszont, hogy ha a $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ egy $L^1$-beli ortonormált bázis és

$$\varphi_n \in L^\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a $\Phi$ bázis az $L^p$-ben minden $1 \le p < +\infty$ mellett is. Ekkor ui.

$$\widehat{f}(n) = 0 \qquad (f \in L^1,\, n \in \mathbf{N})$$

esetén $f = 0$, így egyúttal tetszőleges $L^p$-re $(1 \le p \le +\infty)$ nézve a $\Phi$ teljes. Ezért (ld. 2.2.) a $\Phi$ zárt az $L^p$-ben $(1 \le p < +\infty)$. Mivel

$$\sup\{\|L_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

így a 4.2.2. Tétel miatt a $\Phi$ bázis az $L^p$-ben $(1 \le p < +\infty)$.

iii) Az ortogonális sorok elméletének egyik nem triviális eredménye szerint sem az $L^1$-ben, sem pedig a $C[0,1]$-ben nincs olyan $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ ONR, amely bázis a szóban forgó térben és

$$\sup\{\|\varphi_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Az állítás azon múlik, hogy az előbbi korlátossági feltétel mellett a $\Phi$ rendszer $L_n$ $(n \in \mathbf{N})$ Lebesgue-függvényeire (ld. 4.2.) az alábbiak teljesülnek: van olyan, csak a $\Phi$-től függő $C > 0$ konstans, hogy minden $N = 1, 2, ...$ indexre és valamilyen $E_N \subset [0, 1]$ mérhető halmazra[23]

$$|E_N| \geq C \cdot \max\{L_k(t) : k = 1, ..., N\} \geq C \cdot \ln N \qquad (t \in E_N)$$

és

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{L_N(t)}{\ln N} \geq C \qquad (t \in E := \limsup_{n\to\infty} E_n),$$

ahol $|E| \geq C$. Ekkor tehát

$$\sup\{\|L_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

iv) Tegyük fel, hogy a $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ ONR elemei $L^\infty$-beliek, amelyekre

$$\sup\{\|\varphi_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Ekkor az előbbi megjegyzésben szereplő $E$ halmaz bármelyik $a \in E$ eleméhez van olyan $f \in C[0, 1]$ függvény, amelynek a $\Phi$-Fourier-sora az $a$-ban divergál. Ui. az

$$C[0, 1] \ni f \mapsto \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\varphi_k(a) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

funkcionálnak a normája $L_n(a)$ és

$$\sup\{L_n(a) : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Ezért a Banach–Steinhaus-tétel (ld. 10.1.) miatt van olyan $f \in C[0, 1]$, amelyre a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\varphi_k(a), n \in \mathbf{N}\right)$$

részletösszeg-sorozat divergál (sőt, a $\|.\|_\infty$-normában nem is korlátos).

v) Ha a $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált rendszerre

$$\varphi_n \in L^\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[23] Továbbra is $|A|$ jelöli a Lebesgue-mérhető $A \subset [0, 1]$ halmaz Lebesgue-mértékét.

és
$$\sup\{\|L_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$$
teljesül, akkor egy alkalmas (csak a $\Phi$-től függő) $C > 0$ konstanssal
$$\max\{\|\varphi_k\|_\infty \ : \ k = 0, ..., n\} \geq C \cdot \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$
Ez a helyzet pl. akkor, ha a $\Phi$ bázis az $L^1$-ben vagy a $C[0,1]$-ben.[24]

vi) Legyen a $\Phi$ ONR bázis a $C[0,1]$-ben. Ekkor (a $\Phi$-re vonatkozó Lebesgue-függvényekkel)
$$\sup\{\|L_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$
ezért bármely $1 \leq p < +\infty$ esetén az
$$S_n : L^p \to L^p \qquad (n \in \mathbf{N})$$
részletösszeg-operátorok egyenletesen korlátosak. Mivel a $C[0,1]$ sűrű az $L^p$ térben, ezért a $\Phi$ zárt az $L^p$-ben. Így a $\Phi$ egyúttal az $L^p$-ben is bázis.

vii) Belátható, hogy az $L^1$-ben és a $C[0,1]$-ben nincs feltétlen bázis (ld. 4.3.).

viii) Legyen az $(X, \|.\|)$ olyan Banach-tér, amelynek az elemei
$$[0,1] \to \mathbf{R}$$
típusú (Lebesgue-)mérhető függvények, és ilyen függvényeknek egy alkalmas $\mathcal{M}$ részhalmazával
$$\|f\| = \sup\left\{\int_0^1 |f \cdot m| : m \in \mathcal{M}\right\} \qquad (f \in X).$$
Pl. ilyenek az $L^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ terek, az Orlicz-terek (ld. 10.9.), a Lorentz-terek (ld. 6.3.). A patologikus eseteket kizárandó feltesszük, hogy megadható Lebesgue-mérhető $E_n \subset [0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazoknak egy olyan monoton növekedő sorozata, amelyre
$$[0,1] = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

[24] Mivel a $C[0,1]$ második kategóriájú az $L^\infty$ térben, ezért (a Baire-féle kategória tétel alapján) $\varphi_n \in C[0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén elég azt tudni a $\sup\{\|L_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$ teljesüléséhez, hogy bármelyik $C[0,1]$-beli függvény $\Phi$-Fourier-sora egyenletesen konvergens.

és bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén az $E_n$ halmaz karakterisztikus függvénye $X$-beli. Tegyük fel, hogy a $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer feltétlen bázis az $X$-ben, legyen a $\Phi$ biortogonális rendszere (ld. 4.1.) a $\Psi = (\psi_n, n \in \mathbf{N})$. Megmutatható, hogy amennyiben az $X$ reflexív, akkor (ld. 4.3.)

$$\|Q_\Phi(f)\| \sim \|f\|.$$

A reflexivitás miatt az $X^*$ duális tér elemei „integrálok”, így pl. az

$$X \ni f \mapsto \int_0^1 f\psi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

leképezés korlátos lineáris funkcionál. Ha az $X$ nem reflexív, akkor az $\sim$ ekvivalencia egyik fele teljesül csak, nevezetesen: egy alkalmas $C > 0$ konstanssal

$$\|Q_\Phi(f)\| \leq C \cdot \|f\| \qquad (f \in X).$$

# 5. fejezet

# Ortonormált rendszerek

A továbbiakban néhány, immár klasszikusnak számító függvényrendszer definícióját idézzük fel.

## 5.1. Haar-rendszer

Legyen az $1$ szerint periodikus $H = (h_n, n \in \mathbf{N})$ függvényrendszer[1] a következőképpen definiálva:

$$h_0(x) := 1 \qquad (x \in [0, 1])$$

és $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$h_{2^n+k}(x) := \begin{cases} 2^{n/2} & \left(\dfrac{k}{2^n} \le x < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \\ -2^{n/2} & \left(\dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \le x < \dfrac{k+1}{2^n}\right) \\ 0 & \left(x \in [0,1) \setminus \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right)\right) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R},\ k = 0, ..., 2^n - 1).$$

Ha nem követeljük meg az $1$ szerinti periodicitást, akkor célszerű a $[0, 1]$-en a fenti definíciót úgy módosítani, hogy

$$h_n(1) = \lim_{x \to 1-0} h_n(x) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

legyen. Világos, hogy ez csak a pontonkénti vizsgálódásokban játszik szerepet, pl. a $\|.\|_p$-ban való konvergencia-kérdésekben nem.

[1] Haar Alfréd (1909).

A korábban definiált $(r_n, n \in \mathbf{N})$ Rademacher-rendszer (ld. 2.6.) és a $H$ *Haar-rendszer* között nyilván teljesül az

$$r_n = \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} h_{2^n+k} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

összefüggés. Belátható, hogy ($H$-val jelölve a Haar-rendszernek a $[0,1]$-re való megszorítását is) a $H$ egy teljes ONR az $L^p := L^p[0,1]$-ben $(1 \le p \le +\infty)$.

## 5.2. Schauder-rendszer

Az $S = (s_n, n \in \mathbf{N})$ *Schauder-rendszer*[2] legyen a következő:

$$s_0(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$

és (ld. 5.1.)

$$s_n(x) := \int_0^x h_{n-1} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, x \in [0,1]).$$

Világos, hogy

$$s_n \in C[0,1] \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá egyszerűen adódik az is, hogy az

$$\frac{s_n}{\|s_n\|_\infty} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények Schauder-szerű rendszert (ld. 2.1.) alkotnak, amit az az

$$\{x_n \in [0,1] : n \in \mathbf{N}\}$$

ponthalmaz generál, amelyre $x_0 := 0$ és $x_1 := 1$, az $x_n$ pedig a

$$\operatorname{supp} h_{n-1} \cap (0,1) \qquad (2 \le n \in \mathbf{N})$$

intervallum középpontja. Tudjuk (ld. 2.1.), hogy a Schauder-szerű rendszerek (és így az $S$ Schauder-rendszer is) az egyenletes konvergencia értelmében bázist alkotnak a $C[0,1]$-ben (következésképpen bármely $L^p$ $(1 \le p < +\infty)$ térben is). Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy az $S$ nem ONR.

[2] J. Schauder (1927).

## 5.3. Franklin-rendszer

Mivel az $S$ Schauder-rendszer (ld. 5.2.) lineárisan független rendszer az $L^2$ Hilbert-térben, ezért alkalmazható rá a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás: egyértelműen megadhatók az

$$\alpha_{nk} \in \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., n)$$

számok úgy, hogy $\alpha_{nn} > 0$ és az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} s_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények

$$F = (f_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszere az $L^2$-ben teljes ONR legyen. A definícióból rögtön következik, hogy az $F$ *Franklin-rendszer*[3]

- minden tagja folytonos töröttvonal;
- zárt rendszer a $C[0,1]$-ben (az egyenletes konvergenciára nézve) és az $L^p$-ben, ha $1 \le p < +\infty$.

A fenti definíció szerint

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x \qquad (0 \le x \le 1),$$

valamint az

$$f_{2^n+k+1} \qquad (n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., 2^n - 1)$$

függvény „töréspontjai” a következők:

$$\frac{j}{2^{n+1}} \qquad (j = 1, ..., 2k + 1)$$

és

$$\frac{i}{2^n} \qquad (i = k + 1, ..., 2^n - 1).$$

Az $F$ rendszerrel kapcsolatos a következő, alapvető fontosságú állítás: van olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy a

$$q := 2 - \sqrt{3}$$

[3] Ph. Franklin (1928).

konstanssal a

$$t_{ni} := \begin{cases} \dfrac{i}{2^{n+1}} & (i = 0, ..., 2k+1) \\ \dfrac{i-k-1}{2^n} & (i = 2k+2, ..., 2^n+k+1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., 2^n - 1)$$

pontokban minden $i = 0, ..., 2^n + k + 1$ indexre

$$\frac{1}{C} \cdot 2^{n/2} \cdot q^{|i-2k-1|} \leq (-1)^{i+1} f_{2^n+k+1}(t_{ni}) \leq C \cdot 2^{n/2} \cdot q^{|i-2k-1|}.$$

## 5.4. Walsh-rendszer

Legyen az $n \in \mathbf{N}$ szám diadikus kifejtése

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k \qquad (n_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$$

és az $(r_k, k \in \mathbf{N})$ Rademacher-rendszerrel (ld. 2.6.)

$$w_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}.$$

Az így definiált

$$W = (w_n, n \in \mathbf{N})$$

*Walsh–Paley-rendszer*[4] néhány tulajdonsága a definíció alapján egyszerűen belátható:

- $w_n(x) \in \{0,1\} \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R})$;
- a $W$ teljes ONR az $L^1$-ben;[5]
- minden $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$w_{2^n+k} = \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} w_k(j/2^n) h_{2^n+j} \qquad (k = 0, ..., 2^n - 1);$$

[4] J. L. Walsh (1923) – R. E. A. C. Paley (1932).

[5] $W$-vel jelölve a $W$ rendszernek a $[0,1]$ intervallumra való leszűkítését is.

- valamennyi

$$H_n := \left(w_k(j/2^n)\right)_{k,j=0}^{2^n-1} \in \mathbf{R}^{2^n \times 2^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

mátrix szimmetrikus és ortogonális.

Az előbbi $H_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Hadamard–Paley-mátrixok* a következők:

$$H_0 = (+1), H_1 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}, \ldots$$

ahol a $H_{n+1}$-et úgy kapjuk a $H_n$-ből, hogy a $H_n$ minden sorát kétszer leírjuk egymás alá, utána mindegyik mellé rendre ugyanazt, ill a $(-1)$-szeresét írjuk.

Megjegyezzük, hogy a Walsh által 1923-ban bevezetett rendszer a $W$-től csak a függvények sorrendjében különbözött, nevezetesen: a Walsh-féle („eredeti”) sorrendben az $n$-edik Walsh-függvény jelváltásainak a száma éppen $n$ $(n \in \mathbf{N})$.

A Walsh-rendszer egy másik nevezetes átrendezése az S. Kaczmarz-ról elnevezett *Walsh–Kaczmarz-rendszer*.[6] Legyen ehhez a

$$t : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

a következő bijekció:

$$t(0) := 0,\ t(1) := 1$$

és

$$t\Big(2^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k 2^k\Big) := 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n-1-k} 2^k \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\ \mu_0, ..., \mu_{n-1} \in \{0,1\}).$$

A $W$ rendszer $(w_{t(n)}, n \in \mathbf{N})$ átrendezésére könnyen igazolható az, hogy

- $w_{2^n} = r_n = w_{t(2^n)} \quad (n \in \mathbf{N})$;
- ha

$$n = 2^m + \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k$$

[6] A. A. Sneider (1948).

az $n \in \mathbf{N}$ index diadikus kifejtése, akkor

$$w_{t(n)} = r_n \cdot \prod_{k=0}^{m-1} r_k^{n_{m-k-1}} \qquad (1 \leq m \in \mathbf{N}).$$

Megmutatható, hogy a $W$ rendszer egy alkalmasan választott kompakt Abel-csoport (az ún. *diadikus csoport*) karakterrendszere. Ezért a $W$ szerinti Fourier-sorfejtések vizsgálata az absztrakt harmonikus analízis egyik fontos modelljéül is szolgál.

## 5.5. Ciesielski-rendszer

Tekintsük a Franklin-rendszer (ld. 5.3.) alábbi transzformáltját:

$$c_0 := f_0,\ c_1 := f_1$$

és

$$c_{2^n+k+1} := \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} w_k(j/2^n) f_{2^n+j+1} \qquad (n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., 2^n - 1).$$

Az így kapott

$$C = (c_n, n \in \mathbf{N})$$

*Ciesielski-rendszerre*[7] a következők teljesülnek:

- a tagjai folytonos töröttvonalak;
- zárt ONR a $C[0,1]$-ben és az $L^p$-ben $(1 \leq p < +\infty)$;
- $\sup\{\|c_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.

Jelöljük $D$-vel a $[0,1]$ intervallumon differenciálható függvények halmazán értelmezett $f \mapsto f'$ differenciáloperátort. Legyen továbbá $f \in L^1$ esetén

$$G(f)(x) := \int_0^x f \qquad (x \in [0,1])$$

és

$$L(f)(x) := \int_x^1 f \qquad (x \in [0,1]).$$

[7] Z. Ciesielski (1968).

Rögzítsünk egy $-1 \leq m$ egész számot, és definiáljuk a $[0,1]$ intervallumon az alábbi

$$\varphi_n^{(m)} \qquad (-m \leq n \in \mathbf{Z})$$

függvényeket:

$$\varphi_n^{(m)}(x) := \begin{cases} x^{m+n} & (n = -m, ..., 1) \\ \\ G^{m+1}(h_{n-1})(x) & (2 \leq n \in \mathbf{N}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]).$$

Nyilvánvaló, hogy (ld. 5.1.)

$$\left(\varphi_{n+1}^{(-1)}, n \in \mathbf{N}\right) = H$$

és (ld. 5.2.)

$$\left(\varphi_n^{(0)}, n \in \mathbf{N}\right) = S,$$

továbbá a

$$\left(\varphi_n^{(m)}, -m \leq n \in \mathbf{Z}\right)$$

függvényrendszer lineárisan független az $L^2$-ben. Így alkalmazható rá (az $L^2$ Hilbert-tér értelmében) a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás: egyértelműen megadhatók az

$$\alpha_{nk}^{(m)} \in \mathbf{R} \qquad (-m \leq n, k \in \mathbf{Z})$$

számok úgy, hogy

$$\alpha_{nn}^{(m)} > 0$$

és az

$$f_n^{(m)} := \sum_{k=-m}^{n} \alpha_{nk}^{(m)} \varphi_k^{(m)} \qquad (-m \leq n \in \mathbf{Z})$$

függvények rendszere ONR legyen.[8]

Vezessük be a következő függvényeket: adott $0 \leq j \leq m+1$ egész szám mellett legyen

$$f_n^{(m,j)} := D^j(f_n^{(m)}) \text{ és } g_n^{(m,j)} := L^j(f_n^{(m)}) \qquad (j - m \leq n \in \mathbf{Z}).^9$$

[8]Világos, hogy az $f_n^{(m)}$ $(\mathbf{Z} \ni n \geq -m)$ függvény $m$-ed rendű spline.

[9]Nyilván $f_n^{(m,0)} = g_n^{(m,0)} = f_n^{(m)}$.

Végül, normalizáljuk (az $L^2$ értelemben) ezeket a függvényeket az alábbiak szerint: tetszőleges, a $|k| \leq m+1$ feltételnek eleget tevő $k \in \mathbf{Z}$ szám és

$$|k| - m \leq n \in \mathbf{Z}$$

esetén legyen

$$h_n^{(m,k)} := \begin{cases} \dfrac{f_n^{(m,k)}}{\|f_n^{(m,k)}\|_2} & (0 \leq k \leq m+1) \\ \\ \dfrac{g_n^{(m,-k)}}{\|g_n^{(m,-k)}\|_2} & (-m-1 \leq k \leq 0). \end{cases}$$

Belátható, hogy a

$$\left(h_n^{(m,k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right), \left(h_n^{(m,-k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right)$$

függvényrendszerek biortogonálisak $L^p$-értelemben $(1 \leq p < +\infty)$, azaz

$$\int_0^1 h_i^{(m,k)} h_j^{(m,-k)} = \delta_{ij} \qquad (|k| - m \leq i, j \in \mathbf{Z}).$$

Az $m = -1$, valamint az $m = 0$ esetben ismert rendszereket kapunk, nevezetesen (ld. 5.1.)

$$\left(h_{n+1}^{(-1,0)}, n \in \mathbf{N}\right) = H$$

és (ld. 5.3.)

$$\left(h_n^{(0,0)}, n \in \mathbf{N}\right) = F.$$

A $C$ rendszer definíciójához hasonlóan tekintsük az előző

$$(h_n^{(m,k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z})$$

rendszer alábbi transzformáltját:

$$w_n^{(m,k)} := h_n^{(m,k)} \qquad (n = |k| - m, ..., 1)$$

és

$$w_{2^n+i+1}^{(m,k)} := \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} w_i(j/2^n) h_{2^n+j+1}^{(m,k)} \qquad (n \in \mathbf{N}, i = 0, ..., 2^n - 1).$$

A fentiek szerint a

$$\left(w_n^{(m,k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right), \left(w_n^{(m,-k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right)$$

rendszerek biortogonálisak az $L^p$-ben $(1 \leq p < +\infty)$. Továbbá, a

$$w_n^{(m,k)} \qquad (|k| - m \leq n \in \mathbf{Z})$$

függvények mindegyike $(m-k)$-adrendű spline és

$$\sup\{\|w_n^{(m,k)}\|_\infty : |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\} < +\infty.$$

Az $m = -1$, ill. az $m = 0$ esetben (ld. 5.4.)

$$\left(w_{n+1}^{(-1,0)}, n \in \mathbf{N}\right) = W,$$

ill.

$$\left(w_n^{(0,0)}, n \in \mathbf{N}\right) = C.$$

## 5.6. Trigonometrikus rendszer

A jól ismert trigonometrikus rendszert a

$$T = (t_n, n \in \mathbf{N})$$

szimbólummal fogjuk jelölni, amikor is

$$t_n(x) := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \\ \sqrt{2}\cdot\cos((n+1)\pi x) & (n \in \mathbf{N}^-) \\ \\ \sqrt{2}\cdot\sin(n\pi x) & (0 < n \in \mathbf{N}^+) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]).^{10}$$

Tudjuk, hogy a $T$ *trigonometrikus rendszer* ortonormált, zárt a $C[0,1]$-ben és így az $L^p$-ben $(1 \leq p < +\infty)$ is.

---

[10]Itt $\mathbf{N}^-$ $(\mathbf{N}^+)$ jelöli a páratlan (páros) természetes számok halmazát.

# 6. fejezet

# Függvényterek

Az eddigiekben is szerepet játszó Lebesgue-féle $L^p$ tereken és a (valamilyen kompakt intervallumon) folytonos függvények terén kívül szükségünk lesz még a következő függvényterekre is.

## 6.1. Hardy- és BMO-terek

Egy $a \in L^\infty$ függvényt[1] *atomnak* nevezünk, ha vagy

$$a(x) = 1 \qquad (x \in [0,1]),$$

vagy pedig van olyan $I \subset [0,1]$ intervallum, hogy $\operatorname{supp} a \subset I$, valamint

$$\int_0^1 a = 0$$

és[2]

$$\|a\|_\infty \leq \frac{1}{|I|}.$$

Azt mondjuk, hogy a Lebesgue-mérhető

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}$$

[1]Ebben a pontban is az $L^p := L^p[0,1] \quad (1 \leq p \leq +\infty)$ rövidítéssel élünk és értelemszerűen az $L^p$-ben a $\|.\|_p$ normát tekintjük.

[2]Az $A \subset \mathbf{R}$ Lebesgue-mérhető halmaz esetén továbbra is $|A|$-val jelölve az $A$ Lebesgue-mértékét.

függvénynek van *atomos felbontása,* ha megadható olyan

$$\lambda = (\lambda_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_1$$

sorozat és atomoknak egy olyan $(a_n, n \in \mathbf{N})$ sorozata, hogy az $f$ előállítható az

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k$$

alakban.[3] Legyen a $\mathcal{H}$ az ilyen $f$ függvények halmaza. Világos, hogy (a szokásos műveletekre nézve) a $\mathcal{H}$ lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett.

Valamilyen $f \in \mathcal{H}$ esetén jelentse $\ell_f$ az $f$ összes lehetséges atomos felbontásában szereplő $\lambda \in \ell_1$ sorozatok halmazát és legyen

$$\|f\|_{\mathcal{H}} := \inf\{\|\lambda\|_1 : \lambda \in \ell_f\}.$$

Belátható, hogy a $\|.\|_{\mathcal{H}}$ norma és a $(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$ *Hardy-tér* teljes.[4]

Ha az atom definíciójában szereplő intervallumról azt is feltesszük, hogy diadikus intervallum[5], akkor az atomot *diadikus atomnak* nevezzük. Hasonlóan, ha a Hardy-tér előbbi definíciójában csak diadikus atomokat veszünk figyelembe, akkor az így kapott $(\mathbf{H}, \|.\|_{\mathbf{H}})$ Banach-teret *diadikus Hardy-térnek* nevezzük.

Mivel nyilván minden diadikus atom egyúttal atom is, ezért

$$\mathbf{H} \subset \mathcal{H}$$

és igaz, hogy

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathbf{H}} \qquad (f \in \mathbf{H}).^6$$

A $\mathcal{H}$ ($\mathbf{H}$) tér duálisát a $\mathcal{BMO}$ (**BMO**) szimbólummal fogjuk jelölni. A fentiek alapján tehát

$$L^\infty \subset \mathcal{BMO} \subset \mathbf{BMO}$$

(és ezek a tartalmazások is valódiak). Az analízis egyik nevezetes eredménye a most definiált terek könnyebb kezelhetőségét teszi lehetővé. Legyen ui. egy $f \in L^1$ függvény esetén

$$\mathcal{N}(f) := \sup\left\{\frac{1}{|I|}\cdot\int_I\left|f - \frac{1}{|I|}\cdot\int_I f\right| : I \subset [0,1] \text{ intervallum}\right\},$$

[3] Mivel $\|a_k\|_1 \leq 1$ $(k \in \mathbf{N})$, ezért $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty$ miatt ez a sor majdnem mindenütt és $\|.\|_1$ normában is konvergens, így $f \in L^1$.

[4] Világos, hogy fennáll az $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{H}}$ $(f \in \mathcal{H})$ egyenlőtlenség, hiszen $\|f\|_1 \leq \|\lambda\|_1$ $(\lambda \in \ell_f)$.

[5] Tehát $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ $(n \in \mathbf{N},\ k = 0, ..., 2^n - 1)$ alakú (ld. 2.3.).

[6] Megmutatható, hogy a $\mathbf{H} \subset \mathcal{H} \subset L^1$ tartalmazások valódiak.

valamint

$$\mathbf{N}(f) := \sup\left\{\frac{1}{|I|}\cdot\int_I\left|f-\frac{1}{|I|}\cdot\int_I f\right| : I\subset[0,1] \text{ diadikus intervallum}\right\}$$

és

$$\|f\|_{\mathcal{BMO}} := \mathcal{N}(f)+\left|\int_0^1 f\right|,$$

továbbá

$$\|f\|_{\mathbf{BMO}} := \mathbf{N}(f)+\left|\int_0^1 f\right|.$$

Ekkor (izomorfia erejéig)

$$\mathcal{BMO} = \{f\in L^1 : \|f\|_{\mathcal{BMO}} < +\infty\}$$

és

$$\mathbf{BMO} = \{f\in L^1 : \|f\|_{\mathbf{BMO}} < +\infty\}.$$

Az előbbi egyenlőségek (pl. a $\mathcal{BMO}$ térre megfogalmazva) a következőt jelentik: bármely $\varphi\in\mathcal{H}^*$ esetén egyértelműen van olyan $f\in\mathcal{BMO}$ függvény, hogy

$$(*)\qquad \varphi(g) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\cdot\int_0^1 f a_k,$$

ahol

$$g = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k a_k\in\mathcal{H}$$

a $g$ függvény egy atomos felbontása. Megmutatható, hogy a $\varphi(g)$ fenti előállítása nem függ a $g$ konkrét felbontásától. Továbbá, bármely $f\in\mathcal{BMO}$ esetén a $(*)$ egy

$$\varphi\in\mathcal{H}^*$$

funkcionált definiál.[7]

[7] Általában nem írható a $(*)$-ban $\int_0^1 fg$, ui. van olyan $f\in\mathcal{BMO}$ és $g\in\mathcal{H}$, hogy $fg\notin L^1$.

## 6.2. Periodikus eset

Az $a \in L^{\infty}[-\pi,\pi]$ függvényt *periodikus atomnak* nevezzük, ha vagy

$$a(x) = 1 \qquad (|x| \leq \pi),$$

vagy pedig van olyan $I \subset [-\pi,\pi]$ halmaz, hogy a komplex egységkörön[8] az

$$\{e^{\imath x} \in \mathbf{C} : x \in I\}$$

halmaz egy ív[9] és $\operatorname{supp} a \subset I$, valamint

$$\int_{-\pi}^{\pi} a = 0$$

és

$$\|a\|_{\infty} \leq \frac{1}{|I|}.$$

A periodikus atomokkal a fentiekhez hasonlóan definiált tereket (ld. 6.1.) $\mathcal{H}_*$-gal és $\mathcal{BMO}_*$-gal fogjuk jelölni. Ha

$$\mathcal{H}_*^+ := \{f \in \mathcal{H}_* : \text{ az } f \text{ páros}\}$$

és

$$\mathcal{BMO}_*^+ := \{f \in \mathcal{BMO}_* : \text{ az } f \text{ páros}\},$$

akkor az

$$L^1 \ni f \mapsto f^*(x) := \begin{cases} f(x/\pi) & (x \in [0,\pi]) \\ \\ f(-x/\pi) & (x \in [-\pi,0]) \end{cases}$$

megfeleltetéssel az

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto f^* \in \mathcal{H}_*^+,$$

továbbá az

$$\mathcal{BMO} \ni f \mapsto f^* \in \mathcal{BMO}_*^+$$

leképezés bijekció és

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \sim \|f^*\|_{\mathcal{H}_*},$$

valamint

$$\|f\|_{\mathcal{BMO}} \sim \|f^*\|_{\mathcal{BMO}_*}.$$

---

[8] $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

[9] Más szóval az $I$ halmaz egy *periodikus intervallum*, azaz vagy egy intervallum a $[-\pi,\pi]$-ben, vagy pedig $I = [-\pi,a] \cup [b,\pi] \quad (-\pi < a < b < \pi)$ alakú.

## 6.3. Lorentz-terek

A címben jelzett terek értelmezéséhez legyen adott az $n = 1, 2, ...$ pozitív természetes szám és vezessük be először is egy, a $Q \subset \mathbf{R}^n$ kockán (ld. 6.4. ii) megjegyzés) vagy az $\mathbf{R}^n$-en értelmezett, valós értékű és (Lebesgue-)mérhető $g$ függvény $\tilde{g}$ ún. *monoton fogyó átrendezését* a következőképpen:[10]

$$\tilde{g}(t) := \inf\{\alpha \geq 0 : \lambda(\{|g| > \alpha\}) \leq t\} \qquad (t > 0).$$

Nem nehéz meggondolni, hogy

$$\tilde{g}(t) = \sup\{\beta \geq 0 : \lambda(\{|g| > \beta\}) > t\} \qquad (t > 0).$$

Ugyanis $0 < u \leq v$ esetén nyilván

$$\{|g| > v\} \subset \{|g| > u\},$$

következésképpen

$$\lambda(\{|g| > v\}) \leq \lambda(\{|g| > u\}).$$

Ezért, ha[11]

$$\lambda(\{|g| > \beta\}) > t \geq \lambda(\{|g| > \alpha\}),$$

akkor $\beta \leq \alpha$. Innen

$$\sup\{\beta \geq 0 : \lambda(\{|g| > \beta\}) > t\} \leq \inf\{\alpha \geq 0 : \lambda(\{|g| > \alpha\}) \leq t\} \qquad (t > 0)$$

következik. Ha itt egy $t > 0$ számmal

$$\sup\{\beta \geq 0 : \lambda(\{|g| > \beta\}) > t\} < \inf\{\alpha \geq 0 : \lambda(\{|g| > \alpha\}) \leq t\}$$

lenne írható, akkor bármely, a

$$\sup\{\beta \geq 0 : \lambda(\{|g| > \beta\}) > t\} < u < v < \inf\{\alpha \geq 0 : \lambda(\{|g| > \alpha\}) \leq t\}$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő $u, v$ számokkal

$$\lambda(\{|g| > u\}) \leq t < \lambda(\{|g| > v\}),$$

így

$$\lambda(\{|g| > u\}) < \lambda(\{|g| > v\})$$

[10] Jelöljük $\lambda$-val az $\mathbf{R}^n$-beli Lebesgue-mértéket.

[11] Valamilyen $\alpha, \beta \geq 0$ számok esetén.

teljesülne. Ez viszont (amint azt az előbb megjegyeztük) nem igaz.

A $\tilde{g}$ függvény monoton fogyó, jobbról folytonos és

$$\lambda(\{|g| > y\}) = \lambda(\{\tilde{g} > y\}) \qquad (y > 0)$$

(a $g, \tilde{g}$ függvények „ekvimérhetők"). Ha $0 < p, q < +\infty$, akkor legyen

$$\|g\|_{p,q} := \left(\int_0^{+\infty} \tilde{g}(t)^q t^{q/p} \frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

ha pedig $0 < p \le +\infty$ és $q = +\infty$, akkor

$$\|g\|_{p,\infty} := \sup_{t>0} t^{1/p}\tilde{g}(t).$$

Az $L^{p,q}(Q)$ *Lorentz-teret* definiáljuk ezek után azon mérhető

$$g : Q \to \mathbf{R}$$

függvények összességeként, amelyekre $\|g\|_{p,q} < +\infty$. Legyen továbbá az

$$L^p_*(Q) \qquad (0 < p \le +\infty)$$

az ún. *gyenge* $L^p$*-tér,* azaz mindazon Lebesgue-mérhető

$$g : Q \to \mathbf{R}$$

függvények halmaza, amelyekre

$$\|g\|_{L^p_*} := \sup_{\alpha>0} \alpha\lambda(\{|g| > \alpha\})^{1/p} < +\infty \qquad (p < +\infty),$$

ill.

$$\|g\|_{L^\infty_*} := \|g\|_\infty < +\infty \qquad (p = +\infty).$$

Világos, hogy

$$L^p(Q) \subset L^p_*(Q) \qquad (0 < p \le +\infty),$$

hiszen $p = +\infty$-re ez a szóban forgó terek definíciójából következik, $p < +\infty$ esetén pedig az

$$\alpha^p \cdot \lambda(\{|g| > \alpha\}) \le \alpha^p \cdot \int_{\{|g|^p > \alpha^p\}} \frac{|g|^p}{\alpha^p}\, d\lambda \le \|g\|_p^p \qquad (\alpha > 0)$$

nyilvánvaló becslésből.

Gondoljuk meg, hogy a most definiált terekre

$$L^{p,p}(Q) = L^p(Q) \ \text{ és } \ L^{p,\infty}(Q) = L^p_*(Q) \qquad (0 < p \le +\infty)$$

igaz. Legyen ehhez (egy mérhető $g : Q \to \mathbf{R}$ függvénnyel) először $\beta \ge 0$ és

$$\lambda(\{|g| > \beta\}) > t > 0,$$

akkor $\beta \le \|g\|_\infty$. Ti. $\beta > \|g\|_\infty$ esetén

$$t < \lambda(\{|g| > \beta\}) \le \lambda(\{|g| > \|g\|_\infty\}) = 0$$

lenne, ami $t > 0$ miatt nem igaz. Az előbbiek szerint tehát

$$\tilde{g}(t) \le \|g\|_\infty,$$

más szóval

$$\|g\|_{\infty,\infty} = \sup_{t>0} \tilde{g}(t) \le \|g\|_\infty.$$

Ha itt a „$\le$" helyett „$<$" állna, akkor bármely

$$\sup_{t>0} \tilde{g}(t) < \beta < \|g\|_\infty$$

mellett minden $t > 0$ számra

$$\lambda(\{|g| > \beta\}) \le t$$

(különben $\tilde{g}(t) \ge \beta$ teljesülne, ami nem lehet). Azt kaptuk ezzel, hogy

$$\lambda(\{|g| > \beta\}) = 0,$$

tehát $\|g\|_\infty \le \beta$, ami ellentmond a $\beta$ választásának. Tehát $\|g\|_{\infty,\infty} = \|g\|_\infty$, így

$$L^{\infty,\infty}(Q) = L^\infty(Q) = L^\infty_*(Q)$$

(ahol az utóbbi egyenlőség a terek definíciójából adódóan áll fenn).

Tegyük fel most, hogy $p < +\infty$, ekkor[12]

$$\|g\|^p_{p,p} = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(t)^p dt = p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \lambda(\{\tilde{g} > y\})\, dy =$$

[12] Emlékeztetünk a $\|h\|_r^r = r \cdot \int_0^{+\infty} y^{r-1} \lambda(\{|h| > y\})\, dy \quad (0 < r < +\infty)$ egyenlőségre, ahol az itt szereplő $h : Q \to \mathbf{R}$ tetszőleges Lebesgue-mérhető függvény.

$$= p\cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1}\lambda(\{g > y\})\,dy = \|g\|_p^p,$$

amiből az $L^{p,p}(Q) = L^p(Q)$ egyenlőség már következik. Végül mutassuk meg, hogy minden $p < +\infty$ kitevőre is igaz, hogy

$$L^{p,\infty}(Q) = L^p_*(Q).$$

Ha ui. a $t > 0$ adott és a $\beta \geq 0$ olyan, hogy $\lambda(\{|g| > \beta\}) > t$, akkor

$$\beta t^{1/p} \leq \beta\lambda(\{|g| > \beta\})^{1/p} \leq \sup_{\alpha>0} \alpha\lambda(\{|g| > \alpha\})^{1/p} = \|g\|_{L^p_*}.$$

Innen rögtön kapjuk (a $\beta$-ban szuprémumot véve) a

$$t^{1/p}\tilde{g}(t) \leq \|g\|_{L^p_*}$$

egyenlőtlenséget, amiből meg

$$\|g\|_{p,\infty} \leq \|g\|_{L^p_*}$$

már nyilvánvaló. Fordítva, legyen $\beta \geq 0$ és $t > 0$, valamint $\lambda(\{|g| > \beta\}) > t$. Ekkor $\beta \leq \tilde{g}(t)$, így

$$t^{1/p}\beta \leq t^{1/p}\tilde{g}(t) \leq \|g\|_{p,\infty}.$$

Ha itt a $t$-vel tartunk a $\lambda(\{|g| > \beta\})$-hoz, akkor

$$\beta\lambda(\{|g| > \beta\})^{1/p} \leq \|g\|_{p,\infty},$$

és (a $\beta$-ban szuprémumot véve)

$$\|g\|_{L^{p,*}} \leq \|g\|_{p,\infty}$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy a $\|.\|_{L^p_*}$, $\|.\|_{p,\infty}$ normák ekvivalensek, azaz

$$L^{p,\infty}(Q) = L^p_*(Q).$$

## 6.4. Megjegyzések

i) A Hardy-terek definíciója (ld. 6.1.) minden további nélkül megfogalmazható a $[0, 1]$ intervallum (ill. bármely más kompakt intervallum) helyett az $\mathbf{R}$-et véve alapul. Sőt, a definíciók megfelelő kiterjesztésével tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az analóg terek bevezethetők az $\mathbf{R}^n$ felett is.

ii) Legyen tehát $n = 1, 2, ...$ adott és azonos hosszúságú

$$I_k \subset \mathbf{R} \qquad (k = 1, ..., n)$$

(korlátos) zárt intervallumok esetén nevezzük az

$$I := I_1 \times \cdots \times I_n$$

halmazt *kockának.* Ha a $Q \subset \mathbf{R}^n$ kocka, vagy $Q := \mathbf{R}^n$ és $1 < q \leq +\infty$, akkor az

$$a : Q \to \mathbf{R}$$

Lebesgue-mérhető függvényt $q$-*atomnak* nevezzük, ha valamilyen $I \subset Q$ („tartó") kockával az alábbiak teljesülnek:

$$\operatorname{supp} a \subset I,$$

továbbá

$$\int_I a = 0$$

és[13]

$$\|a\|_q \leq |I|^{1/q-1}.$$

Világos, hogy $n = 1$, $Q = [0, 1]$ és $q = +\infty$ esetén visszakapjuk a előbbiekben (ld. 6.1.) bevezetett atom fogalmát.

iii) Nem nehéz belátni, hogy (ld. ii)) ha az $a$ egy $q$-atom, akkor $\|a\|_1 \leq 1$. Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség szerint az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőségnek eleget tevő $1 \leq p < +\infty$ konjugált kitevővel

$$\|a\|_1 = \int_I |a| \leq \|a\|_q \cdot \left(\int_I 1\right)^{1/p} \leq |I|^{1/q-1+1/p} = 1.$$

[13]Jelöljük most $|I|$-vel az $I$ kocka $\mathbf{R}^n$-beli Lebesgue-mértékét.

iv) A iii)-ban mondott tulajdonság könnyen kiterjeszthető az alábbi értelemben: ha $1 < q_1 < q_2 \le +\infty$, akkor minden $q_2$-atom egyúttal $q_1$-atom is. Ha ui. az $a$ egy $q_2$-atom (ld. ii)) és $q_2 = +\infty$, akkor

$$\|a\|_{q_1} = \left(\int_I |a|^{q_1}\right)^{1/q_1} \le \left(|I|\cdot |I|^{-q_1}\right)^{1/q_1} = |I|^{1/q_1-1}.$$

A $q_2 < +\infty$ esetben a Hölder-egyenlőtlenséget is felhasználva

$$\|a\|_{q_1}^{q_1} = \int_I |a|^{q_1} \le \left(\int_I |a|^{q_2}\right)^{q_1/q_2} \cdot \left(\int_I 1\right)^{1/p},$$

ahol

$$\frac{1}{p} + \frac{q_1}{q_2} = 1.$$

Tehát

$$\|a\|_{q_1} \le \|a\|_{q_2}\cdot |I|^{1/(pq_1)} \le |I|^{1/q_2-1+1/(pq_1)} = |I|^{1/q_1-1}.$$

v) A iii)-beli becslés alapján $q$-atomok bármely $(a_k, k \in \mathbf{N})$ sorozata esetén a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k a_k$$

sor az $\|.\|_1$-normában konvergens, hacsak a $(\mu_k, k \in \mathbf{N})$ együtthatósorozatra

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k| < +\infty$$

(azaz $(\mu_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_1$). Definiáljuk ezek után a $\mathcal{H}_q(Q)$ teret, mint az olyan

$$f : Q \to \mathbf{R}$$

függvények összességét (ld. ii)), amelyek $q$-atomok $(a_k, k \in \mathbf{N})$ és együtthatók $(\mu_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_1$ alkalmas sorozatával

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k a_k$$

alakban állíthatók elő. Legyen az $\ell_{f,q}$ az $f$ függvény összes ilyen előállításában szereplő $(\mu_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_1$ sorozatok halmaza és

$$\|f\|_{\mathcal{H}_q} := \inf\{\|\mu\|_1 : \mu \in \ell_{f,q}\}.$$

Ekkor az alábbiak igazak:

- bármely $1 < q_1 \le q_2 \le +\infty$ esetén

$$\|f\|_1 \le \|f\|_{\mathcal{H}_{q_1}} \le \|f\|_{\mathcal{H}_{q_2}};$$

- minden $1 < q \le +\infty$ mellett a $\|.\|_{\mathcal{H}_q}$ norma és a $(\mathcal{H}_q(Q), \|.\|_{\mathcal{H}_q})$ Banach-tér;
- ha $f \in \mathcal{H}_q(Q)$, akkor $\int_Q f = 0$.

Világos, hogy ha

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k a_k \in \mathcal{H}_q(Q) \qquad ((\mu_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_{f,q})$$

a fenti definícióban szereplő atomos előállítása az $f$-nek, akkor

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \mu_k a_k \right\|_{\mathcal{H}_q} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k a_k \right\|_{\mathcal{H}_q} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

vi) Legyen $1 \le p < +\infty$ és valamilyen Lebesgue-integrálható

$$f : Q \to \mathbf{R}$$

függvény, valamint az $I \subset Q$ kocka (ld. ii)) esetén

$$f_I := \frac{1}{|I|} \cdot \int_I f,$$

továbbá

$$\|f\|_{*,p} := \sup \left\{ \left( \frac{1}{|I|} \cdot \int_I |f - f_I|^p \right)^{1/p} : I \subset Q \text{ kocka} \right\}.$$

Jelöljük $BMO_p(Q)$-val az összes olyan előbbi

$$f : Q \to \mathbf{R}$$

függvény alkotta halmazt, amelyre

$$\|f\|_{*,p} < +\infty.$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $f, g \in BMO_p(Q)$ függvényekre és tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ számra

- $\|f+g\|_{*,p} \leq \|f\|_{*,p} + \|g\|_{*,p}$;
- $\|\alpha f\|_{*,p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{*,p}$;
- $\|f\|_{*,p} = 0 \iff f$ konstans függvény.

Más szóval a $\|.\|_{*,p}$ kvázi-norma a $BMO_p(Q)$-n, így az

$$f \equiv g \iff \text{az } f-g \text{ konstans}$$

azonosítással a $(BMO_p(Q), \|.\|_{*,p})$ normált tér. Könnyen adódik, hogy

$$L^\infty(Q) \subset BMO_p(Q),$$

de $BMO_p(Q) \neq L^\infty(Q)$. Pl. az $n=1$, $Q=\mathbf{R}$ esetben az

$$f(x) := \ln|x| \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R})$$

függvényre $f \in BMO_1(Q) \setminus L^\infty(Q)$. Ugyanakkor a

$$g(x) := \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R})$$

függvényre $g \notin BMO_1(Q)$. Érdemes kiemelni egy lényeges különbséget az $L^p(Q)$ terek és a $BMO_p(Q)$ terek között: megadhatók az $f, g \in BMO_p(Q)$ függvények úgy, hogy $|f| \leq |g|$ és $g \in BMO_p(Q)$, de $f \notin BMO_p(Q)$. Az

$$n=1,\ Q=[0,1],\ p=1$$

esetben nyilván (ld. 6.1.) $BMO_1(Q) = \mathcal{BMO}(Q)$.

vii) A $BMO_p(Q)$ terek fenti definíciójában (ld. vi)) az $f_I$ középérték „helyettesíthető" más alkalmas számmal. Tegyük fel ui., hogy az

$$f : Q \to \mathbf{R}$$

függvényre (ld. ii)) igaz az alábbi: tetszőleges $I \subset Q$ kockához van olyan $c_I$ szám, amellyel

$$\sup\left\{\left(\frac{1}{|I|}\cdot\int_I |f-c_I|^p\right)^{1/p} : I \subset Q \text{ kocka}\right\} < +\infty.$$

Ekkor $f \in BMO_p(Q)$. Világos ui., hogy

$$\left(\frac{1}{|I|}\cdot\int_I |f-f_I|^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{|I|}\cdot\int_I |f-c_I|^p\right)^{1/p} + |f_I - c_I|,$$

ahol (a Hölder-egyenlőtlenséget is felhasználva)

$$|f_I - c_I| = \left|\frac{1}{|I|}\cdot \int_I (f - c_I)\right| \le \frac{1}{|I|}\cdot \int_I |f - c_I| \le \left(\frac{1}{|I|}\cdot \int_I |f - c_I|^p\right)^{1/p}.$$

viii) Legyen $1 < q \le +\infty$ és jelöljük $p$-vel a „konjugált” kitevőt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ha $g \in BMO_p(Q)$ (ld. vi)) és az $f \in \mathcal{H}_q(Q)$ függvény (ld. v)) véges sok $q$-atom lineáris kombinációjaként előállítható:

$$f = \sum_{k=0}^{N} \mu_k a_k$$

(ahol tehát $N \in \mathbf{N}$ és az $a_0, ..., a_N$ mindegyike $q$-atom, $\mu_0, ..., \mu_N$ pedig tetszőleges együtthatók), akkor minden további nélkül kiszámítható (és véges) az

$$\int_Q fg = \sum_{k=0}^{N} \mu_k \cdot \int_Q g a_k$$

integrál. Továbbá ($I_k$-val jelölve az $a_k$ $q$-atom definíciójában (ld. ii)) szereplő „tartó” kockát)

$$\left|\int_Q fg\right| \le \sum_{k=0}^{N} |\mu_k| \cdot \left|\int_{I_k} g a_k\right| = \sum_{k=0}^{N} |\mu_k| \cdot \left|\int_{I_k} (g - g_{I_k}) a_k\right| \le$$

$$\sum_{k=0}^{N} |\mu_k| \cdot \left(\int_{I_k} |g - g_{I_k}|^p\right)^{1/p} \cdot \|a_k\|_q \le$$

$$\sum_{k=0}^{N} |\mu_k| \cdot |I_k|^{1/q-1} \left(\int_{I_k} |g - g_{I_k}|^p\right)^{1/p} =$$

$$\sum_{k=0}^{N} |\mu_k| \cdot \left(\frac{1}{|I_k|}\cdot \int_{I_k} |g - g_{I_k}|^p\right)^{1/p} \le \|g\|_{*,p} \cdot \sum_{k=0}^{N} |\mu_k|.$$

Innen rögtön következik, hogy

$$\left|\int_Q fg\right| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_q} \cdot \|g\|_{*,p}.$$

Mivel a most vizsgált („végesen reprezentálható”) $f$ függvények halmaza a $\mathcal{H}_q(Q)$ térben nyilván mindenütt sűrű, az

$$f \mapsto \Psi_g(f) := \int fg$$

megfeleltetés pedig lineáris, ezért az előbb kapott becslést felhasználva a $\Psi_g$ funkcionál (egyértelműen) kiterjeszthető a $\mathcal{H}_q(Q)$-ra és

$$\|\Psi_g\| \leq \|g\|_{*,p}.$$

Megmutatható, hogy a $\mathcal{H}_q(Q)$-n értelmezett bármely $\Psi$ korlátos lineáris funkcionál ilyen alakú: valamilyen egyértelműen létező $g \in BMO_p(Q)$ függvénnyel $\Psi = \Psi_g$ és

$$\|\Psi\| \sim \|g\|_{*,p}.$$

ix) Megadhatók olyan $A, B > 0$ konstansok, hogy tetszőleges $f \in BMO_1(Q)$ függvényre, $I \subset Q$ kockára (ld. ii), v)) és $y \geq 0$ számra

$$|\{|f - f_I| \cdot \chi_I > y\}| \leq A \cdot |I| \cdot e^{-By/\|f\|_{*,1}}.$$

Innen bármely $1 \leq p < +\infty$ kitevő, $f \in BMO_p$ függvény és $I \subset Q$ kocka esetén a következőket mondhatjuk:

$$\int_I |f - f_I|^p = p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot |\{|f - f_I| \cdot \chi_I > y\}| \, dy \leq$$

$$Ap \cdot |I| \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-By/\|f\|_{*,1}} \, dy.$$

Ha itt az $u = By/\|f\|_{*,1}$ helyettesítéssel élünk,[14] akkor

$$\int_I |f - f_I|^p \leq |I| \cdot \|f\|_{*,1}^p \cdot \frac{Ap}{B^p} \cdot \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du =: C_p^p \cdot |I| \cdot \|f\|_{*,1}^p.$$

[14] Nyilván feltehető, hogy $\|f\|_{*,1} > 0$.

Tehát

$$\left(\frac{1}{|I|}\cdot\int_I |f-f_I|^p\right)^{1/p} \leq C_p\cdot \|f\|_{*,1}.$$

Ezzel azt láttuk be, hogy alkalmas $C_p > 0$ konstanssal a szóban forgó $f$ függvényekre

$$\|f\|_{*,p} \leq C_p\cdot \|f\|_{*,1}.$$

Mivel az $\|f\|_{*,1} \leq \|f\|_{*,p}$ becslés triviális, ezért tetszőleges $1 \leq p, r < +\infty$ mellett

$$\|.\|_{*p} \sim \|.\|_{*,r},$$

azaz a $BMO_p(Q)$ $(1 \leq p < +\infty)$ terek egybeesnek. Legyen ebben az értelemben

$$BMO := BMO(Q) := BMO_p(Q),$$

valamint

$$\|.\|_* := \|.\|_{*,p} \qquad (1 \leq p < +\infty).$$

Belátható, hogy a $(BMO(Q), \|.\|_*)$ Banach-tér.

x) Az előbbi megjegyzés analógiájára az is igaz, hogy a $\|.\|_{\mathcal{H}_q}$ normák (ld. v)) ekvivalensek, ill. a $\mathcal{H}_q(Q)$ $(1 < q \leq +\infty)$ terek ugyanazok. Legyen

$$\mathcal{H}(Q) := \mathcal{H}_q(Q)$$

és

$$\|.\| := \|.\|_{\mathcal{H}_q} \qquad (1 < q \leq +\infty).$$

Ekkor a $(\mathcal{H}(Q), \|.\|)$ Banach-tér, amelynek a duálisa (a viii) megjegyzés szellemében) azonosítható a $BMO(Q)$-val.

xi) Mutassuk meg, hogy igaz a *Hardy–Littlewood-egyenlőtlenség*: ha a Lebesgue-mérhető

$$f, g : Q \to \mathbf{R}$$

függvényekre (ld. ii)) létezik az $\int fg$ integrál, akkor[15]

$$\left|\int_Q fg\right| \leq \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt.$$

[15] Egy $h$ függvény $\tilde{h}$ monoton átrendezését illetően ld. 6.3.

Ui. nyilván feltehető, hogy $f, g \geq 0$. Ha itt még az

$$f = \sum_j s_j \chi_{A_j}$$

lépcsős függvény is, akkor

$$\int_Q fg = \sum_j \int_{A_j} g \leq \sum_j s_j \cdot \int_0^{\lambda(A_j)} \tilde{g}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\, dt.$$

Tetszőleges $f$ esetén legyen az $(f_n)$ nemnegatív lépcsős függvényeknek egy monoton nőve az $f$-hez tartó sorozata, ekkor

$$\int_Q f_n g \leq \int_0^{+\infty} \tilde{f}_n(t)\tilde{g}(t)\, dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\int_Q fg = \lim_{n \to +\infty} \int f_n g$$

miatt az állításunk már következik.

xii) A Lorentz-terek (ld. 6.3.) egymáshoz való viszonyát illetően a következőket mondhatjuk:

- tetszőleges $0 < p < +\infty$ és $0 < q \leq s \leq +\infty$ paraméterekkel

$$L^{p,q}(Q) \subset L^{p,s}(Q);$$

- ha a $Q$ alaphalmaz véges mértékű kocka, akkor bármely $0 < p < r \leq +\infty$ és $0 < q, s \leq +\infty$ esetén

$$L^{r,s}(Q) \subset L^{p,q}(Q).$$

Speciálisan $L^{p,1} \subset L^p(Q)$ $(p \geq 1)$, ami $p = 1$-re

$$\|f\|_{1,1} = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \lambda(\{\tilde{f} > y\})\, dy =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{|f| > y\})\, dy = \|f\|_1 \qquad (f \in L^{1,1}(Q))$$

miatt teljesül. Ha pedig $p > 1$, akkor (a xi)-et is felhasználva) az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőségnek eleget tevő $q$ konjugált kitevővel

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_Q fg \right| \leq \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt \qquad (f \in L^{p,1}(Q)).$$

Nem nehéz belátni, hogy a most mondott $g$ függvényekre

$$\tilde{g}(t) \leq t^{-1/q} \qquad (t > 0)$$

igaz. Ti., ha valamilyen $\beta \geq 0$ és $t > 0$ választással $\lambda(\{|g| > \beta\}) > t$, akkor $\beta \leq t^{-1/q}$. Ellenkező esetben ui.

$$1 \geq \int_Q |g|^q \geq \int_{\{|g|>\beta\}} |g|^q \geq \beta^q \cdot \lambda(\{|g| > \beta\}) > t^{-1}t = 1,$$

ami nyilván nem lehet. Így $\beta \leq t^{-1/q}$, amiből (a $\beta$-ban szuprémumot véve) $\tilde{g}(t) \leq t^{-1/q}$ valóban adódik. Innen az

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p,1} \qquad (f \in L^{p,1}(Q))$$

egyenlőtlenség már triviálisan következik.[16]

xiii) Jelöljük $\mathcal{X}$-szel a komplex egységkör belsejében[17] analitikus, komplex értékű $f$ függvények közül azoknak a halmazát, amelyekre

$$\|f\|_{\mathcal{X}} := \sup\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{\imath t})|\,dt : 0 < r < 1 \right\} < +\infty.$$

Belátható, hogy $f \in \mathcal{X}$ esetén majdnem minden $x \in [-\pi, \pi]$ helyen létezik az

$$f_{\mathcal{X}}(x) := \lim_{r \to 1-0} f(re^{\imath x})$$

[16] Megjegyezzük, hogy (némileg bonyolultabb meggondolás után) az is fennáll, hogy tetszőleges $0 < p < +\infty$ és $0 < q \leq s < +\infty$ mellett (csak a $p, q, s$ paraméterektől függő) $C \geq 0$ konstanssal $\|f\|_{p,s} \leq C \cdot \|f\|_{p,q} \quad (f \in L^{p,q}(Q))$.

[17] Tehát a $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ halmazon.

határérték, és az így definiált $f_{\mathcal{X}}$ függvényre

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_{\mathcal{X}}| = \|f\|_{\mathcal{X}}$$

teljesül. Továbbá igaz, hogy (ld. 6.2.)

$$\mathcal{H}_* = \{\mathrm{Re} f_{\mathcal{X}} : f \in \mathcal{X}\}.$$

Innen nyerhető a $\mathcal{H}_*$ tér egy fontos jellemzése, nevezetesen: ha az $f \in L^1[-\pi,\pi]$ függvény trigonometrikus konjugáltját $f^\sharp$-vel jelöljük, azaz

$$f^\sharp(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\pi \le t \le \pi,\, |x-t| \ge \varepsilon} \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,(\frac{x-t}{2})}\, dt \qquad (\text{m.m. } x \in [-\pi,\pi]),$$

akkor

$$\mathcal{H}_* = \{f \in L^1[-\pi,\pi] : f^\sharp \in L^1[-\pi,\pi]\},$$

és vannak olyan $A, B > 0$ számok, hogy bármely $f \in \mathcal{H}_*$ függvényre

$$A \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_*} \le \|f\|_1 + \|f^\sharp\|_1 \le B \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_*}.$$

# 7. fejezet

# Ortogonális sorok függvényterekben

## 7.1. Speciális rendszerek

Az 5. fejezetben definiált függvényrendszereket illetően a következőket mondhatjuk.

Haar egyik nevezetes tétele szerint minden $f \in C[0,1]$ függvény Haar–Fourier-sora egyenletesen konvergál az $f$-hez, azaz az

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f h_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Haar–Fourier-együtthatókkal az egyenletes konvergencia értelmében

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) h_n .^{1}$$

Továbbá, ahogyan ezt már korábban is említettük, az $S$ Schauder-rendszer (ld. 5.2.) bázis a $C[0,1]$-ben, de nem ortonormált bázis. Ezen „segít" a Franklin-rendszer (ld. 5.3.), miszerint az $F$ ortonormált bázis a $C[0,1]$-ben.

Mivel a $C$ Ciesielski-rendszer (ld. 5.5.) és a $T$ trigonometrikus rendszer (ld. 5.6.) egyaránt egyenletesen korlátos ortonormált rendszer, ezért a $C[0,1]$-ben[2] egyikük sem bázis (ld. 4.4. iii) megjegyzés).

[1]Mivel $h_n \notin C[0,1]$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ezért természetesen a $H$ Haar-rendszer (ld. 5.1.) nem bázis a $C[0,1]$-ben.

[2]Hacsak mást nem mondunk, a $C[0,1]$-ben mindig a $\|.\|_\infty$ normát tekintjük.

Ha (ld. 5.4.) $\Phi \in \{W, T\}$, akkor a $\Phi$ rendszer[3] $L_n$ $(n \in \mathbf{N})$ Lebesgue-függvényei (ld. 4.2.) konstans függvények és

$$\sup\{L_n : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Ezért egy korábbi megjegyzésünk szerint (ld. 4.4. iv) megjegyzés) tetszőlegesen adott $a \in [0,1]$ ponthoz van olyan $C[0,1]$-beli függvény, amelynek a $\Phi$ szerinti Fourier-sora az $a$-ban (nem korlátosan) divergál.

Az $L^p$ $(1 < p < +\infty)$ terekben[4] valamennyi előbb felsorolt

$$H, S, F, C, W, T$$

rendszer, valamint a Walsh-rendszer Kaczmarz-féle $\mathcal{W}$ átrendezése (ld. 5.4.) bázis. Ezek közül a $H, S, F$ az $L^1$-ben is bázist alkotnak, a $C, W, \mathcal{W}$ és a $T$ (a már említett okok miatt) nem.

Az $F$ Franklin-rendszer a $\mathcal{H}$-ban (ld. 6.1.), a $H$ rendszer a $\mathbf{H}$-ban és a $\mathcal{H}$-ban is bázis. Ugyanakkor az $F$ nem bázis a $\mathbf{H}$-ban.

Az $L^p$ $(1 < p < +\infty)$ terekben az $F$ is és a $H$ is, a $\mathcal{H}$-ban az $F$, a $\mathbf{H}$-ban a $H$ feltétlen bázis (ld. 2.6.).

Legyen

$$\mathcal{VMO} := \overline{\mathcal{L}[F]}$$

és

$$\mathbf{VMO} := \overline{\mathcal{L}[H]},$$

valamint (ld. 5.4.)

$$C_W := \overline{\mathcal{L}[H]} = \overline{\mathcal{L}[W]},$$

ahol a $\overline{(...)}$ lezárást rendre (ld. 6.1.) a $\mathcal{BMO}$-, $\mathbf{BMO}$-, ill. az $L^\infty$-normában értjük. Ekkor a dualitás miatt (ld. 3.3.3. Tétel) az $F$ a $\mathcal{VMO}$-ban, a $H$ pedig a $\mathbf{VMO}$-ban feltétlen bázis, továbbá a $H$ bázis a $C_W$-ben.[5]

A spline-rendszerekre vonatkozóan (ld. 5.5.) a következő állítások igazak:

[3]Tehát a $\Phi$ a Walsh- vagy a trigonometrikus rendszer.
[4]A későbbiekben is az $L^r$ $(1 \le r \le +\infty)$ rövidítés az $L^r[0,1]$ Lebesgue-teret jelöli az $\|.\|_r$ normával.
[5]Megmutatható, hogy a duális tereket illetően $\mathcal{VMO}^* = \mathcal{H}$ és $\mathbf{VMO}^* = \mathbf{H}$.

- a $\left(h_n^{(m,k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right)$ rendszer $(m, k \in \mathbf{Z},\ m \geq -1$ és $|k| \leq m+1)$ bázis az $L^p$-ben $(1 \leq p < +\infty)$, valamint $p > 1$ esetén ugyanitt feltétlen bázis, az $L^2$-ben Riesz-bázis;
- az előbbi $m$ és $k$ mellett a $\left(w_n^{(m,k)}, |k| - m \leq n \in \mathbf{Z}\right)$ rendszer is bázis az $L^p$ térben $(1 < p < +\infty)$.

## 7.2. Feltétlen bázisok

A feltétlen bázisokkal (ld. 2.6.) kapcsolatban a következőket jegyezzük meg. Legyen a $(B, \|.\|)$ olyan Banach-tér, hogy

- a $B$ elemei $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ Lebesgue-mérhető függvények;
- ha $f \in B$, az $m : [0,1] \to [0,1]$ pedig mértéktartó, valamilyen 1 mértékű halmazon bijektív leképezés és
$$f_*(x) := f(m(x)) \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor $f_* \in B$ és $\|f_*\| = \|f\|$;
- a $H$ Haar-rendszer (ld. 5.1.) zárt a $B$-ben.

Ekkor a $B$-ben a $H$ bázis, aminek a Banach-konstansára (ld. 2.2.) $B_H = 1$ teljesül. Például minden $L^p[0,1]$ $(1 \leq p < +\infty)$, sőt, minden szeparábilis (a $[0,1]$ intervallum feletti) Orlicz-tér (ld. 10.9.) ilyen.

Ha a $B$ térre a fentieken kívül még az is igaz, hogy bármelyik $\varphi \in B^*$ funkcionálhoz van olyan $g \in L^1[0,1]$, hogy a Haar-függvényekre
$$\varphi(h_k) = \int_0^1 g h_k \qquad (k \in \mathbf{N}),[6]$$
akkor minden $B$-beli $\Phi$ bázis feltétlen Banach-konstansára (ld. 2.8. x) megjegyzés)
$$B_\Phi^* \geq B_H^*$$
igaz. Innen tehát az is következik, hogy a $H$ rendszer vagy feltétlen bázis a $B$-ben, vagy a $B$-ben nincs feltétlen bázis. Így pl. az $L^1[0,1]$-ben nincs feltétlen bázis, mivel a $H$ nem az. Ezért a $C[0,1]$-ben sincs feltétlen bázis. Általában, egy ($[0,1]$-feletti) Orlicz-térben (ld. 10.9.) a $H$ pontosan akkor feltétlen bázis, ha a tér reflexív.

[6] Például $B^* \subset L^1[0,1]$.

## 7.3. Ekvivalens bázisok

Legyen $1 < p < +\infty$ és (ld. 2.6., 6.1., 7.1.)[7]

$$[X, Y] \in \{[L^p, L^p],\ [\mathbf{H}, \mathcal{H}],\ [\mathbf{VMO}, \mathcal{VMO}]\},$$

ekkor $(H, F) \in [X, Y]$, azaz (ld. 5.) a Haar- és a Franklin-rendszerek ekvivalens bázisok a most mondott terekben. Ugyanakkor a $H$ és az $F$ az $L^1$ térben nem ekvivalens bázisok, ill. az $L^\infty$-ben nem ekvivalens függvényrendszerek.

Ha $1 < p < +\infty$, akkor a $C$ Ciesielski-rendszer és a $W$ Walsh–Paley-rendszer ekvivalens bázisok az $L^p$-ben, de ugyanitt a $W$ és a Walsh–Kaczmarz-rendszer csak (a triviális) $p = 2$ esetén ekvivalens. Hasonlóan, $(W, T) \in [L^p, L^p]$ akkor és csak akkor igaz, ha $p = 2$.

Jelöljük $\mathcal{D}_0$-val a $[0, 1]$-beli diadikus intervallumok (ld. 2.3.) halmazát és legyen

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cup \{\emptyset\}.$$

Indexeljük a ($[0, 1]$ feletti) $H$ rendszer függvényeit a következőképpen: $h_\emptyset := h_0$, a $h_I$ $(I \in \mathcal{D}_0)$ pedig legyen a $H$-nak az a tagja, amelyikre

$$\{x \in [0, 1) : h_I(x) \neq 0\} = I$$

teljesül. A

$$\rho : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

bijekciót *mértéktartónak* nevezzük, ha

$$|\rho(I)| = |I| \qquad (I \in \mathcal{D})$$

igaz. Minden ilyen $\rho$ mellett a

$$H_\rho := (h_{\rho(I)}, I \in \mathcal{D})$$

a Haar-rendszer egy (a $\rho$ által generált) átrendezése. Ha

$$|\rho| := \sup\left\{\frac{1}{|I|} \cdot \left|\bigcup_{\mathcal{D} \ni J \subset I} \rho(J)\right| : I \in \mathcal{D}_0\right\},$$

[7] $L^p := L^p[0, 1] \quad (1 \leq p \leq +\infty)$.

akkor a következő állítás igaz: $1 < r < +\infty$, $r \neq 2$ és

$$[X, Y] \in \{[\mathbf{H}, \mathbf{H}], [\mathbf{VMO}, \mathbf{VMO}], [L^r, L^r]\}$$

esetén

$$(H, H_\rho) \in [X, Y] \iff |\rho| < +\infty \text{ és } |\rho^{-1}| < +\infty.$$

Legyen

$$m, k \in \mathbf{Z},\ m \geq -1 \text{ és } |k| \leq m + 1,$$

továbbá $1 < p < +\infty$. Megmutatható, hogy a $H$ és a $(h_n^{(m,k)}, |k| - m) \leq n \in \mathbf{Z})$ rendszerek (ld. 5.5.) ekvivalens bázisok az $L^p$-ben.

## 7.4. Megjegyzések

i) Valamilyen

$$\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N}) \qquad (\varphi_n \in L^\infty[0, 1] \ \ (n \in \mathbf{N}))$$

ortonormált rendszer esetén legyen

$$S_\Phi(f) := \sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_0^1 f\varphi_k \right) \varphi_k \right| : n \in \mathbf{N} \right\} \qquad (f \in L^1[0, 1]).$$

Ekkor az alábbi állítás igaz: bármely (ld. 5. fejezet)

$$\Phi \in \{H, W, F, C, T\}$$

és $1 < p < +\infty$ mellett

$$\|S_\Phi(f)\|_p \sim \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0, 1]).$$

A $p = 1$ esetben pedig a következőt mondhatjuk (ld. 4.3.):

$$\|S_H(f)\|_1 \sim \|f\|_{\mathbf{H}} \sim \|Q_H(f)\|_1 \sim \int_0^1 \|T_H^t(f)\|_1 \, dt \qquad (f \in L^1[0, 1]).$$

ii) A

$$\|Q_H(f)\|_p \sim \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0, 1],\ 1 < p < +\infty)$$

relációt *Paley-egyenlőtlenségnek* nevezik. Mivel

$$Q_H(f) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \widehat{f}(k) h_k \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \left( \widehat{f}(0) \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \widehat{f}(2^n+k) h_{2^n+k} \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left( \left( \widehat{f}(0) \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{f}(2^n+k) h_{2^n+k} \right)^2 \right)^{1/2} \qquad (f \in L^1[0,1]),^{8}$$

ezért az

$$S_n^H(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) h_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$Q_H(f) = \left( \left( \widehat{f}(0) \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left( S_{2^{n+1}}^H(f) - S_{2^n}^H(f) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

A $H$ és a $W$ rendszerek kapcsolatából (ld. 5.4.) rögtön adódik, hogy a $Q_H(f)$ fenti előállításában az $S_{2^n}^H(f)$ $(n \in \mathbf{N})$ *Haar–Fourier-részletösszegek* helyett az

$$S_{2^n}^W(f) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \int_0^1 f w_k \right) w_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*Walsh–Fourier-részletösszegek* is írhatók, azaz tetszőleges $1 < p < +\infty$ kitevővel

$$\left\| \left( (\widehat{f}(0))^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left( S_{2^{n+1}}^W(f) - S_{2^n}^W(f) \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_p \sim \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0,1]).$$

iii) Mivel (ld. i)) bármely $f \in L^1[0,1]$ függvényre[9]

$$S_H(f) = \sup \left\{ \left| S_{2^n}^W f \right| : n \in \mathbf{N} \right\},$$

ezért az előbbiek szerint

$$\|f\|_{\mathbf{H}} \sim \left\| \sup\{ \left| S_{2^n}^W(f) \right| : n \in \mathbf{N} \} \right\|_1 .$$

iv) Tegyük fel, hogy adott egy $\Phi = (\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ ortonormált bázis a $\mathcal{H}$-ban (ld. 6.1.), amire

$$\varphi_n \in \mathrm{Lip}\,(1) \qquad (n \in \mathbf{N})^{10}$$

---

[8] Az $f$ függvény $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f h_n$ $(n \in \mathbf{N})$ Haar–Fourier-együtthatóival.

[9] Belátható, hogy az $S_m^H(f)$, $S_{2^n}^W(f)$ $(m, n \in \mathbf{N})$ részletösszegek minden pontban egyaránt az $f$ függvénynek az illető pontot tartalmazó alkalmas diadikus intervallumon (ld. 2.3.) vett integrálközepei.

[10] $g \in \mathrm{Lip}\,(1) \iff$ alkalmas $C_g \geq 0$ konstanssal $|g(x) - g(y)| \leq C_g \cdot |x - y|$ $(x, y \in [0,1])$.

és

$$\varphi_0(x) = 1 \qquad (x \in [0,1]).$$

Legyen (ld. 6.2. és 6.4. xiii) megjegyzés)

$$\Phi^* := (\varphi_0^*, \varphi_n^*, \widetilde{\varphi_n^*},\ 1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a $\Phi^*$ ortogonális bázis a $\mathcal{H}_*$-ban. Mivel az $F$ Franklin-rendszer feltétlen bázis a $\mathcal{H}$-ban, ezért az $F^*$ feltétlen bázis a $\mathcal{H}_*$-ban.

Ennek az észrevételnek az alapján bázist konstruálhatunk az $\mathcal{X}$ térben is (ld. 6.4. xiii) megjegyzés)[11]. Jelöljük ehhez $P_r$-rel $(0 \leq r < 1)$ az $r$-edik *Poisson-magot*:

$$P_r(t) := \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \qquad (t \in [-\pi, \pi]),$$

és legyen a

$$0 \leq r < 1,\ x \in [-\pi, \pi],\ z = re^{\imath x}$$

választással $F_0(z) := 1$, valamint

$$F_n(z) := \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi_n^*(x+t) + \imath\widetilde{\varphi_n^*}(x+t)\right) P_r(t)\, dt \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Megmutatható, hogy az

$$\mathcal{F}_\Phi := (F_n, n \in \mathbf{N})$$

rendszer bázis az $\mathcal{X}$-ben. A $\Phi := F$ Franklin-rendszerből kiindulva az így kapott $\mathcal{F}_F$ pedig feltétlen bázis az $\mathcal{X}$-ben.

A most értelmezett $\mathcal{F}_F$ rendszer segítségével sikerült megválaszolni egy régi, még Banach által felvetett kérdést: ha az $\mathcal{A}$ jelöli a komplex (zárt) egységkörben[12] értelmezett, annak a belsejében[13] analitikus, a határán[14] pedig folytonos, komplex értékű függvények halmazát az

$$\|f\| := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\} \qquad (f \in \mathcal{A})$$

[11] Emlékeztetőül: $f \in \mathcal{X}$ azt jelenti, hogy az $f : \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\} \to \mathbf{C}$ függvény analitikus és $\|f\|_{\mathcal{X}} = \sup\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{\imath t})|\, dt : 0 < r < 1\right\} < +\infty$.

[12] Tehát a $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ halmazon.

[13] A $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ halmazon.

[14] A $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ körön.

normával, akkor van-e az $\mathcal{A}$-ban bázis? A válasz: *igen,* pl. az $\mathcal{F}_F$ rendszer bázis az $\mathcal{A}$-ban. Érdemes megjegyezni, hogy a bizonyításban lényeges szerepet játszik az $F$ bázis volta a $C[0,1]$-ben. Ugyanakkor az $\mathcal{F}$ nem feltétlen bázis az $\mathcal{A}$-ban, sőt: az $\mathcal{A}$-ban nincs feltétlen bázis.

v) Függvényrendszerek $L^p$-beli $(1 < p < +\infty)$ ekvivalenciájának a kezeléséhez jól használható a következő állítás is: ha

$$M(f)(x) := \sup \frac{1}{|I|} \cdot \int_I |f| \qquad (f \in L^1[0,1], x \in [0,1]),$$ [15]

akkor bármely $\varphi_n \in L^p \ (n \in \mathbf{N})$ függvényrendszerre

$$\left\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} (M(\varphi_n))^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_p \cdot \left\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p,$$

ahol a $C_p > 0$ konstans csak a $p$-től függ.

vi) A $(H,F) \in [\mathbf{H}, \mathcal{H}]$ ekvivalencia egyúttal egy explicit izomorfizmust is létesít a $\mathbf{H}$ és a $\mathcal{H}$ tér között. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy a $\|.\|_{\mathbf{H}}$ norma és a $\|.\|_{\mathcal{H}}$ norma egymással nem ekvivalens. Ui. van olyan $A > 0$ konstans, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\left\| 2^{n/2} f_{2^n + 2^{n-1} + 1} \right\|_{\mathbf{H}} \ge An,$$

míg

$$\sup \left\{ \left\| 2^{k/2} f_{2^k + j} \right\|_{\mathcal{H}} : k \in \mathbf{N}, j = 1, ..., 2^k \right\} < +\infty.$$ [16]

vii) A

$$(H,F) \in [L^p, L^p] \qquad (1 < p < +\infty)$$

ekvivalencia bizonyítása (az v) megjegyzésen kívül) a következő állítás segítségével is történhet:

$$\left\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p \sim \left\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

[15] A „sup" azokra az $I \subset [0,1]$ intervallumokra vonatkozik, amelyekre $x \in I$. Az $M(f)$ leképezés az $f$ függvény *Hardy–Littlewood-maximálfüggvénye* (ld. 10.11.).

[16] Ez utóbbi – nem triviális becslés – lényeges szerepet játszik annak a bizonyításában, hogy az $F$ Franklin-rendszer feltétlen bázis a $\mathcal{H}$-ban.

(ahol az $\sim$ ekvivalencia az $a_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ együttható-sorozatokra vonatkozik). Ui. bármely

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n \in \mathcal{L}[H]$$

esetén

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n\right\|_p \leq C_p \cdot \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq$$

$$B_p \cdot \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h_n^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq D_p \cdot \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n\right\|_p$$

teljesül alkalmas, csak a $p$-től függő $C_p, B_p, D_p$ konstansokkal. (Kihasználtuk, hogy az $F, H$ feltétlen bázisok az $L^p$-ben és alkalmaztuk a 4.3.1. Tételt.) A most kapott becslés azt jelenti, hogy a

$$h_n \mapsto f_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

kanonikus izomorfizmus (a $H$ és az $F$ között) kiterjeszthető egy $L^p \to L^p$ folytonos, lineáris operátorrá.

# 8. fejezet

# Waveletek

## 8.1. Multirezolúció

Legyen $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ és tetszőleges $k, j \in \mathbf{Z}$ esetén definiáljuk a $\psi_{kj}$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\psi_{kj}(x) := 2^{k/2}\psi(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Azt mondjuk, hogy a $\psi$ *wavelet,* ha a $\psi_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ függvényrendszer ortonormált bázist alkot az $L^2(\mathbf{R})$ Hilbert-térben[1].

Ha adott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvény és $t \in \mathbf{R}$ szám esetén

$$\tau_t f(x) := f(x - t) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

valamint

$$\delta_t f(x) := f(tx) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor a most értelmezett $\tau_t$ *transzláció*[2] és $\delta_t$ *dilatáció* segítségével

$$\psi_{kj} = 2^{k/2}\delta_{2^k}(\tau_j\psi) = 2^{k/2}\tau_{j2^{-k}}(\delta_{2^k}\psi) \qquad (k, j \in \mathbf{Z}).$$

Tekintsük pl. a

$$\psi := \chi := \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$$

[1] Idézzük fel az $L^2(\mathbf{R})$ Lebesgue-térbeli „szokásos” skaláris szorzás definícióját: nevezetesen, tetszőlegesen adott $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ függvények esetén $\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Következésképpen a továbbiakban $\|f\| := \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx}$ $(f \in L^2(\mathbf{R}))$.

[2] A 3.3. pontban (formai okokból) $\tau$ helyett $\mathcal{T}$-t írtunk.

függvényt[3]. Ekkor a

$$\chi_{[0,1]},\, \chi_{kj} \quad (0 \leq k \in \mathbf{Z},\, j = 0, ..., 2^k - 1)$$

függvényeknek a $[0,1)$ intervallumra való leszűkítéseként adódó függvényrendszer könnyen ellenőrizhetően nem más, mint a $H = (h_n, n \in \mathbf{N})$ (ortonormált) Haar-rendszer a $[0,1)$ intervallumon (ld. 5.1.). A 7.1. pontban mondottak szerint a

$$H_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \langle f, h_k \rangle h_k \qquad (f \in L^1[0,1],\, n \in \mathbf{N})$$

Haar–Fourier-részletösszegek bármely $1 \leq p < +\infty$ mellett a $\|.\|_p$ szerint konvergálnak az $f$ függvényhez, ha $f \in L^p[0,1]$. Továbbá $f \in C[0,1]$ (folytonos függvény) esetén a $(H_n(f), n \in \mathbf{N})$ sorozat egyenletesen konvergál az $f$-hez. Mindezt figyelembe véve nem nehéz megmutatni, hogy a fenti $\chi$ függvény wavelet (az ún. *Haar-wavelet*).

A Haar-wavelet ugyan nagyon egyszerű szerkezetű, de mindez általában már nem mondható el: a waveletek létrehozása nem tartozik a könnyű feladatok közé. Az ilyen konstrukciók érdekében vezessük be a következő fogalmat: azt mondjuk, hogy a

$$V_k \subset L^2(\mathbf{R}) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

zárt alterek sorozata az $L^2(\mathbf{R})$ tér *multirezolúciója,* ha

i) $V_k \subset V_{k+1}$ $(k \in \mathbf{Z})$;

ii) $\overline{\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k} = L^2(\mathbf{R})$;[4]

iii) $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k = \{\mathbf{R} \ni x \mapsto 0\}$;

iv) $f \in V_k \iff \delta_2 f \in V_{k+1}$ $(k \in \mathbf{Z})$;

v) van olyan $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, hogy a $(\tau_j \varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $V_0$-ban.

Az

$$\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi \imath x t}\, dt \qquad (f \in L^1(\mathbf{R}),\, x \in \mathbf{R})$$

[3] $\chi_A$ jelenti az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz karakterisztikus függvényét az $\mathbf{R}$-en.

[4] A felülhúzás az $L^2(\mathbf{R})$-beli $\|.\|$ szerinti lezárást jelenti.

Fourier-transzformáció (ld. 2.2.) segítségével az v) feltételről a következőt mondhatjuk. A

$$\widehat{\tau_j\varphi} \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

Fourier-transzformáltak kapcsolata a $\widehat{\varphi}$-vel meglehetősen egyszerű:[5]

$$\widehat{\tau_j\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-j)e^{-2\pi\imath xt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-2\pi\imath x(t-j)}\,dt =$$

$$e^{2\pi\imath xj}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-2\pi\imath xt}\,dt = e^{2\pi\imath xj}\widehat{\varphi}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{Z}).$$

Ismert továbbá a Fourier-transzformáció *izometrikus* tulajdonsága:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\,dx \qquad (f, g \in L^2(\mathbf{R})).$$

Speciálisan

$$\|f\| = \|\widehat{f}\| \qquad (f \in L^2(\mathbf{R})),$$

így az

$$L^2(\mathbf{R}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$$

leképezés korlátos lineáris operátor, következésképpen folytonos is.

Ha tehát a $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált, akkor bármely $j \in \mathbf{Z}$ esetén

$$\delta_{0j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(t-j)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(t)e^{-2\pi\imath jt}\overline{\widehat{\varphi}(t)}\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath jt}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |\widehat{\varphi}(t)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath jt}\,dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath j(t+k)}\,dt.$$

Legyen

$$\Phi_k(t) := |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath j(t+k)} \qquad (k \in \mathbf{Z},\ t \in [0,1]),$$

akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\Phi_k(t)|\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\widehat{\varphi}(t+k)|^2\,dt =$$

[5] Most is és a továbbiakban is külön megjegyzés nélkül feltesszük, hogy $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$.

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |\widehat{\varphi}(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t)|^2 \, dt = \|\varphi\|^2 < +\infty.$$

Ezért a Lebesgue-féle konvergencia-tétel miatt

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath j(t+k)} \, dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \right) e^{-2\pi\imath jt} \, dt,$$

ami nem más, mint a

$$\Phi(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \qquad (t \in [0,1])$$

függvény[6]

$$\int_0^1 \Phi(t) e^{-2\pi\imath jt} \, dt$$

$j$-edik Fourier-együtthatója. Ez tehát 1 (ha $j = 0$), vagy 0 (egyéb $j$-k esetén), következésképpen m.m. $t \in \mathbf{R}$ mellett

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 = 1. \tag{8.1.1}$$

Megjegyezzük, hogy a $\widehat{\varphi}$ folytonossága miatt a

$$t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

leképezések is folytonosak. Ezért

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

miatt bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén minden $t \in \mathbf{R}$ helyen a

$$\sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \le 1$$

[6] Nyilván $\Phi \in L^1[0,1]$, hiszen (ld. fent) $\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \, dt = \|\widehat{\varphi}\|^2 = \|\varphi\|^2 < +\infty$.

egyenlőtlenségnek fenn kell állni. Más szóval

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \leq 1 \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{8.1.2}$$

Az előbbiekkel analóg módon az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-l)\overline{\varphi(t-j)}\,dt =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2\right) e^{-2\pi\imath(j-l)t}\,dt \qquad (\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}),\ j,l \in \mathbf{Z})$$

egyenlőség attól függetlenül igaz, hogy a $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis-e a $V_0$-ban vagy sem. Ha tehát most azt tudjuk, hogy a $\varphi$-re a (8.1.1) egyenlőség igaz m.m. $t \in \mathbf{R}$ esetén, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-l)\overline{\varphi(t-j)}\,dt = \int_0^1 e^{-2\pi\imath(j-l)t}\,dt = \begin{cases} 0 & (j \neq l) \\ 1 & (j = l) \end{cases} \qquad (j,l \in \mathbf{Z}).$$

Következésképpen a (8.1.1) szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált legyen.

A multirezolúció definíciójában szereplő iv) feltétel miatt bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén a $g \in V_k$ tartalmazás azzal ekvivalens, hogy az

$$f(x) := g(2^{-k}x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre $f \in V_0$ igaz. Mivel ugyanitt az v) feltétel szerint ekkor

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \tau_j \varphi,$$

ahol a $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ldots$ sor konvergenciája $\|.\|$-ban értendő és

$$\alpha_j := \langle f, \tau_j\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\varphi(t-j)}\,dt \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért

$$g(x) = f(2^k x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \varphi(2^k x - j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^{k/2}} 2^{k/2} \varphi(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát (a $\|.\|$-ban vett konvergencia értelmében)

$$g = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^{k/2}} 2^{k/2} \delta_2(\tau_j \varphi).$$

Legyen

$$\varphi_{kj}(x) := 2^{k/2} \delta_2(\tau_j \varphi)(x) = 2^{k/2} \varphi(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ k, j \in \mathbf{Z}).$$

A már említett v) feltétel miatt

$$\tau_j \varphi \in V_0 \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \tau_j \varphi(2^k x) = \varphi(2^k x - j) \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

függvények valamennyien $V_k$-beliek, így

$$\varphi_{kj} \in V_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

is igaz. Továbbá[7]

$$\langle \varphi_{kj}, \varphi_{kl} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^k \varphi(2^k x - j) \overline{\varphi(2^k x - l)}\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - j) \overline{\varphi(t - l)}\, dt = \delta_{kl} \qquad (k, l \in \mathbf{Z})$$

miatt minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén a $(\varphi_{kj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer is ortonormált. Az előbbieket is figyelembe véve tehát a $(\varphi_{kj}, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázist alkot a $V_k$-ban $(k \in \mathbf{Z})$. Mivel a feltételek szerint ez utóbbi zárt altér az $L^2(\mathbf{R})$-ben, ezért

$$V_k := \overline{\mathcal{L}[\{\varphi_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

[7] A $t := 2^k x$ helyettesítés révén.

Azt mondjuk, hogy a $(V_k, k \in \mathbf{Z})$ sorozat a $\varphi$ *függvény által generált multirezolúció.*

Az előbbi $\varphi$ függvényt *skálázási függvénynek* nevezzük. Legyen pl. $\varphi := \chi_{[0,1)}$. Ekkor tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ mellett az

$$\mathcal{L}[\{\varphi_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]$$

lineáris burok pontosan azokból az $f \in L^2(\mathbf{R})$ függvényekből áll, amelyek a

$$[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}) \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

diadikus intervallumokon (ld. 2.3.) állandók. Könnyű meggondolni, hogy ezek az alterek zártak is, azaz most

$$V_k = \mathcal{L}[\{\varphi_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}].$$

Továbbá az is világos ebben a példában, hogy $V_k \subset V_{k+1}$ és

$$f \in V_k \iff \delta_2 f \in V_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

A $\varphi$ függvény definíciója alapján a

$$\varphi_{0j} = \tau_j \varphi \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

függvények tartói páronként diszjunktak:

$$\operatorname{supp} \tau_j \varphi \cap \operatorname{supp} \tau_l \varphi = [j, j+1) \cap [l, l+1) = \emptyset \qquad (j, l \in \mathbf{Z},\ j \neq l),$$

így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_j \varphi(x) \tau_l \varphi(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (j \neq l) \\ \int_j^{j+1} (\tau_j \varphi)^2(x)\, dx = 1 & (j = l). \end{cases}$$

Tehát a $(\tau_j \varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer triviálisan ortonormált, ezért egyúttal ortonormált bázis a $V_0$-ban. Más szóval a multirezolúcióval kapcsolatos i), iv), v) feltételek a most vizsgált esetben nyilvánvalóak. A Haar-rendszer (ld. 5.1.) fent említett konvergencia-tulajdonságai alapján a ii), iii) tulajdonságok is egyszerűen következnek. Ezért a diadikus intervallumokon az előbbi értelemben állandó függvények az $L^2(\mathbf{R})$ tér multirezolúcióját alkotják.

## 8.2. Skálázási egyenlet

Legyen a $(V_k, k \in \mathbf{Z})$ egy tetszőleges multirezolúciója az $L^2(\mathbf{R})$ térnek (ld. 8.1.) és

$$W_k := \{f \in V_{k+1} : f \perp V_k\} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

a $V_k$ altér ortogonális kiegészítő altere a $V_{k+1}$-ben[8], azaz

$$V_{k+1} = V_k \oplus W_k.$$

Jelöljük $P_k$-val a

$$P_k : L^2(\mathbf{R}) \to V_k$$

ortogonális projekciót[9]. Egyszerűen megmutatható, hogy a

$$Q_k := P_{k+1} - P_k : L^2(\mathbf{R}) \to W_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

leképezések is ortogonális projekciók[10].

Ha tehát $f \in L^2(\mathbf{R})$ és $k \in \mathbf{Z}$, valamint $g \in V_k$, akkor a projekciók tulajdonságai alapján

$$\|f - P_k f\| \leq \|f - g\|.$$

Mivel a multirezolúciót meghatározó egyik tulajdonság (ld. 8.1. ii) feltétel) miatt

$$\overline{\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k} = L^2(\mathbf{R}),$$

ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $k_0 \in \mathbf{Z}$ és $g \in V_{k_0}$, hogy

$$\|f - g\| < \varepsilon,$$

amiből

$$\|f - P_{k_0} f\| < \varepsilon$$

[8] Tehát minden $f \in V_{k+1}$ elem egyértelműen írható fel $f = f_1 + f_2$ alakban, ahol $f_1 \in V_k$ és $f_2 \in W_k = \{g \in V_{k+1} : \langle g, h \rangle = 0 \ \ (h \in V_k)\}$.

[9] A továbbiakban (ahol csak nem okoz félreértést) a szokásos $P_k f := P_k(f)$ $(f \in L^2(\mathbf{R}))$ rövidítéssel élve $f = P_k f + g$ $(f \in L^2(\mathbf{R}))$, ahol $P_k f \in V_k$ és $g \in V_k^\perp := \{v \in L^2(\mathbf{R}) : \langle v, h \rangle = 0 \ \ (h \in V_k)\}$. A $P_k$ operátor önadjungált, azaz $\langle P_k f, h \rangle = \langle f, P_k h \rangle$ $(f, h \in L^2(\mathbf{R}))$.

[10] Ha ui. $f \in L^2(\mathbf{R})$, akkor $P_{k+1} f = P_{k+1}(P_k f + g) = P_k f + P_{k+1} g \in V_{k+1}$, ahol $g \in V_k^\perp$. Ezért tetszőleges $h \in V_k$ elemre $\langle Q_k f, h \rangle = \langle P_{k+1} g, h \rangle = \langle g, P_{k+1} h \rangle = \langle g, h \rangle = 0$.

is adódik. Ha $k_0 \le k \in \mathbf{Z}$, akkor (ld. 8.1. i)) $P_{k_0} f \in V_k$, így

$$\|f - P_k f\| \le \|f - P_{k_0} f\| < \varepsilon.$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\lim_{k\to+\infty} \|f - P_k f\| = 0.$$

Világos továbbá, hogy az

$$If := f \qquad (f \in L^2(\mathbf{R}))$$

jelöléssel az $I - P_k$ operátor a $V_k^\perp$ altérre való ortogonális projekció és

$$V_{k+1}^\perp \subset V_k^\perp \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{L} := \overline{\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} V_k^\perp} = L^2(\mathbf{R}).$$

Különben ui. lenne olyan $0 \ne h \in L^2(\mathbf{R})$, hogy $h \perp \mathcal{L}$. Következésképpen $h \perp V_k^\perp$ is igaz lenne minden $k \in \mathbf{Z}$ mellett. A

$$(V_k^\perp)^\perp = V_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

egyenlőség alapján viszont $h \in V_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ következne, amiből (ld. 8.1. iii)) $h = 0$ teljesülne, szemben a $h \ne 0$ feltételezéssel. Tehát valóban igaz, hogy $\mathcal{L} = L^2(\mathbf{R})$. Ezért az előbb belátott

$$\lim_{k\to+\infty} \|f - P_k f\| = 0$$

egyenlőséget a $V_k$ alterek helyett a $V_k^\perp$-kra, a $P_k$ projekciók helyett pedig az

$$I - P_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

projekciókra alkalmazva azt írhatjuk, hogy

$$\lim_{k\to-\infty} \|P_k f\| = \lim_{k\to-\infty} \|f - (I - P_k) f\| = 0.$$

Legyen most $n \in \mathbf{N}$, ekkor nyilván

$$V_n = V_{-n} \oplus W_{-n} \oplus \cdots \oplus W_{n-1}.$$

Ezért $f \in V_n \cap V_{-n}^{\perp}$ esetén egyértelműen létezik az

$$f = \sum_{k=-n}^{n-1} f_k := \sum_{k=-n}^{n-1} Q_k f$$

felbontás, ahol tehát

$$f_k := Q_k f \in W_k \qquad (k = -n, ..., n-1).$$

Továbbá

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-n}^{n-1} \|f_k\|^2.$$

Ha viszont $f \in L^2(\mathbf{R})$ tetszőleges, akkor az előbb belátott

$$\lim_{k \to +\infty} \|f - P_k f\| = \lim_{l \to -\infty} \|P_l f\| = 0$$

egyenlőségek miatt

$$\|f - P_n f\|^2 + \|P_{-n} f\|^2 \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

A

$$g_n := P_n f - P_{-n} f \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvény nyilván $V_n$-beli és $g_n \perp V_{-n}$. Így a fentebb mondottak szerint

$$g_n = \sum_{k=-n}^{n-1} Q_k g_n = \sum_{k=-n}^{n-1} Q_k f = \sum_{k=-n}^{n-1} f_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\|f - g_n\|^2 = \|f - P_n f + P_{-n} f\|^2 =$$
$$\|f - P_n f\|^2 + \|P_{-n} f\|^2 \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Következésképpen

$$f = \lim_{n \to +\infty} g_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k,$$

ahol tehát $f_k \in W_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ és

$$\|f\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \|g_n\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n-1} \|f_k\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_k\|^2.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy az $f$ függvény előző ($\|.\|$-ban konvergens)

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k$$

felbontása egyértelmű, ha az $f_k \in W_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ feltételezéssel élünk. Ha ui.

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k$$

alkalmas $h_k \in W_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ függvényekkel, akkor

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f_k - h_k),$$

tehát

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_k - h_k\|^2.$$

Innen $f_k = h_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ rögtön következik.

Összefoglalva a fentieket az alábbi állítást kaptuk:

**8.2.1. Tétel.** *Bármely* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *függvény esetén*

$$\lim_{k\to+\infty} \|f - P_k f\| = \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\| = 0.$$

*Továbbá*

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} W_k,$$

*más szóval tetszőleges* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *függvény egyértelműen felírható*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k$$

*alakban, ahol* $f_k \in W_k$ $(k \in \mathbf{Z})$, *a szóban forgó sor* $\|.\|$*-ban konvergens és*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_k\|^2.$$

Tekintsük most a $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény által generált $V_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ multirezolúciót (ld. 8.1.). A

$$(\varphi_{kj}, j \in \mathbf{Z}) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

rendszer ortonormált, ezért a

$$P_k : L^2(\mathbf{R}) \to V_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

ortogonális projekció a következő alakú:

$$P_k f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{kj} \rangle \cdot \varphi_{kj} \qquad (f \in L^2(\mathbf{R})).$$

Mivel

$$\varphi = \varphi_{00} \in V_0 \subset V_1$$

és a $(\varphi_{1j}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $V_1$-ben, ezért

$$\varphi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \varphi_{1j},$$

ahol a $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ldots$ sor konvergenciája $\|.\|$-ban értendő és

$$\alpha_j := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi_{1j}(x)}\, dx = \sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x-j)}\, dx \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Azt kaptuk, hogy az

$$a_j := \sqrt{2} \alpha_j = 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x-j)}\, dx \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

együtthatókkal (ld. Parseval-egyenlőség)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = 2 \cdot \|\varphi\|^2 < +\infty$$

és

$$\varphi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_2(\tau_j \varphi). \tag{8.2.1}$$

A $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ és a $(\varphi_{1j}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormáltságát kihasználva a (8.2.1) egyenlőség alapján

$$\delta_{0n} = \langle \varphi, \tau_n\varphi \rangle = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ \\ 1 & (n = 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Speciálisan

$$1 = \delta_{00} = \langle \varphi, \varphi \rangle = \|\varphi\|^2,$$

tehát

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = 2.$$

Mivel a

$$\tau_n : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R}) \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

leképezés nyilván folytonos lineáris operátor, így

$$\tau_n\varphi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \tau_n(\delta_2(\tau_j\varphi)) \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$

ahol

$$\tau_n(\delta_2(\tau_j\varphi))(x) = \varphi(2x - 2n - j) = \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi)(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j, n \in \mathbf{Z}).$$

Ezért bármely $k, n \in \mathbf{Z}$ esetén

$$\delta_{kn} = \langle \tau_k\varphi, \tau_n\varphi \rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_2(\tau_{2k+j}\varphi), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi) \right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{j-2k} \delta_2(\tau_j\varphi), \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{l-2n} \delta_2(\tau_l\varphi) \right\rangle =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{j-2k}\overline{a_{j-2n}} \cdot \|\delta_2(\tau_j\varphi)\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{j-2k}\overline{a_{j-2n}}.$$

Tehát

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{j-2k}\overline{a_{j-2n}} = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ \\ 2 & (n = k). \end{cases} \tag{8.2.2}$$

Ha itt $n = k = 0$, akkor (ld. fent)

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 = 2.$$

Továbbá ismét a (8.2.1) ún. *skálázási egyenlet* szerint (a Fourier-transzformáció, mint az $L^2(\mathbf{R})$-ről az $L^2(\mathbf{R})$-re képező operátor folytonosságát és linearitását kihasználva) a $\|.\|$-ban konvergens

$$\widehat{\varphi} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_2 \widehat{(\tau_j \varphi)},$$

előállításhoz jutunk, ahol az

$$e_j(t) := e^{-\pi \imath t j} \qquad (t \in \mathbf{R},\, j \in \mathbf{Z})$$

jelölést alkalmazva

$$\varphi, \tau_j \varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

miatt

$$\delta_2 \widehat{(\tau_j \varphi)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2t - j) e^{-2\pi \imath x t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\pi \imath x (y+j)}\, dy = \frac{e^{-\pi \imath x j}}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-2\pi \imath y x/2}\, dy =$$

$$\frac{e^{-\pi \imath x j}}{2} \cdot \widehat{\varphi}(x/2) = \left( \frac{1}{2} e_j \delta_{1/2} \widehat{\varphi} \right)(x) \qquad (x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{Z}).$$

Összefoglalva a fentieket azt mondhatjuk, hogy

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e_j \delta_{1/2} \widehat{\varphi}$$

(a $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ldots$ sorösszeg $\|.\|$-ban értendő).

Az $(e_j/\sqrt{2}, j \in \mathbf{Z})$ (trigonometrikus) rendszer a $[0, 2]$ intervallumon teljes ortonormált rendszer és az előbbiek szerint

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 < +\infty.$$

Ezért egyértelműen van olyan $\omega \in L^2[0,2]$ függvény, amelyre az

$$U_n := \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-n}^{n} a_j e_j \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$\int_0^2 |\omega(x) - U_n(x)|^2 \, dx \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Az ismert Carleson-tétel miatt

$$\omega(x) = \lim_{n \to \infty} U_n(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0,2])$$

is igaz. Mivel az $U_n$ $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegek a 2 szerint periodikusak, ezért egyúttal m.m. $x \in \mathbf{R}$ esetén is létezik a

$$\Psi(x) := \lim_{n \to \infty} U_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e_j(x)$$

sorösszeg. Az így definiált, a 2 szerint periodikus $\Psi$ függvényre

$$\int_0^2 |\Psi(x)|^2 dx = \int_0^2 |\omega(x)|^2 dx < +\infty.$$

Tehát

$$\|\widehat{\varphi} - U_n \delta_{1/2} \widehat{\varphi}\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért egy alkalmas $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal

$$\widehat{\varphi}(t) = \lim_{k \to \infty} U_{n_k}(t) \delta_{1/2} \widehat{\varphi}(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

Az előbb mondottak szerint

$$\Psi(t) = \lim_{n \to \infty} U_n(t) = \lim_{k \to \infty} U_{n_k}(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}),$$

így

$$\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(t/2)\Psi(t) \quad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}) \text{ és } \int_0^2 |\Psi(x)|^2 dx < +\infty. \tag{8.2.3}$$

Ezt, továbbá (ld. (8.1.1)) a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

egyenlőséget felhasználva a $\Psi$ függvény 2 szerinti periodicitása alapján

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+k/2)|^2 \cdot |\Psi(t+k)|^2 =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+k)|^2 \cdot |\Psi(t+2k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+1/2+k)|^2 \cdot |\Psi(t+2k+1)|^2 =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+k)|^2 \cdot |\Psi(t)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+1/2+k)|^2 \cdot |\Psi(t+1)|^2,$$

következésképpen

$$|\Psi(t)|^2 + |\Psi(t+1)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}). \tag{8.2.4}$$

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty.$$

Ekkor a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e_j$$

sor egyenletesen konvergens, így a $\Psi$ függvény folytonos. Ez a helyzet pl., ha a (8.2.1) egyenlőségben legfeljebb véges sok $j$-re igaz az, hogy $a_j \neq 0$. Ekkor a

$$|\Psi(x)|^2 + |\Psi(x+1)|^2 = 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőséghez az alábbiak szerint is eljuthatunk: ui. a (8.2.2) szerint[11]

$$|\Psi(x)|^2 + |\Psi(x+1)|^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{j,l=-\infty}^{+\infty} a_j \overline{a_l} e_{j-l}(1+(-1)^{j-l})\right) =$$

[11] Belátható, hogy a $|\Psi(x)|^2 + |\Psi(x+1)|^2 = 1$ $(x \in \mathbf{R})$ egyenlőségből a (8.2.2) következik.

$$= \frac{1}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_j \overline{a_{j-2l}} e_{2l} = \frac{1}{2}\cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \overline{a_{j-2l}} e_{2l} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_{0l} e_{2l} = 1.$$

Mivel $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, ezért a $\widehat{\varphi}$ is folytonos, más szóval a (8.2.3) mindenütt igaz:

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x/2)}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-\pi \imath x j} = \widehat{\varphi}(x/2)\Psi(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z}). \tag{8.2.5}$$

Ha a (8.2.5) egyenlőséget rekurzíve alkalmazzuk, akkor

$$\lim_{t \to 0} \widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(0)$$

alapján

$$\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(t/2)\Psi(t) = \widehat{\varphi}(t/4)\Psi(t)\Psi(t/2) = \cdots =$$

$$\lim_{k \to +\infty} \prod_{j=0}^{k} \Psi(t/2^j)\widehat{\varphi}(t/2^{k+1}) = \widehat{\varphi}(0)\cdot \prod_{j=0}^{+\infty} \Psi(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

feltéve, hogy az utóbbi végtelen szorzat létezik.

A (8.2.5) formulát speciálisan $x = 0$ esetén alkalmazva[12]

$$\widehat{\varphi}(0) = \widehat{\varphi}(0)\Psi(0) = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j.$$

Mutassuk meg, hogy $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Legyen ehhez a $g \in L^2(\mathbf{R})$ olyan függvény, amelyre $\|g\| > 0$ és

$$\operatorname{supp} \widehat{g} \subset [0, 1].$$

Ekkor a 8.2.1. Tétel szerint

$$\|g\| = \lim_{k \to +\infty} \|P_k g\|,$$

ahol

$$P_k g = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle g, \varphi_{kj} \rangle \cdot \varphi_{kj}$$

[12] Továbbra is feltéve, hogy $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty$.

miatt

$$\|P_k g\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\langle g, \varphi_{kj}\rangle|^2.$$

A Fourier-transzformáció izometrikus tulajdonsága alapján bármely $k \in \mathbf{N}$ indexre

$$\langle g, \varphi_{kj}\rangle = \langle \widehat{g}, \widehat{\varphi}_{kj}\rangle \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ahol

$$\widehat{\varphi}_{kj}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{k/2}\varphi(2^k t - j)e^{-2\pi\imath xt}\,dt =$$

$$2^{-k/2}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{-2\pi\imath x2^{-k}(y+j)}dy = 2^{-k/2}e^{-2\pi\imath xj2^{-k}x}\cdot \widehat{\varphi}(x2^{-k}) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ezért

$$\langle g, \varphi_{kj}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x)2^{-k/2}e^{2\pi\imath xj2^{-k}}\cdot \overline{\widehat{\varphi}(x2^{-k})}\,dx = \int_0^{2^k} \widehat{g}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x2^{-k})}\Theta_{kj}(x)\,dx,$$

ahol

$$\Theta_{kj}(x) := 2^{-k/2}e^{2\pi\imath xj2^{-k}} \qquad (x \in [0, 2^k],\ j \in \mathbf{Z}).$$

Világos, hogy a $(\Theta_{kj}, j \in \mathbf{Z})$ teljes ortonormált rendszer a $[0, 2^k]$-n, ezért a $\langle g, \varphi_{kj}\rangle$ szorzat nem más, mint a

$$\widehat{g}\overline{\delta_{2^{-k}}\widehat{\varphi}}$$

függvény $(-j)$-edik Fourier-együtthatója a $(\Theta_{kj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer szerint. Így a Parseval-egyenlőség alapján

$$\|P_k g\|^2 = \int_0^{2^k} \left|\widehat{g}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x2^{-k})}\right|^2 dx =$$

$$\int_0^1 |\widehat{g}(x)|^2\cdot \left|\widehat{\varphi}(x2^{-k})\right|^2 dx \to |\widehat{\varphi}(0)|^2 \cdot \int_0^1 |\widehat{g}(x)|^2\,dx \qquad (k \to +\infty).^{13}$$

Más szóval

$$\|g\| = |\widehat{\varphi}(0)|\cdot \|\widehat{g}\| = |\widehat{\varphi}(0)|\cdot \|g\|,$$

amiből a $g$-re tett $\|g\| > 0$ kikötés miatt[14]

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$$

[13]Felhasználtuk, hogy $\widehat{\varphi}(x2^{-k}) \to \widehat{\varphi}(0)$ $(k \to +\infty)$ a $[0,1]$-beli $x$-ekre nézve egyenletesen.
[14]Nyilván feltehető, hogy $\widehat{\varphi}(0) > 0$.

már következik.

Tehát

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j = 2,$$

azaz $\Psi(0) = 1$. Figyelembe véve, hogy a $\Psi$ függvény minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén nyilván a $2k$ szerint periodikus, ezért egyúttal

$$\Psi(2k) = 1 \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ez utóbbit és a (8.2.5) egyenlőséget felhasználva teljes indukcióval adódik, hogy

$$\widehat{\varphi}(2^k) = \widehat{\varphi}(1) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. (8.1.2))

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t+k)|^2 \leq 1 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)|^2 \leq 1.$$

Innen

$$\widehat{\varphi}(2^k) = \widehat{\varphi}(1) = 0 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

nyilván következik. Így a (8.2.5)-ben $x = 1$-et írva

$$0 = \widehat{\varphi}(1/2) \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j a_j = 0.$$

Tehát $\widehat{\varphi}(1/2) \neq 0$ esetén

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j a_j = 0.$$

Az előző (8.2.5) egyenlőség alapján bármely $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ választással teljes indukcióval

$$\widehat{\varphi}(2^n k) = \widehat{\varphi}(k).$$

Tudjuk (ld. Riemann–Lebesgue-lemma), hogy

$$\lim_{|t| \to +\infty} \widehat{\varphi}(t) = 0,$$

ezért
$$\widehat{\varphi}(k) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{\varphi}(2^n k) = 0 \qquad (0 \neq k \in \mathbf{Z}).$$

## 8.3. Waveletek szerkesztése

A (8.2.1) skálázási egyenlet segítségével az alábbi módon juthatunk wavelethez:[15]

**8.3.1. Tétel.** *A*
$$\psi := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2(\tau_j \varphi)$$
*függvény wavelet. Az általa meghatározott* $\psi_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ *ortonormált bázisra igaz, hogy*
$$W_k = \overline{\mathcal{L}[\{\psi_{kj} : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Mivel
$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 < +\infty$$
és a
$$(*) \qquad (\sqrt{2}\delta_2(\tau_j\varphi), j \in \mathbf{Z})$$
rendszer ortonormált, ezért a 8.3.1.Tételben szereplő, a $\psi$ függvényt definiáló függvénysor ($\|.\|$-ban) konvergens és $\psi \in L^2(\mathbf{R})$. Könnyen adódik, hogy a $(\tau_j\psi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált:
$$\langle \tau_k\psi, \tau_l\psi\rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \tau_k(\delta_2(\tau_j\varphi)), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \tau_l(\delta_2(\tau_j\varphi)) \right\rangle =$$
$$\sum_{j,r=-\infty}^{+\infty} (-1)^{j+r} \overline{a_{1-j}} a_{1-r} \langle \delta_2(\tau_{2k+j}\varphi), \delta_2(\tau_{2l+r}\varphi)\rangle \qquad (k, l \in \mathbf{Z}).$$
A $(*)$ rendszer ortonormáltságát figyelembe véve itt
$$\langle \delta_2(\tau_{2k+j}\varphi), \delta_2(\tau_{2l+r}\varphi)\rangle = \begin{cases} 0 & (2k+j \neq 2l+r) \\ 1/2 & (2k+j = 2l+r) \end{cases} \qquad (k, l, j, r \in \mathbf{Z}).$$

[15] A jelöléseket illetően ld. 8.2.

Tehát

$$\langle \tau_k\psi, \tau_l\psi\rangle = \frac{1}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2k-2l+2j}\overline{a_{1-j}}a_{1+2l-2k-j} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{a_p}a_{p+2l-2k} = \frac{1}{2}\cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{s+2l}\overline{a_{s+2k}},$$

így a (8.2.2) egyenlőség szerint

$$\langle \tau_k\psi, \tau_l\psi\rangle = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \\ 1 & (k = l). \end{cases}$$

Azt sem nehéz megmutatni, hogy a

$$(\tau_j\psi, \tau_k\varphi, j, k \in \mathbf{Z})$$

„egyesített” rendszer is ortogonális. Ha ui. $m, n \in \mathbf{Z}$, akkor (ld. a (8.2.1) skálázási egyenletet is)

$$\langle \tau_n\varphi, \tau_m\psi\rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j\delta_2(\tau_{2n+j}\varphi), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j\overline{a_{1-j}}\delta_2(\tau_{2m+j}\varphi) \right\rangle =$$

$$\sum_{j,l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l a_j a_{1-l}\langle \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi), \delta_2(\tau_{2m+l}\varphi)\rangle,$$

ahol

$$\langle \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi), \delta_2(\tau_{2m+l}\varphi)\rangle = \begin{cases} 0 & (2n+j \neq 2m+l) \\ \\ 1/2 & (2n+j = 2m+l). \end{cases}$$

Az előbbi összegben ezért csak azokat a $j, l \in \mathbf{Z}$ indexeket kell figyelembe venni, amelyekre

$$j - l = 2m - 2n =: r$$

(rögzített páros szám). Tehát (az $s = r + l$, ill. az $i = r + 1 - s$ helyettesítésekkel)

$$\langle \tau_n\varphi, \tau_m\psi\rangle = \frac{1}{2}\cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l a_{1-l}a_{r+l} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s a_s a_{r+1-s} = \frac{1}{2}\cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i a_{r+1-i} a_i,$$

más szóval

$$\langle \tau_n \varphi, \tau_m \psi \rangle = \frac{1}{2}\cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i a_{r+1-i} a_i = 0.$$

Mutassuk meg, hogy[16]

$$\varphi_{1p} \in \overline{\mathcal{L}[\{\tau_j\varphi, \tau_k\psi \in L^2(\mathbf{R}) : j,k \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (p \in \mathbf{Z}).$$

Ehhez számoljuk ki a

$$\langle \varphi_{1p}, \tau_n\varphi \rangle,\ \langle \varphi_{1p}, \tau_n\psi \rangle \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

együtthatókat:

$$\langle \varphi_{1p}, \tau_n\varphi \rangle = \left\langle \sqrt{2}\delta_2(\tau_p\varphi), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \overline{a_{p-2n}},$$

valamint

$$\langle \varphi_{1p}, \tau_n\psi \rangle = \left\langle \sqrt{2}\delta_2(\tau_p\varphi), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi) \right\rangle =$$

$$\frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}\cdot a_{1-p+2n}.$$

Az előbb belátott ortogonalitás miatt tehát léteznek a ($\|.\|$-ban konvergens)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p-2n}} \tau_n \varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p-2n}} a_j \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p-2n}} a_{l-2n} \delta_2(\tau_l\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p-2n}} a_{l-2n} \delta_2(\tau_l\varphi),$$

továbbá a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^p a_{1-p+2n} \tau_n \psi =$$

[16] Emlékeztetőül (ld. 8.1.) $\varphi_{kj} = 2^{k/2}\delta_2(\tau_j\varphi)$ $(k,j \in \mathbf{Z})$.

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^p a_{1-p+2n} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2(\tau_{2n+j}\varphi) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^p a_{1-p+2n} (-1)^l \overline{a_{2n+1-l}} \delta_2(\tau_l\varphi) =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{p+l} a_{2n+1-p} \overline{a_{2n+1-l}} \delta_2(\tau_l\varphi)$$

összegek. Következésképpen

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{1p}, \tau_n\varphi \rangle \tau_n\varphi + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{1p}, \tau_n\psi \rangle \tau_n\psi =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overline{a_{p-2n}} \tau_n\varphi + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}} \cdot a_{1-p+2n} \tau_n\psi =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p-2n}} a_{l-2n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{p+l} a_{2n+1-p} \overline{a_{2n+1-l}} \right) \delta_2(\tau_l\varphi) =:$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \gamma_l \delta_2(\tau_l\varphi).$$

Ha itt a $p+l$ szám páratlan, akkor könnyen láthatóan $\gamma_l = 0$, ezért

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \gamma_l \delta_2(\tau_l\varphi) = \sum_{l=-\infty,\, l\equiv p \pmod 2}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p+n}} a_{l+n} \sqrt{2} \delta_2(\tau_l\varphi).$$

Legyen

$$l \in \mathbf{Z},\ l \equiv p \pmod 2$$

esetén $2s := l - p$, ekkor a (8.2.2) formula alapján

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{p+n}} a_{l+n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{l-2s+n}} a_{l+n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{m-2s}} a_m = \begin{cases} 0 & (s \neq 0) \\ 1 & (s = 0). \end{cases}$$

Tehát

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_l \delta_2(\tau_l \varphi) = \sqrt{2}\delta_2(\tau_p \varphi) = \varphi_{1p}.$$

Így az eddig mondottak szerint a

$$W := \overline{\{\tau_j \psi \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}}$$

altérben a $(\tau_j \psi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis és $W \perp V_0$, továbbá

$$\delta_2(\tau_j \varphi) \in V_0 \oplus W \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

azaz

$$V_1 \subset V_0 \oplus W.$$

Mivel

$$\tau_j \psi \in V_1 \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért $W \subset V_1$ és

$$V_0 \oplus W \subset V_1.$$

Mindebből adódóan $V_1 = V_0 \oplus W$, amiből $W = W_0$ már világos.

Ezzel a 8.3.1. Tétel valamennyi állítását beláttuk.

Ha az előbbi tételben szereplő $\psi$-től még azt is elvárjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = 0$$

legyen, akkor (feltételezve az alábbiakban, hogy a $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ldots$ összegzés és az $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots$ integrálás felcserélhető)

$$0 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x-j)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \widehat{\varphi}(0) = -\frac{\widehat{\varphi}(0)}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_j}.$$

Ezért $\widehat{\varphi}(0) = 1$ miatt szükséges feltételként kapjuk ismét, hogy

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j a_j = 0.$$

Amennyiben a 8.3.1. Tételbeli $\psi$ wavelet második momentumának a zérus voltát is megköveteljük, azaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\,dx = 0$$

is fennálljon, akkor az előbbiekhez hasonlóan a $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ feltétel mellett

$$0 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(2x-j)\,dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (t+j)\varphi(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,dt + \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j\overline{a_{1-j}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt =$$

$$\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j\overline{a_{1-j}} = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{1-j}(1-j)\overline{a_j} =$$

$$\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j\overline{a_j} - \frac{\widehat{\varphi}(0)}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_j} = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j\overline{a_j}.$$

Innen

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j a_j = 0$$

következik.

Tehát a 8.3.1. Tételből következően a $(\psi_{kj},\ j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis a $W_k$-ban $(k \in \mathbf{Z})$.[17] Az is belátható, hogy ha a $\varphi$ függvény $\operatorname{supp}\varphi$ tartója kompakt, akkor a skálázási egyenletben (ld. (8.2.1)) legfeljebb véges sok tag kivételével az összeg tagjai nullák. Valóban, ha valamilyen $0 < N \in \mathbf{N}$ esetén

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [-N, N],$$

[17] Mivel $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} W_k$, ezért innen már következik, hogy a $\psi_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázis az $L^2(\mathbf{R})$-ben, azaz, hogy a $\psi$ wavelet.

akkor

$$\operatorname{supp} \delta_2(\tau_j\varphi) \subset [(j-N)/2, (j+N)/2] \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

miatt az

$$a_j := 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(2x-j)}\, dx \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

(ld. 8.5. x) megjegyzés) együtthatók kiszámításakor csak azokra a $j$ indexekre lehet $a_j \neq 0$, amelyekre

$$(-N, N) \cap ((j-N)/2, (j+N)/2) \neq \emptyset.$$

Tehát, ha

$$-N < j < 3N, \text{ vagy } -3N < j < N.$$

Ilyen $j \in \mathbf{Z}$ szám viszont véges sok van.

A waveletek szerkesztését illetően a (8.2.1) skálázási egyenleten alapuló 8.3.1. Tételhez képest másképpen is eljárhatunk. Ebből a szempontból kulcskérdés a következő: legyen

$$\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$$

és a $V_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ az általa generált multirezolúció (ld. 8.1. az ottani jelölésekkel). Tegyük fel, hogy $f \in W_0$, ahol a $W_0 \subset L^2(\mathbf{R})$ alteret a

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

ortogonális direkt összeg definiálja. A kérdés most már az, hogy milyen feltételek mellett lesz az $f$ wavelet? Mivel $f \in V_1$ és $f \perp V_0$, ezért

$$\langle f, \tau_j\varphi \rangle = 0 \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Más szóval (a Fourier-transzformáció izometrikus tulajdonságát is kihasználva)

$$0 = \langle f, \tau_j\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{\tau_j\varphi}(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)e^{2\pi\imath jx}\overline{\widehat{\varphi}(x)}\, dx =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} \widehat{f}(x)e^{2\pi\imath jx}\overline{\widehat{\varphi}(x)}\, dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{2\pi\imath jx}\widehat{f}(x+l)\overline{\widehat{\varphi}(x+l)}\, dx.$$

Mivel a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| e^{2\pi\imath jx} \cdot \widehat{f}(x+l)\overline{\widehat{\varphi}(x+l)} \right| dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} \left| \widehat{f}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)} \right| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}\right| dx \leq \|\widehat{f}\|\cdot \|\widehat{\varphi}\| = \|f\|\cdot \|\varphi\| < +\infty,$$

ezért az

$$F(x) := \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x+l)\overline{\widehat{\varphi}(x+l)} \qquad (x \in [0,1])$$

függvény $L^1[0,1]$-beli. Következésképpen (a Lebesgue-féle konvergencia-tételt is felhasználva) minden $j \in \mathbf{Z}$ indexre

$$0 = \langle f, \tau_j\varphi\rangle = \int_0^1 \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x+l)\overline{\widehat{\varphi}(x+l)}\right) e^{2\pi\imath jx}dx = \int_0^1 F(x)e^{2\pi\imath jx}dx,$$

ahol az utóbbi integrál nem más, mint az $F$ függvény $(-j)$-edik trigonometrikus Fourier-együtthatója. Ezért

$$F(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x+l)\overline{\widehat{\varphi}(x+l)} = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]).$$

Ugyanakkor $f \in V_1$ miatt a (8.2.1) skálázási egyenlethez hasonlóan alkalmasan választott $\alpha_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^2 < +\infty$$

és ($\|.\|$-ban konvergens sorként)

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j\delta_2(\tau_j\varphi).$$

Innen a (8.2.3)-beli

$$\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(t/2)\Psi(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

egyenlőséghez vezető úttal analóg módon jutunk az

$$\widehat{f}(t) = \widehat{\varphi}(t/2)\Theta(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

egyenlőséghez, ahol

$$\Theta := \frac{1}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_j$$

és
$$\int_0^2 |\Theta(t)|^2\, dt < +\infty.$$
Mindezt a fenti
$$F(x) = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1])$$
egyenlőségbe behelyettesítve
$$0 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Theta(t+l)\widehat{\varphi}(t/2+l/2)\overline{\Psi(t+l)\widehat{\varphi}(t/2+l/2)} =$$
$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+l)|^2 \cdot \Theta(t+2l)\overline{\Psi(t+2l)}+$$
$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+1/2+l)|^2 \cdot \Theta(t+1+2l)\overline{\Psi(t+1+2l)} =$$
$$\Theta(t)\overline{\Psi(t)}\cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+l)|^2 + \Theta(t+1)\overline{\Psi(t+1)}\cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}((t+1)/2+l)|^2 =$$
$$\Theta(t)\overline{\Psi(t)} + \Theta(t+1)\overline{\Psi(t+1)} \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$
(ui. (ld. (8.1.1))
$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(y+l)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } y \in \mathbf{R})).$$

Geometriailag a következőt mondhatjuk: a (2 dimenziós)
$$(\Theta(t), \Theta(t+1))$$
vektor merőleges (a $\mathbf{C}^2$ komplex síkon „megszokott” skaláris szorzás értelmében) a
$$(\Psi(t), \Psi(t+1))$$
vektorra. Mivel (ld. (8.2.4))
$$|\Psi(t)|^2 + |\Psi(t+1)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}),$$
azaz m.m. $t \in \mathbf{R}$ esetén
$$(\Psi(t), \Psi(t+1)) \neq (0,0),$$

ezért egy alkalmas, a 2 szerint periodikus

$$\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

komplex függvénnyel

$$(\Theta(t), \Theta(t+1)) = \alpha(t) \cdot \left(\overline{\Psi(t+1)}, -\overline{\Psi(t)}\right) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

Írjunk az utóbbi egyenlőségben a $t$ helyett $(t+1)$-et, ekkor

$$(\Theta(t+1), \Theta(t)) = \alpha(t+1) \cdot (\overline{\Psi(t)}, -\overline{\Psi(t+1)}) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

Az így kapott utolsó két egyenlőséget egybevetve jutunk a

$$\Theta(t) = \alpha(t)\overline{\Psi(t+1)} \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}),$$

valamint az

$$\alpha(t) = -\alpha(t+1) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

összefüggéshez. Legyen

$$h(t) := e^{-\pi\imath t} \cdot \alpha(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ekkor a $h$ periodikus az 1 szerint és

$$\widehat{f}(t) = e^{\pi\imath t} \cdot h(t)\overline{\Psi(t+1)}\widehat{\varphi}(t/2) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

Ha azt szeretnénk, hogy a $(\tau_j f, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált legyen, akkor (a korábban a $(\tau_j \varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszerrel kapcsolatban mondottakkal (ld. (8.1.1)) analóg módon) azt kell biztosítanunk, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(t+k)\right|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

teljesüljön. Az előbbiek szerint itt (a (8.2.4)-et is felhasználva)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(t+k)\right|^2 = |h(t)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Psi(t+k+1)|^2 \cdot |\widehat{\varphi}(t/2+k/2)|^2 =$$

$$|h(t)|^2 \cdot \left(|\Psi(t+1)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t/2+k)|^2 + |\Psi(t)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}((t+1)/2+k)|^2\right) =$$

$$= |h(t)|^2 \cdot \left( |\Psi(t+1)|^2 + |\Psi(t)|^2 \right) = |h(t)|^2 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}),$$

így

$$|h(t)| = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

szükséges ahhoz, hogy a $(\tau_j f, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált legyen. Nem nehéz meggondolni, hogy az előbb mondottak meg is „fordíthatók”, azaz

$$|h(t)| = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

elégséges is ahhoz, hogy a $(\tau_j f, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált legyen. Sőt, ekkor a $(\tau_j f, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázis a $W_0$-ban.

Igaz tehát a következő állítás:[18]

**8.3.2. Tétel.** *Legyen a $(V_k, k \in \mathbf{Z})$ a $\varphi$ skálázási függvény által generált multirezolúció és $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Ekkor a valamilyen 1 szerint periodikus, a*

$$|h(t)| = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

*feltételnek eleget tevő $h$ függvénnyel fennálló*

$$\widehat{\Omega}(t) = e^{\pi\imath t} \cdot h(t)\overline{\Psi(t+1)}\widehat{\varphi}(t/2) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R})$$

*egyenlőség szükséges és elégségez ahhoz, hogy az $\Omega \in W_0$ függvény olyan wavelet legyen, amelyre*

$$V_l = \overline{\mathcal{L}[\{\Omega_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : k, j \in \mathbf{Z}, k < l\}]} \qquad (l \in \mathbf{Z}).$$

Ha pl.

$$h(t) := -e^{-2\pi\imath t} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\widehat{\Omega}(t) = -\frac{e^{-\pi\imath t}}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{a_j} e^{\pi\imath j(t+1)} \cdot \widehat{\varphi}(t/2) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^{j+1} \overline{a_j} \frac{1}{2} e^{\pi\imath(j-1)t} \cdot \widehat{\varphi}(t/2) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

[18] Az eddig is használt jelölésekkel.

Innen

$$\widehat{\Omega}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \frac{1}{2} e^{-\pi \imath j t} \cdot \widehat{\varphi}(t/2) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2 \widehat{(\tau_j \varphi)}(t),$$

ezért

$$\Omega = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2(\tau_j \varphi),$$

ami a 8.3.1. Tételben mondott wavelet.

## 8.4. Megjegyzések

i) Emlékeztetünk a $(\Phi_k, k \in \mathbf{Z})$ (komplex) *trigonometrikus rendszerre*: ha

$$\Phi(x) := e^{2\pi \imath x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor a

$$\Phi_k(t) := \Phi(kt) \qquad (t \in [0,1],\ k \in \mathbf{Z})$$

rendszer ortonormált bázist alkot az $L^2[0,1]$-ben.[19] A waveletekből származtatott $\psi_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázisokkal szemben tehát a trigonometrikus rendszert ugyan egyetlen „generátor-függvényből”, de pusztán dilatáció útján kapjuk.

ii) A transzláció alkalmazása révén a waveletek lokális tulajdonságai lényegesen jobbak, mint a trigonometrikus rendszeréi. Ezzel kapcsolatban elég csupán arra utalni, hogy egy $f \in L^2[0,1]$ függvényt elég egy „pici” intervallumon megváltoztatni, ennek következtében az összes (trigonometrikus) Fourier-együtthatója megváltozhat. Ha viszont a Haar-wavelet (ld. 8.1.) esetén az $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ függvények pl. a $[3/8, 1/2]$ intervallumon kívül egybeesnek, akkor

$$\frac{j}{2^k} \notin [3/8, 1/2] \qquad (3 \le k \in \mathbf{N})$$

esetén

$$\langle f, \chi_{kj} \rangle = \langle g, \chi_{kj} \rangle \qquad (j = 0, ..., 2^k - 1).$$

[19] Az $L^2[0,1]$-beli „szokásos” skaláris szorzásra nézve.

iii) Tegyük fel, hogy valamilyen $\omega \in L^2(\mathbf{R})$, a 2 szerint periodikus függvénnyel az

$$\Omega(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j)$$

végtelen szorzat m.m. $t \in \mathbf{R}$ helyen konvergens, akkor az ilyen $t$-kre nyilván

$$(*) \qquad \Omega(t) = \omega(t)\Omega(t/2).$$

Ha még $\Omega \in L^2(\mathbf{R})$ is igaz, akkor van olyan $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$, amellyel $\widehat{\varphi} = \Omega$. Ezért a $(*)$ egyenlőség bizonyos esetekben módot ad a $\varphi$ függvény előállítására. Nem nehéz belátni, hogy ha $\omega(0) = 1$, az $\omega$ folytonos és Lipschitz-feltételnek tesz eleget a 0-ban:

$$|\omega(t) - \omega(0)| \leq q \cdot |t| \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(alkalmas, a $t$-től független $q < +\infty$ állandóval), akkor a fenti $\Omega$ létezik és folytonos az $\mathbf{R}$-en. Ekkor ui.

$$\prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + (\omega(t/2^j) - 1)) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol az

$$f_j(t) := \omega(t/2^j) - 1 \qquad (t \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{N})$$

jelöléssel bármely $r > 0$ esetén

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(t)| \leq q \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|}{2^j} = 2q|t| \leq 2qr \qquad (t \in [-r, r]).$$

Tehát a $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ függvénysor a $[-r, r]$ intervallumon abszolút (és egyenletesen) konvergens. Ezért (a végtelen szorzatokra vonatkozó ismert alaptételek miatt) a

$$\prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j)$$

végtelen szorzat is egyenletesen konvergens a $[-r, r]$-en, amiből az $\Omega$-ról az előbb mondottak már következnek.

iv) Tehát (ld. (8.2.3)) a (8.2.1) skálázási egyenlet következményeként

$$\widehat{\varphi} = \Psi \delta_{1/2} \widehat{\varphi},$$

ahol a $\Psi$ periodikus a 2 szerint és

$$\int_0^2 |\Psi(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Gondoljuk meg, hogy mindez „visszafelé" is igaz: ha valamilyen, a 2 szerint periodikus $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$\widehat{\varphi} = g \delta_{1/2} \widehat{\varphi}$$

és

$$\int_0^2 |g(x)|^2 \, dx < +\infty,$$

akkor a $\varphi$-re igaz a (8.2.1) egyenlet. Ui. a $g$-t a $[0, 2]$ intervallumon fejtsük (trigonometrikus) Fourier-sorba az $e_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ rendszer (ld. 8.2.) szerint:

$$g(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e^{-\pi \imath j x} \qquad (x \in [0, 2]),$$

ahol az $\alpha_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatókra

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^2 < +\infty$$

és a $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ldots$ összeg az $L^2[0, 2]$ tér normájában értendő, azaz

$$\int_0^2 \left| g(x) - \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j e^{-\pi \imath j x} \right|^2 dx \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Legyen

$$\eta := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2\alpha_j \delta_2(\tau_j \varphi) \; (\in L^2(\mathbf{R})),$$

ekkor a (8.2.3)-hoz vezető meggondolásokkal analóg módon kapjuk, hogy

$$\widehat{\eta} = g \delta_{1/2} \widehat{\varphi}.$$

Így $\widehat{\varphi} = \widehat{\eta}$, amiből a Fourier-transzformáció injektivitása alapján

$$\eta(x) = \varphi(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

azaz a (8.2.1) egyenlőség következik.

v) Tegyük fel, hogy alkalmas $\alpha > 1$, $C > 0$ paraméterekkel

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy

$$|\varphi(x)| \leq C \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

valamint bármely $1 \leq p < +\infty$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p\, dx \leq C^p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{p\alpha}} =$$

$$2C^p \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^{p\alpha}} = \frac{2}{p\alpha - 1} < +\infty.$$

Ezért minden $1 \leq p \leq +\infty$ „kitevőre” $\varphi \in L^p(\mathbf{R})$. Mutassuk meg, hogy az

$$a_j := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(2x-j)\, dx \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

együtthatókra valamilyen $C_\alpha > 0$ konstanssal

$$|a_j| \leq \frac{C_\alpha}{|j|^\alpha} \qquad (0 \neq j \in \mathbf{Z}).$$

Legyen ui. $j > 0$ (a $j < 0$ eset analóg módon tárgyalható), ekkor

$$a_j = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\varphi(2x-j)\, dx + \int_0^{j/4} \varphi(x)\varphi(2x-j)\, dx +$$

$$\int_{j/4}^{j} \varphi(x)\varphi(2x-j)\, dx + \int_j^{+\infty} \varphi(x)\varphi(2x-j)\, dx =:$$

$$a_{j1} + a_{j2} + a_{j3} + a_{j4}.$$

Ha $-\infty < x \leq 0$, akkor

$$|2x-j| = j - 2x \geq j,$$

így

$$|a_{j1}| \le C^2 \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^\alpha (1+j-2x)^\alpha} \le \frac{C^2}{j^\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^\alpha} = \frac{C^2}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{j^\alpha}.$$

A $0 \le x \le j/4$ esetben

$$-j \le 2x - j \le -j/2,$$

tehát $|2x-j| \ge j/2$ és

$$|a_{j2}| \le C^2 \cdot \int_0^{j/4} \frac{dx}{(1+x)^\alpha (1+|2x-j|)^\alpha} \le$$

$$\frac{C^2 2^\alpha}{j^\alpha} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = \frac{C^2 2^\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{j^\alpha}.$$

Legyen most $j/4 \le x \le j$, más szóval

$$-j/2 \le 2x - j \le j.$$

Ekkor

$$|a_{j3}| \le C^2 \cdot \int_{j/4}^{j} \frac{dx}{(1+x)^\alpha (1+|2x-j|)^\alpha} \le$$

$$\frac{C^2 4^\alpha}{j^\alpha} \cdot \int_{j/4}^{j} \frac{dx}{(1+|2x-j|)^\alpha} = \frac{C^2 4^\alpha}{j^\alpha} (I_{j1} + I_{j2}),$$

ahol

$$I_{j1} := \int_{j/4}^{j/2} \frac{dx}{(1+j-2x)^\alpha} = \frac{1}{2(\alpha-1)} \left(1 - \frac{1}{(1+j/2)^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{2(\alpha-1)},$$

továbbá

$$I_{j2} := \int_{j/2}^{j} \frac{dx}{(1+2x-j)^\alpha} = \frac{1}{2(\alpha-1)} \left(1 - \frac{1}{(j+1)^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{2(\alpha-1)}.$$

Tehát

$$|a_{j3}| \le \frac{C^2 4^\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{j^\alpha}.$$

Végül, ha $x \ge j$, akkor

$$2x - j \ge j,$$

következésképpen

$$|a_{j4}| \leq C^2 \cdot \int_j^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha (1+2x-j)^\alpha} \leq \frac{C^2}{j^\alpha} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = \frac{C^2}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{j^\alpha}.$$

Összefoglalva mindezt azt kaptuk, hogy a

$$C_\alpha := \frac{C^2}{\alpha-1} \cdot (2 + 2^\alpha + 4^\alpha)$$

jelöléssel

$$|a_j| \leq \frac{C_\alpha}{j^\alpha} \qquad (0 \neq j \in \mathbf{Z}).$$

vi) Ha tehát a $\varphi$ skálázási függvény (ld. 8.2.) eleget tesz az v) megjegyzésben mondott feltételeknek, akkor

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty.$$

vii) Legyen $x \in \mathbf{R}$ és a (8.2.5)-beli $\varphi$ függvénnyel

$$g(t) := \varphi(x-t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy a $\varphi$-re tett feltétel miatt $g \in L^1(\mathbf{R})$, ezért a

$$G(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t+k) \qquad (t \in [0,1])$$

függvényre $G \in L^1[0,1]$ triviálisan igaz. Számoljuk ki a $G$ függvény (trigonometrikus) Fourier-együtthatóit: $j \in \mathbf{Z}$ esetén

$$\int_0^1 G(t) e^{-2\pi \imath j t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 g(t+k) e^{-2\pi \imath j t} dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 g(t+k) e^{-2\pi \imath j (t+k)} dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} g(t)e^{-2\pi\imath jt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi\imath jt}dt = \widehat{g}(j).^{20}$$

A $\widehat{g}(j)$ Fourier-transzformáltakról a következőket mondhatjuk:

$$\widehat{g}(j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)e^{-2\pi\imath jt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-2\pi\imath j(x-t)}dt =$$

$$e^{-2\pi\imath xj} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-2\pi\imath(-j)t}dt = e^{-2\pi\imath xj} \cdot \widehat{\varphi}(-j) \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Amennyiben tehát a $G$ függvényt a 0-ban a Fourier-sora, azaz a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(j)e^{2\pi\imath jt}$$

sor előállítja:

$$G(0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(j),$$

akkor a fentiek szerint

$$G(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\imath xj} \cdot \widehat{\varphi}(-j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\imath xj} \cdot \widehat{\varphi}(j) = \widehat{\varphi}(0) = 1.$$

Figyelembe véve a $g$ függvény definícióját, innen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) = 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

adódik.[21]

[20] Itt az első egyenlőséget a Lebesgue-féle konvergencia-tétel biztosítja, hiszen nyilván $G \in L^1[0,1]$ és $\left|\sum_{k=-n}^{n} g(t+k)e^{-2\pi\imath jt}\right| \le G(t) \quad (n \in \mathbf{N},\, t \in \mathbf{R})$.

[21] Ld. a trigonometrikus sorok elméletéből jól ismert Poisson-szummációs formulát.

viii) Tegyük fel a vii) megjegyzésben, hogy a $\varphi$ korlátos változású (is) és

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(z+0) + \varphi(z-0)}{2} \qquad (z \in \mathbf{R}).$$

Ekkor belátható, hogy a vii)-beli $g$ függvényre igaz a *Poisson-formula,* azaz teljesül a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) = 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség.

ix) Legyen pl. az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény (Lebesgue-)integrálható, folytonosan deriválható, a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(x+n) \qquad (x \in [0,1))$$

sor pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $x_0 \in [0,1)$, hogy a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x_0+n)$$

sor konvergens, akkor tetszőleges $b > 0$ mellett

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(bn) = \frac{1}{b} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(b^{-1}n).$$

x) Foglaljuk össze a (8.2.1) skálázási egyenlet

$$a_j := 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(2x-j)}dx \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

együtthatóira a fentiekben (ld. 8.3.) nyert összefüggéseket:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 = 2,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty \implies \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j = 2,$$

$$\widehat{\varphi}(1/2) \neq 0 \implies \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j a_j = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\,dx = 0 \implies \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j a_j = 0.$$

xi) Legyen pl. a 8.3.1. Tételben $\varphi := \chi_{[0,1)}$, ekkor

$$a_j = 2\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(2x-j)\,dx =$$

$$2\cdot \int_0^1 \chi_{[0,1)}(2x-j)\,dx = \begin{cases} 0 & (j \notin \{0,1\}) \\ \\ 1 & (j \in \{0,1\}) \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Tehát (ami egyébként is nyilvánvaló) a skálázási egyenlet

$$\varphi = \delta_2\varphi + \delta_2(\tau_1\varphi)$$

alakú. A 8.3.1. Tételnek megfelelő

$$\psi = \delta_2\varphi - \delta_2(\tau_1\varphi) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$$

wavelet pedig nem más, mint a $\chi$ Haar-wavelet (ld. 8.1.). Világos, hogy most a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|$$

összeg véges és

$$\widehat{\varphi}(1/2) = \int_0^1 e^{-\pi\imath t}dt = \frac{2}{\pi\imath} \neq 0,$$

valamint a x) megjegyzésbeli első három egyenlőség triviálisan igaz. Ugyanakkor a negyedik egyenlőség nem, de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\,dx = \int_0^{1/2} x\,dx - \int_{1/2}^1 x\,dx = -\frac{1}{4} \neq 0$$

miatt a Haar-wavelet második momentuma nem is zérus.

xii) A 8.3.1. Tétel kapcsán láttuk, hogy a $(\tau_j\psi, \tau_k\varphi,\ j,k \in \mathbf{Z})$ „egyesített" rendszer ortogonális. Tekintettel a (8.2.1) skálázási egyenletre és a $\psi$ waveletnek a 8.3.1. Tételbeli alakjára, a most idézett „egyesített" ortogonalitás mögött az alábbi absztrakt tény húzódik meg: ha valamilyen $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-térben adott az $e_n \in X \quad (n \in \mathbf{Z})$ elemekből álló ortonormált rendszer, és az $\alpha_n \quad (n \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty,$$

akkor az

$$x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n,\ y := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \overline{\alpha_{p-n}} e_n \in X$$

elemek minden páratlan $p \in \mathbf{Z}$ esetén ortogonálisak egymásra. Ti. az $m := p-n$ helyettesítéssel

$$q := \langle x, y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \alpha_{p-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{p-m} \alpha_m \alpha_{p-m} =$$

$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \alpha_m \alpha_{p-m} = -q.$$

xiii) Tegyük fel (ld. v)), hogy

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor a 8.3.1. Tételbeli $\psi$ waveletre $\psi \in L^1(\mathbf{R})$ is teljesül. Ui. (ld. a most idézett megjegyzést)

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty,$$

valamint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{1-j}\varphi(2x-j)|\, dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{1-j}| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(2x-j)|\, dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|\, dy < +\infty.$$

Tehát a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \varphi(2x-j)$$

sor m.m. $x \in \mathbf{R}$ esetén (abszolút) konvergens. Mivel alkalmas $(\nu_k, k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal

$$\sum_{j=-\nu_k}^{\nu_k} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \varphi(2x-j) \to \psi(x) \qquad (k \to +\infty)$$

m.m. $x \in \mathbf{R}$ helyen igaz, ezért

$$\psi(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \varphi(2x-j) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Más szóval a 8.3.1. Tételbeli végtelen sor nem csak $\|.\|$-ban, hanem majdnem mindenütt pontonként is konvergens.

xiv) Ha a xiii) megjegyzésben $\alpha > 2$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot |\psi(x)| \, dx < +\infty$$

is igaz. Ui. (ld. v))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot |\psi(x)| \, dx \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{1-j}| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot |\varphi(2x-j)| \, dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{1-j}| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y+j| \cdot |\varphi(y)| \, dy \leq$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{1-j}| \left( |j| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)| \, dy + \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot |\varphi(y)| \, dy \right) \leq$$

$$\frac{C_\alpha}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)| \, dy \cdot \sum_{0 \neq j=-\infty}^{+\infty} \frac{|j|}{|j|^\alpha} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot |\varphi(y)| \, dy \leq$$

$$\leq \frac{CC_\alpha}{2}\cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha}\cdot \sum_{0\neq j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|j|^{\alpha-1}} + \frac{C}{2}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|\cdot \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^\alpha} dx =$$

$$\frac{CC_\alpha}{\alpha-1}\cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{\alpha-1}} + \frac{C}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < +\infty.$$

# 9. fejezet

# Speciális waveletek

## 9.1. Daubechies-wavelet

A $\chi$ Haar-waveletre (ld. 8.1.) triviálisan igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x)\, dx = 0.$$

Az általa meghatározott multirezolúciós alterekben (ld. 8.1.) diadikus intervallumokon (ld. 2.3.) állandó függvények játsszák a főszerepet. Ez a magyarázata annak, hogy pl. lokálisan konstans függvények approximációjára jól használható a $\chi_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ Haar-wavelet-bázis. Folytonos függvények közelítése céljából viszont javíthatók a wavelet-bázisok approximációs tulajdonságai, ha a $\psi$ waveletnek nem csupán az első momentuma nulla, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = 0,$$

hanem a második is:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\, dx = 0.$$

Az ilyen tulajdonságú ún. *Daubechies-waveletek* létezéséről szól a

**9.1.1. Tétel.** *Van olyan folytonos, kompakt tartójú $\varphi$ függvény, hogy $\widehat{\varphi}(0) = 1$ és a $\varphi$ által generált multirezolúcióból a 8.3.1. Tétel szerint származtatott $\psi$ wavelet folytonos, kompakt tartójú és*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\, dx = 0.$$

A (ld. (8.2.1))

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \varphi(2x - j) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

skálázási egyenlet jobb oldala tehát most minden $x \in \mathbf{R}$ helyen véges sok tagú összeg. A 8.3.1. Tétel után mondottak szerint (ld. 8.4. x) megjegyzés) az előbbi egyenlőségben szereplő $a_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ együtthatókra

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j = 2$$

és

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j a_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j j a_j = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek (könnyen ellenőrizhetően) egy megoldása:

$$a_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4},\ a_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4},\ a_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4},\ a_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4},$$

$$a_j = 0 \qquad (\mathbf{Z} \ni j \neq 0, 1, 2, 3).$$

Következésképpen

$$\varphi = a_0 \delta_2 \varphi + a_1 \delta_2(\tau_1 \varphi) + a_2 \delta_2(\tau_2 \varphi) + a_3 \delta_2(\tau_3 \varphi).$$

A $\varphi$ függvényre így kapott egyenlet megoldása nem egyszerű. Tekintsük ehhez először is a $\varphi_0 := \chi_{[0,1)}$ függvényt és legyen

$$\varphi_{n+1} := a_0 \delta_2 \varphi_n + a_1 \delta_2(\tau_1 \varphi_n) + a_2 \delta_2(\tau_2 \varphi_n) + a_3 \delta_2(\tau_3 \varphi_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Belátható, hogy ezzel a rekurzióval[1] definiált $(\varphi_n)$ függvénysorozat egyenletesen és $\|.\|$-ban konvergál a $\varphi$-hez és igaz a

[1] Ún. *cascade-algoritmus.*

**9.1.2. Tétel.** *Az előző tételbeli ún. Daubechies-féle $\varphi$ skálázási függvényre az alábbi állítások teljesülnek:*

$1^o$ $\operatorname{supp} \varphi = [0, 3]$;

$2^o$ $\|\varphi\| = 1$ *és* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$;

$3^o$ *a* $\psi := -a_0\delta_2(\tau_1\varphi) + a_1\delta_2\varphi - a_2\delta_2(\tau_{-1}\varphi) + a_3\delta_2(\tau_{-2}\varphi)$ *függvény folytonos wavelet és* $\operatorname{supp} \psi = [-1, 2]$;

$4^o$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\, dx = 0$;

$5^o$ *a* $\tau_j\varphi, \tau_j\psi$ $(j \in \mathbf{Z})$ *függvények ortonormált rendszert alkotnak.*

Az itt szereplő $\varphi$ függvény néhány helyettesítési értéke:

$$\varphi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \varphi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi(1/2) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\ ,\ \varphi(3/2) = 0,\ \varphi(5/2) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

A 9.1.2. Tétel $4^o$ pontja szerint tehát a Daubechies-wavelet első két momentuma zérus.

Legyen a $\varphi$ a fenti Daubechies-féle skálázási függvény és

$$\varphi_{kj}(x) := 2^{k/2}\varphi(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ k, j \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor bármely

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

folytonos függvény, $k \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{Z}$ és $x \in [j/2^k, (j+1)/2^k]$ esetén

$$\langle f, \varphi_{kj}\rangle = 2^{k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(2^k t - j)\, dt = 2^{-k/2} \cdot \int_0^3 f\left(\frac{z+j}{2^k}\right)\varphi(z)\, dz$$

és így $\int_0^3 \varphi(t)\, dt = 1$ miatt

$$\left| f(x) - 2^{k/2}\langle f, \varphi_{kj}\rangle \right| = \left| \int_0^3 \left( f(x) - f\left(\frac{z+j}{2^k}\right)\right)\varphi(z)\, dz \right|.$$

Jelöljük $\omega(f; q)$-val $(q > 0)$ az $f$ függvény „szokásos” folytonossági modulusát:

$$\omega(f; q) := \sup\{|f(z) - f(y)| : z, y \in \mathbf{R}, |z - y| \le q\}.$$

Világos, hogy $z \in [0,3]$ esetén az előbbi $k, j \in \mathbf{Z}$ indexekre és $x \in \mathbf{R}$ pontra

$$|x - (z+j)/2^k| \le \frac{3}{2^k},$$

ezért

$$\Big| f(x) - 2^{k/2}\langle f, \varphi_{kj}\rangle \Big| \le \omega(f; 3 \cdot 2^{-k}) \cdot \int_0^3 |\varphi(t)|\, dt,$$

ahol a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt

$$\int_0^3 |\varphi(t)|\, dt \le \left(\int_0^3 |\varphi(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^3 1\, dt\right)^{1/2} = \sqrt{3}.$$

Innen tehát az

$$x \in [j/2^k, (j+1)/2^k] \qquad (k \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{Z})$$

helyeken

$$\Big| f(x) - 2^{k/2}\langle f, \varphi_{kj}\rangle \Big| \le \sqrt{3} \cdot \omega(f; 3 \cdot 2^{-k}) \tag{9.1.1}$$

következik.

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és

$$D_n : L^2(\mathbf{R}) \to V_n$$

a

$$V_n := \overline{\mathcal{L}[\{\varphi_{nk} \in L^2(\mathbf{R}) : k \in \mathbf{Z}\}]}$$

altérre való ortogonális projekció:

$$D_n f := \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{nk}\rangle \varphi_{nk} \qquad (f \in L^2(\mathbf{R})).$$

Ha a $\psi$ jelöli a 9.1.1. Tétel szerinti (Daubechies-)waveletet és

$$d_{kj} := \psi_{kj} \qquad (k, j \in \mathbf{Z}),$$

akkor

$$d_{kl} \in V_k \subset V_{k+1} \subset V_n \qquad (l \in \mathbf{Z},\ k \le n-1)$$

miatt

$$D_n f = D_0 f + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, d_{kj}\rangle d_{kj} \qquad (f \in L^2(\mathbf{R})),$$

ahol

$$D_0 f := \sum_{j\in\mathbf{Z}} \langle f, d_{0j}\rangle d_{0j} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \langle f, \tau_j\varphi\rangle \tau_j\varphi.$$

A (9.1.1) becslést és a

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \varphi_{kj} = 2^{k/2} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

egyenlőséget (ld. 8.4. vii) megjegyzés) felhasználva tetszőleges

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

egyenletesen folytonos függvényről a következőt mondhatjuk:

$$|f(x) - D_n f(x)| = \left| \sum_{j\in\mathbf{Z}} f(x)\varphi(2^n x - j) - \sum_{j\in\mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{nj}\rangle 2^{n/2} \varphi(2^n x - j) \right| \le$$

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |f(x) - 2^{n/2}\langle f, \varphi_{nj}\rangle| \cdot |\varphi(2^n x - j)| \le$$

$$\sqrt{3}\cdot \omega(f; 3\cdot 2^{-n}) \cdot \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\varphi(2^n x - j)| \le 3\sqrt{3}\cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \omega(f; 3\cdot 2^{-n}).$$

(Felhasználtuk, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb három olyan $j \in \mathbf{Z}$ egész szám létezik, amelyre $\varphi(2^n x - j) \neq 0$.) Mivel

$$\omega(f; 3\cdot 2^{-n}) \to 0 \qquad (n \to 0),$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \|f - D_n\|_\infty = 0.$$

Ha az $f$ nem mindenütt folytonos, hanem csak mondjuk valamilyen $a \in \mathbf{R}$ és $r > 0$ esetén az $[a - r, a + r]$ intervallumon, akkor analóg módon kapjuk, hogy a $D_n f$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat minden $0 < \varepsilon < r$ mellett egyenletesen konvergál az $f$-hez az $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumon.

Legyen most

$$f(x) := \begin{cases} x & (|x| < \pi) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus (-\pi, \pi)). \end{cases}$$

Az $f$ függvény trigonometrikus Fourier-sora a következő:

$$2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin(kx).$$

Ismert, hogy

$$f(x)=2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin(kx)\qquad(|x|\le\pi),$$

de a konvergencia nagyon „lassú”. Még a szakadási helyektől „távoli” pontokban is, pl.:

$$\frac{\pi}{2}=f(\pi/2)=2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1},$$

de ha

$$S_n:=2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\qquad(0<n\in\mathbf{N}),$$

akkor mondjuk a

$$|\pi/2-S_n|<10^{-6}$$

pontosság eléréséhez $n\ge 500000$ szükséges:

$$|\pi/2-S_{500000}|<10^{-6}.$$

Ha viszont a bevezetőben említett

$$\chi:=\chi_{[0,1/2)}-\chi_{[1/2,1)}$$

Haar-waveletből indulunk ki (ld. 8.1.):

$$\chi_{kj}(x):=\chi(2^k x-j)\qquad(x\in\mathbf{R},\ k,j\in\mathbf{Z})$$

és

$$\mathcal{H}_n f:=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\langle f,\chi_{kj}\rangle\chi_{kj}\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

akkor

$$\operatorname{supp}\chi_{kj}=[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]\qquad(k,j\in\mathbf{Z})$$

miatt a $\mathcal{H}_n f(\pi/2)$ kiszámításakor csak a

$$\pi/2\in[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]$$

feltételnek eleget tevő $k, j$ indexeket kell figyelembe venni. Ezért a $\mathcal{H}_n f(\pi/2)$ helyettesítési értéket megadó kettős szummában csupán $n$ számú tag nullától különböző. Belátható, hogy

$$|\mathcal{H}_n f(\pi/2) - f(\pi/2)| < 2^{-n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így

$$|\mathcal{H}_{19} f(\pi/2) - f(\pi/2)| < 2^{-20} < 10^{-6}.$$

Még „jobb” a helyzet, ha a $\psi$ Daubechies-waveletet használjuk a fenti approximációban. Mivel a Daubechies-wavelet első két momentuma nulla, ezért az

$$\langle f, d_{kj} \rangle \qquad (k, j \in \mathbf{Z})$$

együtthatók mindaddig nullák, amíg

$$\pi \text{ (vagy } -\pi) \notin \operatorname{supp} d_{kj}.$$

Ti.

$$\operatorname{supp} d_{kj} \subset (-\infty, -\pi], \text{ vagy } \operatorname{supp} d_{kj} \subset [\pi, +\infty)$$

esetén ez triviális, ha pedig $\operatorname{supp} d_{kj} \subset (-\pi, \pi)$, akkor

$$\langle f, d_{kj} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{k/2} \psi(2^k t - j)\, dt = 2^{-k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f((y+j)/2^k) \psi(y)\, dy =$$

$$2^{-3k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y+j) \psi(y)\, dy =$$

$$2^{-3k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi(y)\, dy + j 2^{-3k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy = 0.$$

Mivel $\operatorname{supp} \psi = [-1, 2]$, ezért minden $k, j \in \mathbf{Z}$ esetén

$$\operatorname{supp} d_{kj} = [(j-1)2^{-k}, (j+2)2^{-k}]$$

egy $3/2^k$ hosszúságú intervallum. Ez azt jelenti, hogy bármely $k \in \mathbf{Z}$ mellett legfeljebb 6 olyan $j \in \mathbf{Z}$ index lehet, amelyre

$$\operatorname{supp} d_{kj} \subset (-\pi, \pi)$$

nem igaz: a

$$j - 1 \leq -\pi 2^k \leq 2 + j,$$

vagy pedig a

$$j-1 \leq \pi 2^k \leq 2+j$$

feltételnek eleget tevő $j$-k. Ha tehát a $D_n f(\pi/2)$ $(n \in \mathbf{N})$ helyettesítési értékeket akarjuk kiszámítani, akkor csak azokat a

$$k, j \in \mathbf{Z} \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$

indexeket kell figyelembe venni, amelyekre

$$\pi, \pi/2 \in [(j-1)2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$$

igaz. Innen $3 \cdot 2^{-k} > \pi/2$, azaz $k \leq 0$ adódik. Következésképpen $k=0$, más szóval

$$D_n f(\pi/2) = D_0 f(\pi/2).$$

A Daubechies-wavelet-sorfejtések konvergenciájáról fentebb mondottak alapján

$$f(\pi/2) = \lim_{n \to +\infty} D_n f(\pi/2) = D_0 f(\pi/2) = \sum_{j=-1}^{1} \langle f, \varphi_{0j} \rangle \varphi(\pi/2 - j) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \varphi(t+1)\varphi(\pi/2+1) + \varphi(t)\varphi(\pi/2) + \varphi(t-1)\varphi(\pi/2-1) \right) dt,$$

ahol a $\varphi$ a Daubechies-féle skálázási függvény. Most tehát három együttható kiszámítása elegendő volt, ráadásul az $f(\pi/2)$ pontos érték kiszámításához.

Legyen a

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

olyan függvény, amely valamilyen $k, j \in \mathbf{Z}$ esetén kétszer differenciálható az

$$I_{jk} := [(j-1)2^{-k}, (j+2)2^{-k}]$$

intervallumon és

$$C := \sup\{|g''(t)| : t \in I_{kj}\} < +\infty.$$

Ekkor

$$\langle g, d_{kj} \rangle = 2^{-k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g((y+j)/2^k)\psi(y)\, dy = 2^{-k/2} \cdot \int_{-1}^{2} g((y+j)/2^k)\psi(y)\, dy.$$

Ha $b := j2^{-k}$, akkor a Taylor-formula alapján tetszőleges

$$x \in [(j-1)2^{-k}, (j+2)2^{-k}]$$

esetén van olyan $c_x \in (x, b)$ (vagy $c_x \in (b, x)$), amellyel

$$g(x) = g(b) + g'(b)(x-b) + \frac{g''(c_x)}{2}(x-b)^2.$$

Mivel $x - b = t2^{-k}$ és a $\psi$ Daubechies-wavelet első két momentuma nulla, ezért

$$|\langle g, d_{kj}\rangle| \leq \frac{C}{2^{1+k/2}} \cdot \int_{-1}^{2} \left(\frac{t}{2^k}\right)^2 \cdot |\psi(t)|\, dt \leq \frac{2C}{2^{5k/2}} \cdot \int_{-1}^{2} |\psi(t)|\, dt.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\int_{-1}^{2} |\psi(t)|\, dt \leq \left(\int_{-1}^{2} \psi^2(t)\, dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-1}^{2} 1\, dt\right)^{1/2} = \sqrt{3},$$

ezért

$$|\langle g, d_{kj}\rangle| \leq \frac{4C}{2^{5k/2}}.$$

## 9.2. Riesz-multirezolúció

Amint azt már fentebb megjegyeztük, a waveletek, vagy akár a skálázási függvények (ld. 8.2.) konstrukciója általában nem egyszerű feladat. Ha viszont egy $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény esetén a multirezolúcióban (ld. 8.1.) nem követeljük meg a generált bázisok ortonormáltságát, akkor a helyzet némileg egyszerűsödik. A továbbiakban ilyen szellemben fogunk folytonos és szakaszonként lineáris (*spline* vagy *Franklin-*) waveleteket konstruálni.

Tekintsük ehhez a 2.7. pontban már említett

$$h(x) := \begin{cases} 1 + x & (-1 \leq x \leq 0) \\ \\ 1 - x & (0 \leq x \leq 1) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]) \end{cases}$$

kalap-függvényt. Ekkor a $h$ (formálisan) eleget tesz a (8.2.1) skálázási egyenletnek:

$$h = \frac{1}{2}\delta_2(\tau_{-1}h) + \delta_2 h + \frac{1}{2}\delta_2(\tau_1 h).$$

Világos, hogy a $(\tau_j h, j \in \mathbf{Z})$ nem ortonormált rendszer, hiszen

$$\langle h, \tau_1 h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t-1)\,dt = \int_{-1}^{1} h(t)h(t-1)\,dt = \int_{0}^{1} (1-t)t\,dt = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Legyen ugyanakkor

$$h_{kj}(x) := 2^{k/2}h(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R}, k, j \in \mathbf{Z})$$

és

$$V_n := \overline{\mathcal{L}[\{h_{nj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor a 2.7. pontban mondottak szerint a $(h_{nj}, j \in \mathbf{Z})$ Riesz-bázis a $V_n$-ben $(n \in \mathbf{Z})$. Megmutatható, hogy alkalmas, a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j|^2 < +\infty$$

feltételnek eleget tevő $c_j \in \mathbf{R}$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal a

$$\varphi := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \tau_j \varphi$$

függvény, mint skálázási függvény (ld. 8.1.) a $(V_n, n \in \mathbf{Z})$ multirezolúciót határozza meg.

A fentieket szem előtt tartva azt mondjuk, hogy a

$$V_k \subset L^2(\mathbf{R}) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

zárt alterek sorozata az $L^2(\mathbf{R})$ tér *Riesz-multirezolúciója,* ha

i) $V_k \subset V_{k+1}$ $(k \in \mathbf{Z})$;

ii) $\overline{\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k} = L^2(\mathbf{R})$;

iii) $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k = \{\mathbf{R} \ni x \mapsto 0\}$;

iv) $f \in V_k \iff \delta_2 f \in V_{k+1}$ $(k \in \mathbf{Z})$;

v) van olyan $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, hogy a $(\tau_j h, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázist alkot a $V_0$-ban.

A 2.7.4. Tétel alapján bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén a $(h_{kj}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis az

$$\overline{\mathcal{L}[\{h_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]}$$

altérben. A 8.1. pontban mondottakkal analóg módon következik, hogy

$$h_{kj} \in V_k \qquad (k, j \in \mathbf{Z})$$

és

$$V_k = \overline{\mathcal{L}[\{h_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ezért a $h$ *függvény által generált Riesz-multirezolúcióról* beszélünk. A $h$ függvényt a szóban forgó Riesz-multirezolúció *skálázási függvényének* nevezzük.

A következő tétel azt mutatja, hogy minden Riesz-multirezolúció az eddigi értelemben is egy multirezolúció.

**9.2.1. Tétel.** *Legyen $h \in L^2(\mathbf{R})$ és tegyük fel, hogy a $V_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ zárt alterek sorozata a $h$ függvény által meghatározott Riesz-multirezolúció. Ekkor van olyan $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ skálázási függvény, amely által generált multirezolúció megegyezik a $(V_k, k \in \mathbf{Z})$ sorozattal.*

Mivel $\varphi \in V_0$, ezért alkalmas $a_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 < +\infty$$

és

$$\varphi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \tau_j h.$$

Korábban már láttuk (ld. (8.1.1)), hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(x+k)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\widehat{\tau_j h}(x) = e^{2\pi \imath j x} \cdot \widehat{h}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{Z}),$$

ezért

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{2\pi\imath jx}\cdot \widehat{h}(x) =: \alpha(x)\widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(x+k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha(x+k)|^2\cdot |\widehat{h}(x+k)|^2 =$$

$$|\alpha(x)|^2\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Legyen pl. a $h$ ismét a kalap-függvény (ld. 2.7.). Ekkor (ld. 2.7.)

$$\widehat{h}(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 & (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}), \end{cases}$$

tehát (a fent definiált $\alpha$ függvénnyel)

$$\widehat{\varphi}(x) = \alpha(x)\cdot \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

A

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x + \pi k)}{\pi x + \pi k}\right)^4 =$$

$$\sin^4(\pi x)\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi x + \pi k)^4} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$$

összeg kiszámításához írjuk fel a

$$[-\pi, \pi] \ni t \mapsto e^{-\imath xt}$$

függvény Fourier-sorát, amiből a Parseval-egyenlőség alkalmazásával kapjuk az előbbi $x$ helyeken az

$$\frac{1}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi x + \pi k)^2}$$

egyenlőséget. Itt kétszer deriválva mindkét oldalt jutunk az alábbi összefüggéshez:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi x + \pi k)^4} = \frac{3 - 2\sin^2(\pi x)}{3\sin^4(\pi x)} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}).$$

Innen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 = 1 - \frac{2\sin^2(\pi x/2)}{3} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$$

következik. Mindezt az előbbiekbe behelyettesítve kapjuk az

$$|\alpha(x)|^2 = \frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2} = \left(1 - \frac{2\sin^2(\pi x)}{3}\right)^{-1},$$

továbbá a

$$|\widehat{\varphi}(x)| = |\alpha(x)| \cdot \widehat{h}(x) = \left(1 - \frac{2\sin^2(\pi x)}{3}\right)^{-1/2} \cdot \widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

egyenlőséget. Ha

$$|\alpha(x)| =: \omega(x)\alpha(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor az $\omega$ periodikus az 1 szerint és

$$|\omega(x)| = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Ezért (ld. 9. 3. xi) megjegyzés) a

$$\widehat{\rho}(x) = \omega(x)\widehat{\varphi}(x) = \omega(x)\alpha(x)\widehat{h}(x) = |\alpha(x)| \cdot \widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

egyenlőségnek eleget tevő $\rho$ is skálázási függvény. Tehát

$$\widehat{\rho}(x) = |\alpha(x)| \cdot \widehat{h}(x) = \widehat{h}(x)\left(1 - \frac{2\sin^2(\pi x)}{3}\right)^{-1/2} =$$

$$\widehat{h}(x) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\cos(2\pi x)}{2}\right)^{-1/2} =: \widehat{h}(x)g(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

A $g$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon trigonometrikus Fourier-sorba fejtve azt kapjuk, hogy

$$\widehat{\rho}(x) = \widehat{h}(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{2\pi \imath k x} \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ahol a $b_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ együtthatók (a binomiális sorfejtést is figyelembe véve) a következők:

$$b_k = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi\imath kx} dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{1}{2^j} \cdot \int_0^1 (\cos(2\pi x))^j e^{-2\pi\imath kx} dx =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{1}{2^j} \cdot \int_0^1 (\cos(2\pi x))^j \cos(2\pi kx)\, dx.$$

Legyen

$$\Phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \tau_{-k} h.$$

Ekkor

$$\widehat{\Phi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \widehat{h}(x) e^{2\pi\imath kx} \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

tehát $\widehat{\rho} = \widehat{\Phi}$. Innen a Fourier-transzformáció injektivitása alapján

$$\rho(x) = \Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k h(x+k) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

következik.

## 9.3. Meyer-wavelet

Legyen a $\Theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan páros függvény, amelyre $\Theta \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, és az alábbi feltételek teljesülnek:

(a) $0 \le \Theta(t) \le 1 \quad (t \in \mathbf{R})$;

(b) $\Theta(t) := 1 \quad (-1/3 < t < 1/3)$;

(c) $\Theta(t) := 0 \quad (t \in \mathbf{R},\ |t| > 2/3)$;

(d) $\Theta^2(t) + \Theta^2(1-t) = 1 \quad (0 \le t \le 1)$.

Világos, hogy

$$\Theta(-1/3) = \Theta(1/3) = 1,$$

valamint

$$\Theta(-2/3) = \Theta(2/3) = 0.$$

Mivel $\Theta \in L^2(\mathbf{R})$, ezért van olyan $\theta \in L^2(\mathbf{R})$ függvény, hogy $\widehat{\theta} = \Theta$. Sőt, mivel a $\Theta$ kompakt tartójú, ezért a Fourier-transzformált ismert tulajdonságai alapján a $\theta$ végtelen sokszor differenciálható: $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$.

Mutassuk meg, hogy van olyan multirezolúció, amelynek a skálázási függvénye (ld. 8.1.) az előbbi $\theta$ függvény. Ehhez a 9.7. xvi) megjegyzés feltételeinek a teljesülését elég meggondolni. Ezek közül a (3) nyilvánvalóan igaz a $\Theta$ függvény definíciója miatt:

$$\widehat{\theta} = \Theta \in C\{0\} \text{ és } \widehat{\theta}(0) = \Theta(0) = 1 \neq 0.$$

Az is nyilvánvaló, hogy a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Theta^2(x+k)$$

összegben bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb két nem nulla tag van: valamilyen $n \in \mathbf{Z}$ mellett $k = n$, vagy $k = n-1$, vagy $k = n-1, n$. Ekkor az első két esetben

$$-1/3 < x + n - 1, \text{ ill. } x + n < 1/3,$$

míg a harmadikban $0 \leq x+n \leq 1$. Így az (a), valamint a (d) feltételt figyelembe véve

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\theta}(x+k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Theta^2(x+k) = \begin{cases} \Theta^2(x+n-1) = 1 \\ \\ \Theta^2(x+n) = 1 \\ \\ \Theta^2(x+n-1) + \Theta^2(x+n) = 1. \end{cases}$$

Tudjuk (ld. (8.1.1)), hogy az előbbiekből a $(\tau_j\theta, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormáltsága és ezért a 9.7. xvi) megjegyzés (1) feltétele következik: a $(\tau_j\theta, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis (ld. 2.7.) a

$$V_0 := \overline{\mathcal{L}[\{\tau_j h \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]}$$

altérben. Tekintsük továbbá azt a 2 szerint periodikus $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amire

$$g(t) := \Theta(t) \qquad (-1 \leq t \leq 1).$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\Theta(t) = g(t)\Theta(t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen viszont (ld. 8.4. iv) megjegyzés) a még „hiányzó" $\delta_{1/2}\theta \in V_0$ feltétel (ld. 9.7. xvi)/(2)) következik.

A fenti multirezolúcióhoz „illeszkedő" $\Omega$ waveletet a 8.3.2. Tétel alapján konstruálhatunk, pl. (ld. az említett tételbeli jelöléseket) a $h = 1$ választással:

$$\widehat{\Omega}(t) = e^{\pi\imath t} g(t+1)\widehat{\theta}(t/2) = e^{\pi\imath t}\cdot g(t+1)\Theta(t/2) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

Ha

$$\alpha(t) := g(t+1)\Theta(t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor m.m. $t \in \mathbf{R}$ helyen

$$\alpha(-t) = g(-t+1)\Theta(-t/2) = g(-t-1)\Theta(-t/2) = g(t+1)\Theta(t/2) = \alpha(t),$$

tehát az $\alpha$ páros függvény. Mivel a $g$ valós értékű, ezért az $\alpha$ is az. A Fourier-transzformációra vonatkozó inverziós formula szerint

$$\Omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\imath t}\alpha(t)e^{2\pi\imath xt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\cos(\pi t(1+2x))dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

következésképpen az $\Omega$ is valós függvény és $\Omega \in C^\infty(\mathbf{R})$.

Ha a fentiekben a $\Theta$ függvény még $C^\infty(\mathbf{R})$-beli is, akkor az „illeszkedő" $\Omega$ waveletre $\widehat{\Omega} \in C^\infty(\mathbf{R})$ teljesül, azaz az $\Omega$ wavelet Schwartz-osztálybeli: $\Omega \in C^\infty(\mathbf{R})$ és minden $k, l \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $C_{kl}$ konstans, amellyel

$$|\Omega^{(k)}(t)| \leq \frac{C_{kl}}{(1+|t|)^l} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az ilyen tulajdonságokkal bíró $\Theta$ függvényhez juthatunk pl. az alábbi konstrukcióval: legyen

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t > 0) \\ \\ 0 & (t \leq 0). \end{cases}$$

Ismert, hogy $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Ha

$$\mathcal{F}(t) := f(t)f(1-t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$q := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t)\,dt,$$

akkor $q \neq 0$ és a

$$g(x) := \frac{1}{q} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathcal{F}(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre $g \in C^{\infty}(\mathbf{R})$, továbbá

(1) $0 \leq g(x) \leq 1 \quad (x \in \mathbf{R})$;

(2) $g(x) = 0 \quad (x \leq 0)$;

(3) $g(x) = 1 \quad (x \geq 1)$;

(4) $g(x) + g(1-x) = 1 \quad (x \in \mathbf{R})$.

Könnyen belátható, hogy a

$$\Theta(t) := \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot g(3|t|-1)\right) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvény $C^{\infty}(\mathbf{R})$-beli és rendelkezik a fenti (a) – (d) tulajdonságokkal.

## 9.4. Spline-waveletek

Röviden vázoljuk az ún. *B-spline waveleteket* (vagy *Battle–Lemariè-waveleteket*). Jelöljük ehhez az $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ függvények szokásos konvolúcióját (ld. 10.10.) $f * g$-vel:

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Jól ismert, hogy $f * g \in L^1(\mathbf{R})$ és

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .$$

Legyen ezek után $N_0 := \chi_{[0,1]}$ és

$$N_n(x) := N_{n-1} * N_0(x) = \int_{x-1}^{x} N_{n-1}(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor pl.

$$N_1(x) = \int_{x-1}^{x} \chi_{[0,1)}(t)\,dt = \int_{[x-1,x]\cap[0,1)} 1\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & (x < 0 \ \text{ vagy } \ x > 2) \\ \int_0^x 1\,dt = x & (0 \le x \le 1) \\ \int_{x-1}^1 1\,dt = 2 - x & (1 \le x \le 2). \end{cases}$$

Tehát

$$N_1(x) = h(x-1) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a $h$ (ld. 2.7.) a kalap-függvény. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$N_2(x) = \begin{cases} x^2/2 & (0 \le x \le 1) \\ 3/4 - (x - 3/2)^2 & (1 \le x \le 2) \\ (3-x)^2/2 & (2 \le x \le 3) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [0,3]), \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} x^3/6 & (0 \le x \le 1) \\ x^3/6 - 2(x-1)^3/3 & (1 \le x \le 2) \\ (4-x)^3/6 - 2(3-x)^3/3 & (2 \le x \le 3) \\ (4-x)^3/6 & (3 \le x \le 4) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [0,4]). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni (pl. teljes indukcióval), hogy

$$\operatorname{supp} N_n = [0, n+1] \ \text{ és } \ N_n(x) > 0 \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in (0, n+1)).$$

Továbbá a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_{n+1}(x-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 N_n(x-k-t)\,dt =$$

$$(*) \qquad = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_n(x-k-t)\,dt \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R})$$

rekurzív összefüggést figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_n(x-k) = 1 \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).^2$$

A $(*)$ összefüggésből világos, hogy

$$N_n \in C^{n-1}(\mathbf{R}) \Longrightarrow N_{n+1} \in C^n(\mathbf{R}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá, ha $n \in \mathbf{N}$ és minden $k \in \mathbf{Z}$ mellett az $N_n$-nek a $[k, k+1]$ intervallumra való leszűkítése egy legfeljebb $n$-edfokú polinom ugyanerre az intervallumra való leszűkítésével esik egybe – röviden: *a* $[k, k+1]$*-en az* $N_n$ *egy legfeljebb* $n$*-edfokú polinom* –, akkor a $[k, k+1]$-en az $N_{n+1}$ egy legfeljebb $(n+1)$-edfokú polinom. Ui. bármely $x \in (k, k+1)$ helyen

$$N_{n+1}(x) = \int_{k-1}^{k} N_n(t)\,dt + \int_k^x N_n(t)\,dt - \int_{k-1}^{x-1} N_n(t)\,dt,$$

amiből az utolsó kijelentésünk már nyilvánvaló.

Adott $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ indexekre jelöljük $\mathcal{S}_{nk}$-val a $j/2^k$ $(j \in \mathbf{Z})$ pontokra vonatkozó $n$-edrendű splinek halmazát. Tehát $f \in \mathcal{S}_{nk}$ pontosan akkor igaz, ha az $f$ függvény $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható $(f \in C^{n-1}(\mathbf{R}))$ és bármely $j \in \mathbf{Z}$ esetén a $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$ intervallumon egy legfeljebb $n$-edrendű polinom.[3] Világos, hogy

$$\mathcal{S}_{nk} \subset \mathcal{S}_{nk+1} \qquad (n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{Z})$$

és

$$f \in \mathcal{S}_{nk} \iff \delta_2 f \in \mathcal{S}_{nk+1} \qquad (n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{Z}).$$

A fentiek szerint tehát

$$N_n \in \mathcal{S}_{n0} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

---

[2] A $\operatorname{supp} N_n = [0, n+1]$ $(n \in \mathbf{N})$ egyenlőség miatt a fenti $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \ldots$ összegekben legfeljebb véges sok nullától különböző tag van.

[3] A szokásos megállapodás szerint $C^{-1}(\mathbf{R})$ az $\mathbf{R}$-en (Lebesgue-)mérhető függvények halmaza, míg $C^0(\mathbf{R})$ a folytonos függvényeké.

Nem nehéz továbbá belátni azt sem, hogy (rögzített $n \in \mathbf{N}$ index mellett) tetszőleges $f \in \mathcal{S}_{n0}$ egyértelműen állítható elő alkalmas $a_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal a következő alakban:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \tau_k N_n,$$

ahol az

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k N_n(x-k) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

összegben minden $x \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb $n+1$ számú nullától különböző összeadandó van. A $\tau_k N_n$ $(k \in \mathbf{Z})$ splinek tehát kifeszítik az $\mathcal{S}_{n0}$ vektorteret. Ezért is nevezik őket *B-splineknak* (*basic spline*).

**9.4.1. Tétel.** *Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén a $(\tau_k N_n, k \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis az $L^2(\mathbf{R})$-ben.*

Példaként mutassuk meg, hogy $n = 3$ esetén az $N_3$ függvény eleget tesz a 2.7.3., 2.7.4. Tételek feltételeinek. Legyen ehhez

$$t_j := \langle N_3, \tau_j N_3 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} N_3(t) N_3(t-j)\, dt = \int_0^4 N_3(t) N_3(t-j)\, dt \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Mivel

$$t_{-j} = \int_0^4 N_3(t) N_3(t+j)\, dt = \int_j^{j+4} N_3(x-j) N_3(x)\, dx =$$

$$\int_0^4 N_3(x-j) N_3(x)\, dx = t_j \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért $\operatorname{supp} N_3 = [0,4]$ miatt

$$t_j = 0 \qquad (j \in \mathbf{Z},\ |j| \geq 4).$$

Így elegendő a $t_0, t_1, t_2, t_3$ együtthatókat kiszámítani:

$$t_0 = \int_0^4 N_3^2(t)\, dt = \frac{151}{315},$$

$$t_1 = t_{-1} = \int_0^4 N_3(t) N_3(t-1)\, dt = \frac{397}{1680},$$

$$t_2 = t_{-2} = \int_0^4 N_3(t)N_3(t-2)\,dt = \frac{1}{42},$$

$$t_3 = t_{-3} = \int_0^4 N_3(t)N_3(t-3)\,dt = \frac{1}{5040}.$$

A 2.7.3. Tételben szereplő $g$ függvény tehát a következő:

$$g(t) := t_0 + 2t_1 \cos t + 2t_2 \cos(2t) + 2t_3 \cos(3t) =$$

$$\frac{151}{315} + \frac{397 \cos t}{840} + \frac{\cos(2t)}{21} + \frac{\cos(3t)}{2520} \qquad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Innen

$$2520g(t) = 1088 + 1188 \cos t + 240 \cos^2 t + 4 \cos^3 t =: G(\cos t) \qquad (t \in [-\pi, \pi])$$

következik. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $G$ harmadfokú polinom deriváltja a $[-1, 1]$ intervallumon pozitív, más szóval a $G_{|[-1,1]}$ leszűkítés szigorúan monoton növő. Következésképpen a $2520g$ függvénynek és így a $g$-nek is $\cos t = -1$ esetén minimuma van. Mivel $G(-1) = 136 > 0$, ezért a 2.7.3. Tételben

$$\alpha := \frac{136}{2520} = 0.0539682...$$

írható.

Legyen

$$\mathcal{S}_{nk}^2 := \mathcal{S}_{nk} \cap L^2(\mathbf{R}) \qquad (n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor az előbbiek szerint a $\mathcal{S}_{nk}^2$-k zárt alterek az $L^2(\mathbf{R})$-ben.

**9.4.2. Tétel.** *Bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén az $\mathcal{S}_{nk}^2$ $(k \in \mathbf{Z})$ alterek multirezolúciót alkotnak.*

A 9.2.1. Tétel szerint ezért pl. van olyan $\psi$ wavelet, amelyre a

$$\psi_{kj}(x) = 2^{k/2}\psi(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ k, j \in \mathbf{Z})$$

ortonormált bázisfüggvények harmadrendű splinek:

$$\psi_{kj} \in C^2(\mathbf{R}) \qquad (k, j \in \mathbf{Z}),$$

és minden $k, j \in \mathbf{Z}$ esetén a $\psi_{kj}$ a $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$ intervallumon egy legfeljebb harmadfokú polinommal esik egybe.

## 9.5. Kompakt tartójú waveletek

A 8.4. iii) megjegyzésben láttuk, hogy ha az $\omega$ egy folytonos függvény a számegyenesen, $\omega(0) = 1$ és az $\omega$ az origóban Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor az

$$\Omega(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

végtelen szorzat létezik, az $\Omega$ folytonos és

$$\Omega(t) = \omega(t)\Omega(t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tegyük fel pl., hogy

$$\omega(t) := \sum_k \alpha_k e^{-\pi\imath kt} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egy trigonometrikus polinom[4] és

- $|\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2 = 1 \quad (t \in \mathbf{R})$,
- $\omega(0) = 1$,
- $\omega(t) \neq 0 \quad (-1/2 \leq t \leq 1/2)$.

Ekkor az $\omega$ nyilván folytonos és teljesül a 8.4. iii)-beli Lipschitz-feltétel:

$$|\omega(t) - \omega(0)| \leq \sum_k |\alpha_k| \cdot |e^{-\pi\imath kt} - 1| \leq$$

$$2 \cdot \sum_k |\alpha_k| \cdot |\sin(\pi kt/2)| \leq \pi \cdot \sum_k k|\alpha_k| \cdot |t| \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy pl. az

$$\omega(t) := \frac{1 + e^{-\pi\imath t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

eleget tesz a $\bullet$ feltételeknek. Igaz továbbá az alábbi (nem triviális) állítás.

[4] Itt a $\sum_k \ldots$ szimbólum arra utal, hogy az összegzés a $k \in \mathbf{Z}$ egészekre vonatkozik, de legfeljebb véges sok $k \in \mathbf{Z}$ esetén lesz az $\alpha_k$ együttható nullától különböző.

**9.5.1. Tétel.** *Ha az $\omega$ trigonometrikus polinomra teljesülnek a fenti $\bullet$ kikötések, akkor az*

$$\Omega(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

*végtelen szorzat konvergens, az $\Omega$ függvény folytonos, valamint $\Omega \in L^2(\mathbf{R})$. A $\widehat{\varphi} = \Omega$ módon definiált $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény kompakt tartójú skálázási függvénye valamilyen multirezolúciónak. A*

$$\psi := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{1-j}} \delta_2(\tau_j \varphi)$$

*wavelet*[5] *kompakt tartójú, és ha* $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$, *akkor*

$$\operatorname{supp} \psi \subset [(a-b-1)/2, (b-a-1)/2].$$

Tekintettel a (8.2.4) egyenlőségre az első $\bullet$ feltétel nem meglepő. Továbbá

$$\widehat{\varphi}(0) = \Omega(0) = \omega(0) = 1$$

és a (8.2.5) miatt $\Psi(0) = 1$, így a második $\bullet$ feltétel is természetesnek mondható. Ha pl.

$$\omega(t) := \frac{1 + e^{-\pi\imath t}}{2} = e^{-\pi\imath t/2} \cdot \frac{e^{\pi\imath t/2} + e^{-\pi\imath t/2}}{2} = e^{-\pi\imath t/2} \cdot \cos(\pi t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\Omega(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\pi\imath t/2^j} \cdot \cos(\pi t/2^j) = e^{-\pi\imath t} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \cos(\pi t/2^j).$$

Az utóbbi végtelen szorzat egyszerűen kiszámítható. Ui. tetszőleges $j = 1, 2, ...$ esetén

$$\sin(\pi t/2^{j-1}) = \sin(2\pi t/2^j) = 2\sin(\pi t/2^j)\cos(\pi t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen – hacsak $t \neq k2^l$ $(k \in \mathbf{Z},\ 0 < l \in \mathbf{N})$ –

$$\prod_{j=1}^{n} \cos(\pi t/2^j) = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(\pi t/2^{j-1})}{\sin(\pi t/2^j)} = \frac{\sin(\pi t)}{2^n \sin(\pi t/2^n)} =$$

[5] Ld. (8.2.1) és 8.3.1. Tétel.

$$= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\pi t/2^n}{\sin(\pi t/2^n)} \to \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \qquad (n \to \infty),$$

tehát

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos(\pi t/2^j) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

(ami könnyen láthatóan formálisan $t = k2^l \quad (0 \neq k \in \mathbf{Z}, 0 < l \in \mathbf{N})$ esetén is igaz). Mindebből adódóan

$$\Omega(t) = e^{-\pi \imath t} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \cos(\pi t/2^j) = \begin{cases} 1 & (t = 0) \\ \dfrac{e^{-\pi \imath t} \cdot \sin(\pi t)}{\pi t} & (0 \neq t \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Mivel $\widehat{\chi_{[0,1]}}(0) = 1$, ill.

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(x) = \int_0^1 e^{-2\pi \imath x t} dt = \frac{1 - e^{-2\pi \imath x}}{2\pi \imath x} = \frac{e^{-\pi \imath x} \sin(\pi x)}{\pi x} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

ezért $\widehat{\chi_{[0,1]}} = \Omega$. Így $\varphi = \chi_{[0,1]}$ és a $\psi$ nem más, mint a Haar-wavelet (ld. 8.1.).

Az előzőekben szereplő

$$\omega(t) = \sum_k \alpha_k e^{-\pi \imath k t} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus polinom együtthatóira egyszerűen kaphatunk feltételeket. Ti. a minden $t \in \mathbf{R}$ helyen fennálló

$$1 = |\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2 = \omega(t)\overline{\omega(t)} + \omega(t+1)\overline{\omega(t+1)} =$$

$$\sum_{k,j} \alpha_k \overline{\alpha_j} (1 + (-1)^{k+j}) e^{-\pi \imath (k-j) t} = 2 \cdot \sum_l \left( \sum_j \alpha_{2l+j} \overline{\alpha_j} \right) e^{-2\pi \imath l t}$$

egyenlőségből

$$\sum_j \alpha_{2l+j} \overline{\alpha_j} = 0 \quad (0 \neq l \in \mathbf{Z}) \text{ és } \sum_j |\alpha_j|^2 = \frac{1}{2}$$

következik. Az $\omega(0) = 1$ kikötés alapján pedig

$$\sum_j \alpha_j = 1.$$

Ha a fentiekben $0 < N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy egyrészt $\alpha_N \neq 0$ (vagy $\alpha_{-N} \neq 0$), másrészt

$$\alpha_j = 0 \qquad (j \in \mathbf{Z},\ |j| > N),$$

akkor a

$$\sum_j \alpha_{2l+j}\overline{\alpha_j} = 0$$

összefüggésben $l := N$-et írva

$$\sum_{j=-N}^{N} \alpha_{2N+j}\overline{\alpha_j} = \alpha_N\overline{\alpha_{-N}} = 0,$$

tehát $\alpha_N\alpha_{-N} = 0$ adódik. Ha pl. $N = 1$ és $\alpha_1 \neq 0$, akkor $\alpha_{-1} = 0$, így

$$\omega(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\pi\imath t} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \ \text{ és } \ |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1/2.$$

Pl. (ld. fent) $\alpha_0 := \alpha_1 := 1/2$, következésképpen

$$\omega(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi\imath t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A trigonometrikus sorok elméletében *Riesz-lemmaként* jól ismert az alábbi állítás: *ha* $m \in \mathbf{N}$, $\gamma_k \in \mathbf{R}$ $(k = -m, ..., m)$ *és*

$$R(t) := \sum_{k=-m}^{m} \gamma_k e^{\pi\imath kt} \geq 0 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

*akkor van olyan*

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e^{\pi\imath kt} \qquad (t \in \mathbf{R},\ \alpha_k \in \mathbf{R}\ \ (k = 0, ..., m))$$

*valós együtthatós trigonometrikus polinom, amelyre*

$$|\omega(t)|^2 = R(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A 9.5.1. Tételben szereplő $\omega$ trigonometrikus polinomra vonatkozó első • feltétel erre az $\omega$-ra ezért azt jelenti, hogy

$$R(t) + R(t+1) = 1 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Legyen

$$R(t) = \sum_j a_j e^{-\pi\imath jt} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\sum_j (1 + (-1)^j) a_j e^{-\pi\imath jt} = 1 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen $a_0 = 1/2$ és $a_k = 0$ ($\mathbf{Z} \ni k$ páros) következik, más szóval

$$R(t) = \frac{1}{2} + \sum_j b_{2j+1} e^{-\pi\imath(2j+1)t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha pl.

$$R(t) := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-\pi\imath t} + \frac{1}{4} e^{\pi\imath t} = \frac{1 + \cos(\pi t)}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor nyilván

$$R(t) \geq 0 \text{ és } R(t) + R(t+1) = 1 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy (ld. fent) az

$$\omega(t) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\pi\imath t} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus polinomra

$$|\omega(t)|^2 = R(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha a 9.5.1. Tételbeli $\omega$ trigonometrikus polinomra igazak az ottani $\bullet$ feltételek, akkor ugyanezek minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén nyilván teljesülnek az

$$\tilde{\omega}(t) := e^{\pi\imath kt} \omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus polinomra is. Ekkor

$$\tilde{\Omega}(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \tilde{\omega}(t/2^j) = \prod_{j=0}^{\infty} e^{\pi\imath kt2^{-j}} \cdot \omega(t/2^j) =$$

$$e^{\pi\imath kt \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}} \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) = e^{2\pi\imath kt} \cdot \Omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha $\widehat{\varphi} = \Omega$ és $\widehat{\rho} = \tilde{\Omega}$, akkor

$$\widehat{\rho}(t) = e^{2\pi\imath kt} \cdot \widehat{\varphi}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

tehát $\rho = \tau_{-k}\varphi$. Ezért a $\varphi$ és a $\rho$ függvény által meghatározott multirezolúció (ld. 8.1.) megegyezik. Sőt, mindez meg is „fordítható: ha az $\omega$, $\omega_*$ trigonometrikus polinomokból a 9.5.1. Tétel szerint származtatott multirezolúciók megegyeznek, akkor valamilyen $k \in \mathbf{Z}$ egésszel

$$\omega_*(t) = e^{\pi\imath kt} \cdot \omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha ui.

$$\Sigma(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega_*(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$\Omega(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

továbbá

$$\widehat{\sigma} = \Sigma \text{ és } \widehat{\varphi} = \Omega$$

a 9.5.1. Tételnek megfelelő kompakt tartójú skálázási függvények, akkor (ld. 9.7. xiii) megjegyzés) van olyan $k \in \mathbf{Z}$ egész és $c$ együttható, hogy $|c| = 1$ és $\sigma = c\tau_k\varphi$. Így

$$\Sigma(t) = \widehat{\sigma}(t) = ce^{2\pi\imath kt} \cdot \widehat{\varphi}(t) = ce^{2\pi\imath kt} \cdot \Omega(t) = c \cdot \prod_{j=0}^{\infty} e^{\pi\imath kt/2^j} \cdot \omega(t/2^j) =$$

$$e^{\pi\imath kt} \cdot \omega(t) c \cdot \prod_{j=0}^{\infty} e^{\pi\imath kt/2^{j+1}} \cdot \omega(t/2^{j+1}) = e^{\pi\imath kt} \cdot \omega(t) \Sigma(t/2),$$

ahol

$$\Sigma(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \omega_*(t/2^j) = \omega_*(t) \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \omega_*(t/2^{j+1}) = \omega_*(t)\Sigma(t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen

$$\omega_*(t) = e^{\pi\imath kt} \cdot \omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

valóban következik.

A 9.5.1. Tételben szereplő $\omega$ trigonometrikus polinom speciális megválasztásával a tételben nyert kompakt tartójú wavelet még bizonyos simasági tulajdonságoknak is eleget tehet. Legyen pl. $k \in \mathbf{N}$ esetén

$$R_k(x) := 1 - c_k \cdot \int_0^x \sin^{2k+1}(\pi t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a $c_k$ együtthatót úgy határoztuk meg, hogy $R_k(1) = 0$ legyen:

$$c_k := \left( \int_0^1 \sin^{2k+1}(\pi t)\,dt \right)^{-1}.$$

Ekkor

$$R_k(x) = 1 - c_k \cdot \int_0^x \left( \frac{e^{\pi\imath t} - e^{-\pi\imath t}}{2\imath} \right)^{2k+1} dt =$$

$$1 - \frac{c_k}{(2\imath)^{2k+1}} \cdot \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} (-1)^{2k+1-j} \cdot \int_0^x e^{\pi\imath tj} \cdot e^{-\pi\imath(2k+1-j)t} dt =$$

$$1 - \frac{(-1)^k \imath c_k}{2^{2k+1}} \cdot \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{2k+1}{j} \cdot \int_0^x e^{\pi\imath t(2j-2k-1)} dt =$$

$$1 - \frac{(-1)^k c_k}{2^{2k+1}\pi} \cdot \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{2k+1}{j} \frac{e^{\pi\imath x(2j-2k-1)} - 1}{2j-2k-1} =:$$

$$\sum_{l=-2k-1}^{2k+1} \alpha_l e^{-\pi\imath l x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az alábbi tulajdonságok triviálisan igazak az $R_k$ $(k \in \mathbf{N})$ függvényekre:

(1) az $R_k$ valós együtthatós trigonometrikus polinom;

(2) $0 \le R_k(x) = R_k(-x) \le 1 \quad (x \in \mathbf{R})$;

(3) $R_k(x) \ne 0 \quad (-1 < x < 1)$;

(4) $R_k(0) = 1$;

(5) $R_k(x) + R_k(x+1) = 1 \quad (x \in \mathbf{R})$.

Legyen (a továbbiakban rögzített $k \in \mathbf{N}$ mellett) $m := k/2$ és tekintsük az $R_k$ függvény alábbi felbontását:

$$R_k(x) =: \left(\frac{1+\cos(\pi x)}{2}\right)^m \cdot M_k(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Elemi összefüggésekre hivatkozva

$$R_k(x) = 1 - c_k \cdot \int_0^1 \sin^{2k+1}(\pi t)\, dt + c_k \cdot \int_x^1 \sin^{2k+1}(\pi t)\, dt =$$

$$= c_k \cdot \int_x^1 \left(1 - \cos^2(\pi t)\right)^k \sin(\pi t)\, dt =$$

$$\frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{\cos(\pi x)} (1-u^2)^k\, du = P_k(\cos(\pi x)) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$P_k(y) := \frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{y} (1-u^2)^k\, du \qquad (y \in \mathbf{R})$$

egy $(2k+1)$-edfokú polinom. Világos, hogy a $-1$ a $P_k$ polinomnak $(k+1)$-szeres gyöke, így egy alkalmas $Q_k$ polinommal

$$P_k(y) = (y+1)^{k+1} Q_k(y) \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Ezért az

$$M_k(x) := 2^m (1+\cos(\pi x))^{m+1} Q_k(\cos(\pi x)) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

előírással definiált $M_k$ függvény folytonos. Továbbá

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |M_k(x)| = 2^m \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}} \left((1+\cos(\pi x))^{-m} P_k(\cos(\pi x))\right) =$$

$$2^m \cdot \sup_{-1 \le y \le 1} \left((1+y)^{-m} P_k(y)\right).$$

Ha $-1 \le y \le 1$, akkor

$$(1+y)^{-m} P_k(y) = \frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{y} \frac{(1-u^2)^k}{(1+y)^m}\, du = \frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{y} \left(\frac{1+u}{1+y}\right)^m (1+u)^m (1-u)^k du \le$$

$$\frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{y} (1+u)^m (1-u)^k du = \frac{c_k}{\pi} \cdot \int_{-1}^{y} \left((1-u)\sqrt{1+u}\right)^k du.$$

Mivel a

$$h(u) := (1-u)\cdot \sqrt{1+u} \qquad (-1 < u < 1)$$

függvény deriváltja:

$$h'(u) = -\frac{1+3u}{2\sqrt{1+u}} \qquad (-1 < u < 1),$$

ezért $h'(u) = 0$ pontosan akkor igaz, ha $u = -1/3$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $h$-nak a $(-1/3)$-ban maximuma van és

$$h(-1/3) = \frac{4}{3}\cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ezért

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |M_k(x)| \leq 2^{m+1}\frac{c_k}{\pi}\left(\frac{4}{3}\cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^k \leq \frac{2^{m+2}c_k}{\pi}.$$

A $c_k$ $(k \in \mathbf{N})$ együtthatókról a következőt mondhatjuk:

$$c_k^{-1} = \int_0^1 \sin^{2k+1}(\pi t)\,dt \geq \int_{J_k} \sin^{2k+1}(\pi t)\,dt,$$

ahol a $J_k$ intervallumokat az alábbiak szerint definiáltuk:

$$J_k := \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\sqrt{2k+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\cdot \sqrt{2k+1}}\right] \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$c_k^{-1} \geq \frac{2}{\pi\cdot \sqrt{2k+1}}\left(\sin(\pi/2 + 1/\sqrt{2k+1})\right)^{2k+1} =$$

$$\frac{2}{\pi\cdot \sqrt{2k+1}}\left(\cos(1/\sqrt{2k+1})\right)^{2k+1} \geq$$

$$\frac{2}{\pi\cdot \sqrt{2k+1}}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \geq \frac{2}{\pi e\cdot \sqrt{2k+1}} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$c_k \leq \frac{\pi e\cdot \sqrt{2k+1}}{2} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Egybevetve a fentieket az alábbi becslés adódik:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |M_k(x)| \leq 2^{m+1} e\cdot \sqrt{2k+1} = 2e\cdot \sqrt{(2k+1)2^k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel bármely $1/2 < \alpha < 1$ esetén

$$\frac{2^{(2\alpha-1)k}}{4e^2(2k+1)} \to +\infty \qquad (k \to \infty),$$

ezért alkalmas $N_\alpha \in \mathbf{N}$ „küszöbbel"

$$2e \cdot \sqrt{(2k+1)2^k} < 2^{\alpha k} \qquad (N_\alpha \leq k \in \mathbf{N}).$$

Ezzel beláttuk a következő állítást:

**9.5.1. Lemma.** *Tetszőleges $1/2 < \alpha < 1$ esetén van olyan $N_\alpha \in \mathbf{N}$ természetes szám, amellyel*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |M_k(x)| < 2^{\alpha k} \qquad (N_\alpha \leq k \in \mathbf{N}).$$

Az előbbi jelöléseket megtartva legyen

$$G_k(x) := \prod_{j=0}^{\infty} R_k(x/2^j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 8.4. iii) megjegyzéshez hasonlóan kapjuk, hogy a $G_k$-t definiáló végtelen szorzat minden kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, valamint a $G_k$ folytonos. A 9.5.1. Lemmát felhasználva továbbá megmutatható, hogy (az ottani jelölésekkel)

$$|G_k(x)| \leq C_k \cdot |x|^{(\alpha-1)k} \qquad (k \geq N_\alpha,\ |x| > 1)$$

igaz valamilyen, csak a $k$-tól függő $C_k \geq 0$ konstanssal. Valóban, az előbbi

$$R_k(x) = \left(\frac{1+\cos(\pi x)}{2}\right)^m \cdot M_k(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

felbontást alkalmazva

$$G_k(x) = \left(\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1+\cos(\pi x/2^j)}{2}\right)^m \cdot \prod_{j=0}^{\infty} M_k(x/2^j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az ismert

$$z \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \cos(z/2^j) = \sin z \qquad (z \in \mathbf{R})$$

előállítás alapján[6]

$$\left(\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1+\cos(\pi x/2^j)}{2}\right)^m = \left(\prod_{j=1}^{\infty}\cos(\pi x/2^j)\right)^k = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^k \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Mivel (könnyen beláthatóan) $M_k(0) = 1$, ezért az előbb idézett 8.4. iii) megjegyzésben látottakkal analóg módon kapjuk, hogy a $\prod_{j=0}^{\infty} M_k(x/2^j)$ végtelen szorzat minden kompakt intervallumon egyenletesen konvergens és a szorzat folytonos. Legyen

$$\widetilde{C}_k := \max_{|x|\leq 1}\left|\prod_{j=0}^{\infty} M_k(x/2^j)\right|.$$

Ha most $x \in \mathbf{R}$ és $|x| > 1$, akkor valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett $2^{n-1} < |x| \leq 2^n$ és (ld. 9.5.1. Lemma)

$$\left|\prod_{j=0}^{\infty} M_k(x/2^j)\right| = \prod_{j=0}^{n-1}|M_k(x/2^j)| \cdot \prod_{j=0}^{\infty}|M_k(2^{-n}x/2^j)| \leq$$

$$2^{nk\alpha}\widetilde{C}_k \leq 2^{\alpha k}\widetilde{C}_k \cdot |x|^{k\alpha} \qquad (N_\alpha \leq k \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$|G_k(x)| \leq 2^{\alpha k}\widetilde{C}_k \cdot |x|^{k\alpha} \cdot \left|\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right|^k \leq$$

$$\frac{2^{\alpha k}\widetilde{C}_k}{\pi^k} \cdot |x|^{(\alpha-1)k} =: C_k \cdot |x|^{(\alpha-1)k} \qquad (N_\alpha \leq k \in \mathbf{N}, |x| > 1).$$

A korábban már említett Riesz-lemma (ld. 9.5.) szerint van olyan

$$\omega_k(t) = \sum_{j=0}^{2k+1} \alpha_j e^{\pi \imath j t} \qquad (k \in \mathbf{N},\ t,\ \alpha_0, ..., \alpha_{2k+1} \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus polinom, amelyre

$$|\omega_k(t)|^2 = R_k(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

[6] Az $1 + \cos z = 2\cos^2(z/2)$ $(z \in \mathbf{R})$ elemi azonosságot is felhasználva.

Az $R_k$ előbb felsorolt tulajdonságait felhasználva adódik, hogy az $\omega_k$-ra igazak a 9.5.1. Tételben szereplő • kikötések. Következésképpen az

$$\Omega_k(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \omega_k(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

végtelen szorzat létezik és az $\Omega_k$ folytonos, $\Omega_k \in L^2(\mathbf{R})$. Legyen a $\varphi_k$, továbbá a $\psi_k$ a 9.5.1. Tételnek megfelelő kompakt tartójú skálázási függvény és wavelet: $\widehat{\varphi}_k = \Omega_k$, ill.

$$\psi_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \overline{a_{k1-j}} \delta_2(\tau_j \varphi_k)$$

(alkalmas $a_{kl}$ $(k \in \mathbf{N},\, l \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal), valamint (ld. 9.7. xxviii) megjegyzés, ill. 9.5.1. Tétel)

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset [0, 2k+1] \text{ és } \operatorname{supp} \psi_k \subset [-k-1, k].$$

Ekkor az előbbiek szerint

$$|\widehat{\varphi}_k(x)| = |\Omega_k(x)| = \sqrt{|G_k(x)|} \leq C_k \cdot |x|^{(\alpha-1)k/2} \qquad (k \geq N_\alpha,\ |x| > 1).$$

Innen a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján azt kapjuk, hogy $\varphi_k \in C^r(\mathbf{R})$, hacsak a $k$ „elég nagy” és

$$(*) \qquad r < \frac{(1-\alpha)k}{2} - 1.$$

Nyilván tetszőleges $0 < r \in \mathbf{N}$ „kitevőhöz” és $1/2 < \alpha < 1$ paraméterhez van olyan $N_\alpha \leq k \in \mathbf{N}$, hogy az előbbi $(*)$ egyenlőtlenség teljesül. Ha $N_\alpha \leq \tilde{k} \in \mathbf{N}$ a legkisebb ilyen egész, akkor egy alkalmas $C > 0$ konstanssal $2\tilde{k} + 1 \leq Cr$, tehát

$$\operatorname{supp} \varphi_{\tilde{k}} \subset [0, Cr] \text{ és } \operatorname{supp} \psi_{\tilde{k}} \subset [-Cr, Cr].$$

A 9.5.1. Tétel alkalmazásával jutunk tehát az alábbi állításhoz:

**9.5.2. Tétel.** *Megadható olyan* $C > 0$ *konstans, hogy bármely* $0 < r \in \mathbf{N}$ *esetén létezik az* $L^2(\mathbf{R})$ *térnek olyan multirezolúciója, amelyhez „illeszkedő"* $\varphi$ *skálázási függvényre és* $\psi$ *waveletre az alábbiak teljesülnek:*

i) $\varphi, \psi \in C^r(\mathbf{R})$;

ii) *a* $\varphi, \psi$ *kompakt tartójúak, valamint*

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [0, Cr] \ \textit{ és } \ \operatorname{supp}\psi \subset [-Cr, Cr].$$

Megjegyezzük, hogy a fenti $(*)$ feltételből

$$k > \frac{2r+1}{1-\alpha},$$

és így (ld. 9.7. xxv) megjegyzés) a $\operatorname{Supp}\varphi_k$ (továbbá egyúttal a $\operatorname{Supp}\psi_k$) hosszára a következő becslés adódik:

$$2k+1 > \frac{4r+3-\alpha}{1-\alpha}.$$

A fentiekben a $\varphi_k, \psi_k$ $(k \in \mathbf{N})$ függvényeket meghatározó, a Riesz-lemmából származó $\omega_k$ trigonometrikus polinomok nem egyértelműen léteznek. Ezért az előbbi konstrukció különböző, a 9.5.2. Tételben szereplő $\varphi$ skálázási függvényhez, ill. $\psi_k$ wavelethez vezethet.

## 9.6. Periodikus waveletek

Az eddigi wavelet-konstrukciók végeredménye természetes módon minden esetben egy, az $L^2(\mathbf{R})$ Hilbert-térben ortonormált wavelet-bázis volt. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy hogyan lehet wavelet-bázisokat felépíteni kompakt intervallum felett négyzetesen integrálható függvények körében. Nyilván feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a szóban forgó kompakt intervallum a $[0,1]$ zárt intervallum. Tekintsük tehát az $L^2[0,1]$ teret a „szokásos" skaláris szorzással és normával, amelyeket az alábbi módon fogunk jelölni:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

és

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx} \qquad (f, g \in L^2[0,1]).$$

Legyen továbbá valamilyen $f \in L^1(\mathbf{R})$ függvény esetén a $\mathcal{P}f$ az alábbi módon definiált függvény:

$$\mathcal{P}f(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) \qquad (x \in [0,1]).$$

Világos, hogy bármely $m \in \mathbf{Z}$ mellett

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k+m) \qquad (x \in [0,1]).$$

A $\mathcal{P}$ *periodizáló operátorral* (külön kiemelés nélkül) már korábban is találkoztunk, így pl. a 2.7.4. Tételben a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(x+k)|^2 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényt tekintettük, ami nem más, mint a $h \in L^1(\mathbf{R})$ függvény $\widehat{h}$ Fourier-transzformáltja abszolút érték négyzetének a $\mathcal{P}|\widehat{h}|^2$ periodizáltja.

Könnyű belátni, hogy a $\mathcal{P}f$-et definiáló fenti végtelen sor m.m. $x \in [0,1]$ esetén abszolút konvergens, $\mathcal{P}f \in L^1[0,1]$ és

$$\int_0^1 |\mathcal{P}f(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Valóban,

$$\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x+k)|\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

ezért

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]).$$

Továbbá

$$|\mathcal{P}f(x)| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| \qquad (x \in [0,1])$$

miatt

$$\int_0^1 |\mathcal{P}f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x+k)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Ha

$$f_{kj}(x) := 2^{k/2} f(2^k x - j) \qquad (x \in \mathbf{R},\ k, j \in \mathbf{Z}),$$

akkor $f_{kj} \in L^1(\mathbf{R})$ és

$$\mathcal{P}f_{kj}(x) = 2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(2^k(x+l) - j) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{k/2} f(2^k x + 2^k l - j) =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{k/2} f(2^k x + 2^k l - j - 2^k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_{kj+2^k}(x+l) = \mathcal{P}f_{kj+2^k}(x),$$

továbbá

$$\mathcal{P}f_{kj+1}(x) = 2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(2^k x + 2^k l - j - 1) =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{k/2} f(2^k(x + l - 2^{-k}) - j) =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_{kj}(x - 2^{-k} + l) = \mathcal{P}f_{kj}(x - 2^{-k}) \qquad (x \in [0,1]).$$

Számoljuk ki a $\mathcal{P}f_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ függvények (trigonometrikus) Fourier-együtthatóit. Legyen ehhez $s \in \mathbf{Z}$, ekkor

$$\gamma_s := \int_0^1 \mathcal{P}f_{kj}(x) e^{-2\pi \imath s x} dx = \int_0^1 2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(2^k(x+l) - j) e^{-2\pi \imath s x} dx =$$

$$2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(2^k(x+l) - j) e^{-2\pi \imath s x} dx =$$

$$2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} f(2^k t - j) e^{-2\pi \imath s (t-l)} dt =$$

$$= 2^{k/2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} f(2^k t - j) e^{-2\pi \imath s t} dt = 2^{k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(2^k t - j) e^{-2\pi \imath s t} dt =$$

$$2^{-k/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi \imath s (y+j) 2^{-k}} dy = 2^{-k/2} e^{-2\pi \imath s j 2^{-k}} \cdot \widehat{f}(s/2^k).^7$$

Tegyük most fel, hogy adott a $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ skálázási függvény (ld. 8.1.) által generált $(V_k, k \in \mathbf{Z})$ multirezolúció és legyen a fentiekben $f := \varphi$. Ekkor (ld. 8.2.) bármely $\mathbf{Z} \ni k < 0$ esetén

$$\widehat{\varphi}(s/2^k) = 0 \qquad (0 \neq s \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a $\mathcal{P}\varphi_{kj}$ függvény (trigonometrikus) Fourier-együtthatóiról az alábbiakat mondhatjuk:

$$\gamma_s = \int_0^1 \mathcal{P}\varphi_{kj}(x) e^{-2\pi \imath s x} dx = 0 \qquad (j \in \mathbf{Z},\, 0 \neq s \in \mathbf{N}),$$

tehát tetszőleges $\mathbf{Z} \ni k < 0$ esetén (az előbbiekben a $\gamma_s$-ekre nyert formulát az $s = 0$ választással alkalmazva) $\widehat{\varphi}(0) = 1$ (ld. 8.2.) alapján:

$$\mathcal{P}\varphi_{kj} = \gamma_0 = \int_0^1 \mathcal{P}\varphi_{kj}(x)\, dx = 2^{-k/2} \widehat{\varphi}(0) = 2^{-k/2} \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Vezessük be a következő

$$U_k := \overline{\mathcal{L}[\{\mathcal{P}\varphi_{kj} \in L^2[0,1] : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

zárt altereket az $L^2[0,1]$ Hilbert-térben. Mivel a fentiek szerint

$$\mathcal{P}\varphi_{kj} = \mathcal{P}\varphi_{kj+2^k} \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért

$$U_k := \overline{\mathcal{L}[\{\mathcal{P}\varphi_{kj} \in L^2[0,1] : j = 0, ..., 2^k - 1\}]} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Jelöljük továbbá $\psi$-vel a $\varphi$ skálázási függvény által a 8.3.1. Tételben meghatározott waveletet.[8]

---

[7]Mivel nyilvánvaló, hogy $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |f(2^k(x+l) - j) e^{-2\pi \imath s x}|\, dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} |f(2^k x - j)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(2^k x - j)|\, dx = 2^{-k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, ezért a Lebesgue-féle konvergencia-tétel miatt az előbbiekben a szummázás és az integrálás sorrendje valóban felcserélhető volt.

[8]Legyen $\mathbf{1}(x) := 1 \quad (x \in \mathbf{R})$.

**9.6.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a fentieken túl* $\mathcal{P}|\varphi|$, $\mathcal{P}|\psi| \in L^\infty[0,1]$ *is igaz. Ekkor*

(1) $U_k \subset U_{k+1} \quad (k \in \mathbf{N})$;

(2) *tetszőleges* $k \in \mathbf{N}$ *mellett a* $\mathcal{P}\varphi_{kj} \quad (j = 0, ..., 2^k - 1)$ *rendszer ortonormált bázis az* $U_k$*-ban;*

(3) *bármely* $k \in \mathbf{N}$ *esetén az* $\mathbf{1}$, $\mathcal{P}\psi_{lj} \quad (l = 0, ..., k-1$ *és* $j = 0, ..., 2^l - 1)$ *rendszer ortonormált bázis az* $U_k$*-ban;*

(4) *az* $\bigcup_{k=0}^\infty U_k$ *halmaz mindenütt sűrű az* $L^2[0,1]$*-ben, következésképpen az* $\mathbf{1}, \mathcal{P}\psi_{kj} \quad (k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1)$ *rendszer ortonormált bázis az* $L^2[0,1]$ *térben.*

Mutassuk meg először, hogy

$$\mathcal{P}\varphi_{kj} \in U_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1)$$

(amiből az (1) állítás nyilván következik). Valóban, mivel a $\varphi$ skálázási függvény, ezért $\varphi_{kj} \in V_{k+1}$. Így alkalmas $\alpha_r \ (r \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$\varphi_{kj} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r \varphi_{k+1r}.$$

A $\mathcal{P}|\varphi| \in L^\infty[0,1]$ feltételt figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} |\alpha_r| = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |\langle \varphi_{kj}, \varphi_{k+1r} \rangle| \leq$$

$$2^{k+1/2} \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(2^k x - j)| \cdot |\varphi(2^{k+1} x - r)|\, dx =$$

$$2^{k+1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(2^k x - j)| \cdot \mathcal{P}|\varphi|(2^{k+1} x)\, dx \leq$$

$$C 2^{k+1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(2^k x - j)|\, dx = C\sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < +\infty$$

(ahol valamilyen $C > 0$ konstanssal $\mathcal{P}|\varphi|(x) \leq C \ $ (m.m. $x \in [0,1]$)). Alkalmazva a kettős sorokra vonatkozó elemi ismereteket innen azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{P}\varphi_{kj}(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r \varphi_{k+1r}(x + l) =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{k+1r}(x+l) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r \mathcal{P}\varphi_{k+1r}(x) \qquad (x \in [0,1]),$$

tehát

$$\mathcal{P}\varphi_{kj} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r \mathcal{P}\varphi_{k+1r} \in U_{k+1}.$$

Ezzel az (1)-et beláttuk. Legyen most $k \in \mathbf{N}$, $j, s = 0, ..., 2^k - 1$, ekkor

$$\int_0^1 \mathcal{P}\varphi_{kj}(x)\overline{\mathcal{P}\varphi_{ks}(x)}\, dx = \int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj}(x+l) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{ks}(x+n)}\, dx =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj}(x+l)\overline{\varphi_{ks}(x+n)}\, dx =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj}(x+n+l)\overline{\varphi_{ks}(x+n)}\, dx =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj}(t+l)\overline{\varphi_{ks}(t)}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj}(t+l)\overline{\varphi_{ks}(t)}\, dt = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj-l2^k}(t)\overline{\varphi_{ks}(t)}\, dt,$$

ahol

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj-l2^k}(t)\overline{\varphi_{ks}(t)}\, dt = 0,$$

ha $s \neq j - l2^k$. Mivel $j, s = 0, ..., 2^k - 1$, ezért $s = j - l2^k$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $l = 0$ és $s = j$. Tehát $s \neq j$ esetén

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{kj-l2^k}(t)\overline{\varphi_{ks}(t)}\, dt = 0,$$

míg az $s = j$ és $l = 0$ esetben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{kj}(t)|^2 dt = 1,$$

ami a (2) állítást jelenti.[9]

Ugyanígy látható be a (3) kijelentés.

Jelöljük most $P_k$-val $(k \in \mathbf{N})$ a

$$P_k : L^2[0,1] \to U_k$$

ortogonális projekciót. A (2) állítás alapján

$$P_k(f) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle f, \mathcal{P}\varphi_{kj} \rangle \cdot \mathcal{P}\varphi_{kj} \qquad (f \in L^2[0,1]).$$

Legyen továbbá $r \in \mathbf{Z}$, és számítsuk ki a $P_k(e_r)$ függvény $r$-edik (trigonometrikus) Fourier-együtthatóját.[10] Tehát (az előbb nyert formuláink szerint)

$$\gamma_{kr} := \int_0^1 P_k(e_r)(x) e_{-r}(x)\, dx = \langle P_k(e_r), e_r \rangle = \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle e_r, \mathcal{P}\varphi_{kj} \rangle \cdot \langle \mathcal{P}\varphi_{kj}, e_r \rangle =$$

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle \mathcal{P}\varphi_{kj}, e_r \rangle_2|^2 = \sum_{j=0}^{2^k-1} |2^{-k/2} e^{-2\pi\imath rj2^{-k}} \cdot \widehat{\varphi}(r/2^k)|^2 =$$

$$2^{-k} \cdot \sum_{j=0}^{2^k-1} |\widehat{\varphi}(r/2^k)|^2 = |\widehat{\varphi}(r/2^k)|^2.$$

Mivel $\varphi \in L^1(\mathbf{R})$, ezért a $\widehat{\varphi}$ folytonos, így

$$\widehat{\varphi}(r/2^k) \to \widehat{\varphi}(0) = 1 \qquad (k \to +\infty).$$

Következésképpen minden $r \in \mathbf{Z}$ esetén

$$\gamma_{kr} \to 1 \qquad (k \to +\infty).$$

Innen nem nehéz belátni, hogy

$$\|P_k(e_r) - e_r\| \to 0 \qquad (k \to +\infty).$$

[9]Megjegyezzük, hogy a fentiekben az összegzések és az integrálás felcserélhetőségét a már korábban részletezettekkel analóg módon a $\mathcal{P}|\varphi| \in L^\infty[0,1]$ feltétel biztosítja.

[10]Emlékeztetőül: $e_r(x) := e^{2\pi\imath rx} \quad (x \in \mathbf{R})$.

Ui. egyrészt a $P_k$ projekció, ezért

$$\|P_k(f)\| \leq \|f\| \qquad (f \in L^2[0,1]),$$

másrészt

$$0 \leq \|P_k(e_r) - e_r\|^2 = \|P_k(e_r)\|^2 + 1 - \langle P_k(e_r), e_r\rangle - \langle e_r, P_k(e_r)\rangle \leq$$

$$2 - \langle P_k(e_r), e_r\rangle - \langle e_r, P_k(e_r)\rangle = 2 - \gamma_{kr} - \overline{\gamma_{kr}} \to 0 \qquad (k \to +\infty).$$

Ezzel egyúttal az is kiderült, hogy tetszőleges $T$ trigonometrikus polinomra

$$\|P_k(T) - T\| \to 0 \qquad (k \to +\infty).$$

Mivel a jól ismert Weierstrass-féle approximációs tétel szerint a trigonometrikus polinomok mindenütt sűrűn vannak az $L^2[0,1]$-ben,[11] ezért minden $f \in L^2[0,1]$ esetén is igaz, hogy

$$\|P_k(f) - f\| \to 0 \qquad (k \to +\infty).$$

Világos, hogy ebből a (4) kijelentés már következik.

## 9.7. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy valamilyen $r \in \mathbf{N}$ esetén a

$$0 \neq \psi \in C^r \cap L^2(\mathbf{R})$$

olyan wavelet,[12] amelyre minden $k = 0, 1, ..., r$ mellett a $\psi^{(k)}$ deriváltak korlátosak, és alkalmas $C \geq 0$ együtthatóval, valamint $p > r + 1$ kitevővel

$$|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1 + |t|)^p} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

igaz. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., r).$$

[11] Egészen pontosan az említett trigonometrikus polinomoknak a $[0,1]$-re való leszűkítései.

[12] Tehát $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ és $r$-szer folytonosan differenciálható.

ii) A $k=0$ eset (ld i)), azaz az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 0$$

egyenlőség igazolása meglehetősen egyszerű: mivel a $\psi$ nem azonosan nulla, folytonos függvény, ezért van olyan $k, l \in \mathbf{N}$, hogy

$$\psi(N) := \psi(k2^{-l}) \neq 0.$$

Ha $l < j \in \mathbf{N}$, akkor (kihasználva a $2^{k/2}\psi(2^k x - j)$ $(k, j \in \mathbf{Z})$ függvényekből álló rendszer ortogonalitását)

$$0 = 2^j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\psi(2^j x - 2^j N)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\psi(2^{-j}t + N)\,dt.$$

A $\psi$-re tett feltétel miatt

$$|\psi(t)\psi(2^{-j} + N)| \le |\psi(t)| \cdot \frac{C}{1 + |2^{-j}t + N|} \le C \cdot |\psi(t)| \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ezért a Lebesgue-féle konvergencia-tétel miatt

$$0 = \lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\psi(2^{-j}t + N)\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{j\to+\infty} \psi(t)\psi(2^{-j}t + N)\,dt = \psi(N) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt,$$

és így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0.$$

(Innen a $k = 1, ..., r$ esetek (a Taylor-formulát felhasználva) már teljes indukcióval következnek.)

iii) A 9.1.1. Tétellel kapcsolatban fentebb említett cascade-algoritmusban (ld. 9.1.) szereplő $\varphi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat $\|.\|$-ban vett konvergenciája viszonylag egyszerűen „elintézhető”. Legyen ui.

$$c_n(k) := \langle \varphi_{n+1}, \tau_k \varphi_n \rangle \qquad (n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z}).$$

Mivel $\varphi_0 = \chi_{[0,1)}$ és

$$\varphi_1 = \sum_{i=0}^{3} a_i \delta_2(\tau_i \varphi_0) = a_0 \chi_{[0,1/2)} + a_1 \chi_{[1/2,1)} + a_2 \chi_{[1,3/2)} + a_3 \chi_{[3/2,2)},$$

ezért

$$c_0(0) = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4},$$
$$c_0(1) = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

és

$$c_0(k) = 0 \qquad (k \in \mathbf{Z} \setminus \{0,1\}).$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy $c_n(k) = 0$, ha $k \in \mathbf{Z}$ és $|k| > 2$. Legyen továbbá

$$\mathbf{c}_n := (c_n(-2), c_n(-1), c_n(0), c_n(1), c_n(2)) \in \mathbf{R}^5 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$\mathbf{c}_0 = (0, 0, (2+\sqrt{3})/4, (2-\sqrt{3})/4, 0)$$

és

$$\mathbf{c}_{n+1} = T\mathbf{c}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

a következő $T$ mátrixszal:

$$T = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 16 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{5\times 5}.$$

Azt sem nehéz ellenőrizni, hogy $T = VJV^{-1}$, amikor is

$$V := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ és } J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Világos, hogy

$$\mathbf{c}_n = T^n \mathbf{c}_0 = VJ^nV^{-1}\mathbf{c}_0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$J^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{-n} & n4^{1-n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4^{-n} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/6 & 1/12 & 0 & -1/12 & -1/6 \\ 1/3 & 1/24 & 0 & -1/24 & -1/3 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/32 & 0 & 1/32 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$\langle \varphi_{n+1}, \varphi_n \rangle = c_n(0) = 1 - \varepsilon_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$\varepsilon_n := 4^{-n-2}(2 - \sqrt{3})(3n + 4) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|^2 = \|\varphi_{n+1}\|^2 - 2\langle \varphi_{n+1}, \varphi_n \rangle + \|\varphi_n\|^2 = 2 - 2(1 - \varepsilon_n) = 2\varepsilon_n,$$

és ennek alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2(2 - \sqrt{3})(3n + 4)}}{2^{n+2}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{2^{n+2}} = \frac{3}{2}.$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|$ sor konvergenciájából viszont az következik, hogy

$$\|\varphi_m - \varphi_n\| \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

tehát, hogy a $(\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat $\|.\|$-ban konvergens.

iv) Megjegyezzük, hogy a $(\varphi_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat (ld. iii)) $\|.\|$-ban való konvergenciájából a 9.1.1. Tétel és a 9.1.2. Tétel állításai a $\varphi, \psi$ függvények folytonosságának a kivételével már következnek. A $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 3]$ állítást pl. az alábbi módon kapjuk: az $n = 0, 1$ esetekben a fenti iii) megjegyzés elején explicite láttuk, hogy $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [0, 3]$. Ha viszont valamilyen $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset [0, b],$$

ahol $b \leq 3$, akkor a $\varphi_{n+1}$ függvény definíciójából

$$\operatorname{supp}\varphi_{n+1} \subset [0,(b+3)/2]$$

következik, így $b+3 \leq 6$ miatt

$$\operatorname{supp}\varphi_{n+1} \subset [0,3].$$

Ezért

$$\operatorname{supp}\varphi_n \subset [0,3] \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\|\varphi_n - \varphi\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

alapján a $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,3]$ tartalmazás már nyilvánvaló.

v) A 9.1.1., 9.1.2. Tételek bizonyítását illetően az alábbiak szerint is eljárhatunk. A $\varphi$ Daubechies-féle skálázási függvénytől (ld. 9.1.) többek között azt várjuk, hogy folytonos legyen és $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,3]$ teljesüljön. Ezért a (8.2.1) skálázási egyenletet pontonként felírva azt kapjuk, hogy (a 9.1.1. Tétel után megadott $a_0, a_1, a_2, a_3$ együtthatókkal)

$$\varphi(t) = a_0\varphi(2t) + a_1\varphi(2t-1) + a_2\varphi(2t-2) + a_3\varphi(2t-3) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Vegyük észre, hogy az előbbi egyenletből következően a

$$\varphi(t) \quad (t = 0,1,2,3) \text{ és a } \varphi(t) := 0 \quad (t \in \mathbf{Z} \setminus [0,3])$$

helyettesítési értékek megadásával egyúttal (pl. teljes indukcióval) a

$$\mathcal{D} := \{k2^{-j} \in \mathbf{R} : j \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{Z}\}$$

halmaz minden pontjában is megadtuk a $\varphi$ függvényt úgy, hogy minden egyes $t \in \mathcal{D} \setminus [0,3]$ helyen $\varphi(t) = 0$. Az

$$\mathbf{x} := (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3))$$

vektorra viszont a fenti egyenletből az $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenletrendszert kapjuk, ahol az $\mathbf{A}$ mátrix a következő:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $1$ az $\mathbf{A}$ mátrixnak egyszeres sajátértéke, ezért az $\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$ egyenletrendszernek (nem nulla szorzó erejéig) egyértelműen létezik nem nulla megoldása. Ha a $\varphi$ függvénytől még azt is megköveteljük, hogy

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{3} \varphi(k) = 1$$

legyen, akkor a

$$(\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)) = (0, (1+\sqrt{3})/2, (1-\sqrt{3})/2, 0)$$

vektor egyértelmű (nem nulla) megoldása az említett egyenletrendszernek. Ezzel megmutattuk, hogy egyértelműen létezik olyan

$$\varphi : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$$

függvény, amelyre

$$\varphi(t) = a_0\varphi(2t) + a_1\varphi(2t-1) + a_2\varphi(2t-2) + a_3\varphi(2t-3) \qquad (t \in \mathcal{D})$$

és

$$\varphi(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D} \setminus [0,3]),$$

valamint

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k) = 1.$$

Sőt, tetszőleges $x \in \mathcal{D}$ esetén

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k) = 1$$

is igaz. Ti. ez az $x \in \mathbf{Z}$ (egész) számokra a

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k) = 1$$

egyenlőséget jelenti. Ha pedig valamilyen $j \in \mathbf{N}$ természetes számra minden $x = k2^{-j}$ választással

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k) = 1,$$

akkor tetszőleges $s \in \mathbf{Z}$ mellett az $y := s2^{-j-1}$ jelöléssel

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(2y-k) = 1$$

fennáll. Innen a $\varphi$-re vonatkozó fenti skálázási egyenlet (ld. 8.2.) alapján rögtön következik a

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(y-k) = 1$$

egyenlőség is.

vi) Az előbbi megjegyzésre hivatkozva legyen valamilyen $j \in \mathbf{N}$ esetén

$$\mathcal{D}_j := \{k2^{-j} \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{Z}\},$$

más szóval

$$\mathcal{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_j.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\varphi(x-k) = x + \frac{\sqrt{3}-3}{2} \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Ha ui. $x \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\varphi(x-k) = (x-1)\varphi(1) + (x-2)\varphi(2) =$$

$$(x-1)\frac{1+\sqrt{3}}{2} + (x-2)\frac{1-\sqrt{3}}{2} = x + \frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

Legyen $j \in \mathbf{N}$ és tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőség a $\mathcal{D}_j$ halmaz pontjaiban igaz. Ha $x \in \mathcal{D}_{j+1} \setminus \mathcal{D}_j$, akkor egy $n \in \mathbf{Z}$ és $l \in \mathbf{N}, 0 < l < 2^{j+1}$ mellett

$$x = (n2^{j+1} + l)2^{-j-1}.$$

Következésképpen $x = n + \alpha$, ahol $0 < \alpha < 1$ és $\alpha \in \mathcal{D}_{j+1}$. Ezért

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\varphi(x-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\varphi(n-k+\alpha) =$$

$$= (n-2)\varphi(2+\alpha) + (n-1)\varphi(1+\alpha) + n\varphi(\alpha) =$$

$$n(\varphi(2+\alpha) + \varphi(1+\alpha) + \varphi(\alpha)) - 2\varphi(2+\alpha) - \varphi(1+\alpha) =$$

$$n \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha+k) - 2\varphi(2+\alpha) - \varphi(1+\alpha) = n - 2\varphi(2+\alpha) - \varphi(1+\alpha).$$

Az állításunk $x$-beli teljesüléséhez tehát azt kell belátni, hogy

$$-2\varphi(2+\alpha) - \varphi(1+\alpha) = \alpha + \frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

A $\varphi$-re vonatkozó skálázási egyenlet (ld. v)) szerint (figyelembe véve azt is, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,3]$)

$$\varphi(1+\alpha) = a_0\varphi(2+2\alpha) + a_1\varphi(1+2\alpha) + a_2\varphi(2\alpha) + a_3\varphi(2\alpha-1)$$

és

$$2\varphi(2+\alpha) = 2a_2\varphi(2+2\alpha) + 2a_3\varphi(1+2\alpha).$$

Innen

$$2\varphi(2+\alpha) + \varphi(1+\alpha) =$$

$$(a_0 + 2\alpha_2)\varphi(2+2\alpha) + (a_1 + 2a_3)\varphi(1+2\alpha) + a_2\varphi(2\alpha) + a_3\varphi(2\alpha-1),$$

tehát (az v) megjegyzés szerinti

$$\varphi(2\alpha+2) + \varphi(2\alpha+1) + \varphi(2\alpha) + \varphi(2\alpha-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\alpha-k) = 1$$

egyenlőséget is felhasználva)

$$-2\varphi(2+\alpha) - \varphi(1+\alpha) =$$

$$\frac{\sqrt{3}-7}{4}\varphi(2+2\alpha) + \frac{\sqrt{3}-5}{4}\varphi(1+2\alpha) +$$

$$\frac{\sqrt{3}-3}{4}\varphi(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}-1}{4}\varphi(2\alpha-1) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\Big(-2\varphi(2\alpha+2) - \varphi(2\alpha+1) + \varphi(2\alpha-1)\Big) -$$

$$\frac{3}{4}\Big(\varphi(2\alpha+2) + \varphi(2\alpha+1) + \varphi(2\alpha) + \varphi(2\alpha-1)\Big)$$

adódik. Mivel minden $l \in \mathbf{Z}$ esetén nyilván $2\alpha+l \in \mathcal{D}_j$ igaz, ezért az indukciós feltétel szerint

$$-2\varphi(2\alpha+2)-\varphi(2\alpha+1)+\varphi(2\alpha-1)=2\alpha+\frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

Mindezt egybevetve a fentiekkel (az előbb idézett v)-beli egyenlőséget újra alkalmazva) azt kapjuk, hogy

$$-2\varphi(2+\alpha)-\varphi(1+\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\left(2\alpha+\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)-\frac{3}{4}=\alpha+\frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

vii) A most belátott vi)-beli egyenlőségből (az ottani jelölésekkel) rögtön következnek az alábbiak:

a) bármely $x \in \mathcal{D} \cap [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} 2\varphi(x)+\varphi(x+1)&=x+\frac{1+\sqrt{3}}{2},\\ 2\varphi(x+2)+\varphi(x+1)&=-x+\frac{3-\sqrt{3}}{2},\\ \varphi(x)-\varphi(x+2)&=x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \end{aligned}$$

valamint

b) tetszőleges $x \in \mathcal{D}$ helyen

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_0\varphi(2x) & (0\le x<1/2)\\ a_3\varphi(2x-1)+a_0(2x-1)+(2+\sqrt{3})/4 & (1/2\le x<1)\\ a_0\varphi(2x-1)+a_3(2x-2)+\sqrt{3}/4 & (1\le x<3/2)\\ a_3\varphi(2x-2)-a_0(2x-3)+1/4 & (3/2\le x<2)\\ a_0\varphi(2x-2)-a_3(2x-4)+(3-2\sqrt{3})/4 & (2\le x<5/2)\\ a_3\varphi(2x-3) & (5/2\le x\le 3)\\ 0 & (x\in\mathbf{R}\setminus[0,3]). \end{cases}$$

Az előző megjegyzések szerint ui. az $x \in \mathcal{D}$ pontokban

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) = 1$$

és

$$-\varphi(x+1) - 2\varphi(x+2) = x + (\sqrt{3} - 3)/2,$$

amiből az a)-beli egyenlőségeket a megfelelő tagok kifejezése után kapjuk. Hasonlóan, ha pl. $1/2 \le x < 1$, akkor $1 \le 2x < 2$, így a skálázási egyenlet (ld. 8.2.) alapján

$$\varphi(x) = a_0\varphi(2x) + a_1\varphi(2x-1).$$

Továbbá az a)-t felhasználva

$$2\varphi(2x-1) + \varphi(2x) = 2x - 1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

ezért

$$\varphi(x) = (a_1 - 2a_0)\varphi(2x-1) + a_0(2x-1) + a_0\frac{1+\sqrt{3}}{2} =$$

$$a_3\varphi(2x-1) + a_0(2x-1) + \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

viii) Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén legyen $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az a függvény, amire (a vii) megjegyzésbeli szereplőkkel)

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} a_0 f(2x) & (0 \le x < 1/2) \\ a_3 f(2x-1) + a_0(2x-1) + (2+\sqrt{3})/4 & (1/2 \le x < 1) \\ a_0 f(2x-1) + a_3(2x-2) + \sqrt{3}/4 & (1 \le x < 3/2) \\ a_3 f(2x-2) - a_0(2x-3) + 1/4 & (3/2 \le x < 2) \\ a_0 f(2x-2) - a_3(2x-4) + (3-2\sqrt{3})/4 & (2 \le x < 5/2) \\ a_3 f(2x-3) & (5/2 \le x \le 3) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [0,3]). \end{cases}$$

Az előző megjegyzés b) állítása szerint pl. (formálisan)

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Ha $j \in \mathbf{N}$, akkor a $\varphi_j$ jelentse az v)-ben meghatározott $\varphi$ függvényt a $\mathcal{D}_j$ halmaz pontjaiban interpoláló lineáris splinet. Más szóval a

$$\varphi_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

folytonos függvény,

$$\varphi_j(t) = \varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_j),$$

és minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén alkalmas $\alpha_{kj}, \beta_{kj} \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$\varphi_j(t) = \alpha_{kj} t + \beta_{kj} \qquad (k2^{-j} \le t \le (k+1)2^{-j}).$$

Ekkor

$$\varphi_{j+1} = \tilde{\varphi}_j \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

Ti. világos, hogy a $\tilde{\varphi}_j$ olyan lineáris spline, amelynek a töréspontjai a $\mathcal{D}_{j+1}$ halmazban vannak. Továbbá bármely $x \in \mathcal{D}_{j+1}$ helyen

$$2x - k \in \mathcal{D}_j \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

ezért (ld. vii) megjegyzés b))

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \varphi(x) = \varphi_{j+1}(x).$$

Így

$$\varphi_{j+1} - \varphi_j = \tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_{j-1} \qquad (0 < j \in \mathbf{N}).$$

Legyen pl. $1/2 \le x < 1$, amikor is

$$\varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) = \tilde{\varphi}_j(x) - \tilde{\varphi}_{j-1}(x) = a_3(\varphi_j(2x-1) - \varphi_{j-1}(2x-1)).$$

Ha tehát

$$y_x := 2x - 1,$$

akkor

$$\varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) = a_3(\varphi_j(y_x) - \varphi_{j-1}(y_x)).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha pl.

$$2 \le x < 5/2 \text{ és } y_x := 2x - 2,$$

akkor

$$\varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) = a_0(\varphi_j(y_x) - \varphi_{j-1}(y_x)).$$

Továbbá bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén alkalmas $y_x \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) = \gamma_x(\varphi_j(y_x) - \varphi_{j-1}(y_x)),$$

ahol $\gamma_x = a_0$, vagy $\gamma_x = a_3$. Innen

$$\|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_\infty \leq a_0 \cdot \|\varphi_j - \varphi_{j-1}\|_\infty,$$

amiből teljes indukcióval

$$\|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_\infty \leq a_0^j \cdot \|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty$$

következik. Mivel

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty < +\infty$$

és $0 < a_0 < 1$, ezért

$$\|\varphi_{j+l} - \varphi_j\|_\infty \leq \sum_{s=j}^{j+l-1} \|\varphi_{s+1} - \varphi_s\|_\infty \leq$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty \cdot \sum_{s=j}^{\infty} a_0^s \to 0 \qquad (j, l \to \infty)$$

alapján a $(\varphi_j, j \in \mathbf{N})$ függvénysorozat egyenletes konvergenciája adódik. Ha tehát

$$\varphi := \lim_{j \to \infty} \varphi_j,$$

akkor a $\varphi$ függvény folytonos, $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 3]$ és

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(k) = 1,$$

valamint

$$\varphi(t) = a_0\varphi(2t) + a_1\varphi(2t-1) + a_2\varphi(2t-2) + a_3\varphi(2t-3) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Röviden tehát az v) megjegyzésbeli $\varphi$ függvényt (az említett megjegyzés végén felsorolt tulajdonságok megtartása mellett) a $\mathcal{D}$ halmazról folytonos függvénnyé terjesztettük ki az egész számegyenesre.

ix) A viii) megjegyzésben kapott $\varphi$ függvényről már nem nehéz belátni, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(t-k)\,dt = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Valóban, $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,3]$ (és $\varphi(0) = \varphi(3) = 0$) miatt a

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(t-k) = 1 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyenlőség bal oldalán bármely $t \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb három nullától különöző tag van. Ha tehát $n \in \mathbf{N}$ és

$$S_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \varphi(t-k) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor egy alkalmas (az $n$-től és a $t$-től független) $C > 0$ konstanssal

$$|S_n(t)| \leq C \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$S_n(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq n-3) \\ \\ 0 & (|t| \geq n+3). \end{cases}$$

Ezért

$$2(n-3) - 12C \leq \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(t)\,dt \leq 2(n-3) + 12C.$$

Világos ugyanakkor, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(t)\,dt = (2n+1)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt,$$

más szóval

$$\frac{2(n-3)-12C}{2n+1} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leq \frac{2(n-3)+12C}{2n+1}.$$

Így (az $n \to \infty$ határátmenettel)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1$$

valóban fennáll. Legyen továbbá

$$I_k := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(t-k)\, dt \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Nyilvánvaló, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,3]$ miatt $I_k = 0$ $(|k| \geq 3)$ és

$$I_k = I_{-k} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Következésképpen elegendő azt megmutatnunk, hogy $I_0 = 1$ és $I_1 = I_2 = 0$. Mivel

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(t-k)\, dt = I_0 + 2(I_1 + I_2),$$

ezért az $I_1 = I_2 = 0$ egyenlőségből $I_0 = 1$ már adódik. Némi számolás után (a részleteket itt mellőzve) azt kapjuk, hogy a

$$c := a_0(1-a_0) + a_3(1-a_3)$$

jelöléssel

$$(1 - a_0 a_3)I_1 + cI_2 = cI_0,$$
$$cI_0 + (1-a_3)I_1 + ((1-a_3)^2 + (1-a_0)^2 + a_3^2)I_2 = 2I_1,$$
$$a_0 a_3 I_1 + cI_2 = 2I_2.$$

Innen közvetlenül ellenőrizhető, hogy $c = 0$, amiből $I_1 = I_2 = 0$ már nyilvánvaló.

x) Ha a $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ függvény mellett a $\rho \in L^2(\mathbf{R})$ is a 9.2.1. Tétel állításában szereplő skálázási függvény, más szóval a $(\tau_j \rho, j \in \mathbf{Z})$ rendszer is ortonormált bázis a $V_0$-ban,[13] akkor a 9.2. pontban mondottakkal analóg módon a

$$\widehat{\varphi}(x) = \alpha(x)\widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

[13] A $V_k \subset L^2(\mathbf{R})$ $(k \in \mathbf{Z})$ zárt altereknek a sorozata a $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény által meghatározott Riesz-multirezolúció (ld. 9.2.).

egyenlőség mellett

$$\widehat{\rho}(x) = \tilde{\alpha}(x)\widehat{h}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

(valamilyen, az 1 szerint periodikus $\alpha$, $\tilde{\alpha}$ függvényekkel) is igaz. Mivel itt

$$\alpha(x) \neq 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

így

$$\widehat{h}(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x)}{\alpha(x)} \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Ezért

$$\widehat{\rho}(x) = \beta(x)\widehat{\varphi}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ahol a $\beta := \tilde{\alpha}/\alpha$ az 1 szerint periodikus (Lebesgue-)mérhető függvény. A $\rho$ függvényre is m.m. $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\rho}(x+k)|^2 = |\beta(x)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(x+k)|^2 = |\beta(x)|^2,$$

következésképpen

$$|\beta(x)| = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

xi) Sőt, ha a x) megjegyzésben valamilyen, az 1 szerint periodikus mérhető $\omega$ függvénnyel

$$\widehat{\rho}(x) = \omega(x)\widehat{\varphi}(x) \text{ és } |\omega(x)| = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

akkor a $\rho \in V_0$ skálázási függvény. Ui.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\rho}(x+k)|^2 = |\omega(x)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(x+k)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ami (ld. (8.1.1)) szükséges és elégséges feltétele a $(\tau_j\rho, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormáltságának. Ha az $\omega$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon (trigonometrikus) Fourier-sorba fejtjük:

$$\omega(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j e^{2\pi \imath j x} \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]),^{14}$$

[14] Ahol tehát $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|^2 < +\infty$.

akkor a

$$\sigma := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \tau_j \varphi \ (\in L^2(\mathbf{R}))$$

függvényre bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén m.m. $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$\widehat{\tau_k \sigma}(x) = e^{2\pi\imath kx} \cdot \widehat{\sigma}(x) = e^{2\pi\imath kx} \cdot \omega(x)\widehat{\varphi}(x) = e^{2\pi\imath kx} \cdot \widehat{\rho}(x) = \widehat{\tau_k \rho}(x).$$

Innen a Fourier-transzformáció injektivitására hivatkozva azt mondhatjuk, hogy

$$\tau_k \sigma(x) = \tau_k \rho(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\tau_k \sigma = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \tau_{k+j} \varphi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j-k} \tau_j \varphi \in V_0,$$

ezért $\tau_k \rho \in V_0$ $(k \in \mathbf{Z})$. Mivel

$$\widehat{\varphi}(x) = \omega^{-1}(x)\widehat{\rho}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

és

$$|\omega^{-1}(x)| = 1 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ezért ugyanígy kapjuk, hogy

$$\tau_k \varphi \in \widetilde{V}_0 := \overline{\mathcal{L}[\{\tau_j \rho \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]}.$$

Következésképpen $V_0 = \widetilde{V}_0$, így a $(\tau_j \rho, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázis a $V_0$-ban, a $\rho$ pedig skálázási függvény.

xii) Az előbbi megjegyzésben szereplő $(\tau_j \rho, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormáltságát egyébként a (8.1.1) összfüggésre való hivatkozás nélkül közvetlenül is megkaphatjuk: bármely $j, l \in \mathbf{Z}$ esetén[15]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_j \rho(x) \overline{\tau_l \rho(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\tau_j \rho}(x) \overline{\widehat{\tau_l \rho}(x)}\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\imath(j-l)x} \cdot |\widehat{\rho}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\imath(j-l)x} \cdot |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\tau_j \varphi}(x) \overline{\widehat{\tau_l \varphi}(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_j \varphi(x) \overline{\tau_l \varphi(x)}\, dx = \begin{cases} 1 & (j = l) \\ 0 & (j \neq l). \end{cases}$$

Tehát a $(\tau_j \rho, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált rendszer.

[15]Kihasználva, hogy $|\widehat{\rho}(x)|^2 = |\widehat{\varphi}(x)|^2$ (m.m. $x \in \mathbf{R}$).

xiii) A xi) megjegyzés szerint tehát esetenként végtelen sok különböző $\varphi$ függvény is eleget tehet a 9.2.1. Tételnek. Ha viszont ezekre még az is igaz, hogy kompakt tartójúak, akkor a „választék" meglehetősen szűkül. Könnyen adódik ui., hogy ha a $\varphi$, $\rho$ ugyanazt a $V_0$ zárt alteret kifeszítő skálázási függvények, akkor valamilyen $k \in \mathbf{Z}$ egésszel, valamint $c$ együtthatóval $|c| = 1$ és

$$\rho = c\tau_k\varphi.$$

Legyenek ti. az $a, b, A, B \in \mathbf{Z}$ számok olyanok, hogy $a < b$ és $A < B$, továbbá $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ és hasonlóan $\operatorname{supp}\rho \subset [A, B]$. Ekkor a

$$\rho = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j\tau_j\varphi$$

($\|.\|$-ban konvergens) előállításból az

$$S_n := \sum_{j=-n}^{n} a_j\tau_j\varphi \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$\|\rho - S_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért egy alkalmas $(\nu_n, n \in \mathbf{N})$ indexsorozattal

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} S_{\nu_n}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Legyen $N := A - b$ és $M := B - a$. Ekkor

$$\varphi(x - j) = 0 \qquad (x \in [A, B],\ j \in \mathbf{Z} \setminus [N, M]).$$

Következésképpen

$$S_{\nu_n}(x) = \sum_{j=N}^{M} a_j\tau_j(x) \qquad (x \in [A, B]),$$

hacsak $\nu_n \geq \max\{-N, M\}$. Ez azt jelenti, hogy az

$$\alpha_j := \begin{cases} a_j & (j = N, ..., M) \\ \\ 0 & (j \in \mathbf{Z} \setminus [N, M]) \end{cases}$$

együtthatókkal[16]

$$\rho(x) = \sum_{j=N}^{M} \alpha_j \tau_j \varphi(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [A,B]).$$

Nyilván feltehető, hogy $\alpha_N,\ \alpha_M \neq 0$. Innen

$$\widehat{\rho}(x) = \sum_{j=N}^{M} \alpha_j e^{2\pi\imath jx} \cdot \widehat{\varphi}(x) = T(x)\widehat{\varphi}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

és (ld. x)) a

$$T(x) := \sum_{j=N}^{M} \alpha_j e^{2\pi\imath jx} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus polinomra[17] $|T(x)| = 1$ $(x \in \mathbf{R})$ igaz. Mivel tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$1 = |T(x)|^2 = T(x)\overline{T(x)} = \sum_{j,l=N}^{M} \alpha_j \overline{\alpha_l} e^{2\pi\imath(j-l)x} = \sum_{s=N-M}^{M-N} \left( \sum_{l=N}^{M} \alpha_{l+s} \overline{\alpha_l} \right) e^{2\pi\imath sx},$$

ezért bármely $0 \neq k = N-M, ..., M-N$ egészre

$$0 = \int_0^1 e^{-2\pi\imath kx} dx = \int_0^1 |T(x)|^2 \cdot e^{-2\pi\imath kx} dx = \sum_{l=N}^{M} \alpha_{l+k} \overline{\alpha_l}.$$

Írjunk itt $k := (M-N)$-et, ekkor

$$0 = \sum_{l=N}^{M} \alpha_{l+M-N} \overline{\alpha_l} = \alpha_M \overline{\alpha_N},$$

ami ellentmond annak, hogy $\alpha_M,\ \alpha_N \neq 0$. Ezért az $N-M, ..., M-N$ egészek között nem lehet 0-tól különböző, más szóval $N = M$. Tehát egy egységnyi abszolút értékű $c$ számmal és egy $k \in \mathbf{Z}$ egésszel

$$T(x) = ce^{2\pi\imath kx} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

[16]Nem nehéz meggondolni, hogy $a_j = 0$ $(j \in \mathbf{Z} \setminus [N,M])$, tehát $(\alpha_j, j \in \mathbf{Z}) = (a_j, j \in \mathbf{Z})$.

[17]A $T$ folytonosságát is felhasználva.

más szóval

$$\widehat{\rho}(x) = ce^{2\pi\imath kx} \cdot \widehat{\varphi}(x) = c\widehat{\tau_k\varphi}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Innen már valóban világos, hogy

$$\rho(x) = c\tau_k\varphi(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

xiv) Legyen a $(V_j, j \in \mathbf{Z})$, továbbá a $h$ a 9.2.1. Tételben szereplő Riesz-multirezolúció és a skálázási függvénye. Ekkor a 2.7.3. Tételt és a 8.3.1. Tételt figyelembe véve a következőt mondhatjuk: *tegyük fel, hogy egy alkalmas $g \in L^\infty[-\pi, \pi]$ függvénynek a trigonometrikus Fourier-sora*

$$\|h\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 2\langle h, h_j\rangle \cos(jx).$$

*Ekkor van olyan $\varphi$ skálázási függvény, amely által generált multirezolúció megegyezik a $(V_j, j \in \mathbf{Z})$ sorozattal. Következésképpen van ehhez illeszkedő ortonormált wavelet-bázis az $L^2(\mathbf{R})$-ben.*

xv) Ha az előző megjegyzésben a 2.7.3. Tétel helyett a 2.7.4. Tételre „támaszkodunk”, akkor az alábbi állítást kapjuk: *tegyük fel, hogy alkalmas $0 < m \leq M$ konstansokkal*

$$m \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{h}(x+k)|^2 \leq M \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

*Ekkor van a $V_j \quad (j \in \mathbf{Z})$ alterekhez illeszkedő ortonormált wavelet-bázis az $L^2(\mathbf{R})$-ben.*

xvi) Belátható, hogy ha a $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvénnyel a

(1) $(\tau_j h, j \in \mathbf{Z})$ rendszer Riesz-bázis a $V_0 := \overline{\mathcal{L}[\{\tau_j h \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]}$ altérben,

(2) $\delta_{1/2} h \in V_0$,

(3) a $\widehat{h}$ transzformált folytonos a 0-ban és $\widehat{h}(0) \neq 0$

feltételek igazak, akkor a

$$V_k := \overline{\mathcal{L}[\{h_{kj} \in L^2(\mathbf{R}) : j \in \mathbf{Z}\}]} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

alterek Riesz-multirezolúciót (ld. 9.2.) alkotnak.

xvii) Nyilvánvaló, hogy az előbbi megjegyzésben szereplő $V_k \quad (k \in \mathbf{Z})$ alterekre a Riesz-multirezolúció 9.2. i), iv), v) pontjai (a fenti (2), (3) feltételektől függetlenül) teljesülnek. Ha a

$$P_j : L^2(\mathbf{R}) \to V_j \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

a $V_j$-re való ortogonális projekció (ld. 8.2), akkor megmutatható, hogy:

$$(1) \Longrightarrow \lim_{j\to-\infty} P_j f = 0,$$

speciálisan

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{\mathbf{R} \ni x \mapsto 0\}$$

(ami a Riesz-multirezolúció 9.2. iii) feltétele). Továbbá

$$(1) + (3) \Longrightarrow \overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}),$$

ami meg a 9.2. ii) felétel.

xviii) A 9.2.1. Tétel tehát (pl.) a 8.3.1. Tétel alapján a $h \in L^2(\mathbf{R})$ függvény által meghatározott multirezolúcióhoz „illeszkedő" waveletet generál. Ugyan a leggyakrabban használt waveletek mind ilyenek, azaz valamilyen multirezolúció határozza meg őket az előbb mondott értelemben, azért nem minden wavelet kapható meg ilyen módon. Ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos az alábbi két állítás:

a) ha a $\psi$ wavelet valamilyen $\eta > 0$ esetén eleget tesz az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \cdot (1 + |x|)^\eta dx < +\infty$$

és az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(x)|^2 \cdot (1 + |x|)^\eta dx < +\infty$$

feltételnek, akkor a $\psi$-t a fent mondott értelemben multirezolúció generálja;

b) a $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ wavelet akkor és csak akkor származik multirezolúcióból, ha

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^p(x + k))|^2 > 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

xix) A xviii) megjegyzés illusztrálására tekintsük a

$$\psi := \chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$$

Haar-waveletet (ld. 8.1.). Láttuk (ld. 8.3.), hogy a $\chi$-t a $\varphi := \chi_{[0,1)}$ skálázási függvény által meghatározott multirezolúció generálja. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\eta > 0$ mellett

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(x)|^2 \cdot (1+|x|)^\eta \, dx = \int_0^1 (1+|x|)^\eta \, dx < +\infty,$$

tehát a xviii)/a) megjegyzésben szereplő első feltétel teljesül. Mivel $x \neq 0$ esetén

$$\widehat{\chi}(x) = \int_0^{1/2} e^{-2\pi\imath xt} dt - \int_{1/2}^1 e^{-2\pi\imath xt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath x} \left[e^{-2\pi\imath xt}\right]_0^{1/2} - \left[e^{-2\pi\imath xt}\right]_{1/2}^1 = \frac{(1-e^{-\pi\imath x})^2}{2\pi\imath x},$$

ezért (pl.) az $\eta := 1/2$ választással

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(x)|^2 \cdot (1+|x|)^\eta \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|1-e^{-\pi\imath x}|^4 \cdot \sqrt{1+|x|}}{4\pi^2 x^2} \, dx =$$

$$\frac{8}{\pi^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi x/2)\sqrt{1+x}}{x^2} \, dx =$$

$$2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{\sin(\pi x/2)}{\pi x/2}\right)^2 \sin^2(\pi x/2)\sqrt{1+x} \, dx + \frac{8}{\pi^2} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi x/2)\sqrt{1+x}}{x^2} \, dx \leq$$

$$C\left(\int_0^1 \sqrt{1+x} dx + \int_1^{+\infty} x^{-3/2} \, dx\right) < +\infty$$

alkalmas $C > 0$ konstanssal. Ez azt jelenti, hogy a xviii)/a) megjegyzés második feltétele is teljesül.

xx) Legyen

$$A := [-32/7, -4] \cup [-1, -4/7] \cup [4/7, 1] \cup [4, 32/7],$$

valamint a $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ olyan, hogy $\widehat{\psi} = \chi_A$. Ekkor belátható, hogy a $\psi$ wavelet, de nincs olyan multirezolúció, amely a $\psi$-t generálná.

xxi) Megmutatható, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $\varphi \in \mathcal{S}^2_{n0}$ (ld. 9.4.), amelyre a $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ ortonormált bázis az $\mathcal{S}^2_{n0}$-ban és alkalmas $C, \alpha > 0$ paraméterekkel

$$|\varphi(t)| \leq Ce^{-\alpha|t|} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

xxii) Ha a $\psi$ waveletet az előbbi megjegyzésben említett $\varphi$ skálázási függvény segítségével a 8.3.1. Tétel alapján szerkesztjük meg, akkor $\psi \in \mathcal{S}^2_{n1}$ és valamilyen $c, \beta > 0$ együtthatókkal

$$|\psi(t)| \leq ce^{-\beta|t|} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

xxiii) Ugyanakkor az is belátható, hogy nincs olyan $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ wavelet[18], amelyre az előző megjegyzésbeli exponenciális becslés igaz és az összes $\psi^{(r)}$ $(r \in \mathbf{N})$ derivált korlátos. Ha ui. a $\psi$ ilyen lenne, akkor az

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)e^{-2\pi\imath xz}\,dx$$

integrál minden olyan $z$ komplex számra létezne, amelyre

$$|\mathrm{Im}\,z| < \frac{\beta}{2\pi},$$

és ezzel egy $F$ analitikus függvényt definiálnánk. Világos, hogy

$$F(z) = \widehat{\psi}(z) \qquad (z \in \mathbf{R}),$$

ezért az $F$ nem lehet azonosan nulla. Viszont a xxii) megjegyzést alkalmazva (most a $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ feltételezés és a $\psi$-re vonatkozó exponenciális becslés miatt minden $r \in \mathbf{N}$ esetén) azt kapnánk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\psi(x)\,dx = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel a Fourier-transzformált deriváltjaira vonatkozó jól ismert formula alapján

$$(\widehat{\psi})^{(k)}(t) = (-2\pi\imath)^k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\psi(x)e^{-2\pi\imath xt}dx \qquad (k \in \mathbf{N},\, t \in \mathbf{R}),$$

[18]Tehát a $\psi$ végtelen sokszor differenciálható.

ezért

$$(\widehat{\psi})^{(k)}(0) = (-2\pi\imath)^k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\, dt = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Innen $F_{|\mathbf{R}} = \widehat{\psi}$ miatt az is következne, hogy

$$F^{(k)}(0) = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

tehát, hogy $F = 0$, ami nem igaz.

xxiv) A xxiii) megjegyzés azt mutatja, hogy mind a Meyer-waveletek (ld. 9.3.), mind pedig a spline-waveletek (ld. 9.4.) a „lehetőségek határán” vannak abban az értelemben, ha a szóban forgó wavelettől a simaságot és az exponenciális lecsengést egyszerre követeljük meg.

xxv) Legyen az $f$ valós változós (valós vagy komplex értékű) függvény és

$$\operatorname{Supp} f := [\inf \operatorname{supp} f, \sup \operatorname{supp} f].$$

Tehát a $\operatorname{Supp} f$ az a legszűkebb zárt intervallum, amely „lefedi” a $\operatorname{supp} f$-et:

$$\operatorname{Supp} f = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma,$$

ahol $\{I_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ az összes olyan zárt $I$ intervallum által alkotott halmazrendszer, hogy $\operatorname{supp} f \subset I$. Nem nehéz megmutatni, hogy ha egy $\varphi$ skálázási függvény (ld. 8.1.) kompakt tartójú, akkor $\operatorname{Supp} \varphi = [r, s]$, ahol $r, s \in \mathbf{Z}$ és az $s - r$ különbség páratlan. Legyen ui.

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{Supp} \varphi = [a, b].$$

Amint azt már korábban is megjegyeztük (ld. 8.3.), ekkor a (8.2.1) skálázási egyenletben szereplő összeg véges sok tagból áll:

$$(*) \qquad \varphi(x) = \sum_{j=r}^{s} a_j \varphi(2x - j) \qquad (x \in [a, b])$$

alkalmas $r, s \in \mathbf{Z}$ „határokkal” és $a_r a_s \neq 0$. Világos, hogy innen

$$\operatorname{Supp} \varphi \subset [(a + r)/2, (b + s)/2]$$

következik. Továbbá

$$\varphi(x) = a_r\varphi(2x-r) \qquad ((a+r)/2 \le x < (a+r+1)/2)$$

és

$$\varphi(x) = a_s\varphi(2x-s) \qquad ((b+s-1)/2 < x \le (b+s)/2).$$

Az utóbbi két egyenlőségből és a $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Supp}\varphi = [a,b] = [(a+r)/2, (b+s)/2].$$

Ezért $r=a$ és $s=b$, azaz $\operatorname{Supp}\varphi = [r,s]$ (ahol tehát $r,s \in \mathbf{Z}$). Ha $0 \ne l \in \mathbf{Z}$, akkor a $(*)$ egyenlőség miatt

$$(**) \quad \varphi((x-2l)/2) = \sum_{j=r}^{s} a_j\varphi(x-2l-j) = \sum_{k=r+2l}^{s+2l} a_{k-2l}\varphi(x-k) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Vegyük észre, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x/2)\overline{\varphi((x-2l)/2)}\,dx = 2\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(t-l)}\,dt = 0$$

(hiszen a $(\tau_n\varphi, n \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált). Ezért a $(*)$-ból adódó

$$\varphi(x/2) = \sum_{j=r}^{s} a_j\varphi(x-j) \qquad (x \in [2a,2b])$$

egyenlőség és a $(**)$ előállítás alapján

$$(***) \qquad \sum\nolimits_k a_k\overline{a_{k-2l}} = 0,$$

ahol a $\sum_k$ szimbólum most az $[r,s] \cap [r+2l, s+2l]$-beli $k$ egészek szerinti összegzést jelenti. Ha az $s-r$ különbség páros szám lenne (mondjuk legyen $m := (s-r)/2 \in \mathbf{N}$), akkor az $l := m$ választással

$$[r,s] \cap [r+2l, s+2l] = \{s\}.$$

Így a $(***)$ bal oldalán egyetlen tag szerepelne: $k=s$ esetén $a_s\overline{a_r}$, tehát ekkor $a_s\overline{a_r} = 0$ teljesülne, ami nem igaz. Más szóval $s,r \in \mathbf{Z}$, az $s-r$ páratlan és $\operatorname{Supp}\varphi = [r,s]$.

xxvi) Lássuk be, hogy a 9.5.1. Tételben szereplő $\Omega$-ra igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \Big|^2 dt \leq 1 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(ahol tehát az $\omega$ a $\bullet$ feltételeknek (ld. 9.5.) eleget tevő trigonometrikus polinom). Legyen ui. $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\Gamma_n(t) := \prod_{j=0}^{n} \omega(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$I_n^k := \int_{-2^n}^{2^n} |\Gamma_n(x)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kx} dx \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Világos, hogy a $\Gamma_n$ függvény a $2^{n+1}$ szerint periodikus. Ezt és az $\omega$-ra vonatkozó

$$|\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2 = 1 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

feltételt kihasználva a következőket mondhatjuk:

$$I_n^k = \int_0^{2^n} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt + \int_{-2^n}^{0} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt =$$

$$\int_0^{2^n} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt + \int_{2^n}^{2^{n+1}} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt = \int_0^{2^{n+1}} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt =$$

$$\int_0^{2^n} |\Gamma_{n-1}(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} \cdot |\omega(t/2^n)|^2 dt + \int_0^{2^n} |\Gamma_{n-1}(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} \cdot |\omega(t/2^n + 1)|^2 dt =$$

$$\int_0^{2^n} |\Gamma_{n-1}(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} \left( |\omega(t/2^n)|^2 + |\omega(1 + t/2^n)|^2 \right) dt =$$

$$\int_0^{2^n} |\Gamma_{n-1}(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt}\, dt,$$

tehát $I_n^k = I_{n-1}^k$. Mindezt rekurzíve alkalmazva kapjuk az

$$I_n^k = I_0^k = \int_{-1}^{1} |\omega(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt =$$

$$= \int_0^1 \left(|\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2\right) e^{2\pi\imath kt} dt = \int_0^1 e^{2\pi\imath kt} dt = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ \\ 1 & (k = 0) \end{cases}$$

egyenlőséget. Mivel

$$|\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2 = 1 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

miatt nyilván $|\omega(t)| \leq 1$ $(t \in \mathbf{R})$, ezért

$$\int_{-2^n}^{2^n} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \right|^2 dt \leq I_n^0 = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega(t)|^2 dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{-2^n}^{2^n} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) \right|^2 dt \leq 1$$

már valóban következik.

xxvii) Az előző megjegyzésben az $\omega$ trigonometrikus polinomra vonatkozó $\bullet$ feltételek (ld. 9.5.) közül csak az elsőt:

$$|\omega(t)|^2 + |\omega(t+1)|^2 = 1 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(és szükséges feltételként a másodikat: $\omega(0) = 1$) használtuk ki. Világos, hogy $\Omega(0) = 1$. Mutassuk meg, hogy ha a harmadik $\bullet$ feltételt is figyelembe vesszük, akkor a xxvi) megjegyzésbeli állításban $\leq$ helyett egyenlőséget is írhatunk, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 dt = 1.$$

Sőt, bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén azt mondhatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ \\ 1 & (k = 1). \end{cases}$$

Valóban, az

$$\omega(t) \neq 0 \qquad (-1/2 \leq t \leq 1/2)$$

feltétel és az $\omega$ folytonossága alapján van olyan $c > 0$ konstans, hogy

$$|\omega(t)| \geq c \qquad (-1/2 \leq t \leq 1/2).$$

Mivel az $\Omega$-t definiáló végtelen szorzat a $[-1/2, 1/2]$ intervallumon egyenletesen konvergens (ld. 8.4. iii) megjegyzés), ezért van olyan $m \in \mathbf{N}$, hogy

$$\left| \prod_{j=m}^{\infty} \omega(t/2^j) \right| > \frac{1}{2} \qquad (|t| \leq 1/2).$$

Innen

$$|\Omega(t)| = \prod_{j=0}^{m-1} |\omega(t/2^j)| \cdot \left| \prod_{j=m}^{\infty} \omega(t/2^j) \right| \geq \frac{c^m}{2} =: \gamma \qquad (|t| \leq 1/2)$$

következik. Mindezt felhasználva azt kapjuk, hogy tetszőleges $t \in [-2^n, 2^n]$ helyen $(n \in \mathbf{N})$ (a xxvi)-beli jelölésekkel)

$$|\Omega(t)| = |\Gamma_n(t)| \cdot \left| \prod_{j=n+1}^{\infty} \omega(t/2^j) \right| = |\Gamma_n(t)| \cdot \left| \prod_{j=0}^{\infty} \omega(t2^{-n-1}/2^j) \right| =$$

$$|\Gamma_n(t)| \cdot |\Omega(t2^{-n-1})| \geq \gamma \cdot |\Gamma_n(t)|.$$

Ha tehát

$$g_n := \Gamma_n \cdot \chi_{[-2^n, 2^n]},$$

akkor

$$|g_n(t)| \leq \frac{1}{\gamma} \cdot |\Omega(t)| \qquad (n \in \mathbf{N},\, t \in \mathbf{R}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n \to \infty} g_n(t) = \Omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel (ld. xxvi))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 dt < +\infty,$$

ezért a $g_n$-ekre vonatkozó előbbi becslés és a Lebesgue-féle konvergencia-tétel miatt (ld. xxvi))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 \cdot e^{2\pi \imath k t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to \infty} |g_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi \imath k t} dt =$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi \imath k t} dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-2^n}^{2^n} |\Gamma_n(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt = \lim_{n\to\infty} I_n^k = I_0^k = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ \\ 1 & (k = 0). \end{cases}$$

xxviii) Tegyük fel, hogy a 9.5.1. Tételbeli $\omega$ trigonometrikus polinom a következő alakú:

$$\omega(t) = \sum_{k=r}^{s} \alpha_k e^{-\pi\imath kt} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol $r, s \in \mathbf{Z}$ és $r \leq 0 \leq s$, valamint $\alpha_r, \alpha_s \neq 0$. Ekkor az említett tétel állításában szereplő $\varphi$ skálázási függvényre

$$\operatorname{Supp} \varphi \subset [r, s]$$

teljesül (ld. xxv)). Legyen ui. valamilyen $z \in \mathbf{R}$ esetén a $\mu_z$ a $z$-ben koncentrált Dirac-mérték:

$$\mu_z(A) := \begin{cases} 1 & (z \in A) \\ \\ 0 & (z \notin A) \end{cases} \qquad (A \subset \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\widehat{\mu}_z(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\imath xt}\, d\mu_z(t) = e^{-2\pi\imath xz} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(a $\mu_z$ mérték *Fourier-transzformáltja*). Ha $j \in \mathbf{N}$ és

$$\lambda_j := \sum_{k=r}^{s} \alpha_k \mu_{k2^{-j-1}},$$

akkor

$$\widehat{\lambda}_j(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\imath xt}\, d\lambda_j(t) = \sum_{k=r}^{s} \alpha_k \widehat{\mu}_{k2^{-j-1}}(x) =$$

$$\sum_{k=r}^{s} \alpha_k e^{-\pi\imath kx2^{-j}} = \omega(x/2^j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát (ld. xxvi))

$$\Gamma_n = \prod_{j=0}^{n} \widehat{\lambda}_j = (\lambda_0 * ... * \lambda_n)^\wedge \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol a $\lambda_0 * ... * \lambda_n$ jelenti a szóban forgó mértékek konvolúcióját (ld. 10.10.)[19]. Figyelembe véve, hogy $\mu_z * \mu_s = \mu_{s+z}$, ezért

$$\lambda_0 * ... * \lambda_n = \sum_{k_0,...,k_n=r}^{s} \alpha_{k_0} \cdots \alpha_{k_n} \cdot \mu_{k_0 2^{-1}} * ... * \mu_{k_n 2^{-n-1}} =$$

$$\sum_{k_0,...,k_n=r}^{s} \alpha_{k_0} \cdots \alpha_{k_n} \cdot \mu_{k_0 2^{-1} + ... + k_n 2^{-n-1}}.$$

Következésképpen a számegyenesen értelmezett bármely (valós vagy komplex értékű) $f$ függvényre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(\lambda_0 * ... * \lambda_n)(x) =$$

$$\sum_{k_0,...,k_n=r}^{s} \alpha_{k_0} \cdots \alpha_{k_n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(\mu_{k_0 2^{-1}} * ... * \mu_{k_n 2^{-n-1}})(x) =$$

$$\sum_{k_0,...,k_n=r}^{s} \alpha_{k_0} \cdots \alpha_{k_n} \cdot f(k_0 2^{-1} + ... + k_n 2^{-n-1}).$$

Ha $k_0, ..., k_n \in \{r, ..., s\}$, akkor

$$r \le r(1 - 1/2^{n+1}) = r \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} \le \sum_{j=0}^{n} \frac{k_j}{2^{j+1}} \le s \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} = s(1 - 1/2^{n+1}) \le s.$$

Így az előbb említett minden olyan kompakt tartójú $f$ függvényre, amelyre

$$[r, s] \cap \operatorname{Supp} f = \emptyset$$

igaz, egyúttal az is fennáll, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(\lambda_0 * ... * \lambda_n)(x) =$$

$$\sum_{k_0,...,k_n=r}^{s} \alpha_{k_0} \cdots \alpha_{k_n} \cdot f(k_0 2^{-1} + ... + k_n 2^{-n-1}) = 0.$$

[19] Emlékeztetünk a $\mu_z, \mu_s$ $(z, s \in \mathbf{R})$ mértékek konvolúciójára, nevezetesen: egy $A \subset \mathbf{R}$ halmazra $\mu_z * \mu_s(A) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_z(A - t)\, d\mu_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{A-z}(t)\, d\mu_s(t) = \mu_s(A - z) = \chi_A(s + z) = \mu_{s+z}(A)$.

Tegyük fel még itt azt is, hogy $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. Ekkor az $\widehat{f}$ transzformált Schwartz-osztálybeli, tehát a Fourier-transzformáltra vonatkozó ismert tételek miatt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x)\overline{\widehat{f}(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)\overline{\widehat{f}(x)}\,dx =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(x)\overline{\widehat{f}(x)}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_0 * \ldots * \lambda_n)^{\wedge}(x)\overline{\widehat{f}(x)}\,dx =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\,d(\lambda_0 * \ldots * \lambda_n)(x)\,dx = 0.$$

(Az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \ldots = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots$$

felcserélhetőséget a Lebesgue-féle konvergencia-tétel biztosítja, mivel

$$\left|\Gamma_n(x)\overline{\widehat{f}(x)}\right| \le |\Omega(x)|\cdot|\widehat{f}(x)| \qquad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(x)|\cdot|\widehat{f}(x)|\,dx \le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(x)|^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(x)|^2\,dx} < +\infty,$$

más szóval $|\Omega|\cdot|\widehat{f}| \in L^1(\mathbf{R})$.) Azt kaptuk tehát, hogy bármely kompakt tartójú

$$f \in C^{\infty}(\mathbf{R}) \qquad ([r,s] \cap \operatorname{Supp} f = \emptyset)$$

függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\overline{f(t)}\,dt = 0.$$

Innen $\operatorname{Supp}\varphi \subset [r,s]$ már triviálisan következik.

xxix) Ha xxviii)-ban $r \le 0 \le s$ nem teljesül (pl. $r > 0$), akkor legyen

$$\tilde{\omega}(t) := e^{\pi\imath rt}\cdot\omega(t) = \sum_{k=r}^{s} \alpha_k e^{-\pi\imath(k-r)t} =$$

$$\sum_{l=0}^{s-r} \alpha_{l+r} e^{-\pi\imath lt} =: \sum_{l=0}^{s-r} \tilde{\alpha}_l e^{-\pi\imath lt} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és
$$\tilde{\Omega}(t) := \prod_{j=0}^{\infty} \tilde{\omega}(t/2^j) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Legyen továbbá $\widehat{\Phi} := \tilde{\Omega}$. Mivel
$$\tilde{\Omega}(t) = e^{2\pi\imath rt} \cdot \Omega(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
ezért
$$\widehat{\Phi}(t) = e^{2\pi\imath rt} \cdot \widehat{\varphi}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
tehát $\Phi = \tau_{-r}\varphi$ (ld. a 9.5.1. Tétel utáni, a • feltételekkel kapcsolatos fejtegetéseket). A xxviii) megjegyzés szerint $\operatorname{Supp}\Phi = [0, s - r]$. Mivel
$$\varphi(t) = \Phi(t - r) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
ezért $\operatorname{Supp}\varphi = [r, s]$. Hasonlóan kapjuk ugyanezt az $s < 0$ esetben is.

xxx) Minden „készen áll" ahhoz, hogy a 9.5.1. Tétel még be nem látott állításait bebizonyítsuk. Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a $\varphi$ skálázási függvény:

$1^o$ az $\Omega$ függvény definíciója miatt (ld. 8.4. iii) megjegyzés $(*)$ formulája)
$$\widehat{\varphi}(t) = \Omega(t) = \omega(t)\Omega(t/2) = \omega(t)\widehat{\varphi}(t/2) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
így
$$\widehat{\varphi} = \omega\delta_{1/2}\varphi.$$
Mivel az $\omega$ periodikus a 2 szerint, ezért a 8.4. iv) megjegyzés alapján a $\varphi$-re fennáll a (8.2.1) skálázási egyenlet;

$2^o$ a fenti xxvii) megjegyzést felhasználva a következőt mondhatjuk tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ esetén:
$$\int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\Omega(t + l)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\Omega(t)|^2 \cdot e^{2\pi\imath kt} dt = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ 1 & (k = 0), \end{cases}$$
tehát
$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\Omega(t + l)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t + l)|^2 = 1 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

A (8.1.1) jellemzést figyelembe véve ezért a $(\tau_j\varphi, j \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált.

xxxi) Világos, hogy ha a 9.5.1. Tételben szereplő $\omega$ trigonometrikus polinom együtthatói valósak, akkor a tételbeli $\varphi$ függvény is valós. Ekkor ui. a xxviii) megjegyzésben csak valós $f$ függvényeket választva az $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$ integrálok is valósak.

xxxii) A 9.5.1. Tétellel kapcsolatos harmadik • feltétel szerepére világít rá az alábbi egyszerű példa. Legyen ui.

$$\omega(t) := \frac{1 + e^{-3\pi\imath t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy a • feltételek közül az első kettő teljesül, de a harmadik nem, hiszen $\omega(1/3) = 0$, de $0 < 1/3 < 1/2$. A 9.5.1. Tétel után mondott, a Haar-waveletre (ld. 8.1.) vezető példa alapján azt kapjuk, hogy

$$\prod_{j=0}^{\infty} \omega(t/2^j) = \widehat{\chi_{[0,3]}}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A $\chi_{[0,3]}$ függvény azonban nem skálázási függvény, ui. a $(\tau_j\chi_{[0,3]}, j \in \mathbf{Z})$ rendszer nem ortogonális:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,3]}(x)\chi_{[0,3]}(x-1)\,dx = \int_1^3 dx = 2 \neq 0.$$

Ez a példa azt mutatja, hogy a 9.5.1. Tétel szempontjából a harmadik • feltételre (vagy valamilyen, azt (is) biztosító egyéb kikötésre) szükség van.

xxxiii) A kompakt tartójú waveletek tekintetében a kiinduló, mintegy „ötletadó” példa a Haar-wavelettel (ld. 8.1.) kapcsolatos $\varphi := \chi_{[0,1]}$ skálázási függvény volt. Nem nehéz meggondolni, hogy a lényegét tekintve ez az egyetlen olyan kompakt tartójú $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ skálázási függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ teljesül. Ekkor ui. az

$$a_k := 2\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(2x-k)}\,dx \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

skálázási együtthatókra nyilván $a_k = 0$ $(k \in \mathbf{Z}\setminus\{0,1\})$ igaz. Következésképpen (ld. (8.2.5)) $\widehat{\varphi} = \Psi\delta_{1/2}\widehat{\varphi}$, ahol

$$\Psi(t) := \frac{a_0 + a_1 e^{-\pi\imath t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tudjuk (ld. 8.4. x) megjegyzés), hogy

$$a_0 + a_1 = |a_0|^2 + |a_1|^2 = 2,$$

amiből $a_0 = a_1 = 1$ következik. Ezért

$$\Psi(t) := \frac{1 + e^{-\pi\imath t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

amiből a korábban már látottak szerint (ld. (8.2.5), ill. a 9.5.1. Tétel megfogalmazása utáni példa)

$$\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(0)\cdot \prod_{j=0}^{\infty} \Psi(t/2^j) = \widehat{\varphi}(0)\widehat{\chi_{[0,1]}}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen az $\alpha := \widehat{\varphi}(0)$ jelöléssel $\varphi = \alpha\chi_{[0,1]}$ következik, ahol az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$$

normáltsági feltétel miatt $|\alpha| = 1$.

xxxiv) Tekintsük a 9.5.2. Tételhez vezető meggondolásokban szereplő $R_k$ $(k \in \mathbf{N})$ trigonometrikus polinomok közül az $R := R_1$-et, amikor is

$$R(x) := 1 - c\cdot \int_0^x \sin^3(\pi t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$c^{-1} = \int_0^1 \sin^3(\pi t)\, dt = \int_0^1 (\sin(\pi t) - \sin(\pi t)\cos^2(\pi t))\, dt = \frac{4}{3\pi}.$$

Más szóval $c = 3\pi/4$. Legyen továbbá

$$P(y) := \frac{c}{\pi}\cdot \int_{-1}^{y} (1 - u^2) du = \frac{3}{4}\left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{2}{3}\right) \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Ekkor a fentiek szerint

$$R(x) = P(\cos(\pi x)) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos^3(\pi x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mutassuk meg, hogy a $\varphi$ Daubechies-féle skálázási függvényre (ld. 9.1.) vonatkozó

$$\widehat{\varphi}(x) = \prod_{j=0}^{\infty} \Psi(x/2^j) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőségben (ld. (8.2.5), ill. 9.1.2. Tétel) a $\Psi$ trigonometrikus polinomra

$$|\Psi(x)|^2 = R(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

igaz. Ekkor ui.

$$\Psi(x) = \frac{a_0 + a_1 e^{-\pi \imath x} + a_2 e^{-2\pi \imath x} + a_3 e^{-3\pi \imath x}}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol az $a_0, a_1, a_2, a_3$ számok a $\varphi$-t meghatározó skálázási egyenlet együtthatóit jelentik (ld. 9.1.). Ekkor (egyszerű számolás után) valóban

$$|\Psi(x)|^2 = \Psi(x)\overline{\Psi(x)} =$$

$$\frac{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4} + \frac{a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3}{2} \cos(\pi x) +$$

$$\frac{a_0 a_2 + a_1 a_3}{2} \cos(2\pi x) + \frac{a_0 a_3}{2} \cos(3\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cos(\pi x) - \frac{1}{16} \cos(3\pi x) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cos(\pi x) - \frac{1}{16}(4\cos^3(\pi x) - 3\cos(\pi x)) = R(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy a Daubechies-féle skálázási függvényhez a 9.5.2. Tétellel kapcsolatban mondottak szerint is eljuthatunk.

xxxv) Az előző megjegyzésbeli $\varphi$ Daubechies-féle skálázási függvényről nem nehéz belátni, hogy nem lehet folytonosan differenciálható. Ha ui. ilyen lenne, akkor (ld. 9.1.) a

$$\varphi(x) = a_0\varphi(2x) + a_1\varphi(2x-1) + a_2\varphi(2x-2) + a_3\varphi(2x-3) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

skálázási egyenletből minden $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$\varphi'(x) = 2a_0\varphi'(2x) + 2a_1\varphi'(2x-1) + 2a_2\varphi'(2x-2) + 2a_3\varphi'(2x-3)$$

következne. Mivel (ld. xxv))

$$\operatorname{Supp}\varphi = [0, 3],$$

ezért $\varphi_{|_{(-\infty,0]}} = 0$ miatt a $\varphi'$ derivált feltételezett folytonossága alapján $\varphi'_{|_{(-\infty,0]}} = 0$. Továbbá bármely $0 < \delta < 3$ esetén van olyan $0 < x < \delta$, hogy $\varphi'(x) \neq 0$.[20] Ugyanígy kapjuk, hogy $\varphi'_{|_{[3,+\infty)}} = 0$ és tetszőleges $0 < \delta < 3$

[20]Különben valamilyen $0 < \delta < 3$ mellett $\varphi_{|_{(-\infty,\delta]}} = 0$, ami ellentmond $\operatorname{Supp}\varphi = [0, 3]$-nak.

pozitív számhoz van olyan $3-\delta < x < 3$, amelyre $\varphi'(x) \neq 0$. Más szóval $\operatorname{Supp}\varphi' = [0,3]$. Legyen tehát $0 < z < 1$ olyan, hogy $\varphi'(z) \neq 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\varphi'(z/2^j) = (2a_0)^j \varphi'(z) \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

Ez $j = 0$-ra nyilvánvaló. Ha valamilyen $j \in \mathbf{N}$ indexre igaz, akkor

$$\varphi'(z/2^{j+1}) =$$

$$2a_0\varphi'(z/2^j) + 2a_1\varphi'(z/2^j - 1) + 2a_2\varphi'(z/2^j - 2) + 2a_3\varphi'(z/2^j - 3).$$

Itt $z/2^j - k < 0$, így

$$\varphi'(z/2^j - k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Tehát

$$\varphi'(z/2^{j+1}) = 2a_0\varphi'(z/2^j) = (2a_0)^{j+1}\varphi'(z).$$

Következésképpen

$$0 = \varphi'(0) = \lim_{j\to\infty} \varphi'(z/2^j) = \varphi'(z) \cdot \lim_{j\to\infty} (2a_0)^j,$$

amiből $\varphi'(z) \neq 0$ miatt

$$\lim_{j\to\infty} (2a_0)^j = 0.$$

Ez viszont nem igaz, hiszen $2a_0 = (1+\sqrt{3})/2 > 1$, ezért

$$\lim_{j\to\infty} (2a_0)^j = +\infty.$$

xxxvi) Gondoljuk meg, hogy a xxxiv) megjegyzésben belátott $|\Psi|^2 = R$ egyenlőségnek lényegében csak az ott szereplő $\Psi$ trigonometrikus polinom tesz eleget.[21] Legyen tehát valamilyen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ valós együtthatókkal

$$|\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\pi\imath x} + \alpha_2 e^{-2\pi\imath x} + \alpha_3 e^{-3\pi\imath x}|^2 =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cos(\pi x) - \frac{1}{16}\cos(3\pi x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

[21] Az ui. világos, hogy bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén egyúttal $|e_k\Psi|^2 = R$ is teljesül, következésképpen a $\Psi$-vel együtt az $e_k\Psi$ is „megoldása” a $|\Psi|^2 = R$ egyenletnek.

Ekkor a xxxiv)-ben látottaknak megfelelően kapjuk az

$$\begin{aligned}
&\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 &&= 1/2\\
&\alpha_0\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3 &&= 9/32\\
&\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3 &&= 0\\
&\alpha_0\alpha_3 &&= -1/32
\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Vegyük észre, hogy az első és a harmadik egyenletből

$$(\alpha_0+\alpha_2)^2+(\alpha_1+\alpha_3)^2 = 1/2,$$

míg a második és a negyedik egyenletből

$$(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) = 1/4$$

adódik. Innen – figyelembe véve a 9.5.1. Tétel alkalmazhatóságához szükséges (a tételbeli) második $\bullet$ feltételt, miszerint $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$ – azt kapjuk, hogy

$$\alpha_0+\alpha_2 = \alpha_1+\alpha_3 = 1/2.$$

Mindezt felhasználva a fenti egyenletrendszer első egyenletéből

$$\alpha_0^2+(1/2-\alpha_3)^2+(1/2-\alpha_0)^2+\alpha_3^2 = 1/2,$$

továbbá átrendezés után

$$2(\alpha_0^2+\alpha_3^2) = \alpha_0+\alpha_3.$$

Ha itt figyelembe vesszük a kiindulási egyenletrendszerünk negyedik egyenletét, akkor az $\alpha_0+\alpha_3$ összegre nézve másodfokú

$$2\left((\alpha_0+\alpha_3)^2+1/16\right) = \alpha_0+\alpha_3$$

egyenletet kapjuk. Ebből $\alpha_0+\alpha_3 = 1/4,$ valamint $\alpha_0\alpha_3 = -1/32$ alapján

$$\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{8}\ ,\ \alpha_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{8}$$

és

$$\alpha_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{8}\ ,\ \alpha_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{8},$$

vagy

$$\alpha_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{8}\ ,\ \alpha_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{8}$$

és

$$\alpha_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{8}\ ,\ \alpha_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{8}$$

következik. A $2\alpha_0, 2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3$ számok tehát valóban a Daubechies-féle skálázási együtthatók.

# 10. fejezet

# Appendix

## 10.1. Banach–Steinhaus-tétel

**10.1.1. Tétel.** *Legyenek adottak az* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *Banach-terek és az*

$$A_n : X_1 \to X_2 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*korlátos lineáris operátorok. Ekkor az alábbi két feltétel egymással ekvivalens:*

$1^o$ *bármely* $x \in X_1$ *helyen az* $(A_n(x), n \in \mathbf{N})$ *sorozat konvergens;*

$2^o$ *van olyan* $X \subset X_1$ *zárt rendszer, hogy annak tetszőleges* $x \in X$ *elemére az* $(A_n(x), n \in \mathbf{N})$ *sorozat konvergens és*

$$(*) \qquad \sup\{\|A_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

A tétel feltételei mellett az

$$(**) \qquad A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x) \qquad (x \in X_1)$$

előírással értelmezett

$$A : X_1 \to X_2$$

leképezés is korlátos lineáris operátor[1] és

$$\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

[1]Ha a 10.1.1. Tétel $1^o$ feltételét valamilyen $A : X_1 \to X_2$ korlátos lineáris operátorral a $(**)$-ra cseréljük, akkor a $2^o$ feltétel (a $(*)$ korlátossági követelmény megtartása mellett) úgy módosul, hogy: $A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$ $(x \in X)$. Ekkor nincs szükség az $(X_2, \|.\|_2)$ tér teljességére.

Az alkalmazások szempontjából a „legkritikusabb” az $A_n$-ek egyenletes korlátosságát jelentő $(*)$ feltétel. Ebből a szempontból nem lényeges az, hogy a szóban forgó $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ terek teljesek és az $(A_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat *erősen konvergens* (azaz az $1^o$ feltétel igaz). Ui. a $(*)$ követelmény ekvivalens azzal, hogy valamilyen $Y \subset X_1$ második kategóriájú halmazon[2]

$$\sup\{\|A_n(x)\|_2 : n \in \mathbf{N}\} < +\infty \qquad (x \in Y)$$

teljesül. Ez igaz pl. akkor, ha az $(X_1, \|.\|_1)$ Banach-tér és az $(A_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat erősen konvergens (ld. Baire-féle kategória-tétel).[3]

Sőt, ha az $(X_1, \|.\|_1)$, $(X_2, \|.\|_2)$ tetszőleges normált terek esetén valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmazzal a

$$T_\gamma : X_1 \to X_2 \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

leképezések korlátos lineáris operátorok és az

$$\{x \in X_1 : \sup\{\|T_\gamma(x)\|_2 : \gamma \in \Gamma\} < +\infty\}$$

halmaz második kategóriájú, akkor

$$\sup\{\|T_\gamma\| : \gamma \in \Gamma\} < +\infty$$

(az *egyenletes korlátosság elve*).

A 10.1.1. Tétel általánosításaként röviden tárgyaljuk az I. M. Gelfandtól származó alábbi változatot. Ehhez vezessük be a következő fogalmat: a valamilyen $(X, \|.\|)$ Banach-tér esetén értelmezett

$$\phi : X \to [0, +\infty)$$

funkcionált *konvexnek* nevezzük, ha

---

[2]Az $(X, \rho)$ metrikus térben az $U \subset X$ halmaz *sehol sem sűrű,* ha az $\overline{U}$ lezártjának a belseje üres. Az $U$ *első kategóriájú,* ha előáll $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ alakban, ahol az $U_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sehol sem sűrű. Az $U$ *második kategóriájú,* ha nem első kategóriájú. Ha pl. az $(X, \rho)$ teljes, akkor az $X$ második kategóriájú (*Baire-féle kategória-tétel*).

[3]Világos, hogy ha a szóban forgó operátorsorozat erősen konvergens, akkor bármelyik $x \in X_1$ helyen $\sup\{\|A_n(x)\|_2 : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.

- $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y) \quad (x, y \in X)$ és
- $\phi(\alpha x) = |\alpha| \cdot \phi(x) \quad (\alpha \in \mathbf{R},\, x \in X)$.

Azt mondjuk, hogy a $\phi$ *alulról félig folytonos* az $x_0 \in X$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, amellyel az alábbiak teljesülnek:

$$\|x - x_0\| < \delta \quad (x \in X) \Longrightarrow \phi(x_0) < \phi(x) + \varepsilon.$$

Ha a $\phi$ konvex funkcionál az $X$ tér minden pontjában alulról félig folytonos, akkor korlátos is a következő értelemben: létezik olyan $M \geq 0$ konstans, hogy

$$\phi(x) \leq M \cdot \|x\| \qquad (x \in X).$$

Innen nyilván következik, hogy a $\phi$ folytonos is. A most mondottak alapján már egyszerűen adódik az említett *Gelfand-tétel*: *tekintsük a*

$$\phi_n : X \to [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*konvex, folytonos funkcionálokat. Ha bármely* $x \in X$ *esetén*

$$\phi(x) := \sup\{\phi_n(x) : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

*akkor az így definiált* $\phi$ *funkcionál*[4] *is konvex és folytonos.*

Ha adottak az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ Banach-terek és az

$$A : X_1 \to X_2$$

korlátos lineáris operátor, akkor az

$$X_1 \ni x \mapsto \|A(x)\|_2$$

funkcionál konvex és folytonos. Legyen az $(A_n, n \in \mathbf{N})$ korlátos lineáris operátorok olyan sorozata, amelyre

$$\sup\{\|A_n(x)\|_2 : n \in \mathbf{N}\} < +\infty \qquad (x \in X_1).$$

[4] A $\phi$ nyilván eleve konvex és alulról félig folytonos.

Ekkor az

$$X_1 \ni x \mapsto \sup\{\|A_n(x)\|_2 : n \in \mathbf{N}\}$$

funkcionál konvex és folytonos, így az előbbiek szerint korlátos is: alkalmas $M \geq 0$ konstanssal

$$\|A_n(x)\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1 \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in X_1).$$

Ezért a 10.1.1. Tételbeli $(*)$ becslés is igaz, ti.

$$\|A_n\| \leq M \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A Gelfand-tétel egyik fontos következményeként tekintsük az $(X, \|.\|)$ Banach-téren értelmezett

$$f_n : X \to \mathbf{C} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

korlátos lineáris funkcionálok sorozatát. Ha $n \in \mathbf{N}$ és $1 \leq p < +\infty$, akkor az

$$X \ni x \mapsto \left(\sum_{i=0}^{n} |f_i(x)|^p\right)^{1/p}$$

funkcionál konvex, folytonos. Következésképpen

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p < +\infty \qquad (x \in X)$$

esetén az

$$X \ni x \mapsto \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p\right)^{1/p}$$

leképezés is konvex és folytonos funkcionál, ezért valamilyen $M \geq 0$ szorzóval

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p\right)^{1/p} \leq M \cdot \|x\| \qquad (x \in X).$$

## 10.2. Hahn–Banach-tétel

**10.2.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az* $(X, \|.\|)$ *normált térben adott az* $Y \subset X$ *altér. Ekkor bármely*

$$\varphi : Y \to \mathbf{C}$$

*korlátos lineáris funkcionálhoz*[5] *van olyan*

$$\Phi : X \to \mathbf{C}$$

*korlátos lineáris funkcionál, hogy*

$$\varphi(y) = \Phi(y) \qquad (y \in Y)$$

*és fennáll a* $\|\varphi\|_{Y^*} = \|\Phi\|_{X^*}$ *egyenlőség.*[6]

Ha az $Y$ sűrű altér, akkor a szóban forgó $\Phi$ nyilván egyértelműen létezik[7].

A Hahn–Banach-tétel tétel igen gyakran használt következményei az alábbi állítások.

$1^o$ *Legyen az* $(X, \|.\|)$ *normált tér esetén az* $Y \subset X$ *altér, a* $z \in X$ *elemről pedig tegyük fel, hogy*

$$\rho(z, Y) := \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} > 0.$$

*Ekkor van olyan* $\Phi \in X^*$ *funkcionál,*[8] *amelyre* $\Phi(z) = 1$ *és* $\Phi(y) = 0$ $(y \in Y)$.

Ha pl. az $Y$ zárt altér, akkor bármely $z \in X \setminus Y$ mellett alkalmazható a most mondott állítás. Sőt, ebben az esetben megadható olyan $F \in X^*$ is, amelyre $F(y) = 0$ $(y \in Y)$, $F(z) = 1$ és $\|F\|_{X^*} = 1/\rho(z, Y)$.

---

[5] Más szóval a $\varphi$ lineáris és $\|\varphi\|_{Y^*} := \min\{M \geq 0 : |\varphi(y)| \leq M \cdot \|y\| \quad (y \in Y)\} < +\infty$.

[6] Ahol tehát a $\Phi$ lineáris és $\|\Phi\|_{X^*} := \min\{C \geq 0 : |\Phi(x)| \leq C \cdot \|x\| \quad (x \in X)\} < +\infty$. Világos, hogy a $\Phi_{|_Y} = \varphi$ feltétel miatt $|\varphi(y)| = |\Phi(y)| \leq \|\Phi\|_{X^*} \cdot \|y\| \quad (y \in Y)$, így eleve $\|\varphi\|_{Y^*} \leq \|\Phi\|_{X^*}$. Ezért $\|\varphi\|_{Y^*} = \|\Phi\|_{X^*} \iff \|\varphi\|_{Y^*} \geq \|\Phi\|_{X^*}$.

[7] Ha ui. a $\Psi$ is rendelkezik a $\Phi$-től megkövetelt tulajdonságokkal, akkor tetszőleges $x \in X$ elem esetén – véve egy, az $x$-hez konvergáló $y_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatot – a $\Phi$, $\Psi$ folytonossága alapján $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \lim_{n\to\infty} \Psi(y_n) = \Psi(x)$, azaz $\Psi = \Phi$.

[8] Legyen az $X^*, Y^*, \ldots$ az illető $X, Y, \ldots$ tereken értelmezett korlátos lineáris funkcionáloknak a halmaza, amelyek az $\|.\|_{X^*}, \|.\|_{Y^*}, \ldots$ (funkcionál)normára nézve Banach-terek.

$2^o$ *Az* $(X, \|.\|)$ *normált tér tetszőleges* $0 \neq x \in X$ *eleméhez van olyan* $F \in X^*$ *funkcionál, amelyre* $\|F\|_{X^*} = 1$ *és* $F(x) = \|x\|$ *igaz.*[9]

Itt különösen kézenfekvő a Hahn–Banach-tétel alkalmazhatósága. Tekintsük ui. az

$$Y := \{cx \in X : c \in \mathbf{K}\}$$

(nyilván) alteret és az

$$f(cx) := c \cdot \|x\| \qquad (c \in \mathbf{K})$$

funkcionált. Világos, hogy $f \in Y^*$ és

$$|f(cx)| = |c| \cdot \|x\| = \|cx\| \qquad (c \in \mathbf{K})$$

miatt $\|f\|_{Y^*} = 1$, továbbá

$$f(x) = f(1 \cdot x) = \|x\|.$$

Így a $2^o$ állítás szempontjából minden olyan $F \in X^*$ funkcionál megfelelő, amelyik eleget tesz a 10.2.1. Tételben mondottaknak. Speciálisan bármely olyan $u, v \in X$ esetén, amelyek különbözők: $u \neq v$, létezik olyan $F \in X^*$, hogy $F(u) \neq F(v)$.

$3^o$ *Az* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *normált terekről tegyük fel, hogy* $X_1 \neq \{0\}$ *és az* $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ *operátortér* [10] *teljes. Ekkor az* $(X_2, \|.\|_2)$ *tér is teljes.*

Jól ismert, hogy ha a fentiekben az $(X_2, \|.\|_2)$ Banach-tér, akkor az $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ operátortér teljes. Következésképpen (egy partikuláris esettől eltekintve) az $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ akkor és csak akkor teljes, ha az $(X_2, \|.\|_2)$ Banach-tér.

$4^o$ *Tetszőleges* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *normált terek és az* $A \in L(X_1, X_2)$ *operátor esetén* $A^* \in L(X_2^*, X_1^*)$ *és* $\|A^*\| = \|A\|$.

Az $A^* \in L(X_2^*, X_1^*)$ *adjungált operátor* értelmezése szerint

$$A^*(f) := f \circ A \qquad (f \in X_2^*),$$

[9] Hallgatólagosan feltettük, hogy $X \neq \{0\}$.

[10] Emlékeztetünk arra, hogy itt $L(X_1, X_2) := \{A : X_1 \to X_2 :$ az $A$ korlátos lineáris operátor$\}$, továbbá $\|A\| := \min\{M \geq 0 : \|A(x)\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1 \ (x \in X_1)\}$ $(A \in L(X_1, X_2))$.

azaz
$$A^*(f)(x) := f(A(x)) \qquad (f \in X_2^*,\, x \in X_1).$$

Ezért

$$|A^*(f)(x)| = |f(A(x))| \leq \|f\|_{X_2^*} \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1 \qquad (f \in X_2^*,\, x \in X_1),$$

amiből
$$\|A^*(f)\|_{X_1} \leq \|A\| \cdot \|f\|_{X_2^*} \qquad (f \in X_2^*),$$

tehát az $\|A^*\| \leq \|A\|$ egyenlőtlenség mintegy „automatikusan” adódik. Ha viszont[11] $x \in X_1$ és $A(x) \neq 0$, akkor a $2^o$ állítás miatt egy $f \in X_2^*$, $\|f\|_{X_2^*} = 1$ funkcionálra
$$A^*(f)(x) = f(A(x)) = \|A(x)\|_2,$$

következésképpen

$$\|A(x)\|_2 \leq \|A^*(f)\| \cdot \|x\|_1 \leq \|A^*\| \cdot \|f\|_{X_2^*} \cdot \|x\|_1 = \|A^*\| \cdot \|x\|_1.$$

Mindebből az $\|A\| \leq \|A^*\|$ becslés, azaz az $\|A\| = \|A^*\|$ egyenlőség már világos.

Megemlítjük még a Hahn–Banach-tétel egy általánosítását: *legyen az $X$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett, az $Y \subset X$ altér, az*

$$f : Y \to \mathbf{K}$$

*pedig olyan lineáris leképezés, amelyre*

$$|f(t)| \leq p(t) \qquad (t \in Y)$$

*igaz, ahol a*
$$p : X \to [0, +\infty)$$
*konvex funkcionál* (ld. 10.1.). *Ekkor van olyan*

$$F : X \to \mathbf{K}$$

*lineáris leképezés, hogy*
$$F(t) = f(t) \qquad (t \in Y)$$

[11]Nyilván feltehető, hogy $A \neq 0$.

*és*

$$|F(x)| \leq p(x) \qquad (x \in X).$$

Speciálisan, ha itt adott a $\|.\|$ norma az $X$-en, akkor tetszőleges $\alpha \geq 0$ számmal a

$$p(x) := \alpha \cdot \|x\| \qquad (x \in X)$$

függvény konvex funkcionál. Ha ezzel a $p$-vel

$$|f(t)| \leq p(t) \qquad (t \in Y),$$

akkor nyilván $f \in Y^*$ és $\|f\|_{Y^*} \leq \alpha$, más szóval az $F$ kiterjesztésre is $F \in X^*$ és $\|F\|_{X^*} \leq \alpha$. Így az $\alpha := \|f\|_{Y^*}$ választással $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$, azaz a fentebb mondott „automatikus" $\|f\|_{Y^*} \leq \|F\|_{X^*}$ egyenlőtlenségre tekintettel $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Ez nem más, mint a 10.2.1. Tétel.

## 10.3. Riesz–Fischer-tétel

**10.3.1. Tétel.** *Tekintsük az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-teret, a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ pedig legyen egy $X$-beli zárt ortonormált rendszer. Ekkor*

$1^o$ *bármely $x \in X$ esetén*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, z_k \rangle z_k;$$

$2^o$ *tetszőleges $x \in X$ elemmel az*

$$\widehat{x} := (\langle x, z_k \rangle, k \in \mathbf{N})$$

*sorozatra $\widehat{x} \in \ell_2$ és $\|\widehat{x}\|_{\ell_2} = \|x\|$ teljesül;*[12]

$3^o$ *minden $a \in \ell_2$ sorozathoz egyértelműen létezik olyan $x \in X$, hogy $a = \widehat{x}$, így az*

$$X \ni x \mapsto \widehat{x} \in \ell_2$$

*megfeleltetés izomorfia és izometria.*[13]

[12] A most megfogalmazott *Parseval-egyenlőség* részletesebben kiírva a következőt jelenti bármelyik $x \in X$ helyen: $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, z_k \rangle|^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

[13] Tehát a szóban forgó $\varphi(x) := \widehat{x}$ $(x \in X)$ leképezés bijekció az $X$, $\ell_2$ terek között, művelettartó: $\varphi(x + cy) = \varphi(x) + c\varphi(y)$ $(x, y \in X,\ c \in \mathbf{K})$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \langle x, z_k \rangle \cdot \overline{\langle y, z_k \rangle} = \langle x, y \rangle$ $(x, y \in X)$ (*általánosított Parseval-egyenlőség*).

A $z$ ortonormált rendszer akkor és csak akkor zárt, ha bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén van olyan $k \in \mathbf{N}$ index, amelyre $\langle x, z_k \rangle \neq 0$. (Ekkor mondjuk azt, hogy a $z$ *teljes rendszer*.) Ha a $z$ nem zárt (nem teljes), akkor a Riesz–Fischer-tétel helyett csak a következőket mondhatjuk:

- minden $a = (a_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ sor konvergens és

$$\Big\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k \Big\| = \|a\|_{\ell_2};$$

- tetszőleges $x \in X$ elemre $\widehat{x} \in \ell_2$ és

$$\|\widehat{x}\|_{\ell_2} \leq \|x\|$$

(*Bessel-egyenlőtlenség*).

Akármelyik $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ ONR-re igaz a következő approximációs tulajdonság:

$$\inf \Big\{ \Big\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z_k \Big\|^2 : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \Big\} = \Big\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle x, z_k \rangle z_k \Big\|^2 =$$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle x, z_k \rangle|^2 \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N})$$

(*Bessel-azonosság*). Speciálisan

$$\sum_{k=0}^{n} |\langle x, z_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N}),$$

amiből a fenti Bessel-egyenlőtlenség már nyilván következik.

Legyen most az $X$-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer csupán normált, azaz

$$\|z_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és vezessük be tetszőleges $m, n \in \mathbf{N}$ indexekre a következő jelölést:

$$z_{mn} := \begin{cases} \langle z_m, z_n \rangle & (m \neq n) \\ 0 & (m = n). \end{cases}$$

A $z$ rendszert *majdnem ortogonális rendszernek* nevezzük, ha

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |z_{mn}|^2 < +\infty.$$

Az ilyen rendszerekre igaz a Bessel-egyenlőtlenség alábbi analogonja:

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, z_n\rangle|^2 \leq \left(1 + \sqrt{\sum_{m,n=0}^{\infty} |z_{mn}|^2}\right) \cdot \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy ha a $z$ ONR, akkor egyúttal majdnem ortogonális is és ebben az esetben a $(*)$ becslés nem más, mint a Bessel-egyenlőtlenség. Hasonlóan kapjuk a Riesz–Fischer-tétel általánosítását majdnem ortogonális rendszerekre: ha $(a_n, n \in \mathbf{N}) \in \ell_2$, akkor van olyan $x \in X$, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - \langle x, z_n\rangle|^2 \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |z_{mn}|^2 \cdot \|a\|_{\ell_2}^2$$

igaz. Így többek között

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - \langle x, z_n\rangle) = 0$$

is teljesül. Egy ilyen elem pl. az

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n.$$

Az ortonormáltság fogalma kiterjeszthető bármilyen $\emptyset \neq Y \subset X$ „rendszerre”: az $Y$ *ortonormált rendszer,* ha

$$\langle y, z\rangle = \begin{cases} 0 & (y \neq z) \\ \\ 1 & (y = z) \end{cases} \qquad (y, z \in Y).$$

Ugyanakkor igaz a következő állítás: minden $x \in X$ esetén az

$$Y_0 := \{y \in Y : \langle x, y\rangle \neq 0\}$$

halmaz legfeljebb megszámlálható.

Végül megjegyezzük, hogy a 10.3.1. Tétel *Riesz Frigyes* nevéhez fűződik.

## 10.4. Interpolációs tételek

Elsőként a *Riesz–Thorin-tételt* fogalmazzuk meg abban a speciális alakban, amelyre hivatkozás történik. Legyen adott ehhez a $p \in [1, +\infty]$ kitevő és egy[14]

$$T : L^p \to L^p$$

korlátos lineáris operátor, aminek a normáját a $\|T\|_{(p,p)}$ szimbólummal fogjuk jelölni.[15]

**10.4.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy valamilyen $p \le q \le +\infty$ esetén a fenti $T$, mint $L^q \to L^q$ operátor is korlátos.*[16] *Ekkor bármely $p \le r \le q$ mellett a*

$$T : L^r \to L^r$$

*is korlátos. Ha alkalmas $0 \le t \le 1$ számmal*

$$\frac{1}{r} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{q},$$

*akkor*

$$\|T\|_{(r,r)} \le \|T\|_{(p,p)}^t \cdot \|T\|_{(q,q)}^{1-t}.$$

Ha pl. a $T$ Fourier-részletösszeg-operátor, akkor $\|T\|_{(2,2)} \le 1$. Ezért, ha egy

$$2 \ne p \in [1, +\infty]$$

mellett $\|T\|_{(p,p)} < +\infty$, akkor bármely, a $p$ és a $2$ közötti $r$ kitevő esetén van olyan $0 < t < 1$, hogy

$$\|T\|_{(r,r)} \le \|T\|_{(p,p)}^t.$$

A Riesz–Thorin-tétel egyik általánosítása a Marcinkiewicz-féle interpolációs tétel. Ennek a kimondása előtt vezessük be az alábbi fogalmakat:

i) az $L^p$ $(1 \le p < +\infty)$ teret a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérhető függvények halmazába képező $T$ operátor *szubadditív*, ha bármely $f, g \in L^p$ mellett

$$|T(f + g)| \le |T(f)| + |T(g)|$$

teljesül;

[14] A „szokásos” Lebesgue-féle $L^p := L^p[0, 1]$ terekre vonatkozó rövidítéssel.

[15] Tehát $\|T\|_{(p,p)} := \min\{M \ge 0 : \|T(f)\|_p \le M \cdot \|f\|_p \quad (f \in L^p)\}$.

[16] $T$-vel jelölve a $T$-nek az $L^q$-ra való megszorítását is.

ii) az előbbi $T$ operátor *gyengén* $(p,p)$ *típusú*, ha megadható olyan $C_p \geq 0$ konstans, hogy[17]

$$|\{|T(f)| > y\}| \leq C_p \cdot \frac{\|f\|_p^p}{y^p} \qquad (f \in L^p,\, y > 0).$$

Ezek után a *Marcinkiewicz-tétel* a következőket mondja:

**10.4.2. Tétel.** *Ha* $1 \leq p < q < +\infty$ *és a fenti* $T$ *szubadditív operátor (egyszerre) gyengén* $(p,p)$ *és gyengén* $(q,q)$ *típusú, akkor minden* $p < r < q$ *kitevő esetén a*

$$T : L^r \to L^r$$

*korlátos operátor*[18] *és*

$$\|T\|_{(r,r)} \leq 2 \cdot \left( \frac{q \cdot C_q^q}{q-r} + \frac{p \cdot C_p^p}{r-p} \right)^{1/r}.$$

Könnyű megmutatni, hogy ha a fentiekben a

$$T : L^p \to L^p \qquad (1 \leq p < +\infty)$$

korlátos operátor, akkor a $T$ gyengén $(p,p)$ típusú és $C_p \leq \|T\|_{(p,p)}^p$ (de ugyanez fordítva nem igaz).

Ha pl. a $T$ a már említett Fourier-részletösszeg-operátor, akkor $C_2 \leq 1$. Az alkalmazásokban gyakran találkozhatunk azzal az esettel, amikor ugyan $\|T\|_{(1,1)} = +\infty$, de $C_1 < +\infty$, azaz a $T$ gyengén $(1,1)$ típusú. Ekkor tehát tetszőleges $1 < r < 2$ mellett a

$$T : L^r \to L^r$$

korlátos és

$$\|T\|_{(r,r)} \leq 2 \cdot \left( \frac{2}{2-r} + \frac{C_1}{r-1} \right)^{1/r}.$$

[17] Az $U \subset [0,1]$ Lebesgue-mérhető halmaz Lebesgue-mértékét $|U|$-val jelölve. Legyen továbbá $\{|T(f)| > y\} := \{x \in [0,1] : |T(f)(x)| > y\}$.

[18] A korlátosságot (és egyúttal az illető szubadditív operátor normáját) ugyanúgy értelmezve, mint a lineáris operátorok esetén.

Az előbbiek messzemenően általánosíthatók. Tegyük fel ehhez, hogy adott az $(X, \Omega, \mu)$ és az $(Y, \Theta, \nu)$ mértéktér. Jelöljük $\mathcal{F}_\Omega$-val az $\Omega$-mérhető

$$f : X \to \mathbf{R}$$

függvények, $\mathcal{F}_\Theta$-val a $\Theta$-mérhető

$$g : Y \to \mathbf{R}$$

függvények halmazát.[19] Legyen

$$\emptyset \neq D \subset \mathcal{F}_\Omega$$

és $1 \leq p \leq +\infty$. Azt mondjuk, hogy a

$$T : D \to \mathcal{F}_\Theta$$

operátor $(p,p)$ *típusú* (vagy *erősen* $(p,p)$ *típusú*), ha létezik olyan $C \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|T(f)\|_p \leq C \cdot \|f\|_p \qquad (f \in D).$$

Legyen ekkor

$$\|T\|_{(p,p)} := \inf\{C \geq 0 : \|T(f)\|_p \leq C \cdot \|f\|_p \quad (f \in D)\}.$$

Továbbá legyen

$$\varphi_{T(f)}(t) := \nu\left(\{|T(f)| > t\}\right) \qquad (f \in D,\, t > 0).$$

A $p < +\infty$ esetben azt mondjuk, hogy a $T$ *gyengén* $(p,p)$ *típusú,* ha létezik olyan $B \geq 0$ konstans, hogy

$$\varphi_{T(f)}(t) \leq B^p \cdot \frac{\|f\|_p^p}{t^p} \qquad (f \in D,\, t > 0).$$

Az itt szereplő valamennyi lehetséges $B$ konstans által alkotott halmaz infimumát jelöljük $\|T\|_{(p)}$-vel, azaz

$$\|T\|_{(p)} := \inf\{B \geq 0 : \varphi_{T(f)}(t) \leq B^p t^{-p} \cdot \|f\|_p^p \quad (f \in D, t > 0)\}.$$

Az előbbi $T$ operátor *gyengén* $(\infty,\infty)$ *típusú,* ha $(\infty,\infty)$ típusú, és ekkor legyen

$$\|T\|_{(\infty)} := \|T\|_{(\infty,\infty)}.$$

[19] Tehát tetszőleges $U \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $f^{-1}[U] \in \Omega\,(\Theta)$.

Ha valamilyen $f \in \mathcal{F}_\Theta$ függvény és $0 \leq t \in \mathbf{R}$ szám esetén

$$f_t(y) := \begin{cases} f(y) & (|f(y)| \leq t) \\ \\ 0 & (|f(y)| > t) \end{cases} \qquad (y \in Y),$$

valamint

$$f^t(y) := \begin{cases} f(y) & (|f(y)| > t) \\ \\ 0 & (|f(y)| \leq t) \end{cases} \qquad (y \in Y),$$

akkor az alábbi állítások igazak:

**10.4.3. Tétel.** *Legyen* $1 < r < +\infty$, *valamint* $\emptyset \neq D \subset \mathcal{F}_\Omega$ *és*

$$T : D \to \mathcal{F}_\Theta.$$

*Tegyük fel, hogy a* $\mu$ *mérték szigma-véges*[20], *továbbá*

$1^o$ $f_t, f^t \in D,\ f + g \in D \quad (f, g \in D,\ t \geq 0)$;

$2^o$ *a* $T$ *szubadditív;*

$3^o$ *a* $T$ *gyengén* $(r, r)$ *típusú és gyengén* $(1, 1)$ *típusú.*

*Ekkor bármely* $1 < p < r$ *választással a* $T$ *operátor* $(p, p)$ *típusú és*

$$\|T\|^p_{(p,p)} \leq p \cdot \left( \frac{2 \cdot \|T\|_{(1)}}{p-1} + \frac{(2 \cdot \|T\|_{(r)})^r}{r-p} \right).$$

*Ha* $1 \leq r < +\infty$ *és az előbbi* $1^o$, $2^o$ *feltételek mellett*

$4^o$ *a* $T$ *gyengén* $(r, r)$ *típusú és* $(\infty, \infty)$ *típusú,*

*akkor tetszőleges* $r < p < +\infty$ *kitevővel a* $T$ *operátor* $(p, p)$ *típusú és*

$$\|T\|^p_{(p,p)} \leq \frac{p 2^p \cdot \|T\|^r_{(r)} \cdot \|T\|^{p-r}_{(\infty,\infty)}}{p-r}.$$

[20] Tehát van olyan $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ felbontás, hogy $X_n \in \Omega,\ \mu(X_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$.

Megmutatható továbbá, hogy ha a $T$ operátor gyengén $(1,1)$ típusú és $(\infty,\infty)$ típusú, akkor az

$$\alpha := 2\cdot \|T\|_{(1)},\ \beta := 2\cdot \|T\|_{(\infty,\infty)}$$

jelölésekkel[21]

$$(*) \qquad \nu\left(\{|T(f)| > t\}\right) \le \frac{\alpha}{t}\cdot \int_{\{|f|>t/\beta\}} |f|\, d\mu \qquad (t > 0).$$

Nem nehéz belátni, hogy ez a következtetés fordítva is igaz, nevezetesen: ha valamilyen $\alpha, \beta > 0$ együtthatókkal a $(*)$ egyenlőtlenség fennáll, akkor a $T$ gyengén $(1,1)$ típusú és $(\infty,\infty)$ típusú.

A most mondott $\alpha, \beta$ paraméterekkel bármely $B \in \Theta$ halmaz és

$$f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$$

függvény esetén

$$\int_B |T(f)|\, d\nu \le (\beta+1)\nu(B) + \alpha\cdot \int |f|\cdot \log^+ \circ|f|\, d\mu.$$

Nevezzük a $T$ operátort $(p,q)$ *típusúnak* $(1 \le p,\, q \le +\infty)$, ha alkalmas $C \ge 0$ konstanssal

$$\|T(f)\|_q \le C\cdot \|f\|_p \qquad (f \in D).$$

Hasonlóan, a $T$ *gyengén* $(p,q)$ *típusú,* ha $q < +\infty$ és van olyan $B \ge 0$ konstans, amellyel

$$\varphi_{T(f)}(t) \le \left(B\cdot \frac{\|f\|_p}{t}\right)^q \qquad (f \in D,\, t > 0),$$

ill. *gyengén* $(p,\infty)$ *típusú,* ha $(p,\infty)$ típusú. Belátható, hogy ha[22]

$$D \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$$

[21] Nyilván feltehető, hogy $\beta > 0$.

[22] Emlékeztetünk az „összegtér” fogalmára. Legyenek ehhez adottak az $1 \le p < q \le +\infty$ kitevők, ekkor az $L^p(X) + L^q(X) := \{g + h : g \in L^p(X),\, h \in L^q(X)\}$ vektortér Banach-tér lesz a következő normával: $\|f\| := \inf\{\|g\|_p + \|h\|_q : g \in L^p(X),\, h \in L^q(X),\, f = g + h\}$ $\quad (f \in L^p(X) + L^q(X))$. Könnyen adódik, hogy véges $\mu$ mérték esetén $L^q(X) \subset L^p(X)$, azaz ekkor $L^p(X)+L^q(X) = L^p(X)$, valamint bármely $\mu$ mérték mellett $L^r(X) \subset L^p(X) + L^q(X)$ $\quad (p \le r \le q)$.

és a fenti $3^o$ feltétel úgy módosul, hogy a $T$ operátor gyengén $(p_i, q_i)$ típusú (alkalmas $(1 \leq p_i, q_i \leq +\infty$ paraméterekkel, ahol $p_i \leq q_i$ $(i = 0, 1)$ és $q_0 \neq q_1)$, akkor bármely $0 < t < 1$ esetén a $T$ egyúttal $(p, q)$ típusú, amikor is

$$(**) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{és} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Az itt szereplő módosított $3^o$ feltételt geometriailag a következőképpen szemléltethetjük: legyen a $\mathcal{H}$ halmaz az $\mathbf{R}^2$ síkon a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ pontok, mint csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszöglemez, és jelöljük $a_i$-vel az

$$a_i := (1/p_i, 1/q_i) \qquad (i = 0, 1)$$

(nyilván $\mathcal{H}$-beli) pontokat. Ekkor az előbbiekben (ld. $(**)$) szereplő $p, q$-val az $(1/p, 1/q)$ pont az $a_0, a_1$ pontok által meghatározott (nyílt) szakaszon van és ennek a szakasznak minden pontja ilyen.

Ha a szóban forgó $D$ halmaz altér is, a $T$ operátor pedig lineáris és (erősen) $(p_i, q_i)$ típusú $(1 \leq p_i,\, q_i \leq +\infty)$ $(i = 0, 1)$, akkor a fent megfogalmazott állításban elhagyható a $p_i \leq q_i$ $(i = 0, 1)$ feltétel (*Riesz–Thorin-tétel*). Igaz marad az előbbi geometriai szemléltetés is azzal, hogy most

$$a_i \in [0, 1] \times [0, 1] \qquad (i = 0, 1).$$

Az is belátható továbbá, hogy a $(**)$-beli paraméterekkel

$$\|T(f)\|_q \leq M_0^{1-t} M_1^t \cdot \|f\|_p \qquad (f \in D),$$

ahol az $M_i$ konstansok eleget tesznek a

$$\|T(f)\|_{q_i} \leq M_i \cdot \|f\|_{p_i} \qquad (f \in D,\, i = 0, 1)$$

egyenlőtlenségeknek.

A fentiekben tárgyalt interpolációs „technikáknak" számos kiterjesztése ismert egyéb terek vonatkozásában. Ezek közül először a 6.1. pontban bevezetett Hardy-tereket illetően fogalmazunk meg egy (az alkalmazások szempontjából is fontos) változatot. Tekintsük ehhez valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ természetes szám és $Q \subset \mathbf{R}^n$ kocka (ld. 6.4. ii) megjegyzés) esetén a megfelelő $H = H(Q)$ Hardy-teret. Jelöljük $\mathcal{F}$-fel az

$$f : Q \to \mathbf{R}$$

(Lebesgue-)mérhető függvények halmazát. Azt mondjuk, hogy a

$$T : H \to \mathcal{F}$$

operátor *gyengén* $(H,1)$ *típusú,* ha alkalmas $C \geq 0$ konstanssal

$$|\{|T(f)| > y\}| \leq C \cdot \frac{\|f\|_H}{y} \qquad (y > 0,\ f \in H).$$

Ekkor: *ha* $q > 1$ *és a*

$$T : H + L^q \to \mathcal{F}$$

*szubadditív operátor gyengén* $(H,1)$ *és gyengén* $(q,q)$ *típusú, akkor minden* $1 < p < q$ *mellett* $(p,p)$ *típusú is, azaz a*

$$T : L^p \to L^p$$

*korlátos operátor.*

Megjegyezzük, hogy az így fennálló

$$\|T(f)\|_p \leq C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p)$$

becslésben megjelenő $C_p$ konstans csak a $C$-től és a feltételezett

$$|\{|T(g)| > y\}| \leq \left(C_q \cdot \frac{\|g\|_q}{y}\right)^q \qquad (y > 0,\ g \in L^q)$$

egyenlőtlenségben szereplő $C_q$-tól függ.

A Lorentz-terek (ld. 6.3.) közötti interpolációs tételek illusztrálására legyen valamilyen $1 \leq p_1 < p_0 < +\infty$ mellett a $T$ szubadditív operátor az $L^{p_0,1} \cup L^{p_1,1}$ téren értelmezve. Tegyük fel, hogy a $C_0, C_1 \geq 0$ konstansokkal

$$\|T(f)\|_{p_i,\infty} \leq C_i \cdot \|f\|_{p_i,1} \qquad (f \in L^{p_0,1} \cup L^{p_1,1},\ i = 0, 1)$$

teljesül. Ekkor bármely $0 < \theta < 1$ esetén az

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

egyenlőségnek eleget tevő $p_1 < p < p_0$ kitevőre a $T$ operátor $(p,p)$ típusú és

$$\|T\|_{(p,p)} \leq \frac{p(p_0 - p_1)2^{1/p}}{(p_0 - p)(p - p_1)} \cdot C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}.$$

Mivel (ld. 6.1.)

$$\|f\|_p \le C\cdot \|f\|_{p,1} \qquad (p \ge 1),$$

ezért a

$$\|T(f)\|_{p_i,\infty} \le C_i\cdot \|f\|_{p_i,1} \qquad (i = 0, 1)$$

feltétel kevesebbet kíván a $T$ operátor gyenge $(p_i, p_i)$ típusánál. Így tehát a most megfogalmazott állítás a $(**)$-ban $p = q$-t írva adódó interpolációs tétel „erősítéseként" is felfogható.

Ha az előbbi, a Hardy-terekkel kapcsolatos eredményben a $T$ operátor gyengén $(1, 1)$ típusú és $(\infty, \infty)$ típusú, akkor alkalmas $C > 0$ konstanssal

$$\|T(f)\|_1 \le C(1 + \||f|\cdot \log^+ \circ|f|\|_1) < +\infty \qquad (f \in L\log^+ L),$$

tehát $T(f) \in L^1$.

A fentiekben tárgyalt Riesz–Thorin-tétel *Riesz Marcell* nevéhez fűződik.

## 10.5. Projekciós operátorok

Jelöljük $C_{2\pi}$-vel a $2\pi$ szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

folytonos függvények halmazát és legyen

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} \qquad (f \in C_{2\pi}).$$

Adott $n \in \mathbf{N}$ mellett a $\mathcal{T}_n$ szimbólum jelentse most a legfeljebb $n$-edrendű trigonometrikus polinomok halmazát[23]. Egy

$$T : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n$$

korlátos lineáris operátort[24] *projekciónak* nevezünk, ha

$$T(f) = f \qquad (f \in \mathcal{T}_n).$$

[23] Tehát $g \in \mathcal{T}_n$ akkor és csak akkor igaz, ha alkalmas $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$ és $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbf{R}$ együtthatókkal $g(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$ $(x \in \mathbf{R})$. Világos, hogy a $\mathcal{T}_n$ halmaz altér a $C_{2\pi}$-ben.

[24] Tehát a $(C_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ Banach-tér esetén mint a $C_{2\pi}$-t önmagába képező operátorról van szó.

Speciálisan, a trigonometrikus rendszer szerinti $S_n \ (n \in \mathbf{N})$ Fourier-részletösszeg-operátorok mindegyike projekció. Ezekkel kapcsolatos az alábbi tétel:

**10.5.1. Tétel.** *Bármely* $n \in \mathbf{N}$ *és* $T : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n$ *projekció esetén*

$$\|T\| \geq \|S_n\|.$$

Az $S_n \ (n \in \mathbf{N})$ operátorok tehát (a fenti értelemben) „minimál-projekciók”:

$$\|S_n\| = \min\{\|T\| : \text{ a } T : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n \text{ projekció}\}.$$

A 10.5.1. Tételben szereplő $\|T\| \geq \|S_n\|$ egyenlőtlenség az alábbi állítás nyilvánvaló következménye (*Berman-formula*):

**10.5.1. Lemma.** *Bármely* $f \in C_{2\pi}$ *függvényre*

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} T(f_t)(x-t)\, dt = S_n(f)(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$ [25]

Mivel[26]

$$\sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} = +\infty,$$

ezért bármely

$$T_n : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

projekció-sorozatra is

$$\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Következésképpen a Banach–Steinhaus-tételre (ld. 10.1.) hivatkozva megadható olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelyre

$$(*) \qquad \sup\{\|T_n(f)\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Így igaz a *Lozinszkij–Harsiladze-tétel*:

[25] A „szokásos” $f_t(x) := f(x+t) \quad (x \in \mathbf{R})$ jelöléssel.
[26] Emlékeztetünk arra, hogy egy $C > 0$ abszolút konstanssal $\|S_n\| \geq C \cdot \ln(n+1) \quad (n \in \mathbf{N})$.

**10.5.2. Tétel.** *Tetszőleges*

$$T_n : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

*projekció-sorozatra van olyan* $f \in C_{2\pi}$ *függvény, hogy a* $(T_n(f), n \in \mathbf{N})$ *függvénysorozat nem konvergál egyenletesen, sőt fennáll a* $(*)$ *egyenlőség.*

A fentiek részben átvihetők az „algebrai” esetre is. Nevezetesen, írjunk az előbbiekben a $C_{2\pi}$ helyett $C[0,1]$-et, a $\mathcal{T}_n$ helyett pedig a legfeljebb $n$-edfokú polinomok $\mathcal{P}_n$ halmazát (a $[0,1]$ intervallum felett).[27] Ekkor a

$$P : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$$

korlátos lineáris operátor *projekció,* ha

$$P(f) = f \qquad (f \in \mathcal{P}_n).$$

Az így értelmezett algebrai projekciók bármely

$$P_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatára is igaz, hogy

$$\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Ezért egy alkalmas $f \in C[a,b]$ függvénnyel a $(P_n(f), n \in \mathbf{N})$ polinomsorozat nem lehet egyenletesen konvergens, sőt

$$\sup\{\|P_n(f)\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Nem ismeretes azonban a

$$P : C[0,1] \to \mathcal{P}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

minimális normájú (algebrai) projekció.

[27] Más szóval $f \in \mathcal{P}_n$ azzal ekvivalens, hogy valamilyen $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$ együtthatókkal $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \quad (x \in [0,1])$. A $\mathcal{P}_n$ nyilván altér a $C[0,1]$-ben.

## 10.6. Müntz-tétel

**10.6.1. Tétel.** *Tetszőleges* $\emptyset \neq S \subset [0, +\infty)$ *halmaz mellett tekintsük a* $C[0,1]$ *térben a*

$$\varphi_p(t) := t^p \qquad (p \in S,\ 0 \le t \le 1)$$

*függvények* $\Phi_S$ *rendszerét. Ha* $0 \in S$, *akkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a* $\Phi_S$ *zárt rendszer legyen a* $C[0,1]$*-ben*[28], *a következő: van olyan*

$$p_k \in S,\ p_k < p_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

*sorozat, hogy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty.$$

A $\Phi_S$ rendszer $C[0,1]$-beli zártsága tehát részletesen a következőt jelenti: bármely $f \in C[0,1]$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám esetén van a $\Phi_S$-beli elemeknek egy olyan $L$ véges lineáris kombinációja, amelyre

$$|f(x) - L(x)| < \varepsilon \qquad (0 \le x \le 1).$$

Például bármely $\mathcal{N} \subset \mathbf{N} \setminus \{0\}$ véges halmazzal az $S := \mathbf{N} \setminus \mathcal{N}$ indexhalmaz kielégíti a feltételeket.

Ha a $C[0,1]$ helyett valamilyen kompakt $[a,b]$ intervallum felett folytonos valós függvények $C[a,b]$ terét tekintjük (a $\|.\|_\infty$ normával), akkor

- $a = 0$ esetén a fenti (analóg) 10.6.1. Tétel igaz;
- $a > 0$ esetén a „$0 \in S$" feltétel elhagyható;
- $a < 0$ esetén az állítás nem igaz, ui. pl. az $S := \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ választással a $C[-1,1]$-ben nyert $\Phi_S$ rendszer nyilván nem lehet zárt.

[28] A $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ Banach-tér értelmében.

## 10.7. Reprezentációs tételek

A címben jelzett „reprezentáció” korlátos lineáris funkcionálok előállítására vonatkozik. Elsőként egy Riesz Frigyestől származó állítást idézünk.

**10.7.1. Tétel.** *Tekintsük az* $(X, \langle, \rangle)$ *Hilbert-teret. Ekkor bármely* $\varphi \in X^*$ *funkcionálhoz egyértelműen megadható olyan* $a_\varphi \in X$ *elem, amellyel*

$$\varphi(x) = \langle x, a_\varphi \rangle \qquad (x \in X)$$

*és*

$$\|\varphi\| = \|a_\varphi\|_X = \sqrt{\langle a_\varphi, a_\varphi \rangle}$$

*teljesül. A*

$$X^* \ni \varphi \mapsto a_\varphi \in X$$

*megfeleltetés izomorfia az* $X^*$ *és az* $X$ *között.*

Speciálisan, ha adott az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, akkor az $L^2(\mathcal{X})$ teret véve a „szokásos”

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, d\mu \qquad (f, g \in L^2(\mathcal{X}))$$

skaláris szorzással kapjuk az $(L^2(\mathcal{X}), \langle, \rangle)$ Hilbert-teret. Következésképpen minden $h \in L^2(\mathcal{X})$ függvénnyel a

$$\Phi_h(f) := \int f \overline{h} \, d\mu \qquad (f \in L^2(\mathcal{X}))$$

előírással értelmezett $\Phi_h$ leképezésre $\Phi_h \in L^2(\mathcal{X})^*$ és

$$\|\Phi_h\| = \|h\|_2,$$

továbbá a

$$L^2(\mathcal{X}) \ni h \mapsto \Phi_h \in L^2(\mathcal{X})^*$$

megfeleltetés izomorfia és izometria az $L^2(\mathcal{X})$ és az $L^2(\mathcal{X})^*$ között.

Sőt, ha $1 \leq p, q \leq +\infty$ és (a továbbiakban is)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

valamint $h \in L^q(\mathcal{X})$ és

$$\Phi_h^{(p)}(f) := \int f\overline{h}\, d\mu \qquad (f \in L^p(\mathcal{X})),$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség miatt $\Phi_h \in L^p(\mathcal{X})^*$ és

$$\|\Phi_h^{(p)}\| \le \|h\|_q.$$

Igaz továbbá a szintén Riesz Frigyestől származó alábbi állítás. Nevezetesen, az előbbi jelölésekkel fennáll a

**10.7.2. Tétel.** *Ha $p > 1$, akkor $\|\Phi_h^{(p)}\| = \|h\|_q$. Amennyiben $p < +\infty$ is igaz, akkor tetszőleges $\Phi \in L^p(\mathcal{X})^*$ esetén egyértelműen létezik olyan $h \in L^q(\mathcal{X})$, hogy $\Phi = \Phi_h^{(p)}$. Ha a $\mu$ mérték szigma véges, akkor a most mondottak $p = 1$-re is igazak: $\|\Phi_h^{(1)}\| = \|h\|_\infty$ és minden $\Phi \in L^1(\mathcal{X})^*$ funkcionálhoz egyértelműen van olyan $h \in L^\infty(\mathcal{X})$, amellyel $\Phi = \Phi_h^{(1)}$.*

Következésképpen bármely $1 \le q < +\infty$ és $h \in L^q(\mathcal{X})$ esetén

$$\|h\|_q = \|\Phi_h^{(p)}\| = \sup\left\{\left|\int fh\, d\mu\right| : f \in L^p(\mathcal{X}),\ \|f\|_p \le 1\right\}.$$

Ha pedig a $\mu$ szigma véges, $h \in L^\infty(\mathcal{X})$, akkor

$$\|h\|_\infty = \|\Phi_h^{(1)}\| = \sup\left\{\left|\int fh\, d\mu\right| : f \in L^1(\mathcal{X}),\ \|f\|_1 \le 1\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy a $C[0,1]$ téren[29] értelmezett korlátos lineáris funkcionálok Stieltjes-integrál alakjában adhatók meg. Ti. bármelyik ilyen $\Phi$ funkcionálhoz van olyan, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $G_\Phi$ korlátos változású függvény, amelyre

$$\Phi(f) = \int_0^1 f dG_\Phi \qquad (f \in C[0,1])$$

teljesül. Ha a $G_\Phi$ függvénytől még azt is megköveteljük, hogy eleget tegyen pl. a $G_\Phi(0) = 0$ és

$$G_\Phi(x) = \frac{G_\Phi(x+0) + G_\Phi(x-0)}{2} \qquad (0 < x < 1)$$

[29] A $\|.\|_\infty$ normával.

„normálási” feltételnek, akkor a $G_\Phi$ egyértelműen létezik minden $\Phi \in C[0,1]^*$ esetén és a $\Phi$ normája megegyezik a $G_\Phi$ függvény teljes variációjával[30].

Legyen adott az $(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ szigma véges mértéktér,

$$\Omega_0 := \{A \in \Omega : \mu(A) = 0\}$$

és jelöljük $\mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)$-vel az összes olyan

$$\tau : \Omega \to \mathbf{R}$$

korlátos, additív leképezés által alkotott halmazt, amelyre

$$\tau(A) = 0 \qquad (A \in \Omega_0).$$

Ha

$$[\tau](A) := \sup\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} - \inf\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} \qquad (A \in \Omega)$$

a $\tau$ *totális variációja*, akkor világos, hogy

$$[\tau] \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu) \qquad (\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)).$$

Definiáljuk a $\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ leképezés normáját az alábbiak szerint:

$$\|\tau\|_0 := [\tau](\mathcal{X}).$$

Ezzel a normával az $\mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ – a *végesen additív előjeles mértékek* halmaza – normált tér. Ha $\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)$, akkor az $\Omega$-mérhető

$$f : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvények halmazán értelmezhető az $\int f d\tau$ integrál. A most mondottakra támaszkodva belátható, hogy $\Phi \in L^\infty(\mathcal{X})^*$ *akkor és csak akkor igaz, ha egy alkalmasan vett* $\tau \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ *végesen additív előjeles mértékkel*

$$\Phi(f) = \Phi_\tau(f) := \int f d\tau \qquad (f \in L^\infty(\mathcal{X})),$$

*és ekkor* $\|\Phi\| = \|\tau\|_0$. Pl. bármely $g \in L^1(\mathcal{X})$ függvényre a

$$\tau(A) := \int_A g\, d\mu \qquad (A \in \Omega)$$

[30]Tehát $\|\Phi\| = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |G_\Phi(x_{i+1}) - G_\Phi(x_i)| : x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = 1 \;\; (1 \le n \in \mathbf{N})\right\}$.

leképezés egy végesen addítív előjeles mérték,

$$\int f d\tau = \int fg\, d\mu = \Phi_g(f) \qquad (f \in L^1(\mathcal{X}))$$

és

$$\|\Phi_g\| = \|\tau\|_0 = \|g\|_1.$$

Ezért $\Phi_g \in L^\infty(\mathcal{X})^*$, de általában $L^\infty(\mathcal{X})^*$ nem azonos a $\{\Phi_g : g \in L^1(\mathcal{X})\}$ halmazzal.

Vezessük be a lokális nullamértékűség fogalmát az alábbiak szerint: valamilyen $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér esetén egy $A \in \Omega$ halmazt *lokálisan nullamértékűnek* nevezünk, ha minden $B \in \Omega$, $\mu(B) < +\infty$ halmazra

$$\mu(A \cap B) = 0.$$

Eléggé nyilvánvaló, hogy minden $A \in \Omega_0$ halmaz lokálisan nullamértékű, ill., ha a $\mu$ mérték szigma véges, akkor a lokális nullamértékűség ekvivalens a nullamértékűséggel. Tekintsük ezután az összes olyan $\Omega$-mérhető

$$f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$$

függvény által alkotott $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ halmazt, amelyre az

$$\{x \in \mathcal{X} : |f(x)| > \alpha\}$$

halmaz lokálisan nullamértékű minden $\alpha \geq 0$ esetén. Legyen az $\mathbf{R}_f$ az ilyen $\alpha \geq 0$ számok halmaza és

$$\|f\|_* := \inf \mathbf{R}_f.$$

Világos, hogy az $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ függvények között értelmezett

$$f \sim g \iff \{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq g(x)\} \text{ \textit{lokálisan nullamértékű}}$$

reláció ekvivalencia, ami osztályokba sorolja az $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ halmaz elemeit. Ezen osztályok halmazát is az $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ szimbólummal jelölve, a szokásos függvényműveletekkel az $(\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X}), \|.\|_*)$ pár Banach-tér. Ekkor könnyen adódik a fentiek $p = 1$-re vonatkozó részének az alábbi módosítása: *ha az* $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ *tetszőleges mértéktér és* $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$, *akkor* $\Phi_h \in L^1(\mathcal{X})^*$ *és* $\|\Phi_h\| = \|h\|_*$. Mivel az előbbiek szerint szigma véges $\mu$ mérték esetén

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X}) = L^\infty(\mathcal{X})$$

és
$$\|g\|_* = \|g\|_\infty \qquad (g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})),$$
ezért valóban az előbbiek egy kiterjesztését kaptuk.

A 10.7.2. Tételbeli, a $p = 1$ esetre vonatkozó szigma végességi feltétel „enyhíthető". Ennek a megfogalmazásához nevezzük az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértékteret *felbonthatónak,* ha alkalmas, páronként diszjunkt halmazokból álló $\mathcal{F} \subset \Omega$ halmazrendszerrel az alábbiak teljesülnek:

$1^o$ $\mu(A) < +\infty \quad (A \in \mathcal{F})$;

$2^o$ ha $B \subset \mathcal{X}$ és $B \cap A \in \Omega \quad (A \in \mathcal{F})$, akkor $B \in \Omega$;

$3^o$ $\mu(C) = \sup\left\{ \sum_{F \in \mathcal{D}} \mu(C \cap F) : \mathcal{D} \subset \mathcal{F},\, \mathcal{D} \text{ véges}\right\} \quad (C \in \Omega,\, \mu(C) < +\infty)$.

Ha a $\mu$ mérték szigma véges, akkor az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ tér felbontható[31]. A 10.7.2. (reprezentációs) Tétel $p = 1$-re vonatkozó átfogalmazása a következőképpen szól: *tegyük fel, hogy az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér felbontható. Ekkor minden $\Phi \in L^1(\mathcal{X})^*$ esetén egyértelműen létezik olyan $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ függvény, amellyel*
$$\Phi(f) = \int f h \, d\mu \qquad (f \in L^1(\mathcal{X})).$$
*Igaz továbbá, hogy $\|\Phi\| = \|h\|_*$.*

## 10.8. Banach-féle inverztétel

Tekintsük az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált tereket és az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris leképezést[32]. Tegyük fel, hogy az
$$A : X_1 \to X_2$$
szürjektív és invertálható, ekkor nyilván $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$. Mit jelent az, hogy az $A^{-1}$ inverzoperátor korlátos lineáris operátor, azaz $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$? Jól ismert,

[31] Ekkor ui. $\mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{X}_n$, ahol $\mathcal{X}_n \in \Omega$, $\mu(\mathcal{X}_n) < +\infty$ és $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{X}_m = \emptyset \quad (m \neq n \in \mathbf{N})$. Ha tehát $\mathcal{F} := \{\mathcal{X}_n \in \Omega : n \in \mathbf{N}\}$, akkor az $1^o$ feltétel nyilvánvalóan igaz. Továbbá minden $B \subset \mathcal{X}$ halmazra $B = \bigcup_{n=0}^\infty (B \cap \mathcal{X}_n)$, így $B \cap \mathcal{X}_n \in \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ esetén $B \in \Omega$. Ha pedig $C \in \Omega$, $\mu(C) < +\infty$, akkor $\mu(C) = \sum_{n=0}^\infty \mu(C \cap \mathcal{X}_n) = \sup_n \sum_{k=0}^n \mu(C \cap \mathcal{X}_k)$. Viszont tetszőleges $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ véges halmazra van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\mathcal{D} \subset \{\mathcal{X}_0, ..., \mathcal{X}_n\}$. Világos, hogy ekkor $\sum_{F \in \mathcal{D}} \mu(C \cap F) \leq \sum_{k=0}^n \mu(C \cap \mathcal{X}_k)$. Innen a $3^o$ feltétel fennállása is azonnal következik.

[32] Tehát $A(bx + cy) = bA(x) + cA(y) \quad (x, y \in X_1,\, b, c \in \mathbf{K})$.

hogy mindez az $A^{-1}$ folytonosságával ekvivalens: bármely $Y \subset X_1$ nyílt halmazra az $Y$-nak az $A^{-1}$ által létesített

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}[Y] = A[Y]$$

őősképe (ami nyilván megegyezik az $Y$-nak az $A$ által meghatározott képével) is nyílt.

Nevezzünk egy

$$f : X_1 \to X_2$$

leképezést *nyíltnak,* ha minden $Y \subset X_1$ nyílt halmazra az $f[Y]$ képhalmaz is nyílt. Könnyű meggondolni, hogy az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris operátor akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $\rho > 0$ szám, amellyel

$$K_\rho(0) \subset A[K_r(0)].$$

Ha pedig az $(X_1, \|.\|_1)$ Banach-tér, továbbá $A \in L(X_1, X_2)$ és az $\mathcal{R}_A$ értékkészlethalmaz második kategóriájú, akkor van olyan $q > 0$, amellyel tetszőleges $r > 0$ esetén

$$K_r(0) \subset A[K_{2qr}(0)].$$

Mindezeket figyelembe véve kapjuk a *nyílt leképezések tételét*:

**10.8.1. Tétel.** *Az* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *Banach-terek esetén tekintsük az*

$$A : X_1 \to X_2$$

*korlátos lineáris operátort. Ha az* $A$ *szürjektív*[33], *akkor az* $A$ *egyúttal nyílt leképezés.*

Világos, hogy az eddig mondottakból már következik a *Banach-féle inverztétel*:

**10.8.2. Tétel.** *Tegyük fel, hogy adottak az* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *Banach-terek és az*

$$A : X_1 \to X_2$$

*korlátos lineáris operátor. Ha az* $A$ *bijektív leképezés, akkor az*

$$A^{-1} : X_2 \to X_1$$

*inverzoperátor is korlátos lineáris operátor.*

[33]Más szóval $\mathcal{R}_A = X_2$, így a Baire-féle kategória tétel (ld. 10.1.) miatt az $\mathcal{R}_A$ halmaz második kategóriájú.

Legyenek adottak az $(X_i,\rho_i)$ $(i=1,2)$ metrikus terek és az

$$f\in X_1\to X_2$$

függvény. Azt mondjuk, hogy az $f$ *zárt leképezés,* ha bármely

$$x\in X_1,\, y\in X_2,\, x_n\in\mathcal{D}_f \quad (n\in\mathbf{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n=x,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=y$$

esetén

$$x\in\mathcal{D}_f \ \text{ és } \ y=f(x).$$

Egyszerűen belátható, hogy ha $X:=X_1\times X_2$ és

$$\rho(x,y):=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2) \qquad (x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2)\in X)\,,$$

akkor az $f$ zártsága pontosan azt jelenti, hogy az $f$ grafikonja[34] zárt halmaz az $(X,\rho)$ metrikus (szorzat)térben. Ha az $f$ zárt és injektív, akkor az $f^{-1}$ inverz is zárt. Igaz továbbá a *zárt gráf-tétel*:

**10.8.3. Tétel.** *Legyenek az* $(X_i,\|.\|_i)$ $(i=1,2)$ *normált terek Banach-terek, az* $A\in\mathcal{L}(X_1,X_2)$ *lineáris operátor pedig legyen zárt leképezés. Ekkor az* $A$ *folytonos, azaz* $A\in L(X_1,X_2)$.

Belátható, hogy a most mondott zárt gráf-tétel ekvivalens a Banach-féle inverztétellel.

## 10.9. Orlicz-terek

Legyen a

$$\varphi:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$$

függvény monoton növő, jobbról folytonos, $\varphi(0)=0$ és

$$\varphi(x)>0 \qquad (x>0),$$

valamint

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty.$$

[34] A „szokásos” terminológia szerint az $\{(x,y)\in X : x\in\mathcal{D}_f,\, y=f(x)\}$ halmaz, ami valójában maga az $f$ függvény.

Ekkor a

$$\Phi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

leképezés egy ún. *Young-függvény*, ha

$$\Phi(x) := \int_0^x \varphi(t)\, dt \qquad (x \geq 0).$$

Világos, hogy a $\Phi$ folytonos, monoton növő és $\Phi(0) = 0$. Megmutatható még, hogy a $\Phi$ konvex,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0 \text{ és } \lim_{x\to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty.$$

Az is igaz, hogy ha e két utóbbi egyenlőség teljesül egy $\Phi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ folytonos, konvex függvényre, akkor ez a $\Phi$ Young-függvény.

A fenti $\varphi$ függvény esetén legyen

$$\psi(x) := \sup\{t \geq 0 : \varphi(t) \leq x\} \qquad (x \geq 0).$$

Könnyű meggondolni, hogy egyúttal a $\psi$ függvény is monoton növő, jobbról folytonos, továbbá $\psi(0) = 0$ és

$$\psi(x) > 0 \qquad (x > 0),$$

valamint

$$\lim_{x\to +\infty} \psi(x) = +\infty.$$

Ezért a

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(t)\, dt \qquad (x \geq 0)$$

utasítással értelmezett $\Psi$ is Young-függvény. Azt mondjuk, hogy a $\Phi$, $\Psi$ (Young-értelemben) *konjugált függvények*.

Ha a $\varphi$ folytonos és szigorúan monoton, akkor nyilván $\psi = \varphi^{-1}$. Továbbá a fenti $\Phi$ és $\Psi$ függvénnyel teljesül az

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v) \qquad (u, v \geq 0)$$

*Young-egyenlőtlenség.*

Legyen pl. $1 < p < +\infty$ és

$$\varphi(x) := x^{p-1} \qquad (x \geq 0).$$

Ekkor egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\Phi(x) = \frac{x^p}{p} \quad \text{és} \quad \Psi(x) = \frac{x^q}{q} \qquad (x \geq 0),$$

ahol $1 < q < +\infty$ és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tekintsük a $\Phi$ Young-függvényt és jelöljük $\mathcal{L}_\Phi$-vel azoknak az $f \in L^1$ függvényeknek[35] a halmazát, amelyekre

$$\Phi \circ |f| \in L^1.$$

Nyilván minden korlátos $f \in L^1$ függvényre $f \in \mathcal{L}_\Phi$, de általában

$$\mathcal{L}_\Phi \neq L^1.$$

Belátható, hogy az $\mathcal{L}_\Phi$ pontosan akkor vektortér, ha a $\Phi$ függvény teljesíti az ún. $\triangle_2$-*tulajdonságot*: van olyan $C > 0$ konstans és $x_0 \geq 0$ szám, hogy

$$\Phi(2x) \leq C \cdot \Phi(x) \qquad (x \geq x_0).$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $f \in L^1$ függvényre $fg \in L^1$ igaz minden $g \in \mathcal{L}_\Psi$ esetén. Bebizonyítható, hogy ekkor

$$\|f\|_\Phi := \sup\left\{ \left| \int_0^1 fg \right| : g \in \mathcal{L}_\Psi \ \text{ és } \ \big\|\Psi \circ |g|\big\|_1 \leq 1 \right\} < +\infty.$$

Ha az $L_\Phi$ szimbólum jelöli az ilyen $f$ függvényeknek a halmazát (két függvény között nem téve különbséget, ha csak nulla mértékű halmazon különböznek), akkor az $(L_\Phi, \|.\|_\Phi)$ *Orlicz-tér* egyúttal Banach-tér is.

A Young-egyenlőtlenség miatt

$$\|fg\|_1 \leq \|\Phi \circ |f|\|_1 + \|\Psi \circ |g|\|_1 \qquad (f \in \mathcal{L}_\Phi,\, g \in \mathcal{L}_\Psi),$$

tehát $\mathcal{L}_\Phi \subset L_\Phi$. Ha pedig a $\Phi$ eleget tesz a $\triangle_2$-tulajdonságnak, akkor $\mathcal{L}_\Phi = L_\Phi$.

Megjegyezzük, hogy bármely $f \in L_\Phi$, $g \in L_\Psi$ függvényre $fg \in L^1$ és

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\Phi \cdot \|g\|_\Psi$$

[35] A Lebesgue-terekre vonatkozóan az $L^s := L^s[0,1]$ $(1 \leq s \leq +\infty)$ rövidítéssel élve.

(általánosított *Hölder-egyenlőtlenség*).

Legyen $1 < p, q < +\infty$ és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

valamint

$$\varphi(x) := x^{p-1} \qquad (x \geq 0).$$

Ekkor (a fentiekre tekintettel)

$$\mathcal{L}_\Phi = L^p = L_\Phi, \text{ ill. } \mathcal{L}_\Psi = L^q = L_\Psi$$

és

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\left|\int_0^1 fh\right| : h \in L^q,\ \|h\|_q \leq q^{1/q}\right\}.$$

Ezért (ld. 10.7.)

$$\|f\|_\Phi = q^{1/q} \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p).$$

Ha

$$\|f\|_{(\Phi)} := \inf\left\{t > 0 : \left\|\Phi \circ \left(\frac{|f|}{t}\right)\right\|_1 \leq 1\right\} \qquad (f \in L_\Phi),$$

akkor a $\|.\|_{(\Phi)}$ norma az $L_\Phi$-n, ami ekvivalens a $\|.\|_\Phi$-vel:

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \|f\|_\Phi \leq 2 \cdot \|f\|_{(\Phi)} \qquad (f \in L_\Phi).$$

Továbbá

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\left|\int_0^1 fg\right| : g \in L_\Psi,\ \|g\|_{(\Psi)} \leq 1\right\} \qquad (f \in L_\Phi).$$

Az is belátható, hogy az $L_\Phi$ pontosan akkor szeparábilis, ha a $\Phi$ rendelkezik a $\triangle_2$-tulajdonsággal. Ekkor az $L_\Phi^*$ duális tér elemei a következők:

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 fg \qquad (f \in L_\Phi),$$

ahol $g \in L_\Psi$ és

$$\|\varphi_g\| = \|g\|_{(\Psi)} \leq 2 \cdot \|\varphi_g\|.$$

Egyébként az $L_\Phi$ tér akkor és csak akkor reflexív[36], ha a $\Phi$ és a $\Psi$ egyaránt eleget tesz a $\triangle_2$-tulajdonságnak.

A fentiek elmondhatók akkor is, ha egy szigma véges $(X,\Omega,\mu)$ mértéktérből indulunk ki. Legyen

$$\Phi(x) := x\log^+ x := \begin{cases} x\ln x & (1\le x<+\infty) \\ \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$$

és

$$L\log^+ L(X) := L_\Phi.$$

Nem nehéz belátni, hogy ha a $\mu$ véges, akkor

$$L^p(X)\subset L\log^+ L(X)\subset L^1(X) \qquad (1<p\le+\infty).$$

Analóg módon értelmezhetők az

$$L\log^+ L\log^+\log^+ L(X),\ L\log^+ L\log^+\log^+\log^+ L(X), \dots$$

terek is.

## 10.10. Konvolúció

Legyen adott az $(X,\mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport, a $\mathcal{M}(X)$ halmaz pedig legyen az $X$ Borel-halmazainak[37] a $\mathcal{B}(X)$ szigma algebráján értelmezett korlátos Borel-mértékek halmaza. Vezessük be a következő

$$P: X\times X\to X$$

leképezést:

$$P(x,y) := x\bullet y \qquad (x,y\in X),$$

[36] Röviden emlékeztetünk a *reflexív tér* fogalmára. Legyen ehhez adott az $(X,\|.\|_X)$ normált tér és az $X^*$ duális tér mellett tekintsük az $X^{**} := (X^*)^*$ *második duálist.* Ha $x\in X$, akkor a $\Phi_x(f) := \overline{f(x)}$ $(f\in X^*)$ módon definiált $\Phi_x$ funkcionálra $\Phi_x\in X^{**}$ és $\|\Phi_x\| = \|x\|_X$. Legyen a $\varphi: X\to X^{**}$ a következő leképezés: $\varphi(x) := \Phi_x\in X^{**}$ $(x\in X)$. Azt mondjuk, hogy az $(X,\|.\|_X)$ tér reflexív, ha $\mathcal{R}_\varphi = X^{**}$. Speciálisan: ekkor a kiindulási tér izomorf és izometrikus a második duálissal. Pl. minden Hilbert-tér reflexív, de mondjuk az $(\ell_1,\|.\|_1)$ sorozattér nem az.

[37] Tehát a $\mathcal{T}$ halmazrendszer elemeit tartalmazó legszűkebb szigma algebráról van szó.

ahol a $\bullet$ szimbólum az $X$-beli „szorzást" (mint multiplikatív csoportműveletet) jelöli.[38] Ha az $X \times X$ Descartes-szorzaton a $\mathcal{T}$ által generált szorzattopológiát tekintjük, akkor ebben az értelemben a $P$ leképezés folytonos.

A $\mu$, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ mértékek esetén az $X\times X$-beli Borel-halmazok $\mathcal{B}(X\times X)$ szigma algebráján legyen

$$\kappa := \mu \otimes \nu$$

a $\mu, \nu$ mértékek által meghatározott szorzatmérték. Vegyük a $\kappa$ mérték $P$ által létesített $P[\kappa]$ képét, azaz legyen

$$P[\kappa](B) := \kappa(P^{-1}[B]) \qquad (B \in \mathcal{B}(X)).$$

A

$$\mu * \nu := P[\kappa]$$

mértéket a $\mu$, $\nu$ mértékek *konvolúciójának* nevezzük.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $\mu{*}\nu \in \mathcal{M}(X)$. Továbbá a $*$ művelet kommutatív és asszociatív, ill. a mértékek öszeadására nézve disztributív, valamint tetszőleges

$$\alpha \in [0, +\infty) \text{ és } \mu,\, \nu \in \mathcal{M}(X)$$

mellett

$$\mu * (\alpha\cdot \nu) = (\alpha\cdot \mu) * \nu = \alpha\cdot (\mu * \nu).$$

A fentiek nyilván elmondhatók az $\mathcal{M}(X)$ helyett a

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbf{R}$$

korlátos variációjú előjeles Borel-mértékek $\mathcal{V}(X)$ halmazában is.[39]

Legyen $\mu$, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ és $A \in \mathcal{B}(X)$, ekkor

$$\mu * \nu(A) = \int \chi_A \, d(\mu * \nu) = \int \mu(y^{-1} \bullet A) \, d\nu(y) = \int \nu(x^{-1} \bullet A) \, d\mu(x).$$

Gyakran ez utóbbi integrált tekintik a $\mu * \nu$ konvolúció definíciójának.

[38] Valójában a $P$ maga az $X$-beli csoportművelet.

[39] Emlékeztetünk a most említett fogalmakra, miszerint $\mu \in \mathcal{V}(X)$ egy olyan előjeles mérték a $\mathcal{B}(X)$ halmazrendszeren, amelyre $\sup\left\{\sum_{A\in\mathcal{A}} |\mu(A)| : \mathcal{A} \in \mathcal{F}_X\right\} < +\infty$. Itt az $\mathcal{F}_X$-szel az összes olyan véges, páronként diszjunkt, $\mathcal{B}(X)$-beli halmazokból álló $\mathcal{A}$ halmazrendszerek halmazát jelöltük, amelyekre $X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}}$.

Ha valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $X := \mathbf{R}^n$ és a $\mathcal{T}$ az $\mathbf{R}^n$-beli euklideszi norma által indukált topológia, akkor tekintsük a $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-en a $\lambda$ Lebesgue-mértéket. Legyen $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, ekkor az $f$ súlyfüggvény által generált $\lambda_f$ mérték[40] nyilván $\mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$-beli, és bármely $\nu \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ mellett

$$\lambda_f * \nu(A) = \int \lambda_f(A - x)\, d\nu(x) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)).$$

Ha

$$g(y) := \int f(y - x)\, d\nu(x) =: f * \nu(y) \qquad (y \in \mathbf{R}^n),$$

akkor

$$\lambda_f * \nu(A) = \int g \cdot \chi_A \, d\lambda = \lambda_g(A).$$

Legyen most a fenti $f$ mellett adott egy $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ függvény is és írjuk a $\nu$ helyébe a $\lambda_h$-t. Ekkor az előbbiekhez hasonló módon kapjuk, hogy

$$\lambda_f * \lambda_h(A) = \int \chi_A \cdot f * h \, d\lambda = \int_A f * h\, d\lambda \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)),$$

ahol

$$f * h(x) := \int f(x - y) \cdot h(y)\, dy \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A most értelmezett $f * h$ függvényt az $f, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ függvények *konvolúciójának* nevezzük. Ekkor az $L^1(\mathbf{R}^n)$ (a szokásos függvényműveletekkel és a $\|.\|_1$ normával) a $*$ konvolúcióra nézve kommutatív Banach-algebra. Továbbá az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \quad \text{és} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

feltételnek eleget tevő $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ kitevőkkel és az

$$f \in L^p(\mathbf{R}^n),\ h \in L^q(\mathbf{R}^n)$$

függvényekkel $f * h \in L^r(\mathbf{R}^n)$, valamint

$$\|f * h\|_r \leq (A_p A_q A_{r^*})^n \cdot \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

ahol

$$r^* := \frac{r-1}{r}$$

[40] $\lambda_f(A) := \int_A f\, d\lambda \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$.

(*Young-egyenlőtlenség*). Itt az

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1 \qquad (1\le u,v\le +\infty)$$

jelölésekkel $A_1 := A_\infty := 1$ és

$$A_u := \sqrt{\frac{u^{1/u}}{v^{1/v}}} \qquad (1<u<+\infty)$$

jelenti az ún. *Babenko–Beckner-konstanst.*

Speciálisan, ha $q=1$, akkor $r=p$, így tetszőleges $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g\in L^1(\mathbf{R}^n)$ függvényekkel $f*g\in L^p(\mathbf{R}^n)$ és

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1.$$

## 10.11. Maximálfüggvények

Tekintsük az

$$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \qquad (n\in\mathbf{N})$$

lokálisan integrálható függvényt,[41] és jelöljük $\mathcal{G}$-vel a következő halmazt:

$$\mathcal{G} := \{K_r(z) : z\in\mathbf{R}^n,\ r>0\}.$$

Egy $x\in\mathbf{R}^n$ vektor esetén legyen

$$\mathcal{G}_x := \{S\in\mathcal{G} : x\in S\}$$

és

$$f^*(x) := \sup\left\{\frac{1}{\lambda(S)}\cdot\int_S |f|\,d\lambda : S\in\mathcal{G}_x\right\}.$$

Az így definiált

$$f^*:\mathbf{R}^n\to[0,+\infty]$$

leképezést az $f$ függvény *Hardy–Littlewood-maximálfüggvényének* nevezzük.

[41] Tehát a szóban forgó $f$ függvény Lebesgue-mérhető, és bármely $K\subset\mathbf{R}^n$ kompakt halmaz esetén $\int_K |f|\,d\lambda < +\infty$ (ahol a $\lambda$ az $\mathbf{R}^n$ tér Lebesgue-mérhető részhalmazain értelmezett Lebesgue-mértéket jelöli). Legyen a továbbiakban $L^p := L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\le p\le +\infty)$ a „szokásos” Lebesgue-féle függvénytér.

Jegyezzük meg, hogy ha $q > 0$ és

$$A_q := \{f^* > q\} := \{x \in \mathbf{R}^n : f^*(x) > q\},$$

akkor az $A_q$ nyílt halmaz. Ez azt is biztosítja egyúttal, hogy az $f^*$ (Lebesgue-)mérhető függvény.

Nem nehéz megmutatni, hogy alkalmas $f$ (akár $L^1$-beli) függvényre $f^* \notin L^1$ is lehet. Sőt, azt sem nehéz belátni, hogy ha az $f \in L^1$ függvény nem az $L^1$-beli nullafüggvény[42], akkor $f^* \notin L^1$. Jól ismert (Lebesgue), hogy tetszőleges

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

lokálisan Lebesgue-integrálható $f$ függvényre

$$|f(x)| = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(K_r(x))} \cdot \int_{K_r(x)} |f| \, d\lambda$$

igaz m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ helyen. Mivel az

$$\frac{1}{\lambda(K_r(x))} \cdot \int_{K_r(x)} |f| \, d\lambda \leq f^*(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ r > 0)$$

becslés nyilvánvaló, ezért

$$|f(x)| \leq f^*(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

A következő állítások igazak (*Hardy–Littlewood-tétel*):

**10.11.1. Tétel.** *Legyen* $1 < p \leq +\infty$. *Ekkor megadható olyan* $C_p > 0$ (*csak a* $p$*-től függő*), *valamint olyan* $C > 0$ *konstans, hogy tetszőleges lokálisan integrálható*

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

*függvényre*

$$\lambda(A_q) \leq C \cdot \frac{\|f\|_1}{q} \qquad (q > 0)$$

*és*

$$\|f^*\|_p \leq C_p \cdot \|f\|_p.$$

[42] Más szóval $\lambda(\{|f| > 0\}) > 0$.

Megmutatható, hogy itt $C = 3^n$, valamint

$$C_p = 2\cdot\left(\frac{3^n\cdot p}{p-1}\right)^{1/p} \qquad (1 < p < +\infty)$$

és (ami triviális) $C_\infty = 1$ írható. Továbbá az

$$f \mapsto f^*$$

*Hardy–Littlewood-maximáloperátor* gyenge $(1,1)$ tulajdonságát kifejező első állítás az alábbi élesebb formában is teljesül:

$$\lambda(A_q) \le \frac{3^n}{q}\cdot\int_{A_q} |f|\,d\lambda \qquad (q > 0).$$

Sőt, az is igaz, hogy

$$\lambda(A_q) \le \frac{2\cdot 3^n}{q}\cdot\int_{\{|f|>q/2\}} |f|\,d\lambda \qquad (q > 0).$$

Az előbbi $f^*$ Hardy–Littlewood-maximálfüggvényről „integrálhatóság” szempontjából, ill. a 10.11.1. Tételben „hiányzó” $0 < p < 1$ esetről a következőket mondhatjuk:

**10.11.2. Tétel.** *Bármely $0 < p < 1$ mellett van olyan $\alpha_p > 0$ (csak a $p$-től függő), továbbá olyan $\alpha > 0$ konstans, hogy minden lokálisan integrálható*

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

*függvényre és $B \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmazra*

$$\int_B f^* d\lambda \le 2\lambda(B) + \alpha\cdot\int |f|\cdot\log^+ \circ|f|\,d\lambda,$$

*valamint*

$$\left(\int_B (f^*)^p\,d\lambda\right)^{1/p} \le (\lambda(B) + \alpha_p)^{1/p}\cdot\|f\|_1.$$

Belátható, hogy itt az

$$\alpha_p := \frac{3^n\cdot p}{1-p}$$

választás megfelelő.

Speciálisan, ha $f \in L\log^+ L(\mathbf{R}^n)$ (ld. 10.9.) és a 10.11.2. Tételben szereplő $B$ halmazra $\lambda(B) < +\infty$ teljesül, akkor

$$\int_B f^* d\lambda < +\infty.$$[43]

A fentiekben is vizsgált

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

lokálisan integrálható függvényre legyen

$$f^o(x) := \sup\left\{\frac{1}{\lambda\left(K_r(x)\right)}\cdot\int_{K_r(x)} |f|\, d\lambda : r > 0\right\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Mivel

$$x \in K_r(x) \in \mathcal{G}_x \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, r > 0),$$

ezért $f^o \leq f^*$. Továbbá, ha

$$x \in S := K_r(z) \in \mathcal{G}_x \qquad (r > 0,\, z \in \mathbf{R}^n),$$

akkor $S \subset K_{2r}(x)$, így

$$\frac{1}{\lambda(S)}\cdot\int_S |f|\, d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(S)}\cdot\int_{K_{2r}(x)} |f|\, d\lambda =$$

$$\frac{\lambda\left(K_{2r}(x)\right)}{\lambda(S)}\cdot\frac{1}{\lambda(K_{2r}(x))}\cdot\int_{K_{2r}(x)} |f|\, d\lambda \leq \frac{\lambda\left(K_{2r}(z)\right)}{\lambda(S)}\cdot f^o(x) \leq 2^n\cdot f^o(x).$$

Tehát

$$2^{-n}\cdot f^* \leq f^o \leq f^*,$$

következésképpen

$$\|f^o\|_p \leq \|f^*\|_p \leq C_p\cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p,\, 1 < p \leq +\infty)$$

és

$$\{f^o > q\} \subset \{f^* > q\} \qquad (q > 0).$$

[43] Innen az is rögtön adódik, hogy $\int_B |f|\, d\lambda < +\infty$, ami az előbbiektől függetlenül is könnyen belátható.

Így

$$\lambda\left(\{f^o > q\}\right) \le \lambda(A_q) \le C\cdot \frac{\|f\|_1}{q} \qquad (f \in L^1,\, q > 0).$$

Mindezek azt jelentik, hogy az

$$f \mapsto f^o$$

maximáloperátor is gyengén $(1,1)$ és $(p,p)$ típusú $(1 < p \le +\infty)$.

A most mondottak igazak maradnak akkor is, ha az $f^o$ helyett az alábbi maximálfüggvényt írjuk:

$$f^{\bullet}(x) := \sup\left\{\frac{1}{\lambda(I)}\cdot \int_I |f|\, d\lambda : x \in I \in \mathcal{A}\right\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol alkalmas $\alpha,\, \beta > 0$ paraméterekkel a $\mathcal{A}$ halmazrendszer azon

$$I = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbf{R}^n$$

$n$-dimenziós „téglák” halmaza, ahol az $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbf{R}$ halmazok mindegyike intervallum és

$$\alpha \le \frac{|I_j|}{|I_k|} \le \beta \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Ha $n \ge 2$, az

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvény lokálisan integrálható és

$$f^{**}(x) := \sup_I \frac{1}{\lambda(I)}\cdot \int_I |f|\, d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és a $\sup_I$ szuprémum az

$$I = [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \times \cdots \times [x_n - r_n, x_n + r_n] \subset \mathbf{R}^n \qquad (r_1 > 0, \ldots, r_n > 0)$$

$n$-dimenziós („szimmetrikus”) téglákra vonatkozik, akkor az így definiált

$$f \mapsto f^{**}$$

(„szigorú”) maximáloperátor is $(p,p)$ típusú $(1 < p \le +\infty)$, de ugyanakkor nem gyengén $(1,1)$ típusú. Az utóbbi helyett csak a következőt lehet bebizonyítani: van olyan $C > 0$ konstans, hogy

$$\lambda(\{f^{**} > y\}) \le \frac{C}{y} \cdot \int |f| \cdot \left(1 + \log^+ \circ (|f|/y)\right)^{n-1} d\lambda \qquad (y > 0).$$

Az eddig mondottak könnyen „átvihetők” arra az esetre is, amikor a kiindulásul szolgáló $\mathbf{R}^n$ feletti Lebesgue-féle mértéktér helyett ennek valamilyen leszűkítését vesszük. Pl. legyen $n := 1$ és $-\infty < a < b < +\infty$, ill. tekintsük az $[a,b]$ intervallumbeli Lebesgue-féle mértékstruktúrát a $\lambda$ Lebesgue-mértékkel. Ekkor

$$L^p[a,b] \subset L\log^+ L[a,b] \subset L^1[a,b] \qquad (1 < p \le +\infty).$$

Legyen $f \in L^1[a,b]$ és az

$$\mathcal{I} := \{I \subset [a,b] : \text{ az } I \text{ intervallum}\}$$

halmazrendszerrel

$$Mf(x) := \sup\left\{\frac{1}{|I|} \cdot \int_I |f|\, d\lambda : x \in I \in \mathcal{I}\right\} \qquad (x \in [a,b]).$$

Ha

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [a,b]) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [a,b]), \end{cases}$$

akkor $F \in L^1(\mathbf{R})$ és

$$\|F\|_p = \|f\|_p \qquad (1 \le p \le +\infty),$$

továbbá nyilván

$$Mf(x) \le F^\bullet(x) \qquad (x \in [a,b])$$

és

$$|f| \le Mf.$$

Ezért a maximálfüggvényekre vonatkozó fenti tételeink alapján a most értelmezett $M$ *Hardy–Littlewood-féle maximáloperátort*[44] illetően is az alábbiakat mondhatjuk:

[44] A „szabványos” $M(f)$ szimbólum helyett a „hagyományos” $Mf$ jelölést használjuk.

**10.11.3. Tétel.** *Alkalmas (csak a $p$-től függő) $c_p > 0 \quad (0 < p \leq +\infty)$ konstansokkal minden $f \in L^1[a,b]$ függvényre igazak a következő állítások:*

$$\lambda(\{Mf > q\}) \leq c_1 \cdot \frac{\|f\|_1}{q} \qquad (q > 0)$$

*és*

$$\|Mf\|_p \leq c_p \cdot \|f\|_p \qquad (1 < p \leq +\infty),$$

*valamint*

$$\int_a^b Mf \, d\lambda \leq 2(b-a) + c_1 \cdot \int_a^b |f| \cdot \log^+ \circ |f| \, d\lambda$$

*és*

$$\left( \int_a^b (Mf)^p \, d\lambda \right)^{1/p} \leq (b - a + c_p)^{1/p} \cdot \|f\|_1 \qquad (0 < p < 1).$$

Tehát az $f \in L \log^+ L[a,b]$ függvényekre $Mf \in L^1[a,b]$. Érdekes tulajdonsága az $M$ operátornak az, miszerint az $Mf \in L^1[a,b]$ tartalmazás valójában ekvivalens azzal, hogy $f \in L \log^+ L[a,b]$. Nevezetesen: *ha* $f$, $Mf \in L^1[a,b]$, *akkor* $f \in L \log^+ L[a,b]$ (*Stein-tétel*).

A periodikus esetekben gyakran hasznos az $M$ operátor alábbi módosítása. Legyen ehhez a fenti $f \in L^1[a,b]$ függvényre most

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (a \leq x \leq b) \\ \\ f(x + b - a) & (2a - b \leq x < a) \\ \\ f(x - b + a) & (b < x \leq 2b - a). \end{cases}$$

Világos, hogy $F \in L^1[2a - b, 2b - a]$ és

$$\|F\|_p = 3^{1/p} \cdot \|f\|_p \qquad (1 \leq p < +\infty),$$

valamint $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$. Ha

$$\mathcal{M}f(x) := MF(x) \qquad (a \leq x \leq b),$$

akkor az $\mathcal{M}$ *periodikus maximáloperátorra* is igazak az előbb az $M$-ről mondottak.

Az $\mathcal{M}$ periodikus maximáloperátor szerepét illetően az alábbiakat jegyezzük meg. Legyen a

$$\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

egy (Lebesgue-szerint) integrálható függvény és tegyük fel, hogy valamilyen (a $[0, +\infty)$ intervallumon) monoton fogyó, páros, szintén $L^1$-beli $\eta \geq 0$ függvénnyel

$$|\Phi| \leq \eta.$$

Ekkor bármely (az $\mathbf{R}$-re a $2\pi$ szerint periodikusan kiterjeszthető) $f \in L^1[-\pi, \pi]$ függvényre m.m. $x \in [-\pi, \pi]$ helyen:

$$f_\Phi(x) := \sup_n \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) n\Phi(nt)\, dt \right| \leq 4 \cdot \|\eta\|_1 \cdot \mathcal{M}f(x).$$

Az $f \mapsto f_\Phi$ maximáloperátor tehát nyilván gyengén $(1,1)$ típusú és ugyanakkor minden $1 < p \leq +\infty$ esetén $(p,p)$ típusú, mivel az $\mathcal{M}$ ilyen.

Röviden idézzük fel operátorsorozatok maximáloperátorának a jelentőségét a m.m. való konvergenciában. Legyen ehhez adott az $(X, \Omega, \nu)$ mértéktér, és jelöljük ekkor $\mathcal{F}$-fel a mérhető[45]

$$f : X \to \mathbf{C}$$

függvények halmazát. Valamilyen $1 \leq p < +\infty$ mellett tekintsük a

$$T_n : L^p(X) \to \mathcal{F} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

lineáris operátorokból álló sorozatot, és definiáljuk a $(T_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat *maximáloperátorát* az alábbiak szerint:

$$T^*(f) := \sup_n |T_n(f)| \qquad (f \in L^p(X)).$$

Tegyük fel továbbá, hogy a

$$T : L^p(X) \to \mathcal{F}$$

operátor lineáris és egy $1 \leq q < +\infty$ esetén a $T, T^*$ operátorok mindegyike gyengén $(p,q)$ típusú. Ekkor az

$$\mathcal{L}_p := \{ f \in L^p(X) : \lim_{n \to \infty} T_n(f)(x) = T(f)(x) \ \ (\text{m.m.}\, x \in X) \}$$

---

[45] Az $\Omega$ szigma algebrára vonatkozóan.

halmaz zárt az $L^p(X)$-ben (a $\|.\|_p$ normára nézve). Következésképpen, ha a

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f)(x) = T(f)(x) \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

konvergencia az $L^p(X)$ tér egy mindenütt sűrű részhalmazának az $f$ elemeire fennáll, akkor $\mathcal{L}_p = L^p(X)$, azaz tetszőleges $f \in L^p(X)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f)(x) = T(f)(x) \qquad (\text{m.m. } x \in X).$$

A fenti $\Phi$ függvény segítségével definiált

$$T_n(f)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)n\Phi(nt)\,dt \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi],\, n \in \mathbf{N},\, x \in [-\pi,\pi])$$

operátorokkal kapcsolatban könnyű megmutatni, hogy tetszőleges $P$ trigonometrikus polinomra m.m. $x \in [-\pi,\pi]$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)n\Phi(nt)\,dt \to \left(\int \Phi(t)\,dt\right)\cdot P(x) \qquad (n \to \infty).$$

A trigonometrikus polinomok halmaza azonban (az $\|.\|_1$ norma értelmében) mindenütt sűrű az $L^1[-\pi,\pi]$-ben, tehát az előbbiek alapján bármely $f \in L^1[-\pi,\pi]$ függvényre is igaz, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)n\Phi(nt)\,dt \to \left(\int \Phi(t)\,dt\right)\cdot f(x) \qquad (n \to \infty)$$

m.m. $x \in [-\pi,\pi]$ helyen. Innen speciális esetként olyan fontos operátorsorozatok m.m. való konvergenciája is megkapható, mint pl. az $L^1[-\pi,\pi]$-beli függvények trigonometrikus Fourier-sorának a (C,1)-közepei.[46]

Fogalmazzuk meg a $T^*$ maximáloperátorról fentebb mondott „technika” egy variánsát. Legyen ehhez adott az $(Y, \|.\|_Y)$ normált (vagy kvázinormált) tér és tekintsük az $(X, \Omega, \nu)$ mértéktér és az $1 \le p < +\infty$ kitevő mellett az

$$U_n,\, U : Y \to L^p(X) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[46]Így pl. a *Lebesgue-tétel,* miszerint az említett (C,1)-közepek m.m. értelemben pontonként konvergálnak a szóban forgó függvényhez, azaz bármely $f \in L^1[-\pi,\pi]$ esetén m.m. $x \in [-\pi,\pi]$ helyen $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)$, ahol az $S_k(f)$ $(k \in \mathbf{N})$ trigonometrikus Fourier-részletösszegekkel $\sigma_n(f) = (n+1)^{-1}\cdot \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ $(n \in \mathbf{N})$.

lineáris operátorokat. Jelölje $U^*$ az $(U_n, n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat maximáloperátorát:

$$U^*(f) := \sup_n |U_n(f)| \qquad (f \in Y).$$

Tegyük fel, hogy alkalmas $C_1$, $C_2 \geq 0$ konstansokkal

$$\nu(\{|U(f)| > y\})^{1/p} \leq C_1 \cdot \frac{\|f\|_Y}{y} \qquad (f \in Y,\, y > 0)$$

és

$$\nu(\{U^*(f) > y\})^{1/p} \leq C_2 \cdot \frac{\|f\|_Y}{y} \qquad (f \in Y,\, y > 0)$$

(azaz az $U, U^*$ operátorok *gyengén* $(Y,p)$ *típusúak*). Legyen továbbá az $Y_0$ mindenütt sűrű az $Y$-ban és

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)(x) = U(f)(x) \qquad (f \in Y_0,\, \text{m.m. } x \in X).^{47}$$

Ekkor a

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)(x) = U(f)(x) \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

egyenlőség minden $f \in Y$ esetén fennáll.

Az előbbi $T^*$ operátor gyenge $(p,q)$ típusa miatt tehát valamilyen $C_{pq} \geq 0$ konstanssal

$$\nu(\{T^*(f) > y \cdot \|f\|_p\}) \leq \frac{C_{pq}}{y^q} \qquad (f \in L^p(X),\, y > 0),$$

ahol a $C_{pq}y^{-q}$ szorzat monoton fogyólag tart a nullához $y \to +\infty$ esetén. Az is nyilvánvaló, hogy ha $f \in L^p(X)$ és a $(T_n(f)(x), n \in \mathbf{N})$ sorozat m.m. $x \in X$ esetén konvergens, akkor

$$T^*(f)(x) < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in X).$$

Mindezt előre bocsátva tegyük fel most azt, hogy a $T_n$ $(n \in \mathbf{N})$ lineáris operátorok *mértékben folytonosak,* azaz minden $n \in \mathbf{N}$ indexre tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\nu(\{|T_n(f_k)| > \varepsilon\}) \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

teljesül minden olyan $f_k \in L^p$ $(k \in \mathbf{N})$ esetén, amikor

$$\|f_k\|_p \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

[47] Tehát alkalmas $Z \in \Omega$, $\nu(Z) = 0$ halmazzal minden $x \in X \setminus Z$ helyen fennáll a szóban forgó konvergencia.

(Ez nyilván igaz, ha a $T_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok gyengén $(p, q)$ típusúak.) Tegyük fel továbbá, hogy

$$T^*(f)(x) < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

minden $f \in L^p(X)$ függvényre fennáll és a $\nu$ mérték véges. Ekkor a Banach-féle *folytonossági elv* szerint létezik olyan monoton csökkenő

$$C : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

függvény, hogy

$$\lim_{y \to +\infty} C(y) = 0$$

és

$$\nu(\{T^*(f) > y \cdot \|f\|_p\}) \le C(y) \qquad (y > 0,\ f \in L^p(X)).$$

Ti. egyszerűen belátható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számra az

$$F_n := \{f \in L^p(X) : \nu(\{T^*(f) > n\}) \le \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazok zártak. A $\{T^*(f) > n\} \quad (n \in \mathbf{N})$ (mérhető) halmazokból álló sorozat minden $f \in L^p(X)$ függvényre monoton fogyó és

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \{T^*(f) > n\} = \{T^*(f) = +\infty\}.$$

Világos, hogy a

$$T^*(f)(x) < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

feltétel miatt

$$\nu(\{T^*(f) = +\infty\}) = 0,$$

ezért a $\nu$ mérték végessége alapján

$$\nu(\{T^*(f) > n\}) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen létezik olyan $n \in \mathbf{N},$ amellyel

$$\nu(\{T^*(f) > n\}) \le \varepsilon,$$

tehát $f \in F_n.$ Más szóval

$$L^p(X) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n.$$

Ezért a Baire-féle kategória-tétel (ld. 10.1.) szerint egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexszel van olyan $f_0 \in F_n$ és $\delta > 0$, hogy

$$f_0 + \delta g \in F_n \qquad (g \in L^p(X),\ \|g\|_p = 1).$$

Ezért

$$\nu(\{T^*(f_0 + \delta g) > n\}) \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\nu(\{T^*(g) > 2n/\delta\}) \leq 2\varepsilon$$

egyszerűen következik. Innen azt kapjuk, hogy

$$\nu(\{T^*(f) > 2n \cdot \|f\|_p/\delta\}) \leq 2\varepsilon \qquad (f \in L^p(X)).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$C(y) := \sup_{f \in L^p} \nu(\{T^*(f) > y \cdot \|f\|_p\}) \qquad (y > 0)$$

függvény megfelelő.

A most mondott folytonossági elvből könnyen kapjuk azt is, hogy az

$$\mathcal{L}_p := \{f \in L^p(X) : (T_n(f)(x), n \in \mathbf{N}) \text{ konvergens } (\text{m.m. } x \in X)\}$$

halmaz zárt (a $\|.\|_p$ normában). Valóban, legyen

$$\Lambda(f) := \limsup_{m,n \to \infty} |T_n(f) - T_m(f)| \qquad (f \in L^p(X)).$$

Nyilván igaz, hogy $\Lambda(f) \leq 2T^*(f)$, ezért

$$\nu(\{\Lambda(f) > y \cdot \|f\|_p\}) \leq \frac{Cy}{2} \qquad (f \in L^p(X),\ y > 0).$$

Ha $g \in \mathcal{L}_p$, akkor $\Lambda(g) = 0$, így $\Lambda(f - g) = \Lambda(f)$ és

$$\nu(\{\Lambda(f) > y \cdot \|f - g\|_p\}) \leq \frac{Cy}{2} \qquad (f \in L^p(X)).$$

Amennyiben itt $f \in \overline{\mathcal{L}_p}$ és $\varepsilon > 0$, valamint

$$\|f - g\|_p < \varepsilon^2,$$

akkor az $y := 1/\varepsilon$ választással

$$\nu(\{\Lambda(f) > \varepsilon\}) \leq \frac{C}{2\varepsilon}$$

adódik. Innen viszont már egyszerűen következik, hogy $\nu(\{\Lambda(f) > 0\}) = 0$, azaz:

$$\lim_{n,m\to\infty} |T_n(f)(x) - T_m(f)(x)| = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in X).$$

Más szóval tehát $f \in \mathcal{L}_p$, így az $\mathcal{L}_p$ valóban zárt.

Tekintsük valamilyen

$$u : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

monoton fogyó függvénnyel a

$$\varphi(x) := u(\|x\|_2) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

*radiális függvényt,* amiről feltesszük, hogy (Lebesgue-)integrálható. Ekkor minden (Lebesgue-)integrálható

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényre igaz, hogy

$$|\varphi * f(x)| \leq \|\varphi\|_1 \cdot f^o(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha ui. $u_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvények monoton növekedő sorozata és

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

akkor a

$$\varphi_n(x) := u_n(\|x\|_2) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel

$$|\varphi * f(x)| \leq \varphi * |f|(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n * |f|(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Mivel az $u$ monoton fogyó, ezért az $u_n$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények a következő alakúak is lehetnek:

$$u_n = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_j \chi_{[0,t_k)},$$

ahol $0 < t_0 < ... < t_{N_n}$ (egy alkalmas $N_n \in \mathbf{N}$ mellett) és $\alpha_k \geq 0$ $(k = 0, ..., N_n)$. Következésképpen az $x \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$\varphi_n * |f|(x) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_j \chi_{[0,t_k)} * |f|(x) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_j \cdot \int_{K_{t_k}(x)} |f|\, d\lambda \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_j \lambda(K_{t_k}(x)) f^o(x) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_j \lambda(K_{t_k}(0)) f^o(x) = \|\varphi_n\|_1 \cdot f^o(x) \leq \|\varphi\|_1 \cdot f^o(x).$$

Legyen valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén a $T$ az $L^1(\mathbf{R}^n)$ (Lebesgue-)téren értelmezett, az $\mathbf{R}^n$-en definiált (Lebesgue-)mérhető valós vagy komplex értékű függvények halmazába képező gyengén $(1,1)$ típusú operátor. Ekkor bármely $0 < p < 1$ esetén van olyan $C_p \geq 0$ konstans, amellyel

$$\lambda(\{(|T(f)|^p)^* > y^p\}) \leq \frac{C_p}{y^{1-p}} \cdot \|f\|_1 \qquad (f \in L^1(\mathbf{R}^n),\, y > 0).$$

Ui. a Hardy–Littlewood-maximáloperátor gyenge $(1,1)$ tulajdonságát „erősítő” egyenlőtlenség (ld. fent) alapján

$$\lambda(\{(|T(f)|^p)^* > 2y\}) \leq \frac{3^n}{y} \cdot \int_{\{|T(f)|^p > y\}} |T(f)|^p\, d\lambda =$$

$$\frac{3^n p}{y} \cdot \int_{y^{1/p}}^{+\infty} t^{p-1} \lambda(\{|T(f)| > t\})\, dt \leq$$

$$\frac{C 3^n p \cdot \|f\|_1}{y} \cdot \int_{y^{1/p}}^{+\infty} t^{p-2}\, dt = \frac{C 3^n p \cdot \|f\|_1}{1-p} \cdot y^{1-1/p},$$

ami nyilván ekvivalens a jelzett egyenlőtlenséggel.

A XX. századi matematika egyik legnagyobb hatású eredménye a *Carleson–Hunt-tétel*, ami egy akkor mintegy 50 éves nyitott problémára, az ún. *Luzin-sejtésre* adott választ. Ennek a megfogalmazásához legyen az $S_n$ $(n \in \mathbf{N})$ az $n$-edik trigonometrikus Fourier-részletösszeg-operátor és egy $f \in L^1[0, 2\pi]$ függvény esetén

$$S^*(f) := \sup_n |S_n(f)|.$$

Ekkor a Carleson–Hunt-tétel szerint van olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy minden $1 < p < +\infty$ „kitevőre" és $f \in L^p[0, 2\pi]$ függvényre[48]

$$\|S^*(f)\|_p \leq \frac{Cp^4}{(p-1)^3} \cdot \|f\|_p.$$

Mivel a trigonometrikus polinomok $\mathcal{T}$ halmaza (a $\|.\|_q$-normában) mindenütt sűrű az $L^q[0, 2\pi]$-ben $(1 \leq q < +\infty)$ és

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\psi)(x) = \psi(x) \qquad (\psi \in \mathcal{T},\ x \in [0, 2\pi])$$

nyilván igaz, ezért tetszőleges $f \in L^p[0, 2\pi]$ $(1 < p \leq +\infty)$ függvényre is fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0, 2\pi])$$

pontonkénti konvergencia. Megjegyezzük, hogy a $p = +\infty$ esetben igaz az alábbi, Hunt-féle becslés: alkalmas $A, B > 0$ abszolút konstansokkal

$$\lambda(\{S^*(f) > y\}) \leq Ae^{-By/\|f\|_\infty} \qquad (f \in L^\infty[0, 2\pi],\ y > 0).$$

Jóval a Carleson–Hunt-tétel előtt ismert volt már a *Kolmogorov-tétel,* miszerint van olyan $f \in L^1[0, 2\pi]$ függvény, hogy m.m. $x \in [0, 2\pi]$ esetén az $(S_n(f)(x), n \in \mathbf{N})$ sorozat divergens, sőt, hogy az utóbbi sorozat minden $x \in [0, 2\pi]$ esetén divergens[49]. Máig nyitott az a kérdés, hogy az $\bigcup_{p>1} L^p[0, 2\pi]$ függvényosztály és (a nála bővebb) $L^1[0, 2\pi]$ tér között hol húzódik az a „határ", ami az $L^1[0, 2\pi]$-ben elválasztja egymástól azokat a függvényeket, amelyeknek a trigonometrikus Fourier-sora m.m. konvergens, ill. nem. Két eredményt idézünk ezzel kapcsolatban:

- *ha* $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ \log^+ L[0, 2\pi]$, *akkor az* $(S_n(f)(x), n \in \mathbf{N})$ *trigonometrikus Fourier-részletösszeg-sorozat m.m.* $x \in [0, 2\pi]$ *mellett konvergens;*[50]
- *ha a*

  $$\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

  *függvényre*

  $$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t) \cdot \sqrt{\log\log t}}{\sqrt{\log t}} = 0$$

[48] L. Carleson (1966), ha $p = 2$ és R. Hunt (1967), ha $p > 1$.
[49] A. N. Kolmogorov (1923, 1926).
[50] N. Yu. Antonov (1996).

*teljesül, akkor van olyan* $f \in L\Phi(L)[0,2\pi]$ *függvény*[51]*, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora mindenütt divergens.*[52]

Legyen $f \in L^1[0,1)$ és $W_n(f)$ $(n \in \mathbf{N})$ az $f$ függvény $n$-edik Walsh–Fourier-részletösszege (ld. 5.4.). Ha

$$W^*(f) := \sup_n |W_n(f)|,$$

akkor igaz a Carleson-tétel megfelelője: ti. minden $1 < p < +\infty$ esetén a $W^*$ maximáloperátor $(p,p)$ típusú, valamint bármely $1 < p \leq +\infty$ kitevőre és $f \in L^p[0,1]$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} W_n(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]).^{53}$$

Fennáll a Kolmogorov-féle divergencia-tétel megfelelője is, nevezetesen: van olyan $f \in L^1[0,1]$ függvény, amelyre a $(W_n(f)(x), n \in \mathbf{N})$ sorozat m.m. $x \in [0,1]$ helyen divergál,[54] ill. minden $x \in [0,1]$ helyen divergál.[55] Sőt:

- *ha* $f \in L\log^+ L \log^+ \log^+ L[0,1]$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} W_n(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1]);^{56}$$

- *legyen*

$$W_d^*(f) := \sup_n |W_{2^n}(f)| \qquad (f \in L^1[0,1]),$$

*továbbá a*

$$\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

*monoton növekedő, folytonos és a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{\log\log x} = 0$$

*nagyságrendi feltételnek eleget tevő tetszőleges függvény. Ekkor megadható olyan* $f \in L^1[0,1]$, *amelyre*

$$\int_0^1 W_d^* \cdot \Phi \circ W_d^* \, d\lambda < +\infty$$

*és a* $(W_n(f)(x), n \in \mathbf{N})$ *sorozat minden* $x \in [0,1]$ *mellett divergál.*[57]

[51] Tehát $\int_0^{2\pi} |f| \cdot \Phi \circ |f| \, d\lambda < +\infty$.
[52] S. V. Konjagin (2000).
[53] P. Billard (1966-67), ha $p = 2$ és P. Sjölin (1969), ha $p > 1$.
[54] E. M. Stein (1961).
[55] Schipp Ferenc (1969).
[56] P. Sjölin (1969).
[57] Schipp Ferenc–Simon Péter (1983).

Világos, hogy ha

$$H\Phi(H)[0,1] := \left\{ f \in L^1[0,1] : \int_0^1 W_d^* \cdot \Phi \circ W_d^* \, d\lambda < +\infty \right\},$$

akkor a

$$H\Phi(H)[0,1] \subset L\Phi(L)[0,1] \subset L^1[0,1]$$

tartalmazások valódiak.

Mivel (ld. 5.4.) az $f \in L^1[0,1]$ függvényekre

$$W_{2^n}(f)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \cdot \int_{I_n(x)} f \, d\lambda \qquad (x \in [0,1),\ n \in \mathbf{N})$$

(ahol $x \in I_n(x) := [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ alkalmas (minden $x$-re és az $n \in \mathbf{N}$ indexre egyértelműen létező) $k = 0, ..., 2^n - 1$ természetes számmal). Ezért (a fenti $M$ maximáloperátorral)

$$W_d^*(f) \leq Mf.$$

Így bármely $1 \leq p \leq +\infty$ és $y > 0$ esetén

$$\|W_d^*(f)\|_p \leq \|Mf\|_p,$$

valamint a nyilvánvaló

$$\{W_d^*(f) > y\} \subset \{Mf > y\}$$

tartalmazás miatt

$$\lambda(\{W_d^*(f) > y\}) \leq \lambda(\{Mf > y\}).$$

Következésképpen (az $M$ Hardy–Littlewood-maximáloperátor analóg tulajdonságai alapján) a $W_d^*$ *diadikus maximáloperátor* is gyengén $(1,1)$ típusú, továbbá minden $1 < p \leq +\infty$ mellett $(p,p)$ típusú. Innen tehát a

$$\lim_{n \to \infty} W_{2^n}(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0,1],\ f \in L^1[0,1])$$

konvergencia már következik.

Az előbbi megjegyzés hátterében az alábbi általános érvényű meggondolások húzódnak meg. Legyen az $(X, \Omega, \nu)$ valószínűségi mértéktér (*Kolmogorov-mező*)[58], az $\mathcal{A}_n \subset \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ pedig olyan szigma algebráknak a sorozata, amelyre

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[58]Tehát $\nu(X) = 1$.

és

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

teljesül. Jelöljük $E_n$-nel $(n \in \mathbf{N})$ az $\mathcal{A}_n$ szigma algebrára vonatkozó feltételes várható érték operátort[59]. Ekkor az $f_n \in L^1(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat egy *martingál,* ha az $f_n$ $(n \in \mathbf{N})$ mérhető az $\mathcal{A}_n$-re nézve[60] és

$$E_n(f_{n+1}) = f_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathbf{M}(f) := \sup_n |f_n| \qquad (f \in L^1(X))$$

és

$$\|f\|_p := \sup_n \|f_n\|_p \qquad (f \in L^1(X),\, 1 \le p \le +\infty).$$

Ekkor alkalmas $C > 0$ és (csak a $p$-től függő) $C_p > 0$ konstansokkal igaz a *Doob-egyenlőtlenség*:

$$\nu\left(\{\mathbf{M}(f) > y\}\right) \le \frac{C}{y} \cdot \|f\|_1 \qquad (f \in L^1(X),\, y > 0),$$

ill.

$$\|\mathbf{M}(f)\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p(X),\, 1 < p \le +\infty).$$

Belátható, hogy ha $1 < p < +\infty$ és $\|f\|_p < +\infty$, akkor (a $\nu$ mérték szerinti értelemben) m.m. is és $\|.\|_p$-normában is az $(f_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, az

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

határértékre pedig $F \in L^p(X)$, továbbá

$$f_n = E_n(F) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

igaz.[61]

Világos, hogy tetszőleges $f \in L^1(X)$ esetén az

$$f_n := E_n(f) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[59] Emlékeztetve a szóban forgó operátorra: tetszőleges $f \in L^1(X)$ függvényre az $E_n(f) \in L^1(X)$ mérhető az $\mathcal{A}_n$-re nézve és $\int_Y f\, d\nu = \int_Y E_n(f)\, d\nu \quad (Y \in \mathcal{A}_n)$.

[60] Más szóval bármely $B \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra $f_n^{-1}[B] \in \mathcal{A}_n$.

[61] Ha $p = 1$, akkor az előbbiekből a m.m. értelemben vett konvergencia megmarad.

módon értelmezett $f_n$-ek martingált alkotnak.

Ha pl. $X := [0,1)$ és az $\Omega$ az $X$ halmaz Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma algebrája,

$$\nu(A) := \lambda(A) \qquad (A \in \Omega),$$

akkor legyen az $\mathcal{A}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ az

$$I_{nk} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \qquad (k = 0, ..., 2^n - 1)$$

intervallumokat tartalmazó legszűkebb szigma algebra. Ekkor bármely $f \in L^1[0,1)$ függvényre

$$f_n(x) := E_n(f)(x) = W_{2^n}(f)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \cdot \int_{I_n(x)} f \, d\lambda \qquad (x \in [0,1)),$$

azaz $\mathbf{M} = W_d^*$.

## 10.12. Calderon–Zygmund-felbontás

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $0 < y \in \mathbf{R}$, valamint a (Lebesgue-integrálható) $f \in L^1[a,b]$ függvényről tegyük fel, hogy[62]

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f| \, d\lambda \leq y.$$

Ha

$$J_0 := \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ és } J_1 := \left[\frac{a+b}{2}, b\right],$$

akkor

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f| \, d\lambda = \frac{1}{2|J_0|} \cdot \int_{J_0} |f| \, d\lambda + \frac{1}{2|J_1|} \cdot \int_{J_1} |f| \, d\lambda =: \frac{A+B}{2} \leq y,$$

tehát $\min\{A, B\} \leq y$. Tegyük fel, hogy $C \in \{A, B\}$ és

$$C = \frac{1}{|J_2|} \cdot \int_{J_2} |f| \, d\lambda,$$

[62] A későbbiekben is legyen a $\lambda$ a Lebesgue-mérték a számegyenesen.

ahol $J_2 \in \{J_0, J_1\}$ a megfelelő intervallum. Világos, hogy $C > y$ esetén

$$y < \frac{1}{|J_2|} \cdot \int_{J_2} |f| \, d\lambda \leq \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b |f| \, d\lambda \leq 2y.$$

Jelöljük ekkor $I$-vel a $J_2$ intervallum belsejét. Ha $C \leq y$, akkor a $J_2$-t felezzük meg, valamint ismételjük meg a fentieket az $[a, b]$ helyett a $J_2$-vel és i.t. Legyen $\mathcal{I}$ az így definiált eljárásban kapott $I$ nyílt intervallumok halmaza. Ha tehát $\mathcal{I} \neq \emptyset$ és $I \in \mathcal{I}$, akkor

$$y < \frac{1}{|I|} \cdot \int_I |f| \, d\lambda \leq 2y.$$

Továbbá bármely $I, \, I^* \in \mathcal{I}, \, I \neq I^*$ esetén $I \cap I^* = \emptyset$.

Az

$$F := [a, b] \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$$

halmaz m.m. $x \in F$ pontjára igaz a következő: van olyan $(J_n, n \in \mathbf{N})$ intervallum-sorozat, hogy

$$x \in J_{n+1} \subset J_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$|J_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

és

$$\frac{1}{|J_n|} \cdot \int_{J_n} |f| \, d\lambda \leq y \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen az integrálfüggvények differenciálhatósága alapján az következik, hogy

$$|f(x)| \leq y \qquad (\text{m.m. } x \in F).$$

Tegyük fel, hogy

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \, f \in L^1(\mathbf{R}), \, y > 0$$

és a $q \in \mathbf{N}$ olyan index, hogy $\|f\|_1 \leq qy$. Legyen

$$J_k := [kq, (k+1)q] \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

és minden $k \in \mathbf{Z}$ mellett hajtsuk végre az előzőekben mondott eljárást az $[a, b]$ helyett a $J_k$-val, az ottani $f$ helyett véve az $f$ leszűkítését a $J_k$-ra. Jelöljük ennek megfelelően $\mathcal{I}_k$-val a fenti $\mathcal{I}$-t és legyen most

$$\mathcal{I} := \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{I}_k.$$

Ekkor $\mathcal{I} = \emptyset$, vagy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal

$$\mathcal{I} = \{I_j : j \in \mathcal{N}\},$$

ahol minden itt szereplő $I_j$ nyílt intervallum,

$$I_j \cap I_l = \emptyset \qquad (k \neq l \in \mathcal{N})$$

és

$$y < \frac{1}{|I_j|} \cdot \int_{I_j} |f| \, d\lambda \leq 2y \qquad (j \in \mathcal{N}).$$

Igaz továbbá, hogy az

$$\Omega := \bigcup_{j \in \mathcal{N}} I_j$$

halmaz nyílt,

$$\lambda(\Omega) = \sum_{j \in \mathcal{N}} |I_j| < \sum_{j \in \mathcal{N}} \frac{1}{y} \cdot \int_{I_j} |f| \, d\lambda = \frac{1}{y} \cdot \int_{\Omega} |f| \, d\lambda \leq \frac{\|f\|_1}{y},$$

továbbá, ha $F := \mathbf{R} \setminus \Omega$, akkor

$$|f(x)| \leq y \qquad (\text{m.m. } x \in F).$$

A fentiek alapján (esetleg értelemszerű módosítással) kapjuk tehát a következőt: legyen a $\Delta \subset \mathbf{R}$ (nem elfajuló) intervallum, az

$$f : \Delta \to \mathbf{R}$$

függvény pedig legyen Lebesgue-integrálható: $f \in L^1(\Delta)$, $y > 0$ és $|\Delta| < +\infty$ esetén

$$\frac{1}{|\Delta|} \cdot \int_{\Delta} |f| \, d\lambda \leq y.$$

Ekkor

$$|f(x)| \leq y \qquad (\text{m.m. } x \in \Delta),$$

vagy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal és páronként diszjunkt

$$I_k \subset \Delta \qquad (k \in \mathcal{N})$$

nyílt intervallumokkal

$$y < \frac{1}{|I_j|}\cdot \int_{I_j} |f|\, d\lambda \leq 2y \qquad (j \in \mathcal{N}),$$

az

$$\Omega := \bigcup_{j\in\mathcal{N}} I_j$$

halmazra

$$\lambda(\Omega) \leq \frac{1}{y}\cdot \|f\|_1$$

és

$$|f(x)| \leq y \qquad (\text{m.m. } x \in F := \Delta \setminus \Omega).$$

Legyen itt a $k \in \mathcal{N}$ indexekre

$$f_k := \left(f - \frac{1}{|I_k|}\cdot \int_{I_k} f\, d\lambda\right) \cdot \chi_{I_k},$$

továbbá

$$h := \sum_{k\in\mathcal{N}} f_k \quad \text{és} \quad g := f - h.$$

Ekkor a következőket mondhatjuk:

i) $\operatorname{supp} f_k \subset I_k$, $\int_{I_k} f\, d\lambda = 0$ és $\int_{I_k} |f_k|\, d\lambda \leq 4y\cdot |I_k| \qquad (k \in \mathcal{N})$;

ii) $\operatorname{supp} h \subset \Omega$, $\int h\, d\lambda = \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{I_k} f_k\, d\lambda = 0$ és

$$\|h\|_1 \leq \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{I_k} |f_k|\, d\lambda \leq 2\cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{I_k} |f|\, d\lambda = 2\cdot \int_{\Omega} |f|\, d\lambda \leq 2\cdot \|f\|_1;$$

iii) ha $k \in \mathcal{N}$ és $x \in I_k$, akkor

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{|I_k|}\cdot \int_{I_k} f\, d\lambda\right| \leq 2y,$$

valamint

$$|g(x)| = |f(x)| \leq y \qquad (\text{m.m. } x \in F),$$

így $\|g\|_\infty \leq 2y$;

iv) továbbá

$$\|g\|_1 = \int_F |g|\, d\lambda + \int_\Omega |g|\, d\lambda =$$

$$\int_F |f|\, d\lambda + \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{I_k} \left( \frac{1}{|I_k|} \cdot \left| \int_{I_k} f\, d\lambda \right| \right) d\lambda =$$

$$\int_F |f|\, d\lambda + \sum_{k\in\mathcal{N}} \left| \int_{I_k} f\, d\lambda \right| \le \int_F |f|\, d\lambda + \int_\Omega |f|\, d\lambda = \|f\|_1$$

és

$$\|g\|_p^p = \int_\Delta |g|^p\, d\lambda = \int_\Delta |g|^{p-1} \cdot |g|\, d\lambda \le$$

$$(2y)^{p-1} \cdot \|g\|_1 \le (2y)^{p-1} \cdot \|f\|_1 \qquad (1 < p < +\infty).$$

Az i) – iv)-nek eleget tevő *Calderon–Zygmund-felbontás* egyik tipikus alkalmazásaként legyen $1 < p \le +\infty$, továbbá

$$T : L^1(\Delta) \to \mathcal{F} := \{\varphi : \Delta \to \mathbf{R} : \text{ a } \varphi \text{ Lebesgue-mérhető}\},$$

ahol a $T$ szubadditív és $(p,p)$ típusú. Ha $f \in L^1(\Delta)$, $y > 0$,[63] akkor vegyük az előbbiek szerinti

$$f = g + h = g + \sum_{k\in\mathcal{N}} f_k$$

felbontást, így

$$|T(f)| \le |T(g)| + |T(h)|.$$

Ezért a $p < +\infty$ kitevőkkel

$$\lambda\left(\{|T(f)| > y\}\right) \le \lambda\left(\{|T(g)| > y/2\}\right) + \lambda\left(\{|T(h)| > y/2\}\right),$$

amikor is megfelelő $C_p > 0$ konstanssal

$$\lambda\left(\{|T(g)| > y/2\}\right) \le \int_\Delta \left( \frac{|T(g)|}{y/2} \right)^p d\lambda = \left(\frac{2}{y}\right)^p \cdot \|T(g)\|_p^p \le C_p \left(\frac{2}{y}\right)^p \cdot \|g\|_p \le$$

$$C_p \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^p (2y)^{p-1} \cdot \|f\|_1 = C_p 2^{2p-1} \cdot \frac{\|f\|_1}{y}.$$

[63] És $|\Delta| < +\infty$ esetén $\int_\Delta |f|\, d\lambda \le y \cdot |\Delta|$.

Következésképpen

$$\lambda\left(\{|T(f)|>y\}\right)\le C_p 2^{2p-1}\cdot\frac{\|f\|_1}{y}+\lambda\left(\{|T(h)|>y/2\}\right).$$

Ha $p=+\infty$, akkor meg egy $C_\infty>0$ alkalmas állandóval

$$|T(f)|\le C_\infty\cdot\|g\|_\infty+|T(h)|\le 2C_\infty\cdot y+|T(h)|,$$

ezért

$$\lambda(\{|T(f)|>4C_\infty\cdot y\})\le\lambda(\{|T(h)|>2C_\infty\cdot y\}).$$

Legyen a $0<\alpha\in\mathbf{R}$ szám (egyelőre) tetszőleges, ekkor

$$\lambda\left(\{|T(h)|>\alpha y\}\right)\le\lambda(\Omega)+\lambda\left(\{x\in\Delta\setminus\Omega:|T(h)(x)|>\alpha y\}\right)\le$$

$$\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\cdot\int_{\Delta\setminus\Omega}|T(h)|\,d\lambda\le$$

$$\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\cdot\sum_{k\in\mathcal{N}}\int_{\Delta\setminus\Omega}|T(f_k)|\,d\lambda\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\cdot\sum_{k\in\mathcal{N}}\int_{\Delta\setminus I_k}|T(f_k)|\,d\lambda.$$

Tegyük fel, hogy van olyan $C>0$ konstans, amellyel bármely $I\subset\Delta$ intervallum,

$$G\in L^1(\Delta),\ \int_\Delta G\,d\lambda=0,\ \operatorname{supp}G\subset I$$

esetén

$$\int_{\Delta\setminus I}|T(G)|\,d\lambda\le C\cdot\|G\|_1.$$

(Ekkor azt mondjuk, hogy a $T$ operátor *kvázilokális*.) Tehát

$$\lambda\left(\{|T(h)|>\alpha y\}\right)\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{C}{\alpha y}\cdot\sum_{k\in\mathcal{N}}\|f_k\|_1=$$

$$\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{C}{\alpha y}\cdot\|h\|_1\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{2C}{\alpha y}\cdot\|f\|_1.$$

Összefoglalva a fentieket azt kapjuk, hogy $p<+\infty$ mellett (az $\alpha:=1/2$ választással)

$$\lambda\left(\{|T(f)|>y\}\right)\le C_p 2^{2p-1}\cdot\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{4C}{y}\cdot\|f\|_1=$$

$$= (C_p 2^{2p-1} + 4C + 1)\cdot \frac{\|f\|_1}{y}.$$

Továbbá $p = +\infty$ mellett (az $\alpha := 2C_\infty$ paraméterrel)

$$\lambda\left(\{|T(f)| > 4C_\infty y\}\right) \le \frac{\|f\|_1}{y} + \frac{C}{C_\infty y}\cdot \|f\|_1 = \frac{C_\infty + C}{C_\infty}\cdot \frac{\|f\|_1}{y},$$

más szóval

$$\lambda\left(\{|T(f)| > y\}\right) \le 4(C_\infty + C)\cdot \frac{\|f\|_1}{y}.$$

Mindkét esetben az adódott, hogy a $T$ gyengén $(1,1)$ típusú.

Az eddigiekhez az alábbi kiegészítéseket tesszük. Legyen az $I \subset \Delta$ véges hosszúságú intervallum, valamint $r \ge 1$ és

$$I^{(r)} := \{x \in \Delta : |x - u| < r\cdot |I|\},$$

ahol az $u$ az $I$ középpontja. Nyilván igaz, hogy

$$|I^{(r)}| \le 2r\cdot |I|$$

és $I \subset I^{(r)}$. Tegyük fel, hogy a $T$ fenti kvázilokalitási definíciójában csak a következőt tudjuk: van olyan $r \ge 1$ szám és olyan $C > 0$ konstans, hogy minden $I \subset \Delta$ intervallum

$$G \in L^1,\ \int_\Delta G\, d\lambda = 0,\ \operatorname{supp} G \subset I$$

esetén

$$\int_{\Delta \setminus I^{(r)}} |T(G)|\, d\lambda \le C\cdot \|G\|_1.$$

Ekkor a $T$ gyengén $(1,1)$ típusú. Ui. a fenti Calderon–Zygmund-felbontásból kiindulva legyen

$$\Omega^{(r)} := \bigcup_{k \in \mathcal{N}} I_k^{(r)},$$

ekkor

$$\lambda\left(\Omega^{(r)}\right) \le 2r\cdot \lambda(\Omega) \le \frac{2r}{y}\cdot \|f\|_1,$$

valamint bármely $0 < y \in \mathbf{R}$ mellett

$$(\{|T(h)| > y\}) \le \lambda\left(\Omega^{(r)}\right) + \lambda\left(\{x \in \Delta \setminus \Omega^{(r)} : |T(h)(x)| > y\}\right) \le$$

$$\leq \frac{2r}{y}\cdot \|f\|_1 + \frac{1}{y}\cdot \int_{\Delta\setminus\Omega^{(r)}} |T(h)|\,d\lambda \leq$$

$$\frac{2r}{y}\cdot \|f\|_1 + \frac{1}{y}\cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{\Delta\setminus I_k^{(r)}} |T(f_k)|\,d\lambda \leq$$

$$\frac{2r}{y}\cdot \|f\|_1 + \frac{C}{y}\cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} \|f_k\|_1 \leq \frac{2r}{y}\cdot \|f\|_1 + \frac{2C}{y}\cdot \|f\|_1.$$

Tegyük fel, hogy (az eddigi szereplőkkel)

$$T(f)(x) = \int_\Delta f(t)F(x,t)\,dt \qquad (x\in\Delta),$$

ahol az

$$F : \Delta^2 \to \mathbf{R}$$

adott (integrálható) *magfüggvény*. Ha $\int_\Delta f\,d\lambda = 0,$ akkor bármely

$$c : \Delta \to \mathbf{R}$$

függvényre

$$T(f)(x) = \int_\Delta f(t)\,(F(x,t) - c(x))\,dt \qquad (x\in\Delta).$$

Ha még $\operatorname{supp} f \subset I$ is igaz valamilyen $I \subset \Delta$ intervallummal, akkor (az előbbiekre tekintettel) minden $1 \leq r \in \mathbf{R}$ számmal

$$\int_{\Delta\setminus I^{(r)}} |T(f)|\,d\lambda \leq \int_{\Delta\setminus I^{(r)}} \int_I |f(t)|\cdot |F(x,t) - c(x)|\,dt\,dx =$$

$$\int_I |f(t)|\cdot \left(\int_{\Delta\setminus I^{(r)}} |F(x,t) - c(x)|\,dx\right) dt.$$

Ha mondjuk van olyan $q_r \geq 0$ konstans, hogy alkalmas

$$\gamma : \Delta \to \mathbf{R}$$

függvénnyel bármelyik $t \in I$ mellett

$$\int_{\Delta\setminus I^{(r)}} |F(x,t) - \gamma(x)|\,dx \leq q_r,$$

akkor a fentiekben a $c$ függvény helyébe a $\gamma$-t írva a következőt kapjuk:

$$\int_{\Delta\setminus I^{(r)}} |T(f)|\,d\lambda \le q_r\cdot \int_I |f|\,d\lambda \le q_r\cdot \|f\|_1.$$

Az alkalmazásokban gyakran fordul elő az, hogy egy megfelelő $t_0 \in I$ választással (pl. az $I$ középpontjával) a

$$\gamma(x) := F(x, t_0) \qquad (x \in \Delta)$$

függvény megfelelő.

## 10.13. Fubini-tétel

Adott $(X_i, \Omega_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ mértékterek esetén tekintsük az $X := X_1 \times X_2$ halmazt és a

$$\mathcal{D} := \{U \times V \subset X : U \in \Omega_1,\ V \in \Omega_2\}$$

halmazrendszer által generált (azaz a szóban forgó halmazrendszert lefedő $\Omega(\mathcal{D})$ legszűkebb) szigma algebrát:

$$\Omega := \Omega_1 \otimes \Omega_2 := \Omega(\mathcal{D}).$$

Ekkor bármely $Y \in \Omega$ halmazra, valamint tetszőleges $x \in X_1$, $y \in X_2$ elemekre

$$Y_x := \{z \in X_2 : (x, z) \in Y\} \in \Omega_2$$

és

$$Y^y := \{v \in X_1 : (v, y) \in Y\} \in \Omega_1.$$

Legyen továbbá egy

$$f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvény és az előbbi $x$, $y$ elemek esetén

$$f_x(z) := f(x, z) \qquad (z \in X_2),$$

továbbá

$$f^y(v) := f(v, y) \qquad (v \in X_1).$$

Ekkor könnyű meggyőződni arról, hogy a fenti bármely mérhető $f$ függvényre[64] és $x \in X_1$, $y \in X_2$ elemekre az $f_x$, $f^y$ függvények is mérhetők.[65]

[64] Tehát tetszőleges $C \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $f^{-1}[C] \in \Omega$.

[65] Más szóval minden $C \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $(f_x)^{-1}[C] \in \Omega_2$ és $(f^y)^{-1}[C] \in \Omega_1$. Ti. egyrészt $(f_x)^{-1}[C] = (f^{-1}[C])_x$ és $(f^y)^{-1}[C] = (f^{-1}[C])^y$, másrészt az $f$ mérhetősége miatt $f^{-1}[C] \in \Omega$.

Megtartva az eddigi jelöléseket értelmezzünk minden egyes $Y \in \Omega$ halmaz mellett két újabb leképezést az alábbiak szerint:

$$F_Y(x) := \mu_2(Y_x) \qquad (x \in X_1)$$

és

$$F^Y(y) := \mu_1(Y^y) \qquad (y \in X_2).$$

Az előbbiekre tekintettel mindkét definíció korrekt, azaz valóban egy

$$F_Y : X_1 \to [0, +\infty]$$

és egy

$$F^Y : X_2 \to [0, +\infty]$$

függvényt definiáltunk. Ezekkel a függvényekkel kapcsolatos a

**10.13.1. Tétel.** *Ha a $\mu_1$, $\mu_2$ mértékek szigma végesek, akkor minden $Y \in \Omega$ halmazra az $F_Y$, $F^Y$ leképezések mérthetők és*

$$\int F_Y \, d\mu_1 = \int F^Y \, d\mu_2.$$

Speciálisan az $U \in \Omega_1$, $V \in \Omega_2$ választással

$$F_{U\times V} = \mu_2(V)\cdot \chi_U \text{ és } F^{U\times V} = \mu_1(U)\cdot \chi_V$$

miatt az $F_{U\times V}$, $F^{U\times V}$ függvények triviálisan mérhetők, valamint

$$\int F_{U\times V} \, d\mu_1 = \mu_1(U)\cdot \mu_2(V) = \int F^{U\times V} \, d\mu_2.$$

Legyen

$$\varphi_1(Y) := \int F_Y \, d\mu_1 \qquad (Y \in \Omega)$$

és

$$\varphi_2(Y) := \int F^Y \, d\mu_2 \qquad (Y \in \Omega).$$

Az így definiált

$$\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \to [0, +\infty]$$

leképezésekre $\varphi_1(\emptyset) = \varphi_2(\emptyset) = 0$ nyilván igaz, hiszen $F_\emptyset = 0$, $F^\emptyset = 0$. A Beppo Levi-tételből az is egyszerűen adódik, hogy a $\varphi_i$ $(i = 1, 2)$ függvények szigma additívak.

Azt kaptuk tehát, hogy a $\varphi_i$ $(i = 1, 2)$ függvények mértékek. Az előbb mondottak alapján ezekre a mértékekre igaz, hogy

$$(*) \qquad \varphi_1(U \times V) = \mu_1(U) \cdot \mu_2(V) = \varphi_2(U \times V) \qquad (U \in \Omega_1,\, V \in \Omega_2).$$

Azt sem nehéz belátni, hogy a $\varphi_i$-k szigma végesek. Ezért a ${\varphi_1}_{|_\mathcal{D}}$, ${\varphi_2}_{|_\mathcal{D}}$ (leszűkített) leképezések a $\mathcal{D}$ halmazról egyértelműen terjeszthetők ki mértékké az $\Omega$-ra. Így a $(*)$ egyenlőség alapján

$$\varphi_1(Y) = \varphi_2(Y) \qquad (Y \in \Omega),$$

következésképpen a $\varphi_1 = \varphi_2$ egyenlőség is igaz.

Definiáljuk a fentiek alapján a $\mu_1$, $\mu_2$ szigma véges mértékek *szorzatát,* a $\mu_1 \otimes \mu_2$ *szorzatmértéket* a következőképpen:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(Y) := \int F_Y \, d\mu_1 = \int F^Y \, d\mu_2 \qquad (Y \in \Omega_1 \otimes \Omega_2).$$

Az

$$(X_1 \times X_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

mértéktér az $(X_i, \Omega_i, \mu_i)$ $(i =, 1, 2)$ mértékterek által meghatározott *szorzattér.*

Legyenek tehát adottak az $(X_i, \Omega_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ szigma véges mértékterek és tekintsük ezen terek (a fentiek szerinti) szorzatát. Valamilyen

$$f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$$

mérhető[66] függvény esetén tekintsük a

$$\Phi_f(x) := \int f_x \, d\mu_2 \qquad (x \in X_1)$$

és a

$$\Phi^f(y) := \int f^y \, d\mu_1 \qquad (y \in X_2)$$

módon definiált

$$\Phi_f : X_1 \to [0, +\infty]$$

[66] A szorzattér értelmében.

és

$$\Phi^f : X_2 \to [0, +\infty]$$

leképezést. Mivel az $f_x \quad (x \in X_1)$ és az $f^y \quad (y \in X_2)$ mérhető, ezért a $\Phi_f$, $\Phi^f$ függvények definíciója is korrekt. Igaz továbbá az alábbi *Tonelli-tétel*:

**10.13.2. Tétel.** *A* $\Phi_f$, $\Phi^f$ *függvények mérhetők és*

$$\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \Phi_f \, d\mu_1 = \int \Phi^f \, d\mu_2.$$

Tehát bármely

$$f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$$

mérhető függvény esetén a következőt mondhatjuk: ha az előbbi három integrál közül valamelyik véges, akkor mindegyik az (és az integrálok egyenlők), vagy mindegyik (plusz) végtelen.

Az integrálhatóság, ill. az integrál értelmezése miatt mindez nyilván következik abból, hogy a szóban forgó tétel teljesül nemnegatív lépcsős függvényekre. Tegyük fel tehát, hogy egy $\emptyset \neq \mathcal{J}$ véges halmazzal és alkalmas, páronként diszjunkt

$$Q_i \in \Omega \qquad (i \in \mathcal{J})$$

halmazokkal, valamint

$$z_i \geq 0 \qquad (i \in \mathcal{J})$$

számokkal

$$f = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \chi_{Q_i}.$$

Ha $x \in X_1$, akkor

$$f_x = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot (\chi_{Q_i})_x = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \chi_{(Q_i)_x},$$

amiből rögtön adódik, hogy

$$\int f_x \, d\mu_2 = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \mu_2\left((Q_i)_x\right) = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot f_{Q_i}(x).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a

$$\Phi_f = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot f_{Q_i}$$

mérhető és

$$\int \Phi_f \, d\mu_1 = \sum_{i\in\mathcal{J}} z_i \cdot \int f_{Q_i} \, d\mu_1 = \sum_{i\in\mathcal{J}} z_i \cdot (\mu_1 \otimes \mu_2)(Q_i) = \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Ha most az

$$f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbf{R}}$$

tetszőleges, a $\mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmértékre nézve integrálható függvény, akkor $x \in X_1$ esetén az $f_x$ függvény mérhető, továbbá fennállnak az alábbi triviális egyenlőségek:

$$|f|_x = |f_x| \quad \text{és} \quad \left(f^{\pm}\right)_x = (f_x)^{\pm},$$

ahol az $f^{\pm}$ szimbólum az $f$ függvény pozitív, ill. negatív részét jelöli:

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases} \quad \text{és} \quad f^-(x) := \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq 0) \\ \\ 0 & (f(x) > 0). \end{cases}$$

Következésképpen

$$\int |f_x| \, d\mu_2 = \int |f|_x \, d\mu_2 = \Phi_{|f|}(x)$$

és

$$\int \Phi_{|f|} \, d\mu_1 = \int |f| \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty,$$

ezért

$$\Phi_{|f|}(x) = \int |f_x| \, d\mu_2 < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in X_1).^{67}$$

Minden ilyen $x$-re tehát az $f_x$ (a $\mu_2$ mértékre nézve) integrálható.

Ugyanígy látható be az is, hogy (a $\mu_2$ mértékre vonatkozóan) m.m. $y \in X_2$ elemre az $f^y$ is (a $\mu_1$ mérték szerint) integrálható.

Ha viszont egy $x \in X_1$ elemre az $f_x$ integrálható, akkor

$$\Phi_f(x) = \int f_x \, d\mu_2 = \int (f_x)^+ \, d\mu_2 - \int (f_x)^- \, d\mu_2 =$$

$$\int \left(f^+\right)_x d\mu_2 - \int \left(f^-\right)_x d\mu_2 = \Phi_{f^+}(x) - \Phi_{f^-}(x).$$

[67] A m.m. tulajdonságot értelemszerűen a $\mu_1$ mérték szerint értve.

Mivel a 10.13.2. Tételre tekintettel

$$\int \Phi_{f^\pm}\, d\mu_1 = \int f^\pm d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty,$$

ezért a $\Phi_{f^\pm}$ (a $\mu_1$ mérték értelmében) integrálható. Így a $\Phi_f$ függvény előbbi felbontása alapján a $\Phi_f$ függvény is (a $\mu_1$-re nézve) integrálható és

$$\int \Phi_f\, d\mu_1 = \int \Phi_{f^+}\, d\mu_1 - \int \Phi_{f^-}\, d\mu_1 =$$

$$\int f^+\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Hasonlóan látható be az utóbbi egyenlőség (az előzményeivel együtt) a $\Phi_f$ helyett a $\Phi^f$-re.

Mindezt összefoglalva kapjuk a *Fubini-tételt*:

**10.13.3. Tétel.** *Tetszőleges, a $\mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmértékre nézve integrálható*

$$f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbf{R}}$$

*függvény esetén igazak az alábbi állítások:*

i) *az $f_x$ a $\mu_2$ mértékre vonatkozóan $\mu_1$-m.m. $x \in X_1$ elemre integrálható;*

ii) *az $f^y$ a $\mu_1$ mérték szerint $\mu_2$-m.m. $y \in X_2$ mellett integrálható;*

iii) *a $\Phi_f$ integrálható a $\mu_1$-re, a $\Phi^f$ integrálható a $\mu_2$-re nézve és*

$$\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \Phi_f\, d\mu_1 = \int \Phi^f\, d\mu_2.$$

Az előbbi iii) egyenlőséget *szukcesszív integrálás* elnevezéssel szokás idézni.

Általában az $\int f d\mu$ szimbólum helyett használatos a kissé konzervatív, a függvény jele helyett (joggal kifogásolható módon) a függvényértéket feltüntető $\int f(x)\, d\mu(x)$ jelölés is. A $\Phi_f$, $\Phi^f$ függvények definíciójára gondolva a most említett iii) állítás ezzel a szimbolikával a következőképpen is írható:

$$\int f(x,y)\,d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int \left( \int f(x,y)\,d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) =$$

$$= \int \left( \int f(x,y)\,d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y),$$

ami eléggé szemléletes módon fejezi ki a szukcesszív („az egyes változók szerinti egymás után való") integrálás tényét.

Gyakran előforduló eset az alkalmazásokban az alábbi:

$$X_1 := X_2 := \mathbf{R}^n$$

(valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ „kitevővel"), továbbá

$$\mu_1 := \mu \quad \text{és} \quad \mu_2 := \nu$$

(ahol a $\mu$, $\nu$ egy-egy Borel-mérték az $\mathbf{R}^n$-en). Ekkor $X_1 \times X_2 = \mathbf{R}^{2n}$ és tetszőleges

$$f : \mathbf{R}^{2n} \to [0, +\infty]$$

Borel-mérhető függvényre

$$\int f(x,y)\,d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int \left( \int f(x,y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$\int \left( \int f(x,y)\,d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ha $\mu$ az $\mathbf{R}^n$-feletti Lebesgue-mérték,

$$\nu := \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \delta_k$$

(ahol a $\delta_k$ a $k \in \mathbf{Z}^n$ pontban koncentrált Dirac-mérték[68]), akkor a Fubini-tételből a következőt kapjuk: legyen az

$$f_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \qquad (k \in \mathbf{Z}^n)$$

(Lebesgue-)integrálható függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f_k\|_1 < +\infty.$$

Ekkor

$$\int \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \int f_k(x)\, d\mu(x).$$

Hasonlóan, ha az $a_{kj}$ $(k, j \in \mathbf{Z}^n)$ számokra

$$\sum_{k,j \in \mathbf{Z}^n} |a_{kj}| < +\infty,$$

akkor

$$\sum_{(k,j) \in \mathbf{Z}^{2n}} a_{kj} = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \left( \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} a_{kj} \right) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} a_{kj} \right).$$

## 10.14. Pozitív operátorok

Legyen az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-tér, az

$$A : X \to X$$

korlátos lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy az $A$ *pozitív operátor,* ha[69] valamennyi $\langle Ax, x \rangle$ $(x \in X)$ szorzat nemnegatív valós szám:

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \qquad (x \in X).$$

Mindezt az $A \geq 0$ szimbólummal rövidítjük.

[68] Tehát $\delta_k(Y) := 1$, vagy $\delta_k(Y) := 0$, attól függően, hogy a Lebesgue-mérhető $Y \subset \mathbf{R}^n$ halmazra $k \in Y$ vagy $k \notin Y$.

[69] Ahol nem okoz félreértést, ott az $Ax := A(x)$ $(x \in X)$ jelölésmódot követjük.

Ha pl. az $U \geq 0$ operátor olyan, hogy $\|U\| \leq 1$, akkor[70]

$$I - U \geq 0.$$

Ui.

$$\langle (I-U)x, x\rangle = \|x\|_X^2 - \langle Ux, x\rangle \geq 0 \qquad (x \in X),$$

mivel (a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget is alkalmazva)

$$(0 \leq)\, \langle Ux, x\rangle \leq \|Ux\|_X \cdot \|x\|_X \leq \|U\| \cdot \|x\|_X^2 \leq \|x\|_X^2.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy $A \geq 0$ esetén az $A$ operátor önadjungált.[71] Ti. a

$$p(u) := \langle Au, u\rangle \qquad (u \in X)$$

jelöléssel tetszőleges $x, y \in X$ mellett

$$4 \cdot \langle Ax, y\rangle = p(x+y) - p(x-y) + \imath(p(x+\imath y) - p(x-\imath y)),$$

ahol a $p$ függvény minden itt szereplő helyettesítési értéke a feltétel szerint valós (sőt: nemnegatív) szám. Innen (analóg számolással) rögtön adódik, hogy

$$\langle Ay, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle - \imath \operatorname{Im}\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle},$$

így az

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle$$

egyenlőség is fennáll.[72]

Értelemszerűen fogjuk használni az

$$U, V : X \to X$$

korlátos lineáris operátorok esetén az $U \geq V$ jelölést. Nevezetesen, értsük ezen azt, hogy $U - V \geq 0$. Így az önadjungált $U, V$ operátorokra

$$U \geq V \iff \langle Ux, x\rangle \geq \langle Vx, x\rangle \qquad (x \in X).$$

[70] Az $Ix := x \quad (x \in X)$ identitás-operátorral. Egyúttal emlékeztetünk arra, hogy $\|x\|_X := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in X)$ és $\|U\| = \min\{C \geq 0 : \|Ux\|_X \leq C \cdot \|x\|_X \quad (x \in X)\}$. Világos, hogy $I \geq 0$.

[71] Tehát $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad (x, y \in X)$.

[72] Vegyük észre, hogy a fentiekben az $A$ operátor pozitivitása helyett csak annyit használtunk ki, hogy $\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R} \quad (x \in X)$. Azt sem nehéz ellenőrizni, hogy az utóbbi feltétel ekvivalens is azzal, hogy az $A$ operátor önadjungált. Az eddig mondottakból az is könnyűszerrel megkapható, hogy pozitív operátorok hatványai is pozitívok: $A \geq 0 \Longrightarrow A^n \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Megjegyezzük, hogy a *pozitív operátor* elnevezés helyett használatos a *monoton operátor* kifejezés is.

Legyen most valamilyen $U \geq 0$ és $V \geq 0$ operátor esetén

$$V^2 = U.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $V$ operátor az $U$ *négyzetgyöke* (*négyzetgyök-operátor*). Utóbbira a következő jelölést fogjuk használni:

$$\sqrt{U} := U^{1/2} := V.$$

Belátható az alábbi nem triviális állítás:

**10.14.1. Tétel.** *Bármely $U \geq 0$ operátor esetén egyértelműen létezik a*

$$V = \sqrt{U}$$

*pozitív operátor, amire $AV = VA$ teljesül minden olyan $A : X \to X$ korlátos lineáris operátorra, ami az $U$-val felcserélhető, azaz $AU = UA$.*

Tekintsük az $A \geq 0$ operátort. Ekkor

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \cdot \langle Ay, y\rangle \qquad (x, y \in X),$$

ami az $A := I$ speciális esetre gondolva nevezhető *általánosított Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek*.

Tegyük fel, hogy az

$$A_n : X \to X \qquad (n \in \mathbf{N})$$

korlátos lineáris önadjungált operátorok monoton növekedő korlátos sorozatot alkotnak:

$$A_n \leq A_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$q := \sup_n \|A_n\| < +\infty.$$

Ekkor van olyan $A : X \to X$ korlátos lineáris önadjungált operátor, amelyre

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \qquad (x \in X)$$

és $\|A\| \le q$.

Könnyen belátható az alábbi kijelentés: ha $U, V \ge 0$ és $UV = VU$, akkor az $UV$ és a $VU$ szorzat is pozitív operátor. Valóban, a 10.14.1. Tétel szerint $\sqrt{U}V = V\sqrt{U}$, amiből (az önadjungáltságot is figyelembe véve)

$$\langle V(Ux), x\rangle = \langle V((\sqrt{U})^2 x), x\rangle = \langle \sqrt{U}(V(\sqrt{U}x)), x\rangle =$$

$$\langle V(\sqrt{U}x), \sqrt{U}x\rangle \ge 0 \qquad (x, y \in X).$$

Tehát $VU \ge 0$, amiből

$$VU = (VU)^* = U^*V^* = UV$$

alapján $UV \ge 0$ is következik.

Legyen pl. a $P : X \to X$ operátor projekció[73]. Ekkor $P = P^2 = P^*$ és bármely $x \in X$ választással

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2 x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|_X^2 \ge 0,$$

amiből $P \ge 0$ adódik. Tehát $P^2 = P$ miatt azt mondhatjuk, hogy $P = \sqrt{P}$.

Tetszőleges $U : X \to X$ korlátos lineáris operátor esetén $U^*U \ge 0$, hiszen

$$\langle U^*(Ux), x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|_X^2 \ge 0 \qquad (x \in X).$$

Speciálisan, ha $U$ önadjungált ($U = U^*$), akkor $U^2 \ge 0$.

Vizsgáljuk azt az $U : X \to X$ pozitív korlátos lineáris operátort, ami egyúttal bijekció is. Ekkor az

$$U^{-1} : X \to X$$

inverzoperátor is ilyen leképezés, hiszen (ld. Banach-féle inverztétel (10.8.2. Tétel)) egyrész korlátos lineáris operátor. Másrészt bármely $x \in X$ esetén egyértelműen van olyan $z \in X$, amellyel $x = Uz$, ezért

$$\langle U^{-1}x, x\rangle = \langle U^{-1}(Uz), Uz\rangle = \langle z, Uz\rangle \ge 0.$$

[73]Tegyük fel, hogy az $Y \subset X$ zárt altér a szóban forgó Hilbert-térben. Ekkor tetszőleges $x \in X$ elemre (az ismert Riesz-tétel alapján) egyértelműen létezik az $x = x_1 + x_2$ felbontás, ahol $x_1 \in Y$ és $\langle x_2, y\rangle = 0 \quad (y \in Y)$. Ha $Px := x_1$, akkor az $\|x\|_X^2 = \|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2$ egyenlőség miatt nyilván korlátos lineáris $P$ operátor az $Y$ altérre való *projekció.* Nem nehéz meggondolni, hogy mindez ekvivalens a következővel: a $P$ korlátos lineáris operátor *idempotens,* azaz $P^2 = P$.

Tehát az $U^{-1}$ pozitív is. Lássuk be, hogy a

$$\sqrt{U} : X \to X$$

operátor bijekció és

$$U^{-1/2} := \left(\sqrt{U}\right)^{-1} = \sqrt{U^{-1}}.$$

Ti. $x \in X$ és $\sqrt{U}x = 0$ esetén

$$\sqrt{U}(\sqrt{U}x) = Ux = \sqrt{U}0 = 0,$$

így az $U$-ra tett feltétel miatt $x = 0$. Ez azt jelenti, hogy a $\sqrt{U}$ injektív. Továbbá tetszőleges $y \in X$ mellett a $z := U^{-1}y$ jelöléssel legyen $x := \sqrt{U}z$. Ekkor

$$\sqrt{U}x = \sqrt{U}(\sqrt{U}z) = Uz = U(U^{-1}y) = y,$$

ezért a $\sqrt{U}$ szürjektív is. Végül mutassuk meg, hogy a

$$T := \left(\sqrt{U}\right)^{-1}$$

(pozitív) operátorra $T^2 = U^{-1}$, azaz

$$\left(\sqrt{U}\right)^{-1} = \sqrt{U^{-1}}.$$

Valóban,

$$U(T^2x) = \sqrt{U}(\sqrt{U}(T^2x)) = \sqrt{U}(\sqrt{U}((\sqrt{U})^{-1}((\sqrt{U})^{-1}x))) =$$

$$\sqrt{U}((\sqrt{U})^{-1}x) = x \qquad (x \in X).$$

Azt mondhatjuk tehát (ld. 10.14.1. Tétel), hogy

$$U^{-1/2}\sqrt{U} = U^{-1/2}U^{1/2} = U^{1/2}U^{-1/2} = \sqrt{U}U^{-1/2} = I.$$

## 10.15. Fixpont-tétel

Az alábbiakban felidézendő *Banach–Tyihonov–Cacciopoli-féle fixponttétel* komoly jelentőséggel bír mind az elmélet, mind pedig a gyakorlati alkalmazások szempontjából.

**10.15.1. Tétel.** *Legyen az* $(X, \rho)$ *teljes metrikus tér és tekintsük az*

$$f : X \to X$$

*kontrakciót, amikor is alkalmas* $0 \le q < 1$ *számmal*

$$\rho(f(u), f(v)) \le q \cdot \rho(u, v) \qquad (u, v \in X).$$

*Ekkor az alábbiak igazak:*

- *egyértelműen létezik olyan* $\alpha \in X$ *elem, amelyre* $f(\alpha) = \alpha$;
- *bármely* $x_0 \in X$ *mellett az*

  $$x_{n+1} := f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

  *rekurzióval definiált* $(x_n, n \in \mathbf{N})$ *sorozat*[74] *konvergens és*

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha;$$

- *teljesül az alábbi hibabecslés:*

  $$\rho(x_n, \alpha) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_0, x_1) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A tételben szereplő $\alpha$ (érthető módon) az $f$ kontrakció *fixpontja.* Ezért nevezik a 10.15.1. Tételt *fixponttételnek.*

A tételbeli $(x_n, n \in \mathbf{N})$ sorozattal legyen $m \in \mathbf{N}$ és az $y_0 := x_m$ „kezdő értékkel” definiáljuk az $(y_n, n \in \mathbf{N})$ sorozatot a következőképpen:

$$y_{n+1} := f(y_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$y_n = x_{m+n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

[74] A rekurziótétel miatt ilyen sorozat létezik.

és

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha.$$

A tétel hibabecslő formulája szerint

$$\rho(y_n,\alpha) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(y_0,y_1) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\rho(x_{m+n},\alpha) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_m,x_{m+1}) \qquad (m,\, n \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan

$$\rho(x_m,\alpha) \le \frac{\rho(x_m,x_{m+1})}{1-q} \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Legyen pl.

$$X := [1,+\infty),\ \rho(x,y) := |x-y| \qquad (x,y \in X).$$

Ekkor az $(X,\rho)$ teljes metrikus tér, az

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in X)$$

függvény pedig kontrakció. Valóban, (amint az könnyen ellenőrizhető) $f : X \to X$, továbbá

$$|f(t) - f(x)| \le \frac{|t-x|}{2} \qquad (t,\, x \in X).$$

A $q := 1/2$ együttható tehát kielégíti a tételben szereplő kontrakciós feltételt. Így bármely $x_0 \ge 1$ esetén az

$$x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rekurzióval megadott sorozat konvergens, az

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n \ge 1$$

határértékre pedig teljesül az

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

egyenlőség. Innen világos, hogy $\alpha = \sqrt{2}$. Ezért pl. $x_0 := 2$ esetén $x_1 = 3/2$, következésképpen

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megjegyezzük, hogy a most kapott hibabecslésnél (elemi meggondolásokkal[75]) jóval „erősebb” hibabecslés is adható, nevezetesen:

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq 2 \cdot \left(\frac{|x_0 - \sqrt{2}|}{2}\right)^{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Így pl. az előbbi $x_0 := 2$ választással

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát pl.

$$|x_{10} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{1023}},$$

míg a 10.15.1. Tétel alapján „csak”

$$|x_{10} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^9}$$

következik. Ez a példa is jól illusztrálja azt, hogy a konkrét esetekben esetleg kihasználható egyéb tulajdonságok az absztrakt tételben kapott általános érvényű hibabecslésnél jobb becslést is eredményezhetnek.

## 10.16. Kompakt operátorok

Tekintsük az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált tereket és az

$$f \in X_1 \to X_2$$

leképezést. Azt mondjuk, hogy az $f$ *kompakt operátor,* ha bármely korlátos $Y \subset X_1$ halmaz esetén az $Y$-nak az $f$ által létesített $f[Y]$ képére annak az $\overline{f[Y]}$ lezártja kompakt. Ha az $f$ még folytonos is, akkor az $f$-et *teljesen folytonosnak* nevezzük.

[75] Vegyük észre ui., hogy $\varepsilon_{n+1} := |x_{n+1} - \sqrt{2}| = |x_n/2 + 1/x_n - \sqrt{2}| = |(x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2)/(2x_n)| = |x_n - \sqrt{2}|^2/|2x_n| \leq |x_n - \sqrt{2}|^2/2 = \varepsilon_n^2/2$, vagy az $\eta_n := \varepsilon_n/2$ jelöléssel $\eta_{n+1} \leq \eta_n^2$ $(n \in \mathbf{N})$. Innen rögtön adódik az $\eta_n \leq \eta_0^{2^n}$, azaz az $\varepsilon_n \leq 2 \cdot (\varepsilon_0/2)^{2^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ egyenlőtlenség. (Mindez speciális esete a numerikus analízisből jól ismert *Newton-módszernek.*)

Legyen
$$K(X_1, X_2) := \{U \in L(X_1, X_2) : \text{ az } U \text{ kompakt}\},$$
a *kompakt korlátos lineáris operátorok* halmaza. Az alábbi állítások meglehetősen egyszerűen látha tók be:

- ha az $f : X_1 \to X_2$ lineáris, akkor az $f$ kompaktsága a következővel ekvivalens: van olyan $r > 0$, hogy az $\overline{f[K_r(0)]}$ halmaz kompakt. Az is világos, hogy itt a „van olyan $r > 0$" kitétel helyett „minden $r > 0$" is írható;

- az előbbi állításból következően bármely $f : X_1 \to X_2$ kompakt lineáris operátor folytonos, azaz az $f$ korlátos lineáris operátor;

- amennyiben az $X_2$ véges dimenziós, akkor $K(X_1, X_2) = L(X_1, X_2)$, ezért tetszőleges $f \in L(X_1, X_2)$ korlátos lineáris operátor kompakt. Így pl. bármely $(X, \|.\|)$ normált tér esetén az $X^* = L(X, \mathbf{K})$ duális tér minden eleme (korlátos lineáris funkcionál) kompakt operátor. Ha viszont az előbbi $X$ nem véges dimenziós, akkor az $f(x) := x \ \ (x \in X)$ identitás (mint speciális $X \to X$ korlátos lineáris operátor) nem kompakt operátor.[76]

Az egyik legfontosabb példaként idézzük fel a folytonos magú integráloperátorokat. Legyen ehhez az $[a, b]$ és a $[c, d]$ egy-egy kompakt intervallum, a
$$K : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$$
pedig folytonos valós (mag-)függvény, továbbá tekintsük az alábbi Banach-tereket:
$$(X_1, \|.\|_1) := (C[a, b], \|.\|_\infty), \ (X_2, \|.\|_2) := (C[c, d], \|.\|_\infty)$$
és a
$$T\varphi(x) := \int_a^b \varphi(t)K(t, x)\, dt \qquad (\varphi \in X_1, \ x \in [c, d])$$
előírással értelmezett
$$T : X_1 \to X_2$$
korlátos lineáris operátort. Ekkor a $T$ kompakt operátor.

[76] Ti. az ismert Riesz-tétel miatt ekkor van korlátos és zárt, de nem kompakt $Y \subset X$ halmaz és nyilván $\overline{f[Y]} = Y$.

**10.16.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy* $U, V \in L(X_1, X_2)$ *és* $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. *Ekkor*

i) $U, V \in K(X_1, X_2)$ *esetén* $\alpha U + \beta V \in K(X_1, X_2)$;

ii) *ha az* $(X_3, \|.\|_3)$ *is normált tér,* $W \in L(X_2, X_3)$ *és az* $U, W$ *közül legalább az egyik kompakt operátor, akkor* $WU := W \circ U \in K(X_1, X_3)$.

Tegyük fel, hogy a 10.16.1. Tételben szereplő normált terek azonosak:

$$(X_i, \|.\|_i) = (X, \|.\|) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Mivel az $L(X, X)$ operátortér a $\circ$ kompozíció-képzésre, mint szorzásra nézve gyűrű, valamint ezzel a szorzással algebra, ezért az említett tétel algebrai jelentése a következő: a $K(X, X)$ az $L(X, X)$ algebrában kétoldali ideál.

Belátható, hogy a kompakt lineáris operátorok $K(X_1, X_2)$ tere zárt az $L(X_1, X_2)$ operátortérben (az $(L(X_1, X_2)$-beli $\|.\|$ operátornormára nézve). Ezt fejezi ki a

**10.16.2. Tétel.** *Legyen az* $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach-tér,* $U_n \in K(X_1, X_2)$ $(n \in \mathbf{N})$ *és valamilyen* $U \in L(X_1, X_2)$ *operátorral*

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n - U\| = 0.$$

*Ekkor* $U \in K(X_1, X_2)$.

Egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy az előző állításban nem elegendő az $(U_n, n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat erős konvergenciáját feltételezni.[77] Legyen ui.

$$(X_i, \|.\|_i) := (\ell_1, \|.\|_1) \qquad (i = 1, 2)$$

és

$$U_n x := (x_0, ..., x_n, 0, 0, ...) \qquad (x = (x_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_1,\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor szinte nyilvánvaló, hogy $U_k \in K(X_1, X_2)$ $(k \in \mathbf{N})$ és

$$\lim_{n\to\infty} U_n x = Ix := x \qquad (x \in \ell_1).$$

[77] Tehát azt, hogy $Ux = \lim_{n\to\infty} U_n x$ $(x \in X)$ (ami az $\|U_n x - Ux\|_2 = \|(U_n - U)x\|_2 \leq \|U_n - U\| \cdot \|x\|_1$ $(n \in \mathbf{N},\ x \in X_1)$ becslés alapján nyilván következik a $\lim_{n\to\infty} \|U_n - U\| = 0$ feltételből).

Ugyanakkor az $I:\ell_1\to\ell_1$ (identitás)operátor nem kompakt, mivel az $\ell_1$ nem véges dimenziós (ld. fent).

Bebizonyítható a *Schauder-tétel,* nevezetesen: *ha az* $(X_i,\|.\|_i)$ $(i=1,2)$ *terek közül az* $(X_2,\|.\|_2)$ *Banach-tér, akkor bármely* $U\in L(X_1,X_2)$ *esetén az alábbi ekvivalencia igaz: az* $U$ *akkor és csak akkor kompakt, ha az* $U^*$ *adjungáltja is az.*

Részben az előbbi megjegyzésből következik operátorok kompaktságának az alábbi jellemzése: *ha az* $(X_i,\|.\|_i)$ $(i=1,2)$ *normált terek közül az* $(X_2,\|.\|_2)$ *szeparábilis Banach-tér,* $U\in L(X_1,X_2)$, *akkor az* $U\in K(X_1,X_2)$ *tartalmazás azzal ekvivalens, hogy bármely* $g_n\in X_2^*$ $(n\in\mathbf{N})$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0 \qquad (x\in X_2)$$

*esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\|U^*g_n\|=0$$

(ahol a $\|.\|$ most az $X_1^*$ duális térbeli normát jelöli). Az is igaz, hogy itt a „*szeparábilis*" jelző kicserélhető „*reflexív*" -re.

Legyen az $(X,\langle,\rangle)$ Hilbert-tér[78] és $U\in L(X,X)$. Ha $\lambda\in\mathbf{K}$, akkor az

$$X_\lambda:=\{x\in X: Ux=\lambda x\}$$

halmaz zárt altere az $X$-nek (az $U$ operátor *sajátaltere*). Minden olyan $\lambda$ számot, amelyre $X_\lambda\neq\{0\}$, az $U$ operátor *sajátértékének* nevezünk. Ez tehát azzal ekvivalens, hogy alkalmas $0\neq x\in X$ elemmel $Ux=\lambda x$ (az ilyen $x$ elemek az $U$ operátor $\lambda$-hoz tartozó *sajátvektorai*). Világos, hogy ekkor

$$|\lambda|\cdot\|x\|_X=\|Ux\|_X\le\|U\|\cdot\|x\|_X,$$

így $|\lambda|\le\|U\|$.

Az $U$ operátor $U^*$ *adjungáltja* az az egyértelműen létező $U^*\in L(X,X)$ operátor, amire

$$\langle Ux,y\rangle=\langle x,U^*y\rangle \qquad (x,y\in X)$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy az $U$ *önadjungált,* ha $U=U^*$. Legyen

$$S(X,X):=\{U\in L(X,X): U=U^*\}.$$

[78]Feltesszük, hogy $X\neq\{0\}$, továbbá $\|x\|_X:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $(x\in X)$.

Ekkor bármely $U \in S(X, X) \cap K(X, X)$ operátornak van sajátértéke. Sőt, az is igaz, hogy

$$\max\{|\mu| : \text{a } \mu \text{ sajátértéke az } U\text{-nak}\} = \|U\|.$$

Emlékeztetünk a projekció fogalmára: az előző megjegyzésben szereplő Hilbert-tér valamilyen zárt $Y \subset X$ altere esetén a

$$P_Y : X \to Y$$

korlátos lineáris operátor az $Y$ altérre való *projekció,* ha tetszőleges $y \in Y$ esetén $P_Y y = y$. Ha $U \in L(X, X)$ és $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor legyen

$$P_\lambda := P_{X_\lambda}.$$

A most bevezetett jelölésekkel a *Hilbert–Schmidt-tétel* a következőket mondja:

**10.16.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy* $U \in S(X, X) \cap K(X, X)$. *Ekkor az* $U$ *operátornak legfeljebb megszámlálható sok sajátértéke van, az* $U$ *pedig előállítható*

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_{\lambda_k}$$

*összegként* (*alkalmas* $N \in \mathbf{N}$ *mellett*), *vagy pedig az operátornorma szerint konvergens*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}$$

*alakban, ahol a* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *az* $U$ *összes, páronként különböző, nem nulla sajátértékét jelentik.*

Ha az itt szereplő Hilbert-tér szeparábilis, akkor megadható a térben olyan ortonormált $x_0, x_1, \ldots$ bázis, hogy az $x_n$-ek sajátvektorai az $U$-nak (a megfelelő sajátértékeket $\mu_k$-val jelölve ez utóbbiak között már lehetnek nullák is). Ekkor tehát bármelyik $x \in X$ elem előállítható a sajátvektorbázis szerinti $x = \sum_k \alpha_k x_k$ alakban, és

$$Ux = \sum_k \alpha_k \mu_k x_k.$$

Világos továbbá, hogy

$$\langle Ux, x\rangle = \sum_k \mu_k \cdot |\alpha_k|^2 \qquad (x \in X).$$

Speciálisan, ha az $X$ véges dimenziós, azaz valamilyen $n = 1, 2, ...$ mellett $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ egy hermitikus mátrix, akkor

$$\langle Ux, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot |\alpha_k|^2 \qquad (x \in \mathbf{C}^n)$$

(kvadratikus alakok *főtengelytranszformációja*).

# Irodalomjegyzék


- W. O. Amrein – A. M. Berthier: *On Support Properties of $L^p$-Functions and Their Fourier Transforms.* J. Functional Analysis 24 (1977), 258-267.

- K. I. Babenko: *On conjugate functions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 62 (1948), 157-160.

- M. Benedicks: *On Fourier Transforms of Functions Supported on Sets of Finite Lebesgue Measure.* J. Math. Anal. Appl. 106 (1985), 180-183.

- S. V. Bočkariev: *Divergent Fourier series on a set of a positive measure for any bounded orthonormal systems.* Mat. Sb. 98(140) (1975), 435-449.

- S. V. Bočkariev: *Logarithmic growth of (C,1)-means of Lebesgue functions of bounded orthonormal systems.* DAN SSSR, 223(1) (1975), 16-19.

- Z. Ciesielski: *Equivalence, unconditionality and convergence a.e. of the spline bases in $L^p$ spaces.* Approximation Theory, Banach Center Publications, vol. 4 (1979), 55-68.

- Z. Ciesielski – P. Simon – P. Sjölin: *Equivalence of Haar and Franklin bases in $L^p$ spaces.* Studia Math. 60 (1977), 195-210.

- K. R. Davidson – A. P. Donsig: *Real Analysis and Applications.* Springer New York – Dordrecht – Heidelberg – London, 2009.

- J. Duoandikoetxea: *Fourier Analysis.* AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, 2000.

- P. Enflo: *A counterexample to the approximation property in Banach spaces.* Acta Math. 139 (1973), 309-317.

- C. L. Fefferman – E. M. Stein: *Some maximal inequalities.* Amer. J. Math. 93 (1971), 107-115.
- G. G. Gevorkian: *On the Haar and Franklin series with identical coefficients.* Jerevan. Gos. Univ. Uchebn. Zap. Estestv. Nauki, 3(172) (1989), 3-9.
- L. Grafakos: *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2004.
- K. Gröchenig: *Foundations of Time-Frequency Analysis.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.
- K. Gröchenig – J. Stöckler: *Gábor Frames and Totally Positive Functions.* Duke Math. J. 162(6) (2013), 1003-1031.
- C. Heil: *History and Evolution of the Density Theorem for Gábor Frames.* J. Fourier Analysis and Applications, 13(2) (2007), 113-166.
- B. S. Kasin – A. A. Saakian: *Orthogonal series.* Nauka, Moscow, 1984.
- S. Kaczmarz – H. Steinhaus: *Ortogonális sorok elmélete.* Goszud. Izdat. Fiziko-Mat. Literaturü, Moszkva, 1958.
- L. V. Kantorovich – G. P. Akhilov: *Functional Analysis.* Pergamon Press, Oxford–Elmsford, N. Y., 1982.
- A. N. Kolmogorov – Sz. V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- M. A. Krasnoselskii – Ya. B. Rutitskii: *Convex functions and Orlicz spaces.* Moscow, 1958, Noordhoff (Groningen), 1961.
- T. Matolcsi – J. Szűcs: *Intersection des measures spectrales conjugèes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 227 (1973), 841-843.
- A. M. Olevskii: *Fourier series with respect to general orthogonal systems.* Springer - Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.
- J. A. de Reyna: *Pointwise Convergence of Fourier Series.* Springer-Verlag Berlin – Heidelberg – New York, Lecture Notes 1785, 2002.
- Riesz Frigyes – Szőkefalvi-Nagy Béla: *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

- W. Rudin: *Functional Analysis.* Mc-Graw Hill, New York, 1973.
- F. Schipp – W. R. Wade – P. Simon – J. Pál: *Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis.* Akadémiai Kiadó - Adam Hilger, Budapest, Bristol and New York, 1990.
- F. Schipp: *On equivalence of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces.* Analysis Math. 16 (1990), 135-141.
- F. Schipp – W. R. Wade: *Transforms on normed fields.* Leaflets in Math. J. Pannonius University Pécs, 1995.
- F. Schipp: *VMO spaces not having Schauder basis.* Analysis Math. 9 (1983), 313-322.
- F. Schipp – P. Simon: *Megjegyzés A. N. Kolmogorov egy tételéhez.* Matematikai Lapok 31(1-3) (1978-1983), 117-123.
- J. E. Shirey – R. E. Zink: *On unconditional bases in certain Banach function spaces.* Studia Math. XXXVI (1970), 169-175.
- Simon Péter: *Mérték és integrál.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.
- Simon Péter: *A funkcionálanalízis alapjai.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2017.
- Simon Péter: *Fejezetek a valós függvénytanból.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2018.
- A. N. Slepchenko: *Orthogonal bases in L.* Mat. Zametki, 6(6) (1969), 749-758.
- P. L. Uljanov: *Some results and problems in basis theory.* Zapiski Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 170 (1989), 274-284. (J. Soviet Math. 63(2) (1993), 269-274.)
- P. Wojtaszczyk – K. Wozniakowski: *Orthonormal polynomial bases in function spaces.* Israel J. Math. 75(2-3) (1991), 167-191.
- P. Wojtaszczyk: *A Mathematical Introduction to Wavelets.* Cambridge Uiversity Press , 1997.
- P. Wojtaszczyk: *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, 1991.

- K. Yosida: *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- F. Weisz: *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier-analysis.* Lecture Notes in Mathematics 1568, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- F. Weisz: *Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Spaces.* Kluwer Academic Publishers, Mathematics and Its Applications 541, Dordrecht-Boston - London, 2002.

# Tárgymutató

**F**



**G**



**Gy**



**H**

**P**



**Q**



**R**



**S**