Simon Péter

Fourier-transzformáció

egyetemi tankönyv

Budapest, 2019

Simon Péter
Fourier-transzformáció

Simon Péter

Fourier-transzformáció

egyetemi tankönyv

Budapest, 2019

Ez a tankönyv az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával
(a támogatás száma: TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0003)
készült tanulmány felhasználásával íródott.

ISBN 978-615-00-4637-2

Feleségemnek

Tartalomjegyzék

Előszó

Az alábbiakban egyfajta válogatást adunk a trigonometrikus Fourier-transzformációval kapcsolatos fogalmakról és eredményekről. A klasszikus Fourier-transzformáció mellett kitekintést nyújtunk a disztribúció-elmélet keretében történő tárgyalás, ill. az absztrakt harmonikus analízis fogalomköre felé is. Az alkalmazások illusztrációjaként bemutatjuk a prímszámtétel egy lehetséges bizonyítását, továbbá az ahhoz vezető út részeként a klasszikus Wiener-, illetve Ingham-tételt. A Heisenberg-féle egyenlőtlenség kapcsán röviden szólunk a határozatlansági relációkról. Érintjük a modern transzformációs módszerek alkalmazásai szempontjából fontos ún. θ-szummáció, valamint az ablakos Fourier-transzformáció (vagy Gábor-transzformáció), a mintavételezés alapjait. Néhány fontos egyenlet kapcsán kitérünk a Fourier-transzformáció szerepére a parciális differenciálegyenletek megoldási módszereit illetően. A belső hivatkozásokat általában mellőzzük, de az Irodalomjegyzékben mindazokat a forrásokat felsoroljuk, amelyekre a könyv megírásakor támaszkodtunk.

Ez a könyv az utolsó, záró kötete egy nyolc tankönyvből álló, általam írt sorozatnak. Ezek:

- *Bevezetés az analízisbe I*
- *Bevezetés az analízisbe II*
- *Mérték és integrál*
- *A funkcionálanalízis alapjai*
- *Fejezetek a valós függvénytanból*
- *Válogatott fejezetek a matematikából*
- *Bázisok, framek, waveletek*
- *Fourier-transzformáció.*

Itt mondok köszönetet feleségemnek, *Dr. S. Gyarmati Erzsébetnek* a könyvek megírása közbeni számtalan szakmai konzultációért, a kéziratok esetenkénti gondos átolvasásáért, javításáért és azért a türelmes biztatásért, támogatásért, ami nélkül ezek a könyvek nem jöhettek volna létre.

Budapest, 2019. február.

A szerző

1. fejezet

Fourier-transzformáció

Mivel a későbbiekben többször történik hivatkozás (az egyébként is központi szerepet játszó) konvolúcióra, ezért előzetesen összefoglaljuk az ezzel kapcsolatos (számunkra) legfontosabb tudnivalókat.

1.1. Konvolúció

Legyen az $(X, \mathcal{T})$ egy lokálisan kompakt topologikus Abel[1]-csoport, az $\mathcal{M}(X)$ szimbólum pedig jelentse az X Borel[2]-halmazainak a $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebráján értelmezett korlátos Borel-mértékek halmazát. Tekintsük a következő

$$P : X \times X \to X$$

leképezést:

$$P(x, y) := x \bullet y \qquad (x, y \in X),$$

ahol a $\bullet$ az X-beli csoportműveletet jelöli.[3] Következésképpen, ha az $X \times X$ Descartes[4]-szorzaton a $\mathcal{T}$ által generált szorzat-topológiát tekintjük, akkor a P leképezés folytonos.[5] Tetszőleges $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ mértékek esetén az $X \times X$-beli Borel-halmazok $\mathcal{B}(X \times X)$ szigma-algebráján legyen

$$\kappa := \mu \otimes \nu$$

[1]Niels Henrik Abel (Frinde, 1802. VIII. 5. – Froland, 1829. IV. 6.)

[2]Félix Edouard Justin Émile Borel (Aveyron, 1871. I. 7. – Párizs, 1956. II. 3.)

[3]A P függvény maga a szóban forgó csoportművelet.

[4]René Descartes (La Haye, Touraine, 1596. III. 31. – Stockholm, 1650. II. 11.)

[5]Egy $x \in X$ elemnek a csoportművelet szerinti inverzét az x^{-1} (vagy a $-x$) szimbólummal jelöljük. A topologikus csoportok definíciójára gondolva az $X \ni x \mapsto x^{-1}$ leképezés is folytonos.

a μ, ν mértékek által meghatározott szorzatmérték.[6] Vegyük a κ mérték P által létesített $P[\kappa]$ képét, azaz legyen

$$P[\kappa](B) := \kappa(P^{-1}[B]) \qquad (B \in \mathcal{B}(X)).$$

A

$$\mu * \nu := P[\kappa]$$

mértéket a μ, ν mértékek *konvolúciójának* nevezzük.

A definícióból világos, hogy $\mu * \nu \in \mathcal{M}(X)$. Továbbá a $*$ művelet kommutatív és asszociatív, ill. a mértékek öszeadására nézve disztributív, valamint tetszőleges $\alpha \in [0, +\infty)$ és $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ mellett

$$\mu * (\alpha \cdot \nu) = (\alpha \cdot \mu) * \nu = \alpha \cdot (\mu * \nu).$$

A fentiek nyilván elmondhatók az $\mathcal{M}(X)$ helyett a

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbf{R}$$

korlátos variációjú előjeles Borel-mértékek $\mathcal{V}(X)$ halmazában is.[7]

Legyen $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ és $A \in \mathcal{B}(X)$, ekkor[8]

$$\mu * \nu(A) = \int \chi_A \, d(\mu * \nu) = \int \mu(x^{-1} \bullet A) \, d\nu(x) = \int \nu(y^{-1} \bullet A) \, d\mu(y).$$

Gyakran ez utóbbit tekintik a $\mu * \nu$ konvolúció definíciójának.

Ha valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $X := \mathbf{R}^n$ (a „szokásos" összeadással, mint csoportművelettel) és a $\mathcal{T}$ topológia az $\mathbf{R}^n$-beli euklideszi norma[9] által meghatározott topológia, akkor tekintsük az $\mathbf{R}^n$-en a μ Lebesgue[10]-mértéket. Legyen (ebben az

[6] Tehát speciálisan $\kappa(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad (A, B \in \mathcal{B}(X))$.

[7] Emlékeztetünk a most említett fogalmakra, miszerint a $\mu \in \mathcal{V}(X)$ egy olyan előjeles mérték a $\mathcal{B}(X)$-en, amelyre $\sup \left\{ \sum_{A \in \mathcal{A}} |\mu(A)| : \mathcal{A} \in \mathcal{F}_X \right\} < +\infty$, ahol az $\mathcal{F}_X$-szel az összes olyan véges, páronként diszjunkt, $\mathcal{B}(X)$-beli halmazokból álló $\mathcal{A}$ halmazrendszerek halmazát jelöltük, amelyekre $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

[8] A továbbiakban a χ_A szimbólum az $A \subset X$ halmaz *karakterisztikus függvényét* jelöli: legyen tehát $\chi_A(x) := 1 \;\; (x \in A)$ és $\chi_A(x) := 0 \;\; (x \in X \setminus A)$.

[9] Tehát: az $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n)$ normáról van szó.

[10] Henri Léon Lebesgue (Beauvais, 1875. VI. 28. – Párizs, 1941. VII. 26.)

értelemben) $f \in L^1$, ekkor az f súlyfüggvény által generált μ_f mérték[11] $\mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$-beli és bármely $\nu \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ mellett

$$\mu_f * \nu(A) = \int \mu_f(A-x)\, d\nu(x) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)).$$

Ha[12]

$$g(y) := \int f(y-x)\, d\nu(x) =: f * \nu(y) \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

(az f függvény és a ν mérték *konvolúciója*), akkor

$$\mu_f * \nu(A) = \int g\cdot \chi_A \, d\mu = \mu_g(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)).$$

Legyen most a fenti f mellett adott egy $h \in L^1$ függvény is és írjuk a ν mérték helyébe a μ_h előjeles mértéket. Ekkor az előbbiekhez hasonló módon kapjuk, hogy

$$\mu_f * \mu_h(A) = \int \chi_A\cdot f * h \, d\mu = \int_A f * h \, d\mu \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)),$$

ahol

$$f * h(x) := \int f(x-y)\cdot h(y)\, d\mu(y) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A most értelmezett $f * h$ függvényt az $f, h \in L^1$ függvények *konvolúciójának* nevezzük. Ekkor az L^1 (a szokásos függvényműveletekkel és a $\|.\|_1$ normával) a $*$ konvolúcióra (mint „szorzásra") nézve egy kommutatív Banach[15]-algebra. Továbbá, ha az

$$1 \leq p, q, r \leq +\infty$$

---

[11] Amikor is $\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu := \int f \chi_A \, d\mu \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$. (A „szokásos" módon egy A halmazon vett integrált az $\int_A \ldots$ szimbólummal jelölünk a későbbiekben is. Ha a „teljes" $\mathbf{R}^n$ halmazon történik az integrálás, akkor $\int_{\mathbf{R}^n} \ldots$ helyett egyszerűen $\int \ldots$-t írunk.)

[12] Mivel $\chi_{A-x}(y) = \chi_A(x+y) \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$, ezért a μ eltolás-invarianciáját is figyelembe véve $\mu_f(A-x) = \int f(y-x)\chi_A(y)\, d\mu(y)$. Így a Fubini[13]-tételt[14] is alkalmazva azt írhatjuk, hogy $\mu_f * \nu(A) = \int \left(\int f(y-x)\chi_A(y)\, d\mu(y)\right) d\nu(x) = \int \left(\int f(y-x)\, d\nu(x)\right) \chi_A(y)\, d\mu(y)$.

[13] Guido Fubini (Velence, 1879. I. 19. – New York, 1943. VI. 6.)

[14] Tekintsük a szigma-véges $(X_i, \Omega_i, \mu_i) \quad (i = 1, 2)$ mértéktereket, valamint az általuk meghatározott $(X_1 \times X_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ szorzatteret. Tegyük fel, hogy az $F : X_1 \times X_2 \to \mathbf{R}$ függvény a $\mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmérték szerint integrálható. Ekkor μ_1–m.m. $x \in X_1$ és μ_2–m.m. $y \in X_2$ helyen létezik az $\int F(x, v)\, d\mu_2(v)$ és az $\int F(u, y)\, d\mu_1(u)$ integrál, továbbá $\int F(u, v)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(u, v) = \int \left(\int F(u, v)\, d\mu_1(u)\right) d\mu_2(v) = \int \left(\int F(u, v)\, d\mu_2(v)\right) d\mu_1(u)$.

[15] Stefan Banach (Krakkó, 1892. III. 30. – Lvov, 1945. VIII. 31.)

„kitevőkre”

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$$

és

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=:1-\frac{1}{r^*}$$

teljesül, továbbá $f\in L^p$, $h\in L^q$, akkor[16] $f*h\in L^r$ és

$$\|f*h\|_r\leq (A_pA_qA_{r^*})^n\cdot\|f\|_p\cdot\|h\|_q$$

(*Young*[17]*-egyenlőtlenség.*) Itt az

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1$$

feltételnek eleget tevő $1\leq u,v\leq +\infty$ paraméterekkel $A_1:=A_\infty:=1$ és

$$A_u:=\left(\frac{u^{1/u}}{v^{1/v}}\right)^{1/2}\qquad (1<u<+\infty)$$

az ún. *Babenko*[18]*–Beckner*[19]*-konstans.* Speciálisan, ha $q=1$, akkor nyilván $r=p$, azaz $f\in L^p$, $h\in L^1$ mellett $f*h\in L^p$ és

$$\|f*h\|_p\leq\|f\|_p\cdot\|h\|_1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség egyébként nyilvánvaló, ha $p=+\infty$:

$$|f*h(x)|\leq\int|f(x-y)|\cdot|h(y)|\,dy\leq\|f\|_\infty\cdot\|h\|_1\qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}^n).$$

Ha pedig $1\leq p<+\infty$, akkor a Minkowski[20]-egyenlőtlenség[21] alapján

$$\|f*h\|_p=\left(\int\left|\int h(y)f(x-y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\leq$$

---

[16] Ekkor az $f*h$ konvolúció ugyanúgy értelmezhető, mint az előbb.

[17] William Henry Young (London, 1863. X. 20. – Lausanne, 1942. VII. 7.)

[18] Konstantin Ivanovics Babenko (Brianskij Rudnik, 1919. VII. 21. – 1987.)

[19] William E. Beckner (Kirksville (Missouri), 1941. IX. 15. –)

[20] Hermann Minkowski (Alexotas (Kaunas), 1864. VI. 22. – Göttingen, 1909. I. 12.)

[21] Tegyük fel, hogy az (X,Ω,μ), (Y,Θ,ν) mértékterek szigma-végesek. Ekkor minden, a $\mu\otimes\nu$ szorzatmérték szerint integrálható $f:X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ függvény, valamint $1\leq p<+\infty$ kitevő esetén $\left(\int\left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\leq\int\left(\int|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}d\nu(y)$.

$$\leq \int \left(\int |f(x-y)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot |h(y)| \, dy = \|f\|_p \cdot \|h\|_1 .$$

Jegyezzük meg tehát, hogy ha $h \in L^1$, akkor

$$\|f * h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|h\|_1 \qquad (f \in L^1)$$

és

$$\|f * h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|h\|_1 \qquad (f \in L^\infty).$$

Végül gondoljuk meg, hogy ha a fenti p, q, r „hármasban” a p, q konjugált kitevők, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

akkor $r = +\infty$ és az $f * h$ függvény egyenletesen folytonos. Ugyanis bármely $x \in \mathbf{R}^n$ és $z \in \mathbf{R}^n$ választással (ld. 1.3. viii) megjegyzés) a Hölder[22]-egyenlőtlenség[23] szerint (nyilván feltehető, hogy $q < +\infty$)

$$|f * h(x+z) - f * h(x)| = \left| \int (h(x+z-y) - h(x-y)) f(y) \, dy \right| \leq$$

$$\|f\|_p \cdot \left(\int |h(t+z) - h(t)|^q \, dt \right)^{1/q} \to 0 \qquad (\|z\| \to 0).$$

[22] Ludwig Otto Hölder (Stuttgart, 1859. XII. 22. – Leipzig, 1937. VIII. 29.)

[23] Egy (X, Ω, μ) mértéktér esetén tekintsük az $f, h : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényeket és a „konjugált” $1 \leq p, q \leq +\infty$ kitevőket: $1/p + 1/q = 1$. Ekkor $\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q$. Speciálisan, ha itt $p = q = 2$, akkor $\|fh\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|h\|_2$ (*Cauchy*[24]*–Bunyakovszkij*[25]*-egyenlőtlenség*) .

[24] Augustin Louis Cauchy (Párizs, 1789. VIII. 21. – Sceaux, 1857. V. 23.)

[25] Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij (Bar, 1804. XII. 16. – Szentpétervár, 1889. XII. 12.)

1.2. Trigonometrikus Fourier-transzformáció

Elöljáróban a címben jelzettnél kissé tágabb keretben, a Borel-mértékek körében elevenítjük fel a Fourier[26]-transzformáció fogalmát.

1.2.1. Borel-mértékek Fourier-transzformáltja

Vezessük be a következő jelöléseket: jelentse a $\langle , \rangle$ szimbólum valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ kitevőre az $\mathbf{R}^n$-ben „jól ismert” skaláris szorzást, azaz az $\mathbf{R}^n$-beli $x = (x_1, ..., x_n)$ és az $y = (y_1, ..., y_n)$ vektor esetén legyen

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

A szóban forgó x euklideszi normájára az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

jelölést használjuk. Legyen továbbá egy $a \in \mathbf{R}^n$ elemre az e_a a következő függvény :

$$e_a(t) := e^{\imath \langle t, a \rangle} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).^{27}$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $a \in \mathbf{R}^n$ esetén az e_a folytonos, $|e_a| = 1$, ezért bármely $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ mellett az e_a a μ mértékre nézve integrálható és $\|e_a\|_1 = \mu(\mathbf{R}^n)$.

Legyen tehát a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ tetszőleges korlátos Borel-mérték. Ekkor a

$$\widehat{\mu}(x) := \int e_x \, d\mu \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

hozzárendeléssel definiált

$$\widehat{\mu} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

függvényt a μ mérték *Fourier-transzformáltjának* nevezzük. Ha pl. a μ a valamilyen $a \in \mathbf{R}^n$ pontban koncentrált Dirac[28]-mérték[29], akkor bármely $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$\widehat{\mu}(x) = \int e_x \, d\mu = e_x(a) = e_a(x),$$

[26] Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 1768. III. 21. – Párizs, 1830. V. 16.)
[27] $\imath := \sqrt{-1}$ az „imaginárius egység”.
[28] Paul Adrien Maurice Dirac (Bristol, 1902. VIII. 8. – Tallahassee, Florida, 1984. X. 20.)
[29] Tehát $\mu(A) = \chi_A(a) \quad (A \in \mathcal{B}(X))$.

más szóval $\widehat{\mu} = e_a$.

Világos, hogy tetszőleges $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ mértékre és $x \in \mathbf{R}^n$ pontra

$$|\widehat{\mu}(x)| \le \mu(\mathbf{R}^n),$$

valamint

$$\mu(\mathbf{R}^n) = \widehat{\mu}(0).$$

Egyszerűen adódik továbbá az is, hogy a $\widehat{\mu}$ leképezés egyenletesen folytonos. Valóban, ha az $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor[30]

$$\mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N(0)) \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

miatt alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$\mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N(0)) < \varepsilon.$$

Ekkor bármely $x, y \in \mathbf{R}^n$ helyen (a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget is felhasználva)

$$|\widehat{\mu}(x) - \widehat{\mu}(y)| \le \int_{K_N(0)} |e_x - e_y| \, d\mu + \int_{\mathbf{R}^n \setminus K_N(0)} |e_x - e_y| \, d\mu \le$$

$$\int_{K_N(0)} |e_{x-y}(t) - 1| \, d\mu(t) + 2\mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N(0)) \le$$

$$2\cdot \int_{K_N(0)} |\sin(\langle t, x-y\rangle/2)| \, d\mu(t) + 2\varepsilon \le \int_{K_N(0)} |\langle t, x-y\rangle| \, d\mu(t) + 2\varepsilon \le$$

$$\|x-y\|\cdot \int_{K_N(0)} \|t\| \, d\mu(t) + 2\varepsilon \le N\cdot \mu(K_N(0))\cdot \|x-y\| + 2\varepsilon < 3\varepsilon,$$

hacsak $\|x - y\| < \delta$ olyan $\delta > 0$ választással, amellyel

$$N\cdot \mu(K_N(0))\cdot \delta < \varepsilon.$$

Belátható, hogy a $\widehat{\mu}$ transzformált „pozitív definit” is, azaz tetszőlegesen megadott $1 \le m \in \mathbf{N}$ index és $a_1, ..., a_m \in \mathbf{R}^n$ vektorok mellett a

$$\Big(\widehat{\mu}(a_j - a_k)\Big)_{j,k=1}^{m} \in \mathbf{C}^{m\times m}$$

[30] Ha $a \in \mathbf{R}^n$ és $r > 0$, akkor $K_r(a) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}$ az a vektor r sugarú *környezete.*

mátrix pozitív szemidefinit. Sőt, igaz az alábbi *Bochner*[31]*-tétel,* nevezetesen, ha a korlátos

$$h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

függvény folytonos, akkor a következő két kijelentés egymással ekvivalens:

1^o van olyan $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ korlátos pozitív Borel-mérték, hogy $h = \widehat{\mu}$;

2^o a h függvény pozitív definit, azaz bármely $f \in L^1$ függvény esetén

$$\int\int h(x-y)f(x)\overline{f(y)}\,dx\,dy \geq 0.$$

A Fourier-transzformált definíciójából rögtön adódik, hogy a

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n) \ni \mu \to \widehat{\mu} \in \mathbf{C}^{\mathbf{R}^n}$$

megfeleltetés additív és pozitív homogén, tehát bármely $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ és $0 \leq \alpha \in \mathbf{R}$ mellett

$$\widehat{\mu + \nu} = \widehat{\mu} + \widehat{\nu} \quad \text{és} \quad \widehat{\alpha \cdot \mu} = \alpha \cdot \widehat{\mu}.$$

Belátható továbbá, hogy

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu},$$

valamint

$$\mu \neq \nu \Longrightarrow \widehat{\mu} \neq \widehat{\nu}.$$

Legyen (az eddigi n mellett) az s is egy pozitív természetes szám és tekintsük a

$$\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n),\ \nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^s)$$

korlátos Borel-mértékeket. Ekkor

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x,y) = \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\nu}(y) \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s).$$[32]

[31]Salomon Bochner (Podgorze, 1899. VIII. 20. – Houston, 1982. V. 2.)

[32]Az előbbi egyenlőség bal oldalán az $\mathbf{R}^n$, ill. az $\mathbf{R}^s$ feletti Borel-mértékekből képzett szorzatmérték Fourier-transzformáltja áll, ami tehát az $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$ téren van értelmezve. Röviden azt mondjuk, hogy a szorzatmérték Fourier-transzformáltja a (tényező-) mértékek Fourier-transzformáltjainak a „szorzata”.

1.2.2. L^1-beli függvények Fourier-transzformáltja

Ebben a pontban integrálható függvények Fourier-transzformáltjával foglalkozunk. Kiindulva a mértékek esetéből természetes módon adódik a definíció nemnegatív függvényre, nevezetesen ez utóbbi által, mint súlyfüggvény által meghatározott mérték transzformáltja révén. Ugyanakkor az így kapott értelmezés természetes módon „működik" a nemnegativitás nélkül is. Külön alpontban vizsgáljuk az ún. radiális függvények Fourier-transzformáltját, valamint az ezzel kapcsolatban megjelenő Bessel-függvényeket.

1.2.2.1. A Fourier-transzformált fogalma

Ha most (és a továbbiakban is) a μ szimbólum az $\mathbf{R}^n$-beli $(0 < n \in \mathbf{N})$ Lebesgue-mértéket jelöli[33] és egy (a μ mértékre nézve integrálható) $0 \leq f \in L^1$ függvénnyel

$$\nu(A) := \mu_f(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)),$$

akkor $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ és (ld. 1.2.1.)

$$\widehat{\nu}(x) = \int e_x \, d\mu_f = \int f e_x \, d\mu \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ebből a szempontból nyilván lényegtelen, hogy az f egy nemnegatív függvény, hiszen bármely $f \in L^1$ és $x \in \mathbf{R}^n$ mellett $f e_x \in L^1$.

Az előbb mondottakat figyelembe véve vezessük be a következő definíciót: egy tetszőleges $f \in L^1$ Lebesgue-integrálható függvény esetén az

$$\widehat{f}(x) := \int f e_x \, d\mu = \int f(t) e^{\imath\langle t,x\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)^{34}$$

hozzárendelési utasítással értelmezett

$$\widehat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

leképezést az f függvény *Fourier-transzformáltjának* nevezzük. Ha tehát $f \geq 0$ is igaz, akkor a fentiek szerint $\widehat{\mu_f} = \widehat{f}$.

Részben a mértékekkel kapcsolatos analóg állításokra hivatkozva könnyen adódnak az alábbiak:

---

[33] A μ mértékre vonatkozó integrált illetően esetenként az $\int f \, d\mu$ szimbólum helyett (pl.) a „hagyományos" $\int f(t) \, dt$ jelölést használjuk.

[34] Világos (ld. 1.1.), hogy $\widehat{f}(x) = f * e_{-x}(0)$.

i) az $L^1 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^\infty$ operátor lineáris és korlátos:

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \qquad (f \in L^1);$$

ii) bármely $f \in L^1$ esetén az $\widehat{f}$ függvény egyenletesen folytonos;

iii) $\widehat{f * h} = \widehat{f} \cdot \widehat{h} \quad (f,\, h \in L^1)$;

iv) ha $f \in L^1$ és

$$F(x) := \overline{f(-x)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor $\widehat{F} = \overline{\widehat{f}}$;

v) $f, g \in L^1, f \neq g \Longrightarrow \widehat{f} \neq \widehat{g}$;

vi) *szorzási szabály*:

$$f, g \in L^1 \Longrightarrow \int \widehat{f} g \, d\mu = \int \widehat{g} f \, d\mu;$$

vii) *Riemann*[35]*–Lebesgue-lemma*: bármely $f \in L^1$ függényre

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0.$$

Ti. az i) állítás triviális, a ii)-t láttuk mértékekre. A iii) igazolásához alkalmazzuk a Fubini-tételt:

$$\widehat{f * h}(x) = \int f * h(t) e^{\imath \langle t,x \rangle} dt = \int \left(\int f(y) h(t-y)\, dy \right) e^{\imath \langle t,x \rangle} dt =$$

$$\int f(y) \left(\int h(t-y) e^{\imath \langle t,x \rangle} dt \right) dy = \int f(y) \left(\int h(t) e^{\imath \langle t+y,x \rangle} dt \right) dy =$$

$$\left(\int f(y) e^{\imath \langle y,x \rangle} dy \right) \cdot \left(\int h(t) e^{\imath \langle t,x \rangle} dt \right) = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{h}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A iv) igazolása csupán egyszerű számolást jelent, az v) „egyértelműségi” állítást később látjuk be (ld. 2.5. vi) megjegyzés). A vi) bizonyítása is meglehetősen egyszerű: ismét csak a Fubini-tétel miatt

$$\int \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int \left(\int f(t) e^{\imath \langle t,x \rangle} dt \right) g(x)\, dx =$$

[35] Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 1826. IX. 17. – Selasca, 1866. VII. 20.)

$$= \int f(t) \left(\int g(x) e^{\imath \langle t,x \rangle} dx \right) dt = \int f(t) \widehat{g}(t)\, dt.$$

A Riemann–Lebesgue-lemma eléggé nyilvánvaló intervallum karakterisztikus függvényére. Az egyszerűség kedvéért csak egydimenziós esetben ($n = 1$) részletezve mindezt legyen $g = \chi_{[a,b]}$ az $[a,b] \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum karakterisztikus függvénye és $0 \neq x \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$|\widehat{g}(x)| = \left| \int_a^b e^{\imath xt} dt \right| = \left| \frac{e^{\imath bx} - e^{\imath ax}}{\imath x} \right| \leq \frac{2}{|x|} \to 0 \qquad (|x| \to +\infty).$$

Világos, hogy ezért ugyanez igaz a fenti karakterisztikus függvények véges lineáris kombinációira is (*lépcsősfüggvényekre*). Ugyanakkor tetszőleges $f \in L^1$ függvényhez megadható lépcsősfüggvényeknek egy olyan $(g_n, n \in \mathbf{N})$ sorozata, amelyre

$$\|f - g_n\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Mivel

$$|\widehat{f}(x) - \widehat{g}_n(x)| \leq \|f - g_n\|_1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|\widehat{f}(x) - \widehat{g}_n(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$|\widehat{f}(x)| \leq |\widehat{f}(x) - \widehat{g}_n(x)| + |\widehat{g}_n(x)| < \varepsilon + |\widehat{g}_n(x)| \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol alkalmas $r > 0$ megválasztásával

$$|\widehat{g}_n(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R}, |x| > r).$$

Más szóval $|\widehat{f}(x)| < 2\varepsilon$, hacsak $x \in \mathbf{R}$ és $|x| > r$. Ez éppen a Riemann–Lebesgue-lemma állítása.[36]

A fenti bizonyításból ($n = 1$ esetén) a következő átfogalmazást nyerjük: legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, az

$$f : (a,b) \to \mathbf{R}$$

függvény pedig Lebesgue-integrálható. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) \cos(tx)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) \sin(tx)\, dt = 0,$$

[36]Megjegyezzük, hogy a Riemann–Lebesgue-lemma megfelelője nem igaz az $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$-beli mértékekre. Legyen ui. a $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ a $(\mathbf{R}^n) \ni 0$-ban koncentrált Dirac-mérték, ekkor $\widehat{\nu} = 1$.

mégpedig az $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ intervallumokra nézve egyenletesen. Más szóval: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x_0 > 0$, hogy $x > x_0$ esetén

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\cos(tx)\,dt\right| < \varepsilon$$

és

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\sin(tx)\,dt\right| < \varepsilon$$

igaz tetszőleges $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ intervallumra. Mindehhez elég annyit megjegyezni, hogy az

$$f_{\alpha,\beta} := f\cdot \chi_{(\alpha,\beta)} \in L^1$$

függvényre

$$\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x) = \int_\alpha^\beta f(t)e^{\imath xt}dt = \int_\alpha^\beta f(t)\cos(tx)\,dt + \imath\cdot \int_\alpha^\beta f(t)\sin(tx)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Jelöljük az $\widehat{L}^1$ szimbólummal az összes L^1-beli függvény Fourier-transzformáltja által alkotott halmazt. Ekkor a Stone[37]–Weierstrass[38]-tétel[39] alkalmazásával azt kapjuk, hogy az $\widehat{L}^1$ vektortér a $\|.\|_\infty$ norma értelmében mindenütt sűrű az $\mathbf{R}^n$-en értelmezett, a végtelenben eltűnő folytonos függvények C_0 terében.[40]

Tekintsük ehhez (csak $n = 1$ esetén részletezve) példaként az alábbi *háromszög-függvényeket*:

$$\mathbf{h}_r(x) := \begin{cases} x + r & (-r \le x \le 0) \\ \\ r - x & (0 \le x \le r) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-r, r]) \end{cases} \qquad (r > 0).$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\widehat{\mathbf{h}}_r(x) = \begin{cases} 4\cdot \dfrac{\sin^2(rx/2)}{x^2} & (0 \ne x \in \mathbf{R}) \\ \\ r^2 & (x = 0). \end{cases}$$

[37]Marshall Harvey Stone (New York, 1903, IV. 8. – Madras, 1989. I. 9.)

[38]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815. X. 31. – Berlin, 1897. II. 19.)

[39]Legyen az (X, ρ) kompakt metrikus tér esetén adott az $\mathcal{A} \subset C := \{f : X \to \mathbf{C} :\ \text{az } f \text{ folytonos}\}$ zárt részalgebra. Ekkor a következő ekvivalencia igaz: az $\mathcal{A} = C$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ (ahol $\mathbf{1}(x) := 1 \quad (x \in X)$) és bármely $x, y \in X$, $x \ne y$ elempárhoz van olyan $f \in \mathcal{A}$ függvény, hogy $f(x) \ne f(y)$ (az $\mathcal{A}$ egy ún. *elválasztó* részalgebra), továbbá tetszőleges $f \in \mathcal{A}$ függvényre az $\overline{f}(x) := \overline{f(x)} \quad (x \in X)$ jelöléssel (az f *komplex konjugáltja*) $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

[40]$C_0 := \{f \in C : \sup_{\|t\|>r} |f(t)| \to 0 \quad (r \to +\infty)\}$.

Ez ui. az $x = 0$ pontban nyilvánvaló.[41] Ha $0 \neq x \in \mathbf{R}$, akkor

$$\widehat{\mathbf{h}}_r(x) = \int_{-r}^{0} (t+r)e^{\imath xt}dt + \int_{0}^{r} (r-t)e^{\imath xt}dt.$$

Parciálisan integrálva a Newton[42]–Leibniz[43]-formula alkalmazásával

$$\int_{-r}^{0} (t+r)e^{\imath xt}dt = \left[\frac{1}{\imath x}\cdot (t+r)e^{\imath xt}\right]_{-r}^{0} - \left[\frac{1}{(\imath x)^2}e^{\imath xt}\right]_{-r}^{0} =$$

$$\frac{r}{\imath x} + \frac{1-e^{-\imath rx}}{x^2}$$

és

$$\int_{0}^{r} (r-t)e^{\imath xt}dt = \left[\frac{1}{\imath x}\cdot (r-t)e^{\imath xt}\right]_{0}^{r} + \left[\frac{1}{(\imath x)^2}e^{\imath xt}\right]_{0}^{r} =$$

$$-\frac{r}{\imath x} + \frac{1-e^{\imath rx}}{x^2}.$$

Ezért

$$\widehat{\mathbf{h}}_r(x) = \frac{2-(e^{\imath rx}+e^{-\imath rx})}{x^2} = 2\cdot\frac{1-\cos(rx)}{x^2} = 4\cdot\frac{\sin^2(rx/2)}{x^2}.$$

Vegyük most a

$$\mathbf{t}_r(x) := \mathbf{h}_r(x) - \mathbf{h}_{r/2}(x) = \begin{cases} x+r & (-r \le x \le -r/2) \\ \frac{r}{2} & (-r/2 \le x \le r/2) \\ r-x & (r/2 \le x \le r) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-r,r]) \end{cases} \qquad (r > 0)$$

ún. *trapézfüggvényeket,* amikor

$$\widehat{\mathbf{t}}_r(x) = \widehat{\mathbf{h}}_r(x) - \widehat{\mathbf{h}}_{r/2}(x) = \begin{cases} 4\cdot\dfrac{\sin^2(rx/2)-\sin^2(rx/4)}{x^2} & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \\ \dfrac{3r^2}{4} & (x = 0). \end{cases}$$

---

[41] Geometriailag a $\widehat{\mathbf{h}}_r(0) = \int_{-r}^{r} \mathbf{h}_r(t)\,dt$ Fourier-transzformált (a $\mathbf{h}_r$ integrálja) egy $2r$ alapú, r magasságú egyenlőszárú háromszög területe.

[42] Sir Isaac Newton (Woolsthorpe, 1643. I. 4. – London, 1727. III. 31.)

[43] Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipcse, 1646. VII. 1. – Hannover, 1716. XI. 14.)

Nyilván $\widehat{\mathbf{t}}_r \in L^1 \quad (r > 0)$, így (ld. 2.2.) van olyan $g_r \in L^1$ függvény, amelyre

$$\widehat{g_r} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{t}_{2r} \qquad (r > 0).$$

Tehát

$$\widehat{g_r}(x) = \begin{cases} \frac{x}{r} + 2 & (-2r \le x \le -r) \\ \\ 1 & (-r \le x \le r) \\ \\ 2 - \frac{x}{r} & (r \le x \le 2r) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-2r, 2r]) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R},\, r > 0),$$

következésképpen

$$\widehat{g_r} : \mathbf{R} \to [0, 1].$$

Innen rögtön adódik, hogy bármely $r > 0$ esetén az

$$e(x) := 1 \qquad (-r \le x \le r)$$

hozzárendeléssel definiált e függvényre $e \in \widehat{L}^1_r$, ahol

$$\widehat{L}^1_r := \{\varphi_{|_{[-r,r]}} : \varphi \in \widehat{L}^1\}.$$

Arról sem nehéz meggyőződni, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$ elemekre alkalmas $h \in L^1$ függvénnyel

$$\widehat{h}(x) \ne \widehat{h}(y).$$

Ugyanis bármely

$$0 < r < \frac{y - x}{2}$$

választással

$$\widehat{g_r}(0) = 1 \quad \text{és} \quad \widehat{g_r}(y - x) = 0.$$

Itt

$$0 = \widehat{g_r}(y - x) = \int g_r(t) e^{\imath \langle y - x, t \rangle} dt = \int g_r(t) e^{-\imath \langle x, t \rangle} \cdot e^{\imath \langle y, t \rangle} dt = \widehat{h}(y),$$

ahol

$$h(t) := g_r(t) e^{-\imath \langle x, t \rangle} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Világos ugyanakkor, hogy

$$\widehat{h}(x) = \int g_r(t)\, dt = \widehat{g_r}(0) = 1.$$

A Fourier-transzformált fenti tulajdonságai miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$\overline{\varphi} \in \widehat{L}^1_r \qquad (\varphi \in \widehat{L}^1_r)$$

és az $\widehat{L}^1_r$ halmaz (a szokásos függvényműveletekkel[44]) részalgebrája a $[-r, r]$ intervallumon folytonos függvények $C[-r, r]$ terének. Ezért a Stone–Weierstrass-tétel miatt az $\widehat{L}^1_r$ a $\|.\|_\infty$ norma értelmében mindenütt sűrű a $C[-r, r]$-ben.

Legyen most már adott az $f \in C_0$ függvény és az $\varepsilon > 0$ szám. Ekkor van olyan $r > 0$, hogy

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-r, r]).$$

Mivel

$$f_{|_{[-2r,2r]}} \in C[-2r, 2r],$$

ezért az előbbiekre tekintettel egy alkalmas $g \in L^1$ függvénnyel

$$|f(x) - \widehat{g}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [-2r, 2r]).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$|f(x) - \widehat{g}_r(x) \cdot \widehat{g}(x)| < 3 \cdot \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az $x \in [-r, r]$ helyeken ui.

$$|f(x) - \widehat{g}_r(x) \cdot \widehat{g}(x)| = |f(x) - \widehat{g}(x)| < \varepsilon.$$

Ha

$$x \in [-2r, 2r] \setminus [-r, r],$$

akkor

$$|f(x) - \widehat{g}_r(x) \cdot \widehat{g}(x)| \leq |f(x) - \widehat{g}(x)| + |\widehat{g}_r(x) - 1| \cdot |\widehat{g}(x)| <$$
$$\varepsilon + |\widehat{g}(x)| \leq \varepsilon + |f(x) - \widehat{g}(x)| + |f(x)| < 3 \cdot \varepsilon.$$

Tehát a

$$G := g_r * g \in L^1$$

függvénnyel

$$\widehat{G} = \widehat{g}_r \cdot \widehat{g} \in \widehat{L}^1$$

és

$$\|f - \widehat{G}\|_\infty < 3\varepsilon.$$

[44]Emlékeztetünk arra, hogy $f, g \in L^1$ esetén $\widehat{f * h} = \widehat{f} \cdot \widehat{h}$, ezért $\varphi \cdot \psi \in \widehat{L}^1$ $(\varphi, \psi \in \widehat{L}^1)$.

1.2.2.2. Radiális függvények

Azt mondjuk, hogy az
$$\mathcal{R} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$
lineáris operátor (mátrix)[45] *ortogonális,* ha
$$\langle \mathcal{R}x, \mathcal{R}y \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$
Továbbá, az
$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$
függvény *radiális,* ha tetszőleges $\mathcal{R}$ ortogonális transzformációra
$$f(x) = f_{\mathcal{R}}(x) := f(\mathcal{R}x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$
vagy (ami ugyanaz)
$$f(x) = f(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n,\ \|x\| = \|y\|).^{46}$$
Ekkor egy alkalmas
$$f_0 : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$
függvénnyel
$$f(x) = f_0(\|x\|) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$
Világos, hogy ha $n = 1$, akkor mindez azt jelenti, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény páros.[47]

Tegyük fel, hogy az $f \in L^1$ függvény radiális. Ekkor[48] az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált is radiális és
$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}_{\mathcal{R}}(x) = (\widehat{f})_{\mathcal{R}}(x) = \widehat{f}(\mathcal{R}x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$
Ugyanis az ortogonalitás miatt az $\mathcal{R}^*$ adjungáltra $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{-1}$, ezért integráltranszformációval
$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}_{\mathcal{R}}(x) = \int f_{\mathcal{R}}(t) e^{\imath\langle x,t\rangle}\, dt = \int f(\mathcal{R}t) e^{\imath\langle x,t\rangle}\, dt =$$

---

[45] Idézzük fel azt, hogy az $\mathcal{R} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ leképezés pontosan akkor lineáris operátor, ha egy (egyértelműen létező) $R \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixszal $\mathcal{R}x := \mathcal{R}(x) = Rx \quad (x \in \mathbf{R}^n)$.

[46] Speciálisan, az $\mathcal{R}$ ortogonális mátrix *forgatás,* ha még $\det \mathcal{R} = 1$ is teljesül. Az $n > 1$ esetben az f akkor és csak akkor radiális, ha bármely $\mathcal{R} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ forgatásra $f(x) = f(\mathcal{R}x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$.

[47] Ekkor ui. $\mathcal{R}x = cx \quad (x \in \mathbf{R})$, ahol a $c \in \mathbf{R}$ konstansra $\langle \mathcal{R}x, \mathcal{R}y \rangle = c^2 \cdot xy = xy \quad (x, y \in \mathbf{R})$ miatt $c = \pm 1$. A szóban forgó f függvény radiális volta tehát azt jelenti, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ helyen $f(x) = f(\pm x)$, speciálisan $f(x) = f(-x) \quad (x \in \mathbf{R})$.

[48] $\int_0^{+\infty} |f_0(r)| \cdot r^{n-1}\, dr < +\infty$.

$$= \int f(t) e^{\imath\langle x, \mathcal{R}^* t\rangle}\, dt = \int f(t) e^{\imath\langle \mathcal{R}x, t\rangle}\, dt = \widehat{f}(\mathcal{R}x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen egy alkalmas

$$f_1 : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$$

függvénnyel

$$\widehat{f}(x) = f_1(\|x\|) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha $n = 1$, akkor

$$\widehat{f}(x) = f_1(\rho) = \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{\imath xt}\, dt + \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{\imath xt}\, dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(-t) e^{-\imath xt}\, dt + \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{\imath xt}\, dt = \int_{0}^{+\infty} f_0(t)(e^{-\imath xt} + e^{\imath xt})\, dt =$$

$$2\cdot \int_{0}^{+\infty} f_0(t) \cos(xt)\, dt = 2\cdot \int_{0}^{+\infty} f_0(r) \cos(|x|\cdot r)\, dr \qquad (x \in \mathbf{R},\ \rho := |x|)$$

(ld. 1.3. iii) megjegyzés).

A fenti f_1 függvényről $n = 2$ esetén az alábbiakat mondhatjuk. Ti. síkbeli polárkoordináta-transzformációval az

$$x = (\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) \in \mathbf{R}^2 \qquad (\rho \geq 0,\ \omega \in [0, 2\pi])$$

helyen[49]

$$\widehat{f}(x) = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{\imath\langle(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega), (r \cos \theta, r \sin \theta)\rangle}\, d\theta\, dr =$$

$$\int_{0}^{+\infty} r f_0(r)\cdot \int_{0}^{2\pi} e^{\imath\rho r \cos(\theta - \omega)}\, d\theta\, dr,$$

ahol (az $\eta := \theta - \omega + \pi/2$ helyettesítéssel)

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\imath\rho r \cos(\theta - \omega)}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} e^{\imath\rho r \sin \eta}\, d\eta =: g_0(\rho r).$$

[49] Tehát $\|x\| = \rho$.

Itt (a szinuszfüggvény páratlan, a koszinuszfüggvény pedig páros lévén)

$$g_0(r) = \int_0^{2\pi} e^{\imath r \sin\eta}\, d\eta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath r \sin\eta}\, d\eta =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(r\sin\eta)\, d\eta + \imath\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(r\sin\eta)\, d\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(r\sin\eta)\, d\eta =$$

$$2\cdot \int_0^{\pi} \cos(r\sin\eta)\, d\eta = 4\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(r\sin\eta)\, d\eta \qquad (r \geq 0).$$

Ezért

$$\widehat{f}(x) = f_1(\rho) = \int_0^{+\infty} r f_0(r) g_0(\rho r)\, dr =$$

$$4\cdot \int_0^{+\infty} r f_0(r)\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(\|x\|\cdot r\sin\eta)\, d\eta \qquad (x \in \mathbf{R}^2,\ \rho := \|x\|).$$

Hasonlóan, ha $n = 3$, akkor térbeli polárkoordináta-transzformációt alkalmazhatunk. A számolások egyszerűsítése érdekében használjuk ki azt, hogy a fentiek szerint az $\widehat{f}$ is radiális, így bármely $0 \neq x \in \mathbf{R}^3$ helyen (a $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{R}^3$ „szokásos" jelöléssel)

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}(0,0,\|x\|) = \int f(t) e^{\imath \|x\|\cdot t_3}\, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r\sin\omega\cos\theta, r\sin\omega\sin\theta, r\cos\omega) r^2\cdot \sin\omega\cdot e^{\imath\|x\|\cdot r\cos\omega}\, d\omega\, d\theta\, dr =$$

$$2\pi\cdot \int_0^{+\infty} r f_0(r)\cdot \int_0^{\pi} r\sin\omega\cdot e^{\imath\|x\|\cdot r\cos\omega}\, d\omega\, dr.$$

Mivel (a Newton–Leibniz-formula alkalmazásával)

$$\int_0^{\pi} r\sin\omega\cdot e^{\imath\|x\|\cdot r\cos\omega}\, d\omega = \frac{\imath}{\|x\|}\cdot \left(e^{-\imath\|x\|\cdot r} - e^{\imath\|x\|\cdot r}\right) = \frac{2}{\|x\|}\cdot \sin(\|x\|\cdot r),$$

így

$$\widehat{f}(x) = f_1(\rho) = \frac{4\pi}{\|x\|}\cdot \int_0^{+\infty} r f_0(r) \sin(\|x\|\cdot r)\, dr \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}^3,\ \rho := \|x\|).$$

1.2.2.3. Bessel-függvények

Az előbbiekben radiális függvények Fourier-transzformáltját számoltuk ki a két- és háromdimenziós esetben. Tetszőleges $(n \geq 2)$ dimenzióban a következőket mondhatjuk. Legyen ui. $-1/2 < \alpha \in \mathbf{R}$ és

$$J_\alpha(t) := \frac{t^\alpha}{2^\alpha\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot\int_{-1}^{1} e^{\imath ts}(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\,ds =$$

$$\frac{t^\alpha}{2^\alpha\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot\int_{-1}^{1}(\cos(ts)+\imath\sin(ts))(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\,ds =$$

$$\frac{2t^\alpha}{2^\alpha\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot\int_{0}^{1}\cos(ts)(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\,ds \qquad (t>0)$$

az α-paraméterű *Bessel*[50]*-függvény*[51], ahol

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt \qquad (x>0)$$

a jól ismert *gamma-függvény.*[53]

Világos, hogy a fentiekben (az $s \longleftrightarrow \sin y$ helyettesítéssel)

$$\int_{-1}^{1} e^{\imath ts}(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\imath t\sin y}\cdot(\cos y)^{2\alpha}dy \qquad (t\in\mathbf{R}),$$

más szóval

$$J_\alpha(t) := \frac{t^\alpha}{2^\alpha\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\imath t\sin y}\cdot(\cos y)^{2\alpha}dy =$$

$$\frac{t^\alpha}{2^{\alpha-1}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot\int_{0}^{\pi/2}\cos(t\sin y)\cdot(\cos y)^{2\alpha}dy \qquad (t>0).$$

Így pl.

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(t\sin y)\,dy \qquad (t>0)$$

[50]Friedrich Wilhelm Bessel (Minden, 1784. VII. 22. – Königsberg, 1846. III. 17.)

[51]Ld. még D. Bernoulli.[52]

[52]Daniel Bernoulli (Groningen, 1700. II. 8. – Bázel, 1782. III. 17.)

[53]Emlékeztetünk arra, hogy $\Gamma(1)=1$ és $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, továbbá $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x) \quad (x>0)$. Speciálisan, $\Gamma(k+1)=k! \quad (k\in\mathbf{N})$.

és

$$J_{1/2}(t) := \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ty}\, dy = \frac{2\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \qquad (t > 0).$$

Ha az L^1-beli

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \qquad (n \geq 2)$$

függvény radiális és (ld. 1.2.2.2.)

$$f(x) = f_0(\|x\|) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor (a részletek mellőzésével) az $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$(*) \qquad \widehat{f}(x) = (2\pi)^{n/2} \cdot \|x\|^{1-n/2} \cdot \int_0^{+\infty} f_0(s) s^{n/2} J_{n/2-1}(\|x\| \cdot s)\, ds.$$

Innen az $n = 2$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f}(x) = 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} s f_0(s) J_0(\|x\| \cdot s)\, ds =$$

$$4 \cdot \int_0^{+\infty} s f_0(s) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(\|x\| \cdot s \cdot \sin y)\, dy.$$

Ha pedig $n = 3$, akkor

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{3/2} \cdot \|x\|^{-1/2} \cdot \int_0^{+\infty} f_0(s) s^{3/2} J_{1/2}(\|x\| \cdot s)\, ds =$$

$$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\|x\|}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi \cdot \|x\|}} \cdot \int_0^{+\infty} s f_0(s) \sin(\|x\| \cdot s)\, ds =$$

$$\frac{4\pi}{\|x\|} \cdot \int_0^{+\infty} s f_0(s) \sin(\|x\| \cdot s)\, ds,$$

összhangban a korábban kiszámoltakkal.

A fentiekben bevezetett Bessel-függvényekre az alábbi rekurzív összefüggés igaz: ha $\mu > -1/2$, akkor bármely $\nu > -1$ esetén

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1)} \cdot \int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1} (1 - s^2)^\nu\, ds \qquad (t > 0).$$

Legyen ui. $\alpha > -1/2$ és $t > 0$, ekkor (a koszinuszfüggvényt (a 0 körül) hatványsorba fejtve)[54]

$$2\cdot \int_0^1 \cos(ts)(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\, ds =$$

$$2\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!}\cdot \int_0^1 s^{2j}(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\, ds =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!}\cdot \int_0^1 z^{j-1/2}(1-z)^{\alpha-1/2}\, dz =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!}\cdot \frac{\Gamma(j+1/2)\cdot \Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(j+\alpha+1)}.$$

Tehát

$$J_\alpha(t) = \frac{2\cdot t^\alpha}{2^\alpha\cdot \sqrt{\pi}\cdot \Gamma(\alpha+1/2)}\cdot \int_0^1 \cos(ts)(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\, ds =$$

$$\frac{1}{2^\alpha\cdot \sqrt{\pi}}\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+\alpha}\cdot \Gamma(j+1/2)}{(2j)!\cdot \Gamma(j+\alpha+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\alpha}}{j!\cdot \Gamma(j+\alpha+1)},$$

ui. (pl. teljes indukcióval könnyen belátható, hogy)

$$\frac{2^{2j}\cdot \Gamma(j+1/2)\cdot j!}{(2j)!\cdot \sqrt{\pi}} = 1 \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

Mindezeket figyelembe véve az

$$\int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu\, ds \qquad (t > 0)$$

integrál kiszámításakor a J_α-ra belátott előbbi egyenlőséget alkalmazva egyszerű számolással kapjuk a jelzett rekurzív összefüggést:

$$\int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu\, ds =$$

[54] Az ismert $\Gamma(x+y)\cdot \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}\, dz = \Gamma(x)\cdot \Gamma(y)$ $(x, y > 0)$ egyenlőséget (megfelelő szereposztással) felhasználva.

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\mu}}{j!\cdot \Gamma(j+\mu+1)}\cdot \int_0^1 s^{2j+2\mu+1}(1-s^2)^{\nu}\, ds =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\mu}}{2\cdot j!\cdot \Gamma(j+\mu+1)}\cdot \int_0^1 y^{j+\mu}(1-y)^{\nu}\, dy =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\mu}}{2\cdot j!\cdot \Gamma(j+\mu+1)}\cdot \frac{\Gamma(j+\mu+1)\cdot \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(j+\mu+\nu+2)} =$$

$$\frac{2^{\nu}\cdot \Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}\cdot \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\mu+\nu+1}}{j!\cdot \Gamma(j+\mu+\nu+2)} = \frac{2^{\nu}\cdot \Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}\cdot J_{\mu+\nu+1}(t),$$

ami nyilván ekvivalens az állításunkkal.

Így pl., ha a fentiekben $\nu = 0$, akkor

$$J_{\mu+1}(t) = t\cdot \int_0^1 J_{\mu}(ts)s^{\mu+1}ds \qquad (t>0),$$

speciálisan a $\mu = 0$ választással

$$J_1(t) = t\cdot \int_0^1 sJ_0(ts)\, ds = \frac{2t}{\pi}\cdot \int_0^1 s\cdot \Big(\int_0^{\pi/2}\cos(st\sin y)\, dy\Big)ds \qquad (t>0).$$

Hasonlóan, ha $\mu := 0$ és $\nu := -1/2$, akkor

$$J_{1/2}(t) = \frac{2\sin t}{\sqrt{2\pi t}} = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}}\cdot \int_0^1 J_0(ts)\cdot \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \qquad (t>0),$$

amiből

$$\int_0^1 J_0(ts)\cdot \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = \frac{\sin t}{t} \qquad (t>0).$$

Az $\alpha > -1/2$ feltétel mellett az imént előállt

$$(**) \qquad J_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot \frac{(t/2)^{2j+\alpha}}{j!\cdot \Gamma(j+\alpha+1)} \qquad (t>0)$$

sorfejtést illetően a következőket mondhatjuk. Vegyük ui. észre, hogy pl. a hányadoskritérium segítségével egyszerűen meggyőződhetünk arról, miszerint a szóban forgó végtelen sor abszolút konvergens:

$$\frac{(t/2)^{2j+2+\alpha}}{(j+1)!\cdot\Gamma(j+\alpha+2)}\cdot\frac{j!\cdot\Gamma(j+\alpha+1)}{(t/2)^{2j+\alpha}} =$$

$$\frac{t^2}{4(j+1)(j+\alpha+1)} \to 0 \qquad (j\to\infty).$$

Sőt, az illető sor ugyanígy az $\alpha > -1$ paraméterekre is abszolút konvergens minden $t > 0$ helyen. Ezzel egyúttal értelmezhetjük a (valós értékű) J_α Bessel-függvényeket az $\alpha > -1$ esetben is:

$$J_\alpha(t) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{(t/2)^{2j+\alpha}}{j!\cdot\Gamma(j+\alpha+1)} = t^\alpha\cdot\Psi_\alpha(t) \qquad (t>0)$$

a

$$\Psi_\alpha(z) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{z^{2j}}{2^{2j+\alpha}\cdot j!\cdot\Gamma(j+\alpha+1)} \qquad (z\in\mathbf{R})$$

analitikus függvénnyel.[55] Speciálisan

$$J_{-1/2}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{t^{2j-1/2}}{2^{2j-1/2}\cdot j!\cdot\Gamma(j+1/2)} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{t^{2j}\cdot(2j)!\cdot\sqrt{\pi}}{(2j)!\cdot 2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(j+1/2)} \qquad (t>0),$$

ahol (ld. fent)

$$\frac{(2j)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(j+1/2)} = 1 \qquad (j\in\mathbf{N}).$$

Tehát

$$J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{t^{2j}}{(2j)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot\cos t \qquad (t>0).$$

[55] Komplex értékű függvényként akár a $t<0$ helyeken is ezzel a végtelen sorral definiálhatnánk a $J_\alpha(t)$-t. Ha pedig $\alpha\geq 0$, akkor a $J_\alpha(t)$-t megadó előbbi sor minden $t\geq 0$ helyen (abszolút) konvergens és $J_\alpha(t)\in\mathbf{R}$ (a „szokásos” $0^0 := 1$ megállapodással): $J_0(0)=1$ és $J_\alpha(0)=0$ $(\alpha>0)$.

Továbbá a radiális L^1-beli

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvények $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltjára megfogalmazott $(*)$ képlet $n = 1$ esetén is alkalmazható (ld. 1.2.2.2.):

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\cdot \sqrt{|x|}\cdot \int_0^{+\infty} f_0(s)\sqrt{s}\cdot J_{-1/2}(|x|\cdot s)\,ds =$$

$$2\cdot \int_0^{+\infty} f_0(s)\cos(|x|\cdot s)\,ds \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Lássuk be, hogy a $J_\alpha \quad (\alpha > -1/2)$ Bessel-függvények eleget tesznek az alábbi differenciálegyenletnek:

$$t^2\cdot J_\alpha''(t) + t\cdot J_\alpha'(t) + (t^2 - \alpha^2)\cdot J_\alpha(t) = 0 \qquad (t > 0).$$

Valóban, az értelemszerű jelölésekkel legyen

$$J_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{2^\alpha\cdot \sqrt{\pi}\cdot \Gamma((2\alpha+1)/2)}\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}(1-s^2)^{(2\alpha-1)/2}\,ds =:$$

$$c_\alpha t^\alpha\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds \qquad (t > 0).$$

Ekkor bármely $t > 0$ esetén (a paraméteres integrálokra vonatkozó deriválási „szabályt” is felhasználva)

$$J_\alpha'(t) = c_\alpha \alpha t^{\alpha-1}\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds + \imath c_\alpha t^\alpha\cdot \int_{-1}^{1} s e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds,$$

valamint

$$J_\alpha''(t) = c_\alpha \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds +$$

$$2\imath\alpha c_\alpha t^{\alpha-1}\cdot \int_{-1}^{1} s e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds - c_\alpha t^\alpha\cdot \int_{-1}^{1} s^2 e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds.$$

Következésképpen

$$F_\alpha(t) := \frac{1}{c_\alpha t^\alpha}\cdot \left(t^2\cdot J_\alpha''(t) + t\cdot J_\alpha'(t) + (t^2-\alpha^2)\cdot J_\alpha(t)\right) =$$

$$= t^2\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds + \imath t(2\alpha+1)\cdot \int_{-1}^{1} se^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds - t^2\cdot \int_{-1}^{1} s^2 e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds.$$

Vegyük észre, hogy (parciális integrálással)[56]

$$\int_{-1}^{1} se^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds = \frac{\imath t}{2\alpha+1}\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_{\alpha+1}(s)\,ds,$$

így

$$\imath t(2\alpha+1)\cdot \int_{-1}^{1} se^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds = -t^2\cdot \int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot \wp_{\alpha+1}(s)\,ds.$$

Ezért

$$F_\alpha(t) = t^2\cdot \left(\int_{-1}^{1} e^{\imath ts}\cdot (\wp_\alpha(s) - \wp_{\alpha+1}(s))\,ds - \int_{-1}^{1} s^2 e^{\imath ts}\cdot \wp_\alpha(s)\,ds\right).$$

Ugyanakkor

$$\wp_\alpha(s) - \wp_{\alpha+1}(s) = (1-s^2)^{(2\alpha-1)/2} - (1-s^2)^{(2\alpha+1)/2} =$$

$$s^2\cdot (1-s^2)^{(2\alpha-1)/2} = s^2\cdot \wp_\alpha(s) \qquad (|s| \le 1),$$

amiből az $F_\alpha(t) = 0$, azaz a

$$t^2\cdot J''_\alpha(t) + t\cdot J'_\alpha(t) + (t^2 - \alpha^2)\cdot J_\alpha(t) = 0 \qquad (t > 0)$$

egyenlőség már nyilvánvaló.

Legyen

$$\mathcal{J}_k(t) := \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} e^{\imath t\sin\theta}\cdot e^{-\imath k\theta}\,d\theta \qquad (k \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\mathcal{J}_k(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} e^{\imath(t\sin\theta - k\theta)}\,d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} (\cos(t\sin\theta - k\theta) + \imath\sin(t\sin\theta - k\theta))\,d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - k\theta)\,d\theta =$$

[56] $\wp'_{\alpha+1}(s) = -(2\alpha+1)s\wp_\alpha(s) \quad (|s| \le 1)$.

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t\sin\theta)\cos(k\theta)\,d\theta & \text{(ha a k páros)} \\ \\ \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \sin(t\sin\theta)\sin(k\theta)\,d\theta & \text{(ha a k páratlan)} \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{Z},\, t \in \mathbf{R})$$

(*Bessel-féle integrálformula*).

Ugyanis a $\nu := \pi - \theta$ helyettesítéssel

$$\mathcal{J}_k(t) = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} \cos(t\sin\nu + k\nu - k\pi)\,d\nu = \frac{(-1)^k}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} \cos(t\sin\nu + k\nu)\,d\nu.$$

Ha itt a k páros, akkor (az utóbbi egyenlőséget hozzáadva a $\mathcal{J}_k(t)$-hez)

$$2\mathcal{J}_k(t) = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} (\cos(t\sin\theta - k\theta) + \cos(t\sin\theta + k\theta))\,d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \frac{4}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t\sin\theta)\cos(k\theta)\,d\theta,$$

amiből

$$\mathcal{J}_k(t) = \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t\sin\theta)\cos(k\theta)\,d\theta.$$

A páratlan k indexekre hasonlóan kapjuk a

$$\mathcal{J}_k(t) = \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \sin(t\sin\theta)\sin(k\theta)\,d\theta$$

egyenlőséget.

Speciálisan (ld. fent)

$$\mathcal{J}_0(t) = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t\sin\theta)\,d\theta = J_0(t) \qquad (t > 0).$$

Világos, hogy (egyszerű helyettesítéssel)

$$\mathcal{J}_k = (-1)^k\cdot \mathcal{J}_{-k} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Mutassuk meg továbbá, hogy

$$\mathcal{J}_k(t) = J_k(t) \qquad (k \in \mathbf{N},\, t > 0).$$

Ezt ui. $k=0$-ra az előbb láttuk már. Ezért elég azt megmutatnunk, hogy a

$$G_k(t) := \begin{cases} \mathcal{J}_k(t) \\ \text{vagy} \\ J_k(t) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N},\, t > 0)$$

választással fennáll a

$$g_k'(t) = -t^{-k} \cdot G_{k+1}(t) \qquad (k \in \mathbf{N},\, t > 0)$$

rekurzió, ahol

$$g_k(t) := t^{-k} \cdot G_k(t) \qquad (k \in \mathbf{N},\, t > 0).$$

Valóban, ha itt $k \in \mathbf{N}$ és $G_k = \mathcal{J}_k$, akkor

$$g_k'(t) = -t^{-k} \cdot \left(\frac{k}{t} \cdot \mathcal{J}_k(t) - \mathcal{J}_k'(t) \right) =$$

$$-t^{-k} \cdot \left(\frac{k}{2\pi t} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath k\theta}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\partial_t e^{\imath t \sin\theta} \right) e^{-\imath k\theta}\, d\theta \right) =$$

$$-\frac{t^{-k}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \imath \cdot \left(\partial_\theta \left(t^{-1} e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath k\theta} \right) + (\cos\theta - \imath \sin\theta) e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath k\theta} \right) d\theta =$$

$$-\frac{t^{-k}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath k\theta} (\cos\theta - \imath \sin\theta)\, d\theta =$$

$$-\frac{t^{-k}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath (k+1)\theta}\, d\theta = -t^{-k} \cdot \mathcal{J}_{k+1}(t) \qquad (t > 0).$$ [57]

A $G_k := J_k \quad (k \in \mathbf{N})$ esetben a

$$\frac{2k+1}{2} \cdot \Gamma((2k+1)/2) = \Gamma((2k+3)/2) \qquad (k \in \mathbf{N})$$

összefüggés alapján parciális integrálással[58]

$$g_k'(t) = \frac{\imath \cdot 2^{-k}}{\Gamma((2k+1)/2) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_{-1}^{1} s e^{\imath t s} (1 - s^2)^{(2k-1)/2}\, ds =$$

---

[57] Vegyük figyelembe, hogy $\int_0^{2\pi} \partial_\theta (e^{\imath t \sin\theta} \cdot e^{-\imath k\theta})\, d\theta = e^{\imath t \sin(2\pi)} \cdot e^{-\imath k 2\pi} - e^{\imath t \sin 0} \cdot e^{-\imath k 0} = 0.$

[58] $\partial_s (1 - s^2)^{(2k+1)/2} = -(2k+1) s (1 - s^2)^{(2k-1)/2}.$

$$= \frac{\imath\cdot 2^{-k}}{\Gamma((2k+1)/2)\cdot \sqrt{\pi}}\cdot \int_{-1}^{1} \frac{2\imath t\cdot e^{\imath ts}}{2k+1}\cdot \frac{(1-s^2)^{(2k+1)/2}}{2}\, ds =$$

$$-t^{-k}\cdot J_{k+1}(t) \qquad (t>0).$$

Az előzőeket folytatva tehát (ld. $(**)$)

$$\mathcal{J}_k(t) = J_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\cdot (j+k)!}\cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2j+k} \qquad (k\in\mathbf{N},\, t>0).$$

Legyen ugyanakkor

$$\mathcal{J}_s^*(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\cdot (j+s)!}\cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2j+s} \qquad (s\in\mathbf{Z},\, t\in\mathbf{R}),$$

ahol az

$$\frac{1}{(j+s)!} := 0 \qquad (j=0,...,-s-1)$$

megállapodással éltünk.[59] Más szóval

$$\mathcal{J}_s^*(t) = \sum_{j=-s}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\cdot (j+s)!}\cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2j+s} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l-s}}{l!\cdot (l-s)!}\cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2l-s} \qquad (s\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N},\, t\in\mathbf{R}),$$

vagy a $k:=-s$ jelöléssel

$$\mathcal{J}_{-k}^*(t) = (-1)^k\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\cdot (l+k)!}\cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2l+k}.$$

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $t\in\mathbf{R}$ mellett

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_s^*(t) z^s = \exp\left(\frac{t}{2}\cdot \left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \qquad (0\neq z\in\mathbf{C}).^{60}$$

[59] Tehát $\mathcal{J}_s^*(t) = \mathcal{J}_s(t)$ $(s\in\mathbf{N},\, t>0)$.

[60] Általában egy $(a_k, k\in\mathbf{N})$, vagy $(a_k, k\in\mathbf{Z})$ számsorozat *generátorfüggvényén* a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hatványsor, vagy a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ Laurent-sor[61] összegfüggvényét értik. Tehát ebben a terminológiában a $(\mathcal{J}_s^*(t), s\in\mathbf{Z})$ $(t\in\mathbf{R})$ sorozat generátorfüggvénye a $0\neq z\mapsto \exp(t(z-1/z)/2)$ függvény.

[61] Pierre Alphonse Laurent (Párizs, 1813. VII. 18. – Párizs, 1854. IX. 2.)

Ugyanis a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^j = \exp\left(\frac{tz}{2}\right) \qquad (z \in \mathbf{C})$$

és a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot z^k} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^k = \exp\left(-\frac{t}{2z}\right) \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C})$$

sor abszolút konvergens, ezért az

$$\exp\left(\frac{t}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{j-k}}{k! \cdot j!} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{j+k} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C})$$

szorzat(kettős)sorban szabadon csoportosíthatjuk a tagokat. Legyen ehhez adott az $s \in \mathbf{Z}$ kitevő és „szedjük össze” a $j - k = s$ egyenlőségnek eleget tevő indexeket.[62] Ez azt jelenti, hogy $j = k + s$ és

$$\exp\left(\frac{t}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^s}{k! \cdot (k+s)!} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+s} =$$

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_s^*(t) z^s \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}),$$

amint azt állítottuk.

Ha itt

$$z := e^{\imath y} \qquad (y \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\frac{1}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\imath y} - e^{-\imath y}}{2} = \imath \sin y \qquad (y \in \mathbf{R})$$

és

$$e^{\imath t \sin y} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_s^*(t) e^{\imath s y} \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

[62] Röviden: vegyük a fenti két sornak a Cauchy-szorzatát.

Így egy Fourier-sorfejtést kaptunk,[63] más szóval

$$\mathcal{J}_s^*(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} e^{\imath t\sin y}\cdot e^{-\imath s y}dy \qquad (s\in\mathbf{Z},\, t\in\mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_k^* \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

Nyilván $\mathcal{J}_k \in D^\infty$ és

$$\mathcal{J}_k^{(l)}(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} (\imath\sin y)^l e^{\imath t\sin y}\cdot e^{-\imath k y}dy \qquad (k\in\mathbf{Z},\, l\in\mathbf{N},\, t\in\mathbf{R}),$$

amiből

$$\left|\mathcal{J}_k^{(l)}(t)\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} 1\,dy = 1 \qquad (k\in\mathbf{Z},\, l\in\mathbf{N},\, t\in\mathbf{R}).$$

A $\mathcal{J}_k$ $(k\in\mathbf{Z})$ függvények (*egész indexű Bessel-függvények*) tetszőleges $t\in\mathbf{R}$ helyen kielégítik a J_α-kra fentebb kapott másodrendű homogén differenciálegyenletet:

$$t^2\cdot\mathcal{J}_k''(t) + t\cdot\mathcal{J}_k'(t) + (t^2-k^2)\cdot\mathcal{J}_k(t) = 0.$$

Valóban, a $\mathcal{J}_k$-t megadó hatványsor tagonkénti deriválásával

$$t\cdot\mathcal{J}_k'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\cdot(2j+k)}{j!\cdot(j+k)!\cdot 2^{2j+k}}\cdot t^{2j+k}$$

és

$$t^2\cdot\mathcal{J}_k''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\cdot(2j+k)(2j+k-1)}{j!\cdot(j+k)!\cdot 2^{2j+k}}\cdot t^{2j+k}.$$

Összeadva az előbbi két egyenlőséget

$$t^2\cdot\mathcal{J}_k''(t) + t\cdot\mathcal{J}_k'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\cdot(2j+k)^2}{j!\cdot(j+k)!\cdot 2^{2j+k}}\cdot t^{2j+k} =$$

[63] Emlékeztetőül (*de la Vallée Poussin*[64]*-tétel*): ha az S trigonometrikus sor mindenütt konvergál egy $f\in L^1[0,2\pi]$ függvényhez, akkor az S az f Fourier-sora, azaz az S együtthatói az f függvény Fourier-együtthatói.

[65] Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin (Louvain, 1866. VIII. 14. – Louvain, 1962. III. 2.)

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot 4j(j+k)}{j! \cdot (j+k)! \cdot 2^{2j+k}} \cdot t^{2j+k} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot k^2}{j! \cdot (j+k)! \cdot 2^{2j+k}} \cdot t^{2j+k},$$

ahol

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot 4j(j+k)}{j! \cdot (j+k)! \cdot 2^{2j+k}} \cdot t^{2j+k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j-1)! \cdot (j+k-1)! \cdot 2^{2j+k-2}} \cdot t^{2j+k} =$$

$$-t^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (j+k)! \cdot 2^{2j+k}} \cdot t^{2j+k} = -t^2 \cdot \mathcal{J}_k(t)$$

és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot k^2}{j! \cdot (j+k)! \cdot 2^{2j+k}} \cdot t^{2j+k} = k^2 \cdot \mathcal{J}_k(t).$$

Tehát

$$t^2 \cdot \mathcal{J}_k''(t) + t \cdot \mathcal{J}_k'(t) = (k^2 - t^2) \cdot \mathcal{J}_k(t),$$

amint azt állítottuk.[66]

1.2.3. L^2-beli függvények Fourier-transzformáltja

Az előző pont jelöléseit megtartva először is jegyezzük meg, hogy a $p > 1$ kitevők esetén az L^p-beli f függvények nem feltétlenül integrálhatók, következésképpen az $x \in \mathbf{R}^n$ vektorokra $fe_x \notin L^1$ bőven előfordulhat. Ezért az ilyen L^p függvényosztályok elemeire a Fourier-transzformált a fenti definíció alapján nem értelmezhető. A következő egy-két megjegyzésben ezt a kérdéskört vizsgáljuk.

Legyen először $p = 2$. Mivel az $L^1 \cap L^2$ metszettér egy (a $\|.\|_2$ norma[67] értelmében) sűrű altér az L^2-ben, ezért minden $f \in L^2$ függvényhez megadható olyan, alkalmas

$$f_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

[66] Megjegyezzük, hogy bármely $\alpha > -1$ paraméter mellet analóg módon kapjuk a J_α Bessel-függvényekre a $t^2 \cdot \mathcal{J}_\alpha''(t) + t \cdot \mathcal{J}_\alpha'(t) = (\alpha^2 - t^2) \cdot \mathcal{J}_\alpha(t)$ $(t > 0)$ egyenlőséget, azaz, hogy a J_α-k az $\alpha > -1$ paraméterrel is kielégítik (a korábban (ld. 1.2.2.3) csak az $\alpha > -1/2$ esetre belátottakhoz képest) a szóban forgó másodrendű differenciálegyenletet.

[67] Emlékeztetünk arra, hogy a $g \in L^p$ függvényekre $\|g\|_p := (\int |g(t)|^p \, dt)^{1/p}$ $(1 \leq p < +\infty)$ és $\|g\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : |g(t)| \leq \alpha \ \text{(m.m. } t \in \mathbf{R}^n)\}$.

függvényekből álló sorozat, amelyre

$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ilyen pl. az

$$f_k := f \cdot \chi_{G_k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

függvények sorozata, ahol

$$G_r := \{t \in \mathbf{R}^n : \|t\| \leq r\} \qquad (r > 0).^{68}$$

Az $L^1 \cap L^2$ altér g elemeire természetesen minden további nélkül értelmezhető a $\widehat{g}$ Fourier-transzformáció. Az előbbi $f_k := f \cdot \chi_{G_k}$ $(k \in \mathbf{N})$ példánál maradva

$$\widehat{f_k}(x) = \int_{G_k} f(t) e^{\imath \langle x,t \rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n, k \in \mathbf{N}),$$

így $n = 1$ esetén

$$\widehat{f_k}(x) = \int_{-k}^{k} f(t) e^{\imath xt} dt \qquad (x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}).$$

Nem triviális viszont az (ld. 2.5. xv), ill. 3.3. ii) megjegyzés), hogy minden ilyen $g \in L^1 \cap L^2$ függvényre $\widehat{g} \in L^2$ és

$$\|\widehat{g}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|g\|_2.$$

Ez azt is jelenti egyúttal, hogy a (nyilván lineáris)

$$L^1 \cap L^2 \ni g \mapsto \widehat{g} \in L^2$$

operátor korlátos, azaz folytonos. Ezt a tényt (és az $(L^2, \|.\|_2)$ normált tér teljességét) felhasználva ezért az előbbiekben szereplő $f_k \in L^1 \cap L^2$ függvények Fourier-transzformáltjainak az $(\widehat{f_k}, k \in \mathbf{N})$ sorozata a $\|.\|_2$ normában konvergál egy L^2-beli függvényhez.[69] Legyen ebben az értelemben az f *Fourier-transzformáltja*

$$\widehat{f} := \lim_{k \to \infty} \widehat{f_k},$$

[68]Nyilván igaz, hogy $\lim_{k\to\infty}(f_k(x) - f(x)) = 0$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ és $|f_k - f|^2 \leq 4 \cdot |f|^2$ $(k \in \mathbf{N})$. Mivel $4 \cdot |f|^2 \in L^1$, ezért a Lebesgue-féle konvergenciatétel alapján $\lim_{k\to\infty} \int |f_k(x) - f(x)|^2 \, dx = 0$.

[69]Ui. (technikai okokból („hosszú" kifejezésekre gondolva) a $(\ldots)^\wedge$ szimbólum a ...-ban lévő függvény Fourier-transzformáltját jelöli) $\|\widehat{f_k} - \widehat{f_j}\|_2 = \|(f_k - f_j)^\wedge\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f_k - f_j\|_2 \to 0$ $(k, j \to \infty)$.

tehát
$$\|\widehat{f}-\widehat{f}_k\|_2 \to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Ez az értelmezés korrekt (azaz az $\widehat{f}$ nem függ az f-et (az előző értelemben) „előállító” $(f_k, k\in\mathbf{N})$ sorozat konkrét megválasztásától). Továbbá az

$$(*) \qquad L^2 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2$$

leképezés egy korlátos lineáris operátor, ami injektív és a normája $(2\pi)^{n/2}$. Világos, hogy $f\in L^1\cap L^2$ esetén az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált a mostani értelmezés és a kiindulási definíció szerint ugyanaz.

Megmutatható, hogy a $(*)$ operátor szürjektív is, azaz tetszőleges $g\in L^2$ függvényhez létezik egy (és csak egy) olyan $f\in L^2$, amelyre $g=\widehat{f}$. A $(*)$ operátor tehát az L^2 térnek egy önmagára való bijekciója és

$$\|\widehat{g}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot \|g\|_2 \qquad (g\in L^2)$$

(*Plancherel*[70]*-tétel*). Mi lesz az inverze? Ehhez először is azt jegyezzük meg, hogy az

$$\langle f,h\rangle := \int f\cdot \overline{h}\,d\mu \qquad (f,\, h\in L^2)$$

jelöléssel[71]
$$\langle \widehat{f},\widehat{h}\rangle = (2\pi)^n\cdot \langle f,h\rangle \qquad (f,\, h\in L^2).$$

Jelöljük a $(*)$ operátor adjungáltját A-val, ekkor

$$(2\pi)^n\cdot\langle f,h\rangle = \langle \widehat{f},\widehat{h}\rangle = \langle f, A(\widehat{h})\rangle \qquad (f,h\in L^2),$$

amiből tetszőleges $h\in L^2$ esetén

$$h=\frac{A(\widehat{h})}{(2\pi)^n}$$

következik. Legyen $h\in L^2$ mellett

$$H_h(x) := \widehat{h}(-x) \qquad (x\in\mathbf{R}^n),$$

[70]Michel Plancherel (Bussy, 1885. I. 16. – Zürich, 1967. III. 4.)

[71]Az L^2-beli skaláris szorzás. A továbbiakban nem fog félreértést okozni, hogy a $\mathbf{R}^n$-beli és az L^2-beli skaláris szorzást ugyanazzal a $\langle,\rangle$ szimbólummal jelöljük.

ekkor könnyű meggyőződni arról, hogy

$$\langle f, A(h)\rangle = \langle \widehat{f}, h\rangle = \langle f, H_h\rangle \qquad (f \in L^2).$$

Így

$$A(h) = H_h \qquad (h \in L^2),$$

következésképpen a $(*)$ operátor unitér, az inverze pedig a

$$L^2 \ni h \mapsto \frac{H_h}{(2\pi)^n} \in L^2$$

leképezés. Tehát

$$H_{\widehat{h}} = (2\pi)^n \cdot h \qquad (h \in L^2).$$

1.2.4. Differenciálhatóság

A továbbiakban az $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$-beli mértékek Fourier-transzformáltját fogjuk vizsgálni differenciálhatósági szempontból. Ezzel kapcsolatban állapodjunk meg bizonyos (pl. a többváltozós differenciálszámításban már megszokott) jelölésekben. Nevezetesen, egy

$$j = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$$

multiindex mellett legyen

$$|j| := \sum_{k=1}^{n} j_k$$

a j *hossza,*

$$x^j := \prod_{k=1}^{n} x_k^{j_k} \qquad (x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

az x vektor j-kitevős *hatványa,*

$$\partial^j := \partial_1^{j_1} ... \partial_n^{j_n}$$

a j szerinti *parciális deriválás,* ahol a $\partial_k f \quad (k = 1, ..., n)$ szimbólum egy

$$f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

(differenciálható) függvény k-adik változója szerinti parciális deriváltját jelenti. Legyen továbbá egy $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ mértékre

$$M_j(\nu) := \int x^j \, d\nu(x)$$

(feltéve, hogy az $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto x^j$ függvény a ν mérték szerint integrálható). Jelentse végül valamilyen $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbf{N}^n$ multiindexre $j \leq s$ azt, hogy

$$j_k \leq s_k \qquad (k = 1, ..., n).$$

A fenti jelölésekkel most már egyszerűen megfogalmazhatjuk a bevezetőben említett differenciálhatóságra vonatkozó állítást. Legyen ehhez $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ és $j \in \mathbf{N}^n$, továbbá tegyük fel, hogy minden $s \in \mathbf{N}^n$, $s \leq j$ multiindex mellett létezik a ν mérték $M_s(\nu)$ ún. s-edik *momentuma*. Ekkor

1^o tetszőleges $s \in \mathbf{N}^n$, $s \leq j$ esetén létezik a $\partial^s \widehat{\nu}$ parciális derivált;

2^o bármely 1^o-beli s multiindexre

$$\partial^s \widehat{\nu}(x) = \imath^{|s|} \cdot \int e_x(y) \cdot y^s \, d\nu(y) \qquad (x \in \mathbf{R}^n);$$

3^o az eddigi jelölések mellett a $\partial^s \widehat{\nu}$ függvény egyenletesen folytonos és korlátos.

Speciálisan
$$\partial^s \widehat{\nu}(0) = \imath^{|s|} \cdot M_s(\nu).$$
Az $n = 1$ esetben egy $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R})$ mérték k-adik $M_k(\nu)$ momentumának a létezéséből (valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett) már minden $s = 0, ..., k$ indexre következik az $M_s(\nu)$ létezése is, hiszen
$$|x|^s \leq 1 + |x|^k \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Legyen $0 \leq f \in L^1$ és $\nu := \mu_f$. Ekkor az $M_s(\nu) \quad (s \in \mathbf{N})$ momentum létezése azt jelenti, hogy az
$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto x^s \cdot f(x)$$
függvény L^1-beli. Innen tetszőleges $f \in L^1$ esetén a következőt kapjuk: tegyük fel, hogy egy $j \in \mathbf{N}^n$ mellett minden $s \in \mathbf{N}^n$, $s \leq j$ multiindexre az

$$f_s(x) := x^s \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvény L^1-beli. Ekkor az ilyen s-ekre

$$\partial^s \widehat{f} = \imath^{|s|} \cdot \widehat{f}_s.$$

Valóban, ha pl. $n = j = 1$ és $x, h \in \mathbf{R}$, valamint $h \neq 0$, akkor

$$\frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int f(t) \cdot \left(e^{\imath(x+h)t} - e^{\imath xt}\right) dt =$$

$$\int t f(t) e^{\imath xt} \cdot \frac{e^{\imath ht} - 1}{ht}\, dt =: \int G_h(t)\, dt,$$

ahol egy $c > 0$ konstanssal

$$|G_h(t)| = |f_1(t)| \cdot \left|\frac{e^{\imath ht} - 1}{ht}\right| = |f_1(t)| \cdot \left|\frac{\sin(ht/2)}{(ht)/2}\right| \leq c \cdot |f_1(t)| \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tehát az $f_1 \in L^1$ feltételezésből következően a $G_h \quad (0 \neq h \in \mathbf{R})$ függvényeknek van a h-tól független integrálható majoránsa. Ezért a Lebesgue-féle konvergenciatétel alapján létezik az

$$(\widehat{f}\,)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h} = \int \lim_{h \to 0} G_h(t)\, dt = \imath \cdot \int f_1(t) e^{\imath xt}\, dt = \imath \cdot \widehat{f}_1(x)$$

határérték.[72]

Innen tetszőleges j-re teljes indukcóval kapjuk az állítást. Ha ui. valamilyen $1 \leq j \in \mathbf{N}$ mellett $\widehat{f} \in D^s$ és

$$(\widehat{f}\,)^{(s)} = \imath^s \cdot \widehat{f}_s \qquad (1 \leq s \leq j),$$

akkor $(f_j)_1 = f_{j+1}$ (és az indukciós feltétel) miatt $\widehat{f}_j \in D$ és

$$(\widehat{f}_j)' = \imath \cdot \widehat{(f_j)}_1 = \imath \cdot \widehat{f}_{j+1}.$$

Ezért $(\widehat{f}\,)^{(j)} \in D$ és

$$(\widehat{f}\,)^{(j+1)} = \imath^j \cdot (\widehat{f}_j)' = \imath^j \cdot \imath \cdot \widehat{(f_j)}_1 = \imath^{j+1} \widehat{f}_{j+1}.$$

[72] Másképp fogalmazva: az $\widehat{f}(x)$-et definiáló integrált (az x szerint) „szabad az integráljel mögött" deriválni.

Könnyű kiszámolni deriváltfüggvények Fourier-transzformáltját. Legyen ehhez pl. az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvény differenciálható és tegyük fel, hogy $f,\, f' \in L^1$. Ekkor – lévén az f abszolút folytonos –

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt + f(0) \qquad (x \geq 0).^{73}$$

Következésképpen létezik a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt + f(0)$$

határérték. Ugyanakkor $f \in L^1$ miatt szükségszerűen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

és ugyanezzel a gondolatmenettel

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Ezért tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen parciális integrálással[74]

$$\widehat{f'}(x) = \int f'(t) e^{\imath x t} dt = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f'(t) e^{\imath x t} dt =$$

$$\lim_{a \to +\infty} \left(f(a) e^{\imath x a} - f(-a) e^{-\imath x a} - \imath x \cdot \int_{-a}^{a} f(t) e^{\imath x t} dt \right) = -\imath x \cdot \widehat{f}(x).$$

Mindennek a „többváltozós” megfelelőjét az alábbi formában kapjuk: ha az

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényre $f \in L^1$ és valamilyen $j \in \mathbf{N}^n$ esetén $\partial^j f \in L^1$ teljesül, akkor

$$\widehat{\partial^j f}(x) = (-\imath)^{|j|} \cdot x^j \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

[73] Ebből a szempontból a mindenütt való differenciálhatóság helyett elegendő azt feltenni az f-ről, hogy *abszolút* (más néven: *teljesen*) *folytonos*. Ekkor ui. az f m.m. differenciálható és „működik” az előbbi Newton–Leibniz-formula. Sőt, ehhez elég azt tudni, hogy az f folytonos, legfeljebb megszámlálható sok ponttól eltekintve deriválható és $f' \in L^1$.

[74] Világos, hogy a $t \mapsto f(t)e^{\imath x t}$ függvény is abszolút folytonos.

Speciálisan, ha a $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ szimbólum jelöli az

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kompakt tartójú folytonos függvények halmazát és az $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ függvény végtelen sokszor differenciálható, akkor

$$\widehat{\partial^j f}(x) = (-\imath)^{|j|} \cdot x^j \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, j \in \mathbf{N}^n).$$

1.3. Megjegyzések

i) Valamilyen $\xi \in \mathbf{R}^n$ esetén jelöljük $\mathcal{T}_\xi$-vel, ill. $\mathcal{M}_\xi$-vel a ξ által meghatározott *transzlációs,* ill. *modulációs* operátorokat:

$$\mathcal{T}_\xi f(t) := f(t+\xi) \qquad (f \in L^1,\, t \in \mathbf{R}^n)$$

és

$$\mathcal{M}_\xi g(t) := e^{\imath\langle t,\xi\rangle} \cdot g(t) \qquad (g \in L^1,\, t \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$\mathcal{T}_\xi \mathcal{M}_\eta = e^{\imath\langle \xi,\eta\rangle} \cdot \mathcal{M}_\eta \mathcal{T}_\xi \qquad (\xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n).$$

Speciálisan, itt a

$$\mathcal{T}_\xi \mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\eta \mathcal{T}_\xi$$

egyenlőség akkor és csak akkor igaz (tehát a ξ-transzláció és az η-moduláció pontosan akkor cserélhető fel), ha valamilyen $k \in \mathbf{Z}$ egész számmal

$$\langle \xi, \eta \rangle = 2k\pi.$$

Azt sem nehéz továbbá belátni, hogy a most értelmezett operátorok és a Fourier-transzformáció kapcsolata a következő:

$$\widehat{\mathcal{T}_\xi f} = \mathcal{M}_{-\xi} \widehat{f} \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n, f \in L^1)$$

és

$$\widehat{\mathcal{M}_\eta f} = \mathcal{T}_\eta \widehat{f} \qquad (\eta \in \mathbf{R}^n, f \in L^1).$$

Nevezetesen, az $x \in \mathbf{R}^n$ helyeken (a Lebesgue-integrál eltolás-invarianciáját is kihasználva)

$$\widehat{\mathcal{T}_\xi f}(x) = \int \mathcal{T}_\xi f(t) e^{\imath\langle x,t\rangle} dt = \int f(\xi + t) e^{\imath\langle x,t\rangle} dt =$$

$$= \int f(t)e^{\imath\langle x,t-\xi\rangle}dt = e^{\imath\langle x,-\xi\rangle}\cdot \int f(t)e^{\imath\langle x,t\rangle}dt = \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}(x),$$

valamint

$$\widehat{\mathcal{M}_\eta} f(x) = \int \mathcal{M}_\eta f(t)e^{\imath\langle x,t\rangle}dt = \int f(t)e^{\imath\langle t,\eta\rangle}\cdot e^{\imath\langle x,t\rangle}dt =$$

$$\int f(t)e^{\imath\langle x+\eta,t\rangle}dt = \widehat{f}(x+\eta) = \mathcal{T}_\eta\widehat{f}(x).$$

Hasonlóan,

$$(\mathcal{T}_\xi\mathcal{M}_\eta f)^\wedge = \mathcal{M}_{-\xi}\mathcal{T}_\eta\widehat{f} \qquad (\xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n, f \in L^1)$$

és

$$(\mathcal{M}_\eta\mathcal{T}_\xi f)^\wedge = \mathcal{T}_\eta\mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f} \qquad (\xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n, f \in L^1).$$

A Fourier-transzformáció L^2-re való kiterjesztésére gondolva a fenti formulák igazak maradnak az $f \in L^2$ függvényekre is. Így pl. legyen ekkor az $L^1 \cap L^2$ térbeli $(f_k, k \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2 = 0,$$

amikor nyilván $\mathcal{T}_\xi f \in L^2$ és

$$\mathcal{T}_\xi f_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{T}_\xi f - \mathcal{T}_\xi f_k\|_2,$$

ezért (a Fourier-transzformált L^2-beli értelmezésére tekintettel)

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \widehat{\mathcal{T}_\xi f_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}_k\|_2.$$

Így

$$\|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}\|_2 \le$$

$$\|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}_k\|_2 + \|\mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}_k - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}\|_2 =$$

$$\|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}_k\|_2 + \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Következésképpen

$$\|\widehat{\mathcal{T}_\xi f} - \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f}\|_2 = 0,$$

más szóval (L^2-értelemben)

$$\widehat{\mathcal{T}_\xi f} = \mathcal{M}_{-\xi}\widehat{f} \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n, f \in L^2).$$

Ugyanígy, a fenti jelölésekkel

$$\mathcal{M}_\eta f_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és $\mathcal{M}_\eta f \in L^2$ miatt egyrészt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{M}_\eta f - \mathcal{M}_\eta f_k\|_2,$$

amiből

$$\lim_{k\to\infty} \|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \widehat{\mathcal{M}_\eta f_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f_k}\|_2 = 0$$

adódik. Másrészt az

$$\|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f}\|_2 \leq$$

$$\|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f_k}\|_2 + \|\mathcal{T}_\eta \widehat{f_k} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f}\|_2 =$$

$$\|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f_k}\|_2 + \|\widehat{f_k} - \widehat{f}\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

határátmenet után

$$\|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \mathcal{T}_\eta \widehat{f}\|_2 = 0 \Longrightarrow \widehat{\mathcal{M}_\eta f} = \mathcal{T}_\eta \widehat{f}.$$

Világos, hogy

$$\mathcal{T}_\xi,\, \mathcal{M}_\eta : L^2 \to L^2 \qquad (\xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n).$$

Ezek az operátorok folytonosak is a következő értelemben: bármely

$$f \in L^2,\, \xi_0,\, \eta_0 \in \mathbf{R}^n$$

esetén

$$\|\mathcal{T}_\xi f - \mathcal{T}_{\xi_0} f\|_2 \to 0 \qquad (\xi \to \xi_0)$$

és

$$\|\mathcal{M}_\eta f - \mathcal{M}_{\eta_0} f\|_2 \to 0 \qquad (\eta \to \eta_0).$$

A Lebesgue-integrál most említett eltolás-invarianciája miatt

$$\|\mathcal{T}_\xi f - \mathcal{T}_{\xi_0} f\|_2 = \|\mathcal{T}_{\xi-\xi_0} f - f\|_2.$$

Ezért a transzláció folytonossága azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{\xi\to 0} \|\mathcal{T}_\xi f - f\|_2 = 0 \qquad (f \in L^2),$$

ami jól ismert az integrálelméletből. Innen $\widehat{f} \in L^2 \quad (f \in L^2)$ alapján a modulációról a következőket mondhatjuk:

$$\lim_{\eta\to 0} \|\mathcal{M}_\eta f - f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \lim_{\eta\to 0} \|\widehat{\mathcal{M}_\eta f} - \widehat{f}\|_2 =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \lim_{\eta\to 0} \|\mathcal{T}_\eta \widehat{f} - \widehat{f}\|_2 = 0.$$

Mivel

$$\|\mathcal{M}_\eta f - \mathcal{M}_{\eta_0} f\|_2 = \|\mathcal{M}_{\eta-\eta_0} f - f\|_2,$$

ezért a moduláció fent említett folytonossága már adódik.

ii) Számítsuk ki a

$$h(x) := e^{-\|x\|^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

(nyilván folytonos és L^1-beli) függvény Fourier-transzformáltját, és mutassuk meg, hogy

$$\widehat{h} = (2\pi)^{n/2} \cdot h.$$

Legyen ehhez $x \in \mathbf{R}^n$, ekkor

$$\widehat{h}(x) = \int e^{-\sum_{k=1}^n y_k^2/2} \cdot e^{\imath \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k} \, dy_1 \cdots dy_n =$$

$$\int \prod_{k=1}^n e^{-y_k^2/2} \cdot e^{\imath x_k y_k} \, dy_1 \cdots dy_n = \prod_{k=1}^n \int e^{-y_k^2/2} \cdot e^{\imath x_k y_k} \, dy_k =$$

$$\prod_{k=1}^n \int e^{-(y_k - \imath x_k)^2/2 - x_k^2/2} \, dy_k = \prod_{k=1}^n e^{-x_k^2/2} \cdot \int e^{-(y_k - \imath x_k)^2/2} \, dy_k.$$ [75]

Az utóbbi integrálok kiszámításához legyen valamilyen $a > 0$ és $0 \neq b \in \mathbf{R}$ (pl. $b > 0$) esetén a T az a téglalap a komplex síkon, amelynek a csúcspontjai:

$$\pm a, \ \pm a - \imath b,$$

[75] Általában is: ha alkalmas „egyváltozós” $g_1, ..., g_n$ függvényekkel az $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ helyeken $g(x) := \prod_{j=1}^n g_j(x_j)$, akkor (a Fubini-tétel miatt) $\widehat{g}(x) = \prod_{j=1}^n \int g_j(t) e^{\imath x_j t_j} \, dt_j = \prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(x_j)$.

továbbá legyen a φ_a a T kerülete (mint egy $\mathbf{C}^2$-beli görbe az óramutató járásával megegyező irányban). Ekkor a komplex függvénytan Cauchy-féle alaptétele szerint

$$\int_{\varphi_a} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

A T téglalap φ_a^j $(j = 1, 2)$ függőleges oldalainak a

$$z = \pm a + \imath t \qquad (-b \leq t \leq 0)$$

pontjaiban

$$\left| e^{-z^2/2} \right| = e^{-a^2/2} \cdot e^{t^2/2} \leq e^{b^2/2} \cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty),$$

így a $j = 1, 2$ indexekre

$$\left| \int_{\varphi_a^j} e^{-z^2/2} dz \right| \leq |b| \cdot e^{b^2/2} \cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty).$$

A T vízszintes oldalain az integrálok:

$$-\int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2} dt \ \text{ és } \ \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2} dt.$$

Következésképpen

$$0 = \lim_{a \to +\infty} \int_{\varphi_a} e^{-z^2/2} dz = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2} dt - \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2} dt,$$

amiből

$$\int e^{-(t-\imath b)^2/2} \, dt = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2} \, dt =$$

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2} \, dt = \int e^{-t^2/2} \, dt = \sqrt{2} \cdot \int e^{-t^2} \, dt = \sqrt{2\pi}$$

következik. (Ha $b < 0$, akkor analóg számolással jutunk ugyanerre az eredményre.) Tehát bármely $k = 1, ..., n$ mellett

$$\int e^{-(y_k - \imath x_k)^2/2} \, dy_k = \sqrt{2\pi},$$

ezért
$$\widehat{h}(x) = (2\pi)^{n/2} \cdot \prod_{k=1}^{n} e^{-x_k^2/2} = (2\pi)^{n/2} \cdot h(x),$$
amit bizonyítani kellett.[76]

iii) Legyen $n = 1$ és tegyük fel, hogy az $f \in L^1$ függvény páros, azaz
$$f(-t) = f(t) \qquad (\text{m.m.}\, t \in \mathbf{R}).$$
Ekkor
$$\widehat{f}(x) = \int f(t)e^{\imath tx}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{\imath tx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{\imath tx}dt =$$
$$\int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{-\imath tx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{\imath tx}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\left(e^{\imath tx} + e^{-\imath tx}\right) dt =$$
$$2\cdot \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(tx)\, dt = \int f(t)\cos(tx)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$
Ugyanígy kapjuk az
$$\widehat{f}(x) = 2\imath\cdot \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(tx)\, dt = \imath\cdot \int f(t)\sin(tx)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$
formulát páratlan f esetén, azaz, amikor
$$f(-t) = -f(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}).$$

iv) Gondoljuk meg, hogy az integrálható $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor páros (páratlan), ha az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált páros (páratlan). Valóban, ha az f páros (páratlan), akkor az előbbi megjegyzés formulái alapján rögtön adódik ugyanez az $\widehat{f}$-ra is. Fordítva, ha pl. az $\widehat{f}$ páros, akkor az
$$F(t) := f(-t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$
függvényre
$$\widehat{F}(x) = \int f(-t)e^{\imath tx}dt = \int f(t)e^{-\imath tx}dt = \widehat{f}(-x) = \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

---

[76]Mivel $a, b \in \mathbf{R}$ esetén $\int e^{-(y-\imath(a+\imath b))^2/2}\, dy = \int e^{-(y+b-\imath a)^2/2}\, dy = \int e^{-(y-\imath a)^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi}$, ezért a fentiekben az $x \in \mathbf{R}^n$ helyett $x \in \mathbf{C}^n$ is írható.

Innen a Fourier-transzformáció injektivitása (ld. 2.5. vi) megjegyzés) alapján

$$F(x) = f(-x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Analóg módon gondolkodhatunk akkor is, ha az $\widehat{f}$ páratlan.

v) Legyen $f \in L^1$ és $0 \neq c \in \mathbf{R}$, valamint

$$\delta_c f(x) := f(cx) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

(*dilatáció*). Világos, hogy $\delta_c f \in L^1$. Ha $c > 0$, akkor

$$\widehat{\delta_c f}(x) = \int f(ct) e^{\imath\langle t,x\rangle} dt = \frac{1}{c^n} \cdot \int f(t) e^{\imath\langle t,x/c\rangle} dt = \frac{1}{c^n} \cdot \widehat{f}(x/c) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha $c = -1$, akkor

$$\widehat{\delta_{-1} f}(x) = \int f(-t) e^{\imath\langle t,x\rangle} dt = \int f(t) e^{\imath\langle t,-x\rangle} dt = \widehat{f}(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$ [77]

Speciálisan, ha $n = 1$ és az f páros, vagy páratlan, akkor

$$\delta_{-1} f = f, \text{ vagy } \delta_{-1} f = -f,$$

más szóval

$$\widehat{f}(-x) = \widehat{\delta_{-1} f}(x) = \widehat{f}(x), \text{ vagy } \widehat{f}(-x) = \widehat{\delta_{-1} f}(x) = -\widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát az $\widehat{f}$ páros (páratlan).

Végül, ha $c < 0$, akkor $\delta_c f = \delta_{-1}(\delta_{-c} f)$. Ezért

$$\widehat{\delta_c f}(x) = \widehat{\delta_{-c} f}(-x) = \frac{1}{(-c)^n} \cdot \widehat{f}(-x/(-c)) = \frac{1}{(-c)^n} \cdot \widehat{f}(x/c) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Megjegyezzük, hogy a későbbiekben fontos szerepet játszó

$$f_c := \frac{1}{c^n} \cdot \delta_{1/c} f \qquad (c > 0)$$

(nyilván L^1-beli) függvényre

$$\widehat{f_c}(x) = \frac{1}{c^n} \cdot \int f(t/c) e^{\imath\langle x,t\rangle} dt = \int f(t) e^{\imath\langle cx,t\rangle} dt = \widehat{f}(cx) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

így

$$\widehat{f_c} = \delta_c \widehat{f}.$$

[77] A Fourier-transzformált L^2-beli függvényekre való értelmezése alapján (ld. 1.2.3.) könnyen adódik az $f \in L^2$ függvények dilatációjára vonatkozó analóg formula is. (Ld. a transzláció, ill. a moduláció L^2-változatát (1.3. i) megjegyzés).

vi) Tegyük fel, hogy $n = 1$ és $f \in L^1$, továbbá az $\widehat{f}$ függvény páratlan. Legyen $1 < b < +\infty$. Ekkor a iii) megjegyzés és a Fubini-tétel szerint

$$\int_1^b \frac{\widehat{f}(x)}{x}\, dx = 2\imath \cdot \int_1^b \frac{1}{x} \cdot \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin(tx)\, dt \right) dx =$$

$$= 2\imath \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_1^b \frac{\sin(tx)}{x}\, dx \right) dt = 2\imath \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_t^{bt} \frac{\sin x}{x}\, dx \right) dt.$$

Jól ismert, hogy

$$C := \sup_{0 \le \alpha < \beta} \left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x}\, dx \right| < +\infty,$$

következésképpen

$$\sup_{b>1} \left| \int_1^b \frac{\widehat{f}(x)}{x}\, dx \right| \le C \cdot \|f\|_1.$$

Mivel

$$\sup_{b>1} \left| \int_1^b \frac{1}{x \ln(1+x)}\, dx \right| = +\infty,$$

ezért nincs olyan $f \in L^1$ függvény, amelyre

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} =: g(x) \qquad (x \ge 1)$$

teljesülne.[78]

vii) Az $n = 1$ esetben adott $f \in L^1$ függvényre és $h \in \mathbf{R}$ számra legyen

$$\Delta_h f(t) := f(t + h/2) - f(t - h/2) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

valamint

$$\omega(f, \delta) := \sup_{|h| \le \delta} \|\Delta_h f\|_1 \qquad (\delta \ge 0).^{79}$$

Mutassuk meg, hogy

$$|\widehat{f}(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \omega(f, \pi/|x|) \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}).$$

[78]Dacára annak, hogy a g rendelkezik a Fourier-transzformáció jellemző tulajdonságaival: folytonos és $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

[79]Az f függvény L^1-*folytonossági modulusa.* Általában is igaz, hogy ha $1 \le p < +\infty$ és $f \in L^p$, akkor $\sup_{\|h\| \le \delta} \left(\int |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \to 0 \quad (\delta \to 0)$.

Vegyük észre ehhez ui., hogy

$$\widehat{f}(x) = \int f(t)e^{\imath tx}dt = -\imath\cdot \int f(t)e^{\imath x(t+\pi/(2x))}dt = -\imath\cdot \int f\left(t-\frac{\pi}{2x}\right)e^{\imath tx}dt$$

és hasonlóan

$$\widehat{f}(x) = \imath\cdot \int f(t)e^{\imath x(t-\pi/(2x))}dt = \imath\cdot \int f\left(t+\frac{\pi}{2x}\right)e^{\imath tx}dt.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f}(x) = \frac{\imath}{2}\cdot \int \left(f\left(t+\frac{\pi}{2x}\right) - f\left(t-\frac{\pi}{2x}\right)\right)e^{\imath tx}dt,$$

más szóval

$$|\widehat{f}(x)| \le \frac{1}{2}\cdot \int |\Delta_{\pi/x} f(t)|\, dt \le \frac{1}{2}\cdot \omega(f, \pi/|x|).$$

viii) Nem nehéz belátni, hogy az előbbi vii) megjegyzésben

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0.$$

Ezért

$$\lim_{|x|\to+\infty} \omega(f,\pi/|x|) = 0,$$

tehát a Fourier-transzformációra vonatkozó vii)-beli becslés alapján újból megkaptuk a Riemann–Lebesgue-lemma (ld. 1.2.2.) állítását:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0.$$

ix) A Fourier-transzformált definíciója alapján nem meglepő, hogy egy $f \in L^1$ függvény esetén a $\widehat{f}(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$ kiszámítása során komplex függvénytani eszközök is szerepet kaphatnak. Legyen pl. $n := 1$ és (ld. ii))

$$f(t) := e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha $x > 0$ és $r > 0$, akkor tekintsük a komplex síkon (pozitív körüljárással) azt a $\Gamma_{r,x}$ zárt komplex görbét, amit a

$$(-r,0),\ (r,0),\ (r,-\imath x/2),\ (-r,-\imath x/2)$$

csúcspontú téglalap kerülete határoz meg. Ekkor a Cauchy-féle alaptétel szerint

$$\int_{\Gamma_{r,x}} e^{-z^2}dz = 0.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_{r,x}} e^{-z^2}dz = \int e^{x^2/4-t^2+\imath tx}dt - \int e^{-t^2}dt,$$

tehát

$$e^{x^2/4}\cdot \int e^{-t^2}\cdot e^{\imath tx}dt = e^{x^2/4}\cdot \widehat{f}(x) = \int e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Tehát

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi}\cdot e^{-x^2/4}$$

(ami az $\widehat{f}$ transzformált nyilvánvaló párossága miatt $x < 0$ esetén is igaz). Mivel az $\widehat{f}$ folytonos függvény, ezért

$$\widehat{f}(0) = \sqrt{\pi}.$$

x) A reziduum-tétel alkalmazására tekintsük az

$$f(t) := \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényt. Legyen $x > 0$ és

$$F(z) := \frac{e^{\imath zx}}{1+z^2} \qquad (\pm\imath \neq z \in \mathbf{C}),$$

valamint $r > 1$ esetén a $\Gamma_{r,x}$ jelölje most azt a zárt komplex görbét (szintén pozitív körüljárással), amit a $[-r, r]$ szakasz (legyen ez $\Gamma^{(1)}_{r,x}$) és az origó középpontú, r sugarú, az $\operatorname{Im} z \geq 0$ $(z \in \mathbf{C})$ félsíkban lévő félkör (ez pedig legyen $\Gamma^{(2)}_{r,x}$) egyesítésével kapunk. Ekkor a reziduum-tétel alapján

$$\int_{\Gamma_{r,x}} F(z)\,dz = 2\pi\imath\cdot \operatorname{res}_\imath F,$$

ahol az F függvény $\imath$-beli reziduuma:

$$\operatorname{res}_\imath F = \frac{e^{-x}}{2\imath}.$$

Egyszerűen belátható, hogy

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_{r,x}^{(2)}} F(z)\,dz = 0,$$

ezért

$$\pi\cdot e^{-x} = \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_{r,x}} F(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_{r,x}^{(1)}} F(z)\,dz = \int \frac{e^{\imath tx}}{1+t^2}\,dt = \widehat{f}(x).$$

Az f párossága miatt mindez $x<0$ esetén is igaz, ill. az $\widehat{f}$ folytonosságából $\widehat{f}(0)=\pi$ is következik.

xi) Illusztrációképpen mutassuk meg, hogy időnként pl. a differenciálegyenletek révén is eljuthatunk a Fourier-transzformált kiszámításához. Vegyük ehhez példaként a ix)-beli

$$f(t) := e^{-t^2} \qquad (t\in\mathbf{R})$$

függvényt. Ekkor

$$f'(t) = -2te^{-t^2} = -2tf(t) \qquad (t\in\mathbf{R}),$$

így a deriválás és a Fourier-transzformáció kapcsolatára az előbb kapott formulák (ld. 1.2.4.) alapján

$$-\imath x\cdot \widehat{f}(x) = 2\imath\cdot(\widehat{f}\,)'(x) \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Tehát

$$(\widehat{f}\,)'(x) = -\frac{x}{2}\cdot\widehat{f}(x) \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ami az $\widehat{f}$-ra nézve egy homogén elsőrendű differenciálegyenlet. Ennek minden megoldása

$$\alpha\cdot e^{-x^2/4} \qquad (x\in\mathbf{R})$$

alakú alkalmas $\alpha\in\mathbf{R}$ együtthatóval. Mivel

$$\widehat{f}(0) = \int e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi},$$

ezért $\alpha=\sqrt{\pi}$, azaz

$$\widehat{f}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{x^2/4}} \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

xii) Példa: tekintsük az

$$f'' - \lambda^2 \cdot f + g = 0$$

differenciálegyenletet, ahol feltesszük, hogy

$$f,\, f'',\, g \in L^1,\, f'' \in C,\, \lambda > 0.$$

Ekkor (ld. 1.2.4.)

$$\widehat{g}(x) = (\lambda^2 + x^2) \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

valamint

$$h(x) := \frac{e^{-\lambda |x|}}{2\lambda} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

esetén

$$\widehat{h}(x) = \frac{1}{\lambda^2 + x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Innen

$$\widehat{f} = \widehat{h} \cdot \widehat{g} = \widehat{h * g},$$

így

$$f(x) = h * g(x) = \frac{1}{2\lambda} \cdot \int e^{-\lambda |x-t|} \cdot g(t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

xiii) Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ és $1 < q \leq +\infty$ mellett az

$$\mathbf{R} \setminus \{0\} \ni y \mapsto \frac{\chi_{\{|y| > \varepsilon\}}}{y}$$

függvény L^q-beli. Legyen $n = 1$ és $f \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$, ekkor a most mondottak, valamint a Hölder-egyenlőtlenség szerint jól definiált és véges a

$$H_\varepsilon f(x) := \int_{\{|y| > \varepsilon\}} \frac{f(x-y)}{y}\, dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény. Belátható, hogy a H_ε operátor

- gyengén $(1, 1)$ típusú;
- minden $1 < p < +\infty$ esetén (p, p) típusú,

mégpedig mindkét állításban az ε szerint egyenletesen: megadható olyan $C > 0$ és (csak a p-től függő) $C_p > 0$ konstans, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám és $f \in L^1$, ill. $g \in L^p$ függvényekre

$$|\{|H_\varepsilon f| > y\}| \leq C \cdot \frac{\|f\|_1}{y} \qquad (y > 0)$$[80]

és

$$\|H_\varepsilon f\|_p \leq C_p \cdot \|f\|_p \quad (f \in L^p).$$

Megjegyezzük, hogy (ld. 1.1.)

$$H_\varepsilon f = K_\varepsilon * f,$$

ahol

$$K_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/t & (|t| > \varepsilon) \\ \\ 0 & (|t| \geq \varepsilon). \end{cases}$$

Mivel

$$K_\varepsilon \in L^q \qquad (1 < q \leq +\infty),$$

ezért a fenti konvolúció minden $f \in L^p \quad (1 \leq p < +\infty)$ függvény esetén értelmezhető, a $K_\varepsilon * f$ folytonos, korlátos függvény. Ha $p = 2$, akkor

$$\widehat{H_\varepsilon f} = \widehat{K_\varepsilon} \cdot \widehat{f}.$$

Következésképpen (ld. 1.2.3.)

$$\|H_\varepsilon f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|\widehat{H_\varepsilon f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|\widehat{K_\varepsilon}\|_\infty \cdot \|\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{K_\varepsilon}\|_\infty \cdot \|f\|_2.$$

Ugyanakkor

$$\widehat{K_\varepsilon}(x) = \lim_{r \to +\infty} \int_{r > |t| > \varepsilon} \frac{e^{\imath xt}}{t}\, dt = 2\imath \cdot \int_{x\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad (x > 0),$$

ezért azt kell csupán ellenőrizni, hogy az utóbbi integrál egyenletesen korlátos: van olyan abszolút C_2 konstans, hogy

$$\left| \int_{x\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq C_2 \qquad (x > 0,\ \varepsilon > 0).$$

[80] Emlékeztetőül: az $|A|$ jelenti a Lebesgue-mérhető $A \subset \mathbf{R}$ halmaz Lebesgue-mértékét.

Ezzel a

$$\|H_\varepsilon f\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p)$$

becslést $p = 2$-re „elintéztük”. Ebből és a gyenge $(1,1)$ becslésből interpolációval kapjuk az $1 < p \le 2$ esetet. Ugyanakkor belátható, hogy ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

akkor

$$\|H_\varepsilon f\|_q \le C_p \cdot \|f\|_q,$$

tehát az $1 < p \le 2$ eset maga után vonja a $2 < p < +\infty$ esetet. Az is igaz, hogy

$$C_p \le \frac{Cp^2}{p-1}$$

(alkalmas C abszolút konstanssal).

Megmutatható továbbá, hogy a most mondott gyenge $(1,1)$ és (p,p) tulajdonság a

$$H^* f := \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f| \qquad (f \in L^p)$$

maximáloperátorra is teljesül. Innen az is következik, hogy létezik a

$$Hf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

határérték, az f függvény ún. *Hilbert*[81]*-transzformáltja,* és a H operátor is gyengén $(1,1)$ és (p,p) típusú $(1 < p < +\infty)$. Igaz továbbá, hogy amennyiben $p = 2$, azaz $f, g \in L^2$, akkor

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2 \text{ és } H^2 f = -f,$$

valamint

$$\int Hf(x) g(x)\, dx = -\int f(x) Hg(x)\, dx$$

és

$$\pi \cdot \widehat{Hf}(x) = \imath \cdot \widehat{f}(x) \cdot \operatorname{sign} x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

[81] David Hilbert (Königsberg, 1862. I. 23. – Göttingen, 1943. II. 14.)

A most mondottakhoz kapcsolódóan (a részletek mellőzésével) idézzük az alábbi, a szinguláris integrálok témakörébe vágó állítást (*Calderon*[82]–*Zygmund*[83]). Nevezetesen, tegyük fel, hogy a $K \in L^2$ függvényre az alábbiak teljesülnek: alkalmas $A, B > 0$ konstansokkal

$$|\widehat{K}(x)| \leq A \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

és az

$$\mathbf{R}^n_z := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| > 2\cdot \|z\|\} \qquad (z \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel

$$(*) \qquad \int_{\mathbf{R}^n_z} |K(x-z) - K(x)|\, dx \leq B \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor az $f \mapsto K * f$ (konvolúciós) operátor gyengén $(1,1)$ típusú és minden $1 < p < +\infty$ esetén (p,p) típusú, azaz alkalmas c, $c_p > 0$ együtthatókkal

$$|\{|K * f| > y\}| \leq \frac{c}{y}\cdot \|f\|_1 \qquad (f \in L^1)$$

és

$$\|K * f\|_p \leq c_p\cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p).$$

Megjegyezzük, hogy $p = 2$-re a Plancherel-tétel (ld. 1.2.3), a 2.5. xv) megjegyzés és a Young-egyenlőtlenség (ld. 1.1.) miatt

$$\|K * f\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot \|\widehat{K * f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot \|\widehat{K}\cdot \widehat{f}\,\|_2 \leq$$

$$A(2\pi)^{n/2}\cdot \|\widehat{f}\,\|_2 \leq A\cdot \|f\|_2 \qquad (f \in L^2 \cap L^1)$$

igaz. Innen és a gyenge $(1,1)$ tulajdonságból interpoláció (ld. 4.3. iii) megjegyzés) révén az $1 < p < 2$ eset már következik. Az utóbbiból a *dualitási elv* alapján már a $p > 2$ eset is adódik:

$$\|K * f\|_p = \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int (K * f)(x)\cdot h(x)\, dx \right| =$$

$$\sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int \left(\int K(x-t) f(t)\, dt \right) h(x\, dx \right| =$$

[82] Alberto Pedro Calderón (Mendoza, 1920. IX. 14. – Chicago, 1998. IV. 16.)
[83] Antoni Szczepan Zygmund (Varsó, 1900. XII. 25. – Chicago, 1992. V. 30.)

$$= \sup_{\|h\|_q \le 1} \left| \int \left(\int K(x-t)h(x)\,dx \right) f(t)\,dt \right| =$$

$$\sup_{\|h\|_q \le 1} \left| \int \left(\int \widetilde{K}(t-x)h(x)\,dx \right) f(t)\,dt \right| =$$

$$\sup_{\|h\|_q \le 1} \left| \int (\widetilde{K} * h)(t) f(t)\,dt \right|,$$

ahol

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

és

$$\widetilde{K}(z) := K(-z) \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Nyilván a $\widetilde{K}$ (duális) magfüggvényre is teljesülnek a K-ra vonatkozó feltételek.[84] Mivel itt $q < 2$, ezért (a Hölder-egyenlőtlenséget is alkalmazva)

$$\left| \int (\widetilde{K} * h)(t) \cdot f(t)\,dt \right| \le \|\widetilde{K} * h\|_q \cdot \|f\|_p \le c_q \cdot \|h\|_q \cdot \|f\|_p \le c_q \cdot \|f\|_p$$

és így

$$\|K * f\|_p \le c_q \cdot \|f\|_p.$$

Az itt szereplő $(*)$ kikötés az ún. *Hörmander*[85]*-feltétel*, ami nyilván teljesül akkor, ha a szóban forgó K függvény differenciálható és valamilyen $D > 0$ számmal

$$\|K'(x)\| \le \frac{D}{\|x\|^{n+1}} \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}^n).$$

xiv) A fenti (ld. 1.2.4.)

$$\widehat{\partial^j f}(x) = (-\imath)^{|j|} \cdot x^j \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ j \in \mathbf{N}^n)$$

formula alapján gondoljuk meg, hogy a

$$\partial^j f \in L^2 \qquad (j \in \mathbf{N}^n,\ |j| \le N)$$

[84] Az $f \mapsto K * f$ operátor adjungáltja az $f \mapsto \widetilde{K} * f$ leképezés.
[85] Lars Valter Hörmander (Mjällby, 1931. I. 24. – Lund, 2012. XI. 25.)

tartalmazás valamilyen $N \in \mathbf{N}$ mellett akkor és csak akkor igaz, ha

$$\int |\widehat{f}(x)|^2 \cdot \left(1 + \|x\|^2\right)^N dx < +\infty.$$

Valóban, a Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) szerint

$$\|\partial^j f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \|\widehat{\partial^j f}\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int |x^j \cdot \widehat{f}(x)|^2 \, dx =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int |x^j|^2 \cdot |\widehat{f}(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \|x\|^{2|j|} \cdot |\widehat{f}(x)|^2 \, dx.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy alkalmas $c > 1$ konstanssal

$$\frac{1}{c} \cdot (1 + \|x\|^2)^N \leq \sum_{|j| \leq N} |x^j|^2 \leq c \cdot (1 + \|x\|^2)^N \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

amiből a mondott ekvivalencia már nyilván következik.

xv) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény eleget tesz az alábbi feltételeknek: alkalmas $\varepsilon > 0$ és $C > 0$ paraméterrel

$$|f(x)|, \, |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C}{(1 + \|x\|)^{n+\varepsilon}} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor igaz a következő, ún. *Poisson*[86]*-féle szummációs formula*:

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} f(x + 2\pi j b) = \frac{1}{(2\pi b)^n} \cdot \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \widehat{f}(j/b) e^{-\imath b^{-1} \langle j, x \rangle} \qquad (x \in \mathbf{R}^n, \, b > 0),$$

ahol mindkét sor abszolút konvergens. Speciálisan (ha $x = 0$)

$$(2\pi b)^n \cdot \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} f(2\pi j b) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \widehat{f}(j/b),$$

valamint (ha $b = 1/(2\pi)$)

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} f(j) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \widehat{f}(2\pi j).$$

[86] Simon Denis Poisson (Pithiviers, 1781. VI. 21. – Sceaux, 1840. IV. 25.)

Különösen „egyszerűvé" válik az utóbbi formula, ha (ld. 2.5. xix) megjegyzés) a Fourier-transzformált

$$f^{\circ}(x) := \int f(t)e^{-2\pi\imath\langle x,t\rangle}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

alakját használjuk:

$$(*) \qquad \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(j) = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f^{\circ}(j).$$

A Poisson-formula indoklását illetően világos, hogy az f-re tett feltételekre tekintettel $f \in L^1$, valamint a

$$\varphi(x) := \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(x+2\pi bj) \qquad (x \in [0,2\pi b]^n)$$

függvényre $\varphi \in L^1[0,2\pi b]^n$ igaz. Számítsuk ki a φ Fourier-együtthatóit:

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\int_{[0,2\pi b]^n} \varphi(t)e^{-\imath b^{-1}\langle k,t\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\int_{[0,2\pi b]^n}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(t+2\pi bj)\Big)e^{-\imath b^{-1}\langle k,t\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\int_{[0,2\pi b]^n}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(t+2\pi bj)e^{-\imath b^{-1}\langle k,t+2\pi bj\rangle}\Big)dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\int f(y)e^{-\imath b^{-1}\langle k,y\rangle}dy = \frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\widehat{f}(-k/b) \qquad (k \in \mathbf{Z}^n).$$

Az $\widehat{f}$-ra megkövetelt nagyságrendi becslés miatt

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{f}(j/b)| < +\infty,$$

ezért a φ függvény (n-változós) Fourier-sora abszolút konvergens, következésképpen az $x \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}\widehat{f}(-j/b)e^{\imath b^{-1}\langle j,x\rangle} = \frac{1}{(2\pi b)^n}\cdot\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}\widehat{f}(j/b)e^{-\imath b^{-1}\langle j,x\rangle}.$$

xvi) Legyen pl. $\alpha > 0$ és

$$f(t) := e^{-\alpha t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor (ld. ix))

$$\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-t^2/(4\alpha)} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tehát (ld. xv))

$$2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-4\alpha\pi^2 k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/4\alpha},$$

vagy a $\beta := 4\alpha\pi^2$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 k^2/\beta}.$$

A $z := \beta/\pi$ jelöléssel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/z}.$$

Ha

$$\vartheta(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 t} \qquad (t > 0)$$

(ϑ*-függvény*), akkor

$$\vartheta(t) = \frac{\vartheta(t^{-1})}{\sqrt{t}} \qquad (t > 0)$$

(*Jacobi*[87]*-formula*) (ld. számelmélet, ill. elliptikus integrálok).

xvii) Vezessük be az alábbi $W(\mathbf{R}^n)$ *Wiener*[88]*-algebrát*:

$$W(\mathbf{R}^n) := \left\{ f \in C : \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \max_{x \in [0,2\pi]^n} |f(x + 2\pi k)| < +\infty \right\}.$$

Ekkor $f,\, \widehat{f} \in W(\mathbf{R}^n)$ esetén igaz a xv)-beli $(*)$ Poisson-formula (az ott mondott bizonyítással együtt). Megmutatható, hogy ebből a szempontból az $f,\, \widehat{f} \in C$ feltétel nem elegendő.

[87] Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 1804. XII. 10. – Berlin, 1851. II. 18.)
[88] Norbert Wiener (Columbia, 1894. XI. 26. – Stockholm, 1964. III. 18.)

xviii) Az előbbiekben az f-re és az $\widehat{f}$-ra tett feltételek (pl.) a $(*)$ (ld. xv)) egyenlőségekben szereplő végtelen sorok abszolút konvergenciáját biztosították. Ha csak mondjuk a szóban forgó sorok konvergenciáját (és a sorösszegek egyenlőségét) akarjuk, akkor enyhíthetünk a feltételeken. Legyen ehhez $n = 1$ és $f \in L^1 \cap C$, továbbá

$$1 \leq p, q \leq +\infty,$$

és az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\widetilde{p}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\widetilde{q}} = 1,$$

valamint az

$$\frac{1}{pq} < \left(b - \frac{1}{\widetilde{q}}\right) \cdot \left(a - \frac{1}{\widetilde{p}}\right)$$

feltételnek eleget tevő paraméterekkel

$$a > 1/\widetilde{p} \quad \text{és} \quad b > \frac{1}{\widetilde{q}}.$$

Tegyük fel még, hogy az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x^a \cdot f(x)$$

függvény L^p-beli, az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x^b \cdot \widehat{f}(x)$$

pedig L^q-beli. Ekkor a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \;\; \text{és a} \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)$$

sor egyaránt konvergens és igaz a xv)-beli $(*)$ egyenlőség.

xix) Ha $n = b = 1$ és $f \in L^1$, akkor a xv)-beli φ függvény $L^1[0, 2\pi]$-beli és

$$2\pi \cdot \widehat{\varphi}(k) = \widehat{f}(-k) \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Tegyük fel még, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty,$$

ekkor $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$. Így a Carleson[89]-tétel (ld. 3.2.2.) miatt a

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(j) e^{\imath jx}$$

egyenlőség, azaz a

$$2\pi \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j) e^{-\imath jx}$$

Poisson-formula m.m. $x \in \mathbf{R}$ esetén igaz. Ugyanez elmondható akkor is, ha $n > 1$ és a $\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} ...$ összegzés „négyzetesen ” értendő:

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} ... = \lim_{N \to \infty} \sum_{j_1=-N}^{N} ... \sum_{j_n=-N}^{N} ...$$

xx) Alkalmazzuk a xv)-beli eredményt ($b = 1$ mellett) az f helyett a (ld. 1.3. i) megjegyzés) $\mathcal{T}_t \mathcal{M}_y f$ függvényre ($t, y \in \mathbf{R}^n$) az $x = 0$ helyen, akkor az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} f(t + 2\pi j) e^{\imath \langle y, t+2\pi j \rangle} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \widehat{f}(j + y) e^{-\imath \langle j, t \rangle}.$$

Ha

$$F(x) := f(2\pi x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor

$$\widehat{F}(x) = \int f(2\pi t) e^{\imath \langle x, t \rangle} dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int f(z) e^{\imath \langle (2\pi)^{-1} x, z \rangle} dz = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{f}(x/(2\pi)).$$

Írjunk a Poisson-formula előbbi alakjában a t helyébe $2\pi t$-t, akkor

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F(t + j) e^{2\pi \imath \langle y, t+j \rangle} =$$

[89] Lennart Axel Edvard Carleson (Stockholm, 1928. III. 18. –)

$$= \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \widehat{F}(2\pi(j+y))e^{-2\pi\imath\langle j,t\rangle} = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F^{\circ}(j-y)e^{2\pi\imath\langle j,t\rangle},$$

tehát

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F(t-j)e^{-2\pi\imath\langle y,t-j\rangle} = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F^{\circ}(j+y)e^{-2\pi\imath\langle j,t\rangle}.$$

Innen

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F(t-j)e^{2\pi\imath\langle y,j\rangle} = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F^{\circ}(y+j)e^{2\pi\imath\langle y-j,t\rangle}$$

következik (ld. 2.5. xix) megjegyzés).

Valamilyen $\alpha > 0$ paraméter és $g \in L^1$ (vagy $g \in L^2$) esetén a

$$Z_\alpha g(t,y) := \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} g(t-\alpha j)e^{2\pi\imath\alpha\langle y,j\rangle} \qquad (\text{m.m. } t,y \in \mathbf{R}^n)$$

hozzárendeléssel definiált

$$Z_\alpha : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

leképezés a g függvény ún. *Zak*[90]*-transzformáltja.* A Poisson-formulából tehát a most értelmezett Zak-transzformáltra vonatkozó alábbi azonosságot kaptuk:

$$Z_1 F(t,y) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} F^{\circ}(y+j)e^{2\pi\imath\langle y-j,t\rangle} \qquad (\text{m.m. } t,y \in \mathbf{R}^n).$$

xxi) Legyen $\alpha > -1$ esetén (ld. 1.2.2.3.)

$$\mathcal{K}_\alpha(t) := \frac{1}{t^\alpha} \cdot J_\alpha(t) \qquad (t > 0)$$

és

$$\mathcal{L}_\alpha(t) := t^{\alpha+1} \cdot J_{\alpha+1}(t) \qquad (t > 0).$$

Ekkor tetszőleges $t > 0$ helyen

(1) $$\mathcal{K}'_\alpha(t) = -\frac{1}{t^\alpha} \cdot J_{\alpha+1}(t);$$

(2) $$\mathcal{L}'_\alpha(t) = t^{\alpha+1} \cdot J_\alpha(t);$$

[90] Joshua Zak (Vilniusz, 1929. IX. 26. –)

(3) $$t\cdot J'_\alpha(t) - \alpha\cdot J_\alpha(t) = -t\cdot J_{\alpha+1}(t);$$

(4) $$t\cdot J'_{\alpha+1}(t) + (\alpha+1)\cdot J_{\alpha+1}(t) = t\cdot J_\alpha(t);$$

(5) $$t\cdot J_\alpha(t) + t\cdot J_{\alpha+2}(t) = 2(\alpha+1)\cdot J_{\alpha+1}(t);$$

(6) $$J_\alpha(t) - J_{\alpha+2}(t) = 2\cdot J'_{\alpha+1}(t).$$

Valóban, mivel

$$\mathcal{K}_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\cdot t^{2j}}{2^{2j+\alpha}\cdot j!\cdot \Gamma(j+\alpha+1)} \qquad (t>0),$$

ezért (tagonkénti deriválással)

$$\mathcal{K}'_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j\cdot 2jt^{2j-1}}{2^{2j+\alpha}\cdot j!\cdot \Gamma(j+\alpha+1)} =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}\cdot (2s+2)t^{2s+1}}{2^{2s+2+\alpha}\cdot (s+1)!\cdot \Gamma(s+\alpha+2)} =$$

$$-\frac{1}{t^\alpha}\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s\cdot (t/2)^{2s+\alpha+1}}{s!\cdot \Gamma(s+\alpha+1+1)} = -\frac{1}{t^\alpha}\cdot J_{\alpha+1}(t) \qquad (t>0),$$

ami az (1) állítás.

Hasonlóan kapjuk a (2) egyenlőséget.

Továbbá (a szorzatfüggvény differenciálási „szabálya” és az (1) szerint)

$$\mathcal{K}'_\alpha(t) = -\alpha\cdot t^{-\alpha-1}\cdot J_\alpha(t) + t^{-\alpha}\cdot J'_\alpha(t) = -t^\alpha\cdot J_{\alpha+1}(t) \qquad (t>0),$$

és ugyanígy a (2) alapján

$$\mathcal{L}'_\alpha(t) = (\alpha+1)\cdot t^\alpha\cdot J_{\alpha+1}(t) + t^{\alpha+1}\cdot J'_{\alpha+1}(t) = t^{\alpha+1}\cdot J_\alpha(t) \qquad (t>0).$$

Ha az így kapott egyenlőségeket rendre $t^{\alpha+1}$-gyel, ill. $t^{-\alpha}$-val megszorozzuk, akkor

$$t^{\alpha+1}\cdot \mathcal{K}'_\alpha(t) = -\alpha\cdot J_\alpha(t) + t\cdot J'_\alpha(t) = -t\cdot J_{\alpha+1}(t) \qquad (t>0),$$

azaz a (3) egyenlőség, ill.

$$t^{-\alpha}\cdot \mathcal{L}'_\alpha(t) = (\alpha+1)\cdot J_{\alpha+1}(t) + t\cdot J'_{\alpha+1}(t) = t\cdot J_\alpha(t) \qquad (t>0),$$

tehát a (4) összefüggés következik.

Végül, a (3) egyenlőséget az α helyett az $(\alpha+1)$-re felírva és ezt kivonva a (4)-ből kapjuk az (5)-öt. Ha itt nem „kivonunk”, hanem „összeadunk”, akkor a (6) egyenlőséghez jutunk.

Legyen pl. az (5) formulában $\alpha = -1/2$, ekkor (ld. 1.2.2.3.)

$$J_{3/2}(t) = -J_{-1/2}(t) + \frac{1}{t}\cdot J_{1/2}(t) = \frac{2\sin t}{t\cdot\sqrt{2\pi t}} - \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot \cos t =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot\left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right) \qquad (t>0).$$

Általában is igaz, hogy alkalmas P_α, Q_α racionális függvényekkel

$$J_\alpha(t) = \frac{P_\alpha\cdot\cos t + Q_\alpha\cdot\sin t}{\sqrt{t}} \qquad (t>0),$$

ahol $\alpha \in \{s-1/2 : s\in\mathbf{N}\}$. Ugyanis (a teljes indukcióra hivatkozva[91]) az

$$\alpha := s-1/2 \qquad (1\le s\in\mathbf{N})$$

jelöléssel az (5) egyenlőségből

$$J_{s+1/2}(t) = \frac{2s-1}{t}\cdot J_{s-1/2}(t) - J_{s-3/2}(t) =$$

$$\frac{2s-1}{t}\cdot\frac{P_{s-1/2}(t)\cdot\cos t + Q_{s-1/2}(t)\cdot\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{P_{s-3/2}(t)\cdot\cos t + Q_{s-3/2}(t)\cdot\sin t}{\sqrt{t}} =$$

$$\frac{P_{s+1/2}(t)\cdot\cos t + Q_{s+1/2}(t)\cdot\sin t}{\sqrt{t}} \qquad (t>0),$$

ahol

$$P_{s+1/2}(t) := \frac{2s-1}{t}\cdot P_{s-1/2}(t) - P_{s-3/2}(t) \qquad (t>0)$$

[91]Figyelembe véve, hogy $\alpha=-1/2$ (azaz $s=0$) és $\alpha=1/2$ (azaz $s=1$) esetén a $J_{\pm 1/2}$ Bessel-függvény explicite kiszámolt alakjából „látszik” az állításunk. Ugyanez mondható el az $\alpha=3/2$ (azaz $s=2$) választással is a $J_{3/2}$-re.

és

$$Q_{s+1/2}(t) := \frac{2s-1}{t} \cdot Q_{s-1/2}(t) - Q_{s-3/2}(t) \qquad (t > 0).$$

Itt (az indukciós feltétel miatt) az utóbbi függvények nyilván racionális függvények.

xxii) Mutassuk meg, hogy a $J_\alpha \quad (\alpha > -1)$ Bessel-függvényekre (ld. 1.2.2.3.) tetszőleges $t > 0$ helyen

$$(1) \qquad t^2 \cdot J_\alpha''(t) = (\alpha^2 - \alpha - t^2) \cdot J_\alpha(t) + t \cdot J_{\alpha+1}(t);$$

$$(2) \qquad \int_0^t s \cdot J_0(s)\, ds = t \cdot J_1(t);$$

$$(3) \qquad \int_0^t J_1(s)\, ds = 1 - J_0(t);$$

$$(4) \qquad \int_0^t s^2 \cdot J_1(s)\, ds = 2t \cdot J_1(t) - t^2 \cdot J_0(t);$$

$$(5) \qquad \int_0^t J_3(s)\, ds = 1 - J_2(t) - \frac{2}{t} \cdot J_1(t);$$

$$(6) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} (2l-1) \cdot J_{2l-1}(t) = \frac{t}{2};$$

$$(7) \qquad J_0(t) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(t) = 1;$$

$$(8) \qquad J_0^2(t) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(t) = 1.$$

Valóban, idézzük fel (ld. 1.2.2.3.) a

$$t^2 \cdot J_\alpha''(t) + t \cdot J_\alpha'(t) = (\alpha^2 - t^2) \cdot J_\alpha(t) \qquad (t > 0)$$

és a (ld. xxi))

$$t\cdot J'_\alpha(t) - \alpha\cdot J_\alpha(t) = -t\cdot J_{\alpha+1}(t)$$

egyenlőséget. Következésképpen

$$t^2\cdot J''_\alpha(t) = (\alpha^2 - t^2)\cdot J_\alpha(t) - \alpha\cdot J_\alpha(t) + t\cdot J_{\alpha+1}(t),$$

ami az (1) egyenlőség.

Hasonlóan, a $t \mapsto t\cdot J_1(t)$ leképezés deriváltja:

$$\partial_t(t\cdot J_1(t)) = J_1(t) + t\cdot J'_1(t),$$

ahol (ld. xxi))

$$J_1(t) + t\cdot J'_1(t) = t\cdot J_0(t).$$

Tehát

$$\partial_t(t\cdot J_1(t)) = \partial_t\left(\int_0^t s\cdot J_0(s)\,ds\right).$$

Mivel

$$\lim_{t\to 0}(t\cdot J_1(t)) = \lim_{t\to 0}\int_0^t s\cdot J_0(s)\,ds = 0,$$

ezért a (2) egyenlőség következik.

Analóg módon a (ld. xxi))

$$t\cdot J'_0(t) = -t\cdot J_1(t)$$

egyenlőség alapján

$$\partial_t\left(\int_0^t J_1(s)\,ds\right) = J_1(t) = \partial_t(1 - J_0(t)) = -J'_0(t),$$

amiből máris adódik a (3) állítás.

Ugyanígy következik a (4) és az (5) is.

A (6) bizonyításához emlékeztetünk arra, hogy (ld. 1.2.2.3.)

$$f(y) := e^{\imath t\sin y} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_k(t)e^{\imath k y} \qquad (y \in \mathbf{R}).$$ [92]

[92] Megjegyezzük, hogy $f \in D^\infty$ miatt (és lévén a $\mathcal{J}_k(t)$-k az f függvény Fourier-együtthatói) a Fourier-sorokból jól ismert módon $\lim\limits_{k\to\infty} k^m\cdot \mathcal{J}_k(t) = 0 \quad (m \in \mathbf{N})$.

Mivel

$$f'(y)=\imath t\cdot\cos y\cdot e^{\imath t\sin y}=\frac{\imath t}{2}\cdot\left(e^{\imath y}+e^{-\imath y}\right)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_k(t)e^{\imath ky}=$$

$$\frac{\imath t}{2}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\mathcal{J}_{k-1}(t)+\mathcal{J}_k(t))e^{\imath ky}\qquad(y\in\mathbf{R}),$$

ezért (a de la Vallée Poussin-tétel alapján) egyrészt az

$$\alpha_k:=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f'(y)e^{-\imath ky}dy\qquad(k\in\mathbf{Z})$$

Fourier-együtthatókkal

$$f'(y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k e^{\imath ky}\qquad(y\in\mathbf{R}).$$

Másrészt (parciálisan integrálva és kihasználva az f nyilvánvaló periodicitását a 2π szerint)

$$\alpha_k=\frac{\imath k}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(y)e^{-\imath ky}dy=\imath k\cdot\mathcal{J}_k(t)\qquad(k\in\mathbf{Z}).$$

Így az f-et előállító Fourier-sort „szabad” tagonként deriválni:

$$f'(y)=\imath\cdot te^{\imath t\sin y}\cdot\cos y=\imath\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k\mathcal{J}_k(t)e^{\imath ky}\qquad(y\in\mathbf{R}).$$

Írjuk fel a most kapott egyenlőséget az $y=0$ helyen, amikor

$$t=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k\cdot\mathcal{J}_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\mathcal{J}_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-k)\cdot\mathcal{J}_{-k}(t).$$

Ezért

$$\mathcal{J}_{-k}=(-1)^k\cdot\mathcal{J}_k=(-1)^k\cdot J_k\qquad(k\in\mathbf{N})$$

miatt

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}k(1+(-1)^{k+1})\cdot J_k(t)=2\cdot\sum_{l=1}^{\infty}(2l-1)\cdot J_{2l-1}(t).$$

Alkalmazzuk a (ld. xxi))

$$t\cdot J_{2l-2}(t)+t\cdot J_{2l}(t)=2(2l-1)\cdot J_{2l-1}(t) \qquad (2\le l\in\mathbf{N})$$

egyenlőséget a (6) állításban:

$$\frac{t}{2}=\sum_{l=1}^{\infty}(2l-1)\cdot J_{2l-1}(t)=J_1(t)+\frac{t}{2}\cdot\sum_{l=2}^{\infty}(J_{2l-2}(t)+J_{2l}(t))=$$

$$J_1(t)+\frac{t}{2}\cdot\left(2\cdot\sum_{l=1}^{\infty}J_{2l}(t)-J_2(t)\right)=J_1(t)+t\cdot\sum_{l=1}^{\infty}J_{2l}(t)-\frac{t}{2}\cdot J_2(t).$$

Más szóval

$$2\cdot\sum_{l=1}^{\infty}J_{2l}(t)=1+J_2(t)-\frac{2}{t}\cdot J_1(t).$$

Itt (ld. xxi))

$$t\cdot J_2(t)-2J_1(t)+t\cdot J_0(t)=0,$$

ezzel a (7)-et is beláttuk.

Végül, a (8) igazolásához vegyük az előbb már idézett

$$e^{\imath t\sin y}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_k(t)e^{\imath ky} \qquad (y\in\mathbf{R})$$

Fourier-sorfejtést, ahol a *Parseval*[93]*-egyenlőség*[94] miatt

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_k^2(t)=J_0^2(t)+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}J_k^2(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}|e^{\imath t\sin y}|^2dy=1$$

xxiii) Legyen valamilyen $\delta>0$ paraméter mellett

$$\Phi_\delta(t):=\begin{cases}(1-\|t\|^2)^\delta & (\|t\|\le 1)\\ \\ 0 & (\|t\|>1)\end{cases} \qquad (t\in\mathbf{R}^n)$$

[93] Marc-Antoine Parseval des Chenes (Rosieres-aux-Salines, 1755. IV. 27. – Párizs, 1836. VIII. 16.)

[94] Tekintsük az $(X,\langle,\rangle)$ Hilbert-térben az $(u_k,k\in\mathbf{N})$ teljes ortonormált rendszert. Ekkor tetszőleges $x,z\in X$ esetén $\langle x,z\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\langle x,u_k\rangle\cdot\overline{\langle z,u_k\rangle}$.

a *Bochner–Riesz*[95]*-féle magfüggvény* (ld. még 4.3. ix) megjegyzés). Ekkor

$$\widehat{\Phi}_\delta(x) = \frac{\Gamma(\delta+1)\cdot(2\pi)^{n/2+\delta}}{\pi^\delta\cdot\|x\|^{n/2+\delta}}\cdot J_{n/2+\delta}(\|x\|) \qquad (0\neq x\in\mathbf{R}^n).$$

A definíciója alapján ti. világos, hogy a Φ_δ radiális (ld. 1.2.2.2.):

$$\Phi_\delta(t) = f_0(\|t\|) \qquad (t\in\mathbf{R}^n),$$

ahol

$$f_0(r) := \begin{cases} (1-r^2)^\delta & (0\le r\le 1) \\ 0 & (r>1). \end{cases}$$

Így az 1.2.2.3. pontban mondottakból közvetlenül adódik a $\widehat{\Phi}_\delta$-ra vonatkozó formula. Ti (a $(*)$ (ld. 1.2.2.3.) egyenlőségre tekintettel)

$$\widehat{\Phi}_\delta(x) = (2\pi)^{n/2}\cdot\|x\|^{1-n/2}\cdot\int_0^{+\infty} f_0(s)s^{n/2}\cdot J_{n/2-1}(\|x\|\cdot s)\,ds =$$

$$(2\pi)^{n/2}\cdot\|x\|^{1-n/2}\cdot\int_0^1 (1-s^2)^\delta s^{n/2}\cdot J_{n/2-1}(\|x\|\cdot s)\,ds.$$

Alkalmazzuk a Bessel-függvényekre belátott rekurzív formulát (ld. 1.2.2.3. az ottani jelölésekkel) a $\nu := \delta$ és a $\mu := n/2-1$ paraméterekkel:

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = J_{n/2+\delta}(t) =$$

$$\frac{t^{\delta+1}}{2^\delta\cdot\Gamma(\delta+1)}\cdot\int_0^1 (1-s^2)^\delta s^{n/2}\cdot J_{n/2-1}(ts)ds \qquad (t>0).$$

Így

$$\widehat{\Phi}_\delta(x) = \frac{2^\delta\cdot\Gamma(\delta+1)\cdot(2\pi)^{n/2}\cdot\|x\|^{1-n/2}}{\|x\|^{\delta+1}}\cdot J_{n/2+\delta}(\|x\|),$$

amint azt állítottuk.

Megjegyezzük, hogy a (némi számolás után az $\alpha > -1/2$ paraméterrel adódó)

$$J_\alpha(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cdot\cos(r-\pi\alpha/2-\pi/4) + \mathrm{O}(r^{-3/2}) \qquad (r\to+\infty)$$

[95] Riesz Frigyes (Győr, 1880. I. 22. – Budapest, 1956. II. 28.)

nagyságrendi becslés alapján

$$J_\alpha(r) = \mathrm{O}(1/\sqrt{r}) \qquad (r \to +\infty).$$

Így a $\delta > (n-1)/2$ ún. *kritikus index* esetén $\widehat{\Phi}_\delta \in L^1$. (A következményeket illetően ld. 4.3. ix) megjegyzés.)

2. fejezet

Inverzió

Az előbbiekben értelmeztük integrálható függvények Fourier-transzformáltját. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy a matematikai modellezés alapvető eszköztárába tartoznak a különböző típusú transzformációs módszerek. Ezek közös jellemzője, hogy a szóban forgó feladat matematikai modelljét előzetesen „transzformáljuk”, elérve ezáltal azt, hogy a feladat, ill. a matematikai modell (pl. egyenlet) megoldásának a transzformáltját bizonyos értelemben egyszerűbben tudjuk meghatározni, mint magát a megoldást. Pl. alkalmas transzformációval a szóban forgó (pl.) differenciálegyenlet a megoldást jelentő függvény transzformáltjára vonatkozó algebrai egyenletté alakítható, ami a legtöbbször már (relatíve) egyszerűbben oldható meg. A klasszikus módszerek között említhető a Laplace[1]-transzformáció és a Fourier-transzformáció, amelyek közül az utóbbiról adunk (messze nem teljes) áttekintést.

Az illető gyakorlati probléma matematikai modelljében a (megoldásként) keresett függvény Fourier-transzformáltjának a kiszámítása után természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy ti. hogyan lehet egy függvényt a Fourier-transzformáltjának az ismeretében meghatározni? Ehhez nyilván tisztázni kell a szóban forgó transzformáció és a függvények, a függvény- és algebrai műveletek, valamint az egyéb matematikai eljárások (pl. deriválás, integrálás stb.) széles körének a viszonyát. A most említett „inverz-transzformációnak” (az ún. *Fourier-inverziónak*) a tárgyalásához elöljáróban a Fourier-transzformált integrálhatóságának a kérdéskörét tekintjük át.

Ezt megelőzően mintegy „történeti” háttérként is a legegyszerűbb esetben $(n = 1)$ felvázoljuk azt a gondolatmenetet (Fourier (1822)[2]), ami egyúttal mintegy motivációul

[1] Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 1749. III. 23. – Párizs, 1827. III. 5.)

[2] *Théorie analitique de la chaleur.*

is szolgált a Fourier-transzformáció (inverzió) fogalmához. Tekintsünk ui. mindehhez egy $f \in L^2[-\pi,\pi]$ függvényt és idézzük föl a klasszikus Fourier-sorok elméletének alaptételeként jól ismert *Riesz–Fischer*[3]*-tételt*[4]: az f (komplex) Fourier-sora a $\|.\|_2$ normában az f-hez konvergál, azaz

$$\lim_{m,s\to\infty}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-m}^{s}c_k e^{\imath kx}\right|^2 dx}=0,$$

ahol

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\imath kx}dx \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

Igaz továbbá a Parseval-egyenlőség:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = 2\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2.$$

Ha a l.i.m. szimbólum[5] a $\|.\|_2$ normában való konvergenciát jelenti, akkor formálisan azt írhatjuk, hogy

$$f(x)=\underset{m,s\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=-m}^{s}c_k e^{\imath kx} \qquad (x\in[-\pi,\pi]).$$

„Cseréljük ki” most a $[-\pi,\pi]$ intervallumot a $[-\omega,\omega]$ $(\omega>0)$ intervallumra, akkor $f\in L^2[-\omega,\omega]$ esetén az

$$[-\pi,\pi]\ni x\mapsto f(\omega x/\pi)$$

függvény nyilván $L^2[-\pi,\pi]$-beli. Így

$$f(\omega x/\pi)=\underset{m,s\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=-m}^{s}d_k e^{\imath kx} \qquad (x\in[-\pi,\pi]),$$

[3]Ernst Sigismund Fischer (Bécs, 1875. VII. 12. – Cologne, 1954. XI. 14.)

[4]Legyen az $(X,\langle,\rangle)$ Hilbert-térben adott az $(u_k, k\in\mathbf{N})$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor tetszőleges $z\in X$ esetén $z=\sum_{k=0}^{\infty}\langle z,u_k\rangle\cdot u_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty}|\langle z,u_k\rangle|^2=\|z\|^2=\langle z,z\rangle$. Igaz továbbá, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2<+\infty$ feltételnek eleget tevő bármely $(\alpha_k, k\in\mathbf{N})$ számsorozathoz egyértelműen létezik olyan $z=\sum_{k=0}^{\infty}\langle z,u_k\rangle\cdot u_k\in X$, hogy $\alpha_k=\langle z,u_k\rangle$ $(k\in\mathbf{N})$. Megjegyezzük, hogy ez utóbbi kijelentés (az egyértelműség nélkül) akkor is igaz, ha a szóban forgó ortonormált rendszer nem teljes.

[5]Latinul *limes in medio*.

azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\omega x/\pi)-\sum_{k=-m}^{s}d_k e^{\imath kx}\right|^2 dx =$$

$$\frac{\pi}{\omega}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}\left|f(x)-\sum_{k=-m}^{s}d_k e^{\imath k\pi x/\omega}\right|^2 dx \qquad (m,s\in\mathbf{Z})$$

miatt

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{m,s\to\infty}\sum_{k=-m}^{s}d_k e^{\imath k\pi x/\omega} \qquad (x\in[-\omega,\omega]),$$

ahol

$$d_k:=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(\omega x/\pi)e^{-\imath kx}dx=\frac{1}{2\omega}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}f(x)e^{-\imath k\pi x/\omega}dx \qquad (k\in\mathbf{Z})$$

és

$$2\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|d_k|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\omega x/\pi)|^2\,dx=\frac{\pi}{\omega}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}|f(x)|^2\,dx.$$

Következésképpen

$$\int_{-\omega}^{\omega}|f(x)|^2dx=2\omega\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|d_k|^2.$$

Bevezetve a

$$g_\omega(y):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}f(x)e^{-\imath yx}dx \qquad (y\in\mathbf{R})$$

jelölést a következőket mondhatjuk:

$$d_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot g_\omega(k\pi/\omega) \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

Tehát a fentiek szerint

$$(*) \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\operatorname*{l.i.m.}_{m,s\to\infty}\sum_{k=-m}^{s}\frac{\pi}{\omega}\cdot g_\omega(k\pi/\omega)e^{\imath k\pi x/\omega} \qquad (x\in[-\omega,\omega])$$

és

$$\int_{-\omega}^{\omega}|f(x)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{\omega}\cdot|g_\omega(k\pi/\omega)|^2.$$

Tegyük most fel, hogy „valójában” egy olyan (Lebesgue-)integrálható

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvényről van szó, amelyre

$$\int |f(x)|^2 dx < +\infty$$

(röviden $f \in L^1 \cap L^2$) és az előbbiekben szereplő f helyett írjuk az $f_{|[-\omega,\omega]}$ (nyilván $L^2[-\omega,\omega]$-beli) (leszűkített) függvényeket tetszőleges $\omega > 0$ mellett. Legyen továbbá

$$g(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f(x) e^{-\imath yx} dx \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Ekkor – azt is megkövetelve, hogy $g \in L^1$ – a $(*)$ egyenlőség jobb oldalán[6] minden ω-ra egy integrál közelítő összeg áll:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\omega} \cdot g_\omega(k\pi/\omega) e^{\imath k\pi x/\omega} \qquad (x \in [-\omega,\omega]).$$

Ezért (tisztán formális meggondolással) az $\omega \to +\infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int g(y) e^{\imath yx} dx \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |g(y)|^2 dy.$$

Hangsúlyozni kell, hogy az előzőekben minden bizonyító erő nélküli formális manipulációról van szó. Ugyanakkor „természetes módon” jelent meg az f Fourier-transzformáltja, a g függvény (ld. 2.5. xx) megjegyzés), és az f-et (a g segítségével lényegében szintén Fourier-transzformáltként) előállító inverziós formula.

[6]Egy pillanatra a $\underset{m,s\to\infty}{\text{l.i.m.}}$ mellett a pontonkénti $\lim\limits_{m,s\to\infty}$ konvergenciát is feltételezve.

2.1. A Fourier-transzformált integrálhatósága

Az eléggé nyilvánvaló, hogy egy $f \in L^1$ függvény $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltja nem feltétlenül integrálható függvény. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha mondjuk kiszámítjuk az $f := \chi_{[-1,1]}$ függvény esetén $(n = 1)$ az $\widehat{f}$ transzformáltat: ekkor ui. (ld. 1.2.2.)

$$\widehat{f}(x) = \int_{-1}^{1} e^{\imath xt}\, dt = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{\imath x} = \frac{2 \sin x}{x} \qquad (x \in \mathbf{R}),^{7}$$

ahol az ismert formula szerint

$$\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0} := \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Ugyanakkor a Fourier-transzformált integrálhatósága több szempontból is lényeges. Számos kritérium ismert egy $f \in L^1$ függvényt illetően arra, hogy $\widehat{f} \in L^1$ is igaz legyen. A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk, abban az esetben, amikor $n = 1$ és $f \in L^1 \cap L^2$.

Vegyük észre először is azt, hogy az

$$\mathbf{R}_z := \{t \in \mathbf{R} : |t| > z\} \qquad (z > 0)$$

jelöléssel a Fubini-tétel és a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\|\widehat{f}\|_1 = \int |\widehat{f}(t)|\, dt = \int \left(\int_0^{|t|} \frac{dx}{|t|} \right) \cdot |\widehat{f}(t)|\, dt =$$

$$\int \left(\int_0^{+\infty} \frac{\chi_{[0,|t|]}(x)}{|t|}\, dx \right) \cdot |\widehat{f}(t)|\, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int \frac{\chi_{[0,|t|]}(x)}{|t|} \cdot |\widehat{f}(t)|\, dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbf{R}_x} \frac{|\widehat{f}(t)|}{|t|}\, dt \right) dx \le$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} \frac{1}{t^2}\, dt} \right) dx =$$

---

[7] A $\operatorname{sinc} x := x^{-1} \cdot \sin x \quad (x \in \mathbf{R})$ (vagy „normált” változatban $\operatorname{sinc} x := (\pi x)^{-1} \cdot \sin(\pi x) \quad (x \in \mathbf{R})$) definícióval értelmezett sinc függvény központi szerepet játszik a jel- és képfeldolgozásban.

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx \leq$$

$$\sqrt{2} \cdot \|\widehat{f}\|_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_{1/x}} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx =$$

$$2\sqrt{\pi} \cdot \|f\|_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_{1/x}} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx.$$

Tehát

$$f \in L^1 \cap L^2,\ \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_{1/x}} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx < +\infty \Longrightarrow \widehat{f} \in L^1.$$

Az előbbi következtetésben szereplő feltétel vizsgálatához legyen

$$U_h f(x) := \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\, dt \qquad (f \in L^1,\ x \in \mathbf{R},\ h > 0)$$

(elsőrendű *Sztyleklov*[8]*-függvény*). Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $U_h f \in L^1$:

$$\int |U_h f(x)|\, dx \leq \frac{1}{h} \cdot \int \left(\int_{-h/2}^{h/2} |f(x+t)|\, dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int |f(x+t)|\, dx \right) dt = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \|f\|_1\, dt = \|f\|_1 < +\infty.$$

Ha most

$$W_h f := U_h(U_h f) \qquad (f \in L^1,\ h > 0)$$

(másodrendű *Sztyleklov-függvény*), akkor

$$W_h f(x) = \frac{1}{h} \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} U_h f(t)\, dt =$$

$$\frac{1}{h} \cdot \int_0^{x+h/2} U_h f(t)\, dt + \frac{1}{h} \cdot \int_{x-h/2}^0 U_h f(t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

[8] Vlagyimir Andrejevics Sztyeklov (Nyizsnyij Novgorod, 1864. I. 9. – Gaszpra, 1926. V. 30.)

Ezért az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló ismert Lebesgue-tétel értelmében $W_h f \in D$ és m.m. $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$(W_h f)'(x) = \frac{1}{h} \cdot (U_h f(x+h/2) - U_h f(x-h/2)) = \frac{1}{h} \cdot U_h(\Delta_h f)(x),$$

ahol (ld. 1.3. vii) megjegyzés)

$$\Delta_h f(z) := f(z+h/2) - f(z-h/2) \qquad (z \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy[9]

$$\int \Delta_h f(z)\, dz = 0,$$

így – bevezetve a

$$\Delta_h^2 f(t) := \Delta_h f(t+h/2) - \Delta_h f(t-h/2) \qquad (f \in L^1,\, t \in \mathbf{R},\, h > 0)$$

szimbólumot – az előbbi szereplőkkel

$$(W_h f)'(x) = \frac{1}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta_h f(x+t)\, dt = \frac{1}{h^2} \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} \Delta_h f(t)\, dt =$$

$$\frac{1}{h^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{x+h/2} \Delta_h f(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x-h/2} \Delta_h f(t)\, dt \right) =$$

$$\frac{1}{h^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{x+h/2} \Delta_h f(t)\, dt + \int_{x-h/2}^{+\infty} \Delta_h f(t)\, dt \right) =$$

$$\frac{1}{h^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{x} \Delta_h f(t+h/2)\, dt + \int_{x}^{+\infty} \Delta_h f(t-h/2)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{x} \Delta_h f(t+h/2)\, dt - \int_{-\infty}^{x} \Delta_h f(t-h/2)\, dt \right) =$$

$$\frac{1}{h^2} \cdot \int_{-\infty}^{x} \Delta_h^2 f(t)\, dt.$$

A fentiekből már nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} W_h f(x) = \frac{1}{h} \cdot \lim_{x \to +\infty} \int_{x-h/2}^{x+h/2} U_h(t)\, dt = 0,$$

[9] A Lebesgue-integrál eltolás-invarianciáját figyelembe véve.

és hasonlóan

$$\lim_{x\to+\infty} (W_h f)'(x) = \frac{1}{h^2}\cdot \int (\Delta_h f(t+h/2) - \Delta_h f(t-h/2))\,dt =$$

$$\frac{1}{h^2}\cdot \left(\int \Delta_h f(t)\,dt - \int \Delta_h f(t)\,dt \right) = 0.$$

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $f \in L^1$ és $h > 0$ választással

$$W_h f(x) = \frac{1}{h}\cdot \int_{-h}^{h} f(x+t)(1-|t|/h)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

továbbá

$$W_h f(x) - f(x) = \frac{1}{h}\cdot \int_0^h \Delta_t^2 f(x)(1-t/h)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az első egyenlőséghez ti. legyen az F az f integrálfüggvénye[10], ekkor

$$U_h f(x) = \frac{F(x+h/2) - F(x-h/2)}{h},$$

így

$$W_h f(x) = \frac{1}{h^2}\cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(F(x+t+h/2) - F(x+t-h/2)\right)\,dt =$$

$$\frac{1}{h^2}\cdot \left(\int_0^h F(x+t)\,dt - \int_{-h}^0 F(x+t)\,dt \right) = \frac{1}{h^2}\cdot \int_{-h}^{h} F(x+t)\operatorname{sign} t\,dt.$$

Innen parciális integrálással oda jutunk, hogy

$$W_h f(x) = \frac{1}{h^2}\cdot \left([F(x+t)(|t|-h)]_{-h}^{h} - \int_{-h}^{h} f(x+t)(|t|-h)\,dt \right) =$$

$$\frac{1}{h}\cdot \int_{-h}^{h} f(x+t)(1-|t|/h)\,dt,$$

ami az első egyenlőség.

A második igazolásához vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{h}\cdot \int_0^h (1-t/h)\,dt = \frac{1}{2},$$

[10] Tehát $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in \mathbf{R})$.

amiből (és az első egyenlőségből)

$$W_h f(x) - f(x) = \frac{1}{h}\cdot \int_{-h}^{h} f(x+t)(1-|t|/h)\,dt - f(x) =$$

$$\frac{1}{h}\cdot \int_0^h (f(x+t)+f(x-t)(1-t/h)\,dt - \frac{1}{h}\cdot \int_0^h 2f(x)(1-t/h)\,dt =$$

$$\frac{1}{h}\cdot \int_0^h \Delta_t^2 f(x)(1-t/h)\,dt,$$

ahogyan állítottuk.

Számítsuk ki a $W_h f \quad (h>0)$ függvény Fourier-transzformáltját. A derivált és a Fourier-transzformált kapcsolatáról szóló formulákat alkalmazva (ld. 2.5. xii) megjegyzés és 1.2.4.) parciális integrálással

$$\widehat{W_h f}(x) = \frac{\imath}{x}\cdot (\widehat{W_h f})'(x) = \frac{\imath}{x}\cdot \int (W_h f)'(t) e^{\imath t x} dt =$$

$$-\frac{1}{x^2}\cdot \int (W_h f)''(t) e^{\imath t x} dt = -\frac{1}{x^2 h^2}\cdot \int \Delta_h^2 f(t) e^{\imath t x} dt =$$

$$-\frac{1}{x^2 h^2}\cdot \int \widehat{\Delta_h^2 f}(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Az előbbi észrevételekre, a $\|.\|_2$ normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségre és a Fourier-transzformálttal kapcsolatos Plancherel-tételre (ld. 1.2.3.) hivatkozva azt mondhatjuk, hogy a $0 < x \in \mathbf{R}$ helyeken

$$\sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} \left|\widehat{f}(t) - \widehat{W_{1/x} f}(t)\right|^2 dt} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} \left|\widehat{W_{1/x} f}(t)\right|^2 dt} =: A + B,$$

ahol az

$$\omega_2(f,\delta) := \sup_{|u|\leq\delta} \|\Delta_u^2 f\|_2 \qquad (\delta \geq 0)$$

jelöléssel

$$B = \sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} \frac{x^4}{t^4}\cdot \left|(\Delta_{1/x}^2 f)^\wedge(t)\right|^2 dt} \leq \sqrt{\int \left|(\Delta_{1/x}^2 f)^\wedge(t)\right|^2 dt} =$$

$$\sqrt{2\pi}\cdot \sqrt{\int \left|\Delta_{1/x}^2 f(t)\right|^2 dt} \leq \sqrt{2\pi}\cdot \omega_2(f,1/x) \qquad (f \in L^1 \cap L^2).$$

Az A vizsgálatához használjuk fel az alábbi egyenlőséget (ld. fent):

$$W_{1/x}f(t) - f(t) = \int_0^{1/x} (x - x^2u)\cdot \Delta_u^2 f(t)\, du \qquad (t \in \mathbf{R},\ x > 0).$$

Ekkor az előbb már említett Plancherel-tételt ismét alkalmazva a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$A \leq \sqrt{2\pi}\cdot \sqrt{\int \left|f(t) - W_{1/x}f(t)\right|^2 dt} =$$

$$\sqrt{2\pi}\cdot \sqrt{\int \left(\int_0^{1/x} (x - x^2u)\cdot \Delta_u^2 f(t)\, du\right)^2 dt} =$$

$$\sqrt{2\pi}\cdot \sqrt{\int_0^{1/x} \|\Delta_u^2 f\|_2^2\cdot (x - x^2u)\, du} \leq \sqrt{\pi}\cdot \omega_2(f, 1/x).$$

Összefoglalva a fentieket így azt mondhatjuk, hogy alkalmas $C > 0$ (abszolút) konstanssal[11]

$$\sqrt{\int_{\mathbf{R}_x} |\widehat{f}(t)|^2 dt} \leq C\cdot \omega_2(f, 1/x) \qquad (f \in L^1 \cap L^2, x > 0).$$

Ezért egy korábbi becslésünket folytatva az adódik, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}\cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}_{1/x}} |\widehat{f}(t)|^2\, dt}\, dx \leq \frac{C}{\sqrt{2}}\cdot \int_0^1 \frac{\omega_2(f, x)}{x^{3/2}} dx.$$

Végül tehát az alábbiakat láttuk be:

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq 2\sqrt{\pi}\cdot \|f\|_2 + \frac{C}{\sqrt{2}}\cdot \int_0^1 \frac{\omega_2(f, x)}{x^{3/2}} dx \qquad (f \in L^1 \cap L^2),$$

más szóval a szóban forgó f függvényt illetően az

$$\int_0^1 \frac{\omega_2(f, x)}{x^{3/2}} dx < +\infty$$

[11] Pl. $C := (\sqrt{2} + 1)\cdot \sqrt{\pi}$.

feltétel elegendő ahhoz, hogy az $\widehat{f} \in L^1$ tartalmazás teljesüljön.

Legyen $\alpha > 0$ és

$$\mathrm{Lip}\,(\alpha, 2) := \{f \in L^2 : \omega_2(f, \delta) = \mathrm{O}\,(\delta^\alpha) \ \ (\delta \to 0)\}.$$

Ekkor

$$f \in L^1 \cap \mathrm{Lip}\,(\alpha, 2),\ \alpha > \frac{1}{2}$$

esetén alkalmas $C_\alpha > 0$ konstanssal

$$\int_0^1 \frac{\omega_2(f, x)}{x^{3/2}} dx \leq C_\alpha \cdot \int_0^1 x^{\alpha - 3/2} dx = \frac{C_\alpha}{\alpha - 1/2} < +\infty,$$

tehát az előbbiek szerint $\widehat{f} \in L^1$.

Az $\widehat{f} \in L^1$ kérdés szempontjából (is) különösen fontosak a kompakt tartójú folytonos függvények[12]. Legyen $\varphi \in C[0, 1]$, $\varphi(1) = 0$ és terjesszük ki a φ függvényt az $\mathbf{R}$-re a következőképpen:

$$f(x) := \begin{cases} \varphi(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ \\ 0 & (x > 1) \\ \\ f(-x) & (x < 0). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kompakt tartójú[13], páros, folytonos függvény, speciálisan $f \in L^1 \cap L^2$. Legyen

$$\omega(f, \delta) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in \mathbf{R}, |x - t| \leq \delta\} \qquad (\delta \geq 0).^{14}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\omega_2(f, \delta) \leq 2\sqrt{3} \cdot \omega(f, \delta) \qquad (\delta \geq 0).$$

Valóban, a $\|.\|_2$ normára már idézett háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|\Delta_t^2 f\|_2 = \sqrt{\int |\Delta_t^2 f(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int |\Delta_t f(x + t/2) - \Delta_t f(x - t/2)|^2\, dx} \leq$$

[12]Amikor is (a folytonosság mellett) az illető f függvény $\mathrm{supp}\, f := \overline{\{x \in \mathbf{R} : f(x) \neq 0\}}$ *tartója* kompakt. (Itt a $\overline{\{...\}}$ felülhúzás az $\mathbf{R}$ topológiája szerinti lezárást jelenti.)

[13]$\mathrm{supp}\, f \subset [-1, 1]$.

[14]Az f függvény *folytonossági modulusa.*

$$\leq \sqrt{\int |\Delta_t f(x+t/2)|^2\,dx} + \sqrt{\int |\Delta_t f(x-t/2)|^2\,dx} = 2\cdot \|\Delta_t f\|_2 \qquad (t \geq 0),$$

ahol az

$$I_1 := \int_0^{t/2} |f(x+t/2) - f(t/2-x)|^2\,dx,$$

$$I_2 := \int_{t/2}^{1-t/2} |f(x+t/2) - f(x-t/2)|^2\,dx,$$

$$I_3 := \int_{1-t/2}^{1+t/2} |f(1) - f(x-t/2)|^2\,dx$$

jelölésekkel

$$\|\Delta_t f\|_2^2 = 2\cdot \int_0^{+\infty} |\Delta_t f(x)|^2\,dx = 2(I_1 + I_2 + I_3) \leq$$

$$2\cdot \left(\int_0^{t/2} \omega^2(f, 2x)\,dx + \int_{t/2}^{1-t/2} \omega^2(f,t)\,dx + \int_{1-t/2}^{1+t/2} \omega^2(f, 1-x+t/2)\,dx \right) \leq$$

$$2\cdot \int_0^{1+t/2} \omega^2(f,t)\,dx \leq 3\cdot \omega^2(f,t).$$

Következésképpen

$$\|\Delta_t f\|_2 \leq \sqrt{3}\cdot \omega(f,t) \qquad (t \geq 0),$$

amiből az állításunk már következik.

Ha tehát (ld. fent)

$$\omega(f,\delta) = \mathrm{O}\left(\delta^\alpha\right) \qquad (\delta \to 0)$$

és $\alpha > 1/2$, akkor $\widehat{f} \in L^1$.

2.2. Inverziós formula

Belátjuk, hogy ha az $f \in L^1$ függvényre egyúttal $\widehat{f} \in L^1$, akkor igaz az alábbi *inverziós formula*:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).^{15}$$

Tekintsük ui. (ld. 1.3. ii) megjegyzés)[16] az

$$F_N(t) := \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N) \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\, 0 < N \in \mathbf{N})$$

függvénysorozatot, ahol az $x \in \mathbf{R}^n$ rögzített. Ekkor minden $t \in \mathbf{R}^n$ helyen

$$\lim_{N\to\infty} F_N(t) = \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle},$$

továbbá

$$|F_N| \le |\widehat{f}| \in L^1 \qquad (0 < N \in \mathbf{N})$$

miatt alkalmazható a Lebesgue-féle konvergencia tétel, miszerint

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt = \lim_{N\to\infty} \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt.$$

Lássuk be, hogy

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt = N^n \cdot \int f(x+t) h(Nt)\, dt \qquad (0 < N \in \mathbf{N}).$$

Valóban (ld. 1.3. i) megjegyzés),

$$\widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} = \widehat{\mathcal{T}_x f}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n),$$

valamint a

$$H_N(t) := h(t/N) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel

$$\widehat{H_N}(y) = \int h(t/N) e^{\imath\langle y,t\rangle} dt = N^n \cdot \int h(z) e^{\imath\langle y,Nz\rangle} dz =$$

---

[15] Mivel $\widehat{f} \in L^1$ miatt az $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto (2\pi)^{-n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt$ leképezés folytonos, ezért – az f függvényt esetleg egy nulla (Lebesgue-) mértékű halmazon megváltoztatva – az előbbi egyenlőség tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ esetén fennáll. Mindennek a kiterjesztését $f \in L^p$ $(1 \le p \le 2)$ esetén ld. 4.2.2.

[16] Emlékeztetőül: $h(y) := e^{-\|y\|^2/2}$ $(y \in \mathbf{R}^n)$.

$$= N^n \cdot \int h(z) e^{\imath \langle Ny, z\rangle} dz = N^n \cdot \widehat{h}(Ny) = N^n \cdot (2\pi)^{n/2} \cdot h(Ny) \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt = \int \widehat{\mathcal{T}_x f}(t) H_N(t)\, dt =$$

$$\int \mathcal{T}_x f(t) \widehat{H_N}(t)\, dt = (2\pi)^{n/2} \cdot N^n \cdot \int f(x+t) h(Nt)\, dt.$$

Mivel

$$N^n \cdot \int h(Nt)\, dt = \int h(t)\, dt = \widehat{h}(0) = (2\pi)^{n/2},$$

ezért

$$\delta_N(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt - f(x) =$$

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int (f(x+t) - f(x))\, h(Nt)\, dt.$$

A Fubini-tételt alkalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy

$$\|\delta_N\|_1 \le \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int \left(\int |f(x+t) - f(x|)\, h(Nt)\, dt \right) dx =$$

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int h(Nt) \cdot \|\mathcal{T}_t f - f\|_1\, dt = \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \left(\int_{G_r} \cdots + \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} \cdots \right),$$

ahol

$$G_r := \{t \in \mathbf{R}^n : \|t\| \le r\} \qquad (r \ge 0).$$

Világos, hogy

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{G_r} h(Nt) \cdot \|\mathcal{T}_t f - f\|_1\, dt \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \|h\|_1 \cdot \sup_{\|t\|_2 \le r} \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 =$$

$$\sup_{\|t\|_2 \le r} \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 \to 0 \qquad (r \to 0).$$

Továbbá

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} h(Nt) \cdot \|\mathcal{T}_t f - f\|_1\, dt \le \frac{2 \cdot \|f\|_1 \cdot N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} h(Nt)\, dt =$$

$$= \frac{2\cdot \|f\|_1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_{Nr}} h(t)\, dt \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

A fentiekből már nyilván következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \|\delta_N\|_1 = 0,$$

így egyúttal egy alkalmas $(N_k, k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{N_k}(x) = 0$$

is igaz. Láttuk ugyanakkor, hogy az $x \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$\lim_{N\to\infty} \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt = \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt,$$

más szóval

$$\lim_{N\to\infty} \delta_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle}\, dt - f(x).$$

Így m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ pontban

$$0 = \lim_{k\to\infty} \delta_{N_k}(x) = \lim_{N\to\infty} \delta_N(x)$$

miatt valóban

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle}\, dt.$$

2.3. Schwartz-osztály

Adott $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett vezessük be a következő (L. Schwartz[17]-ról elnevezett) függvényosztályt (ld. 1.2.4.):

$$\mathcal{S} := \{f \in D^\infty(\mathbf{R}^n) : \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^k \cdot \partial^j f(x)| < +\infty \ \ (k, j \in \mathbf{N}^n)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{K}(\mathbf{R}^n) \cap D^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S} \subset L^\infty.$$[18]

[17] Laurent Moise Schwartz (Párizs, 1915. III. 5. – Párizs, 2002. VII. 4.)

[18] Emlékeztetőül: a $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ szimbólum jelöli az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát.

Azt sem nehéz belátni, hogy $\mathcal{S} \subset L^1$. Világos, hogy az $\mathcal{S}$ lineáris altér a $D^\infty(\mathbf{R}^n)$ vektortérben, továbbá

$$f \in \mathcal{S} \iff f \in D^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \text{és} \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\partial^k f_j(x)| < +\infty \qquad (k, j \in \mathbf{N}^n),$$

ahol

$$f_j(x) := x^j \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Innen rögtön következik az is, hogy $f \in \mathcal{S}$ esetén

$$\partial^j f \in \mathcal{S} \qquad (j \in \mathbf{N}^n)$$

és bármely n-változós valós P polinomra $P \cdot f \in \mathcal{S}$. Végül említsünk meg még egy meglehetősen nyilvánvaló tényt, miszerint az $\mathcal{S}$ függvényosztály zárt a szokásos függvényszorzásra nézve, azaz tetszőleges $f, g \in \mathcal{S}$ függvényekre $f \cdot g \in \mathcal{S}$.

Tetszőleges $f \in \mathcal{S}$, $k, j \in \mathbf{N}^n$ és $x \in \mathbf{R}^n$ esetén (ld. 1.2.4.)

$$x^k \cdot \partial^j \widehat{f}(x) = \imath^{|j|} \cdot x^k \cdot \widehat{f_j}(x) = \imath^{|j|+|k|} \cdot \widehat{\partial^k f_j}(x).$$

Ebből többek között az is adódik, hogy minden $f \in \mathcal{S}$ függvényre $\widehat{f} \in D^\infty(\mathbf{R}^n)$, ui. a

$$\widehat{\partial^k f_j} \qquad (k, j \in \mathbf{N}^n)$$

függvények valamennyien folytonosak.

Az $\mathcal{S}$ függvényosztályban vezessük be a következő jelölést: egy $f \in \mathcal{S}$ függvény és a $k, j \in \mathbf{N}^n$ indexek esetén legyen

$$\|f\|_{k,j} := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^k \cdot \partial^j f(x)|.$$

A fentiek szerint minden itt szereplő paraméterre $\|f\|_{k,j} < +\infty$, továbbá a $\|.\|_{k,j}$ félnorma az $\mathcal{S}$-en. Mivel az előbbi f-re, k-ra és j-re egy alkalmas $C_{k,j} > 0$ konstanssal minden $x \in \mathbf{R}^n$ pontban

$$\left| x^k \cdot \partial^j \widehat{f}(x) \right| = \left| \int e^{\imath x t} \cdot \partial^k f_j(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int \left| \partial^k f_j(t) \right| dt \leq C_{k,j} \cdot \int \frac{1}{(1 + \|t\|)^{2n}}\, dt < +\infty,$$

ezért

$$\|\widehat{f}\|_{k,j} < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Más szóval: ha

$$\widehat{\mathcal{S}} := \{\widehat{f} \in C(\mathbf{R}^n) : f \in \mathcal{S}\},$$

akkor $\widehat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$.

Ha pl. (ld. 1.3. ii) megjegyzés)

$$h(x) := e^{-\|x\|^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor $h \in \mathcal{S}$ és $\widehat{h} = (2\pi)^{n/2} \cdot h$.

Legyen valamilyen $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ függvényre

$$\widetilde{g}(x) := g(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor bármely $f \in \mathcal{S}$ esetén az inverziós formulával (ld. 2.2.) kapcsolatban látottakkal analóg módon következik, hogy

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^n \cdot \widetilde{f}.$$

Az nyilvánvaló, hogy $\widetilde{f} \in \mathcal{S}$, így az $F := \widehat{\widehat{f}}$ jelöléssel

$$\widehat{F} = (2\pi)^n \cdot \widetilde{\widetilde{f}} = (2\pi)^n \cdot f.$$

A $g := (2\pi)^{-n} \cdot F$ választással egy olyan $\mathcal{S}$-beli függvényt kaptunk, amelyre $\widehat{g} = f$. Mindez azt jelenti, hogy $\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. Mivel a Fourier-transzformáció injektív, ezért az

$$\mathcal{S} \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathcal{S}$$

leképezés bijekció. A fentiek szerint könnyen megadható ennek a bijekciónak az inverze is, ui. bármely $f \in \mathcal{S}$ és $x \in \mathbf{R}^n$ választással

$$(*) \qquad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) \cdot e^{-\imath xt} dt.$$

Belátható továbbá, hogy tetszőleges $f, h \in \mathcal{S}$ függvényekre (ld. 1.1.)

$$\widehat{f \cdot h} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{f} * \widehat{h}.$$

Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha $f, \widehat{f}, h, \widehat{h} \in L^1$, vagy $f, h \in L^2$.

Világos (ld. 2.3.), hogy (ld. 2.5. ii) megjegyzés) $\mathcal{S} \subset C_0$. Ha $1 \leq p < +\infty$, akkor $\mathcal{S} \subset L^p$. Legyen ui. $\varphi \in \mathcal{S}$ és $\alpha := \|\varphi\|_\infty$, valamint

$$\beta := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \|x\|^{2n} \cdot |\varphi(x)|.$$

Ekkor

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{G_1} |\varphi(x)|^p dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_1} |\varphi(x)|^p dx \leq$$

$$\alpha^p \cdot |G_1| + \beta^p \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_1} \|x\|^{-2np} dx < +\infty.$$ [19]

A fentebb definiált $\|.\|_{k,j}$ $(k, j \in \mathbf{N}^n)$ félnormák a

$$\widetilde{\rho}_{k,j}(u, v) := \|u - v\|_{k,j} \qquad (u, v \in \mathcal{S})$$

félmetrikákat generálják. Rendezzük ezeket egy $\widetilde{\rho}_0, \widetilde{\rho}_1, \ldots$ sorozatba és legyen

$$\rho_l := \frac{\widetilde{\rho}_l}{1 + \widetilde{\rho}_l} \qquad (l \in \mathbf{N}),$$

továbbá

$$\rho := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} \cdot \rho_l.$$

Ekkor a ρ metrika az $\mathcal{S}$-en és könnyen beláthatóan az $(\mathcal{S}, \rho)$ egy teljes szeparábilis metrikus tér, ami mindenütt sűrű az L^p-ben $(1 \leq p < +\infty)$. Világos az is, hogy $u_l, u \in \mathcal{S}$ $(l \in \mathbf{N})$ esetén a

$$\rho(u_l, u) \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

konvergencia azzal ekvivalens, hogy minden $k, j \in \mathbf{N}^n$ multiindexre

$$\|u_l - u\|_{k,j} \to 0 \qquad (l \to \infty).$$

Továbbá a

$$\mathcal{S}^2 \ni (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + c\psi \qquad (c \in \mathbf{C})$$

leképezés folytonos (az $\mathcal{S}^2$-en a ρ-ból a „szokásos” módon származtatott szorzatmetrika értelmében). Ezért az $\mathcal{S}$ topologikus vektortér. Azt sem nehéz belátni, hogy az

$$\mathcal{S} \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathcal{S}$$

leképezés homeomorfizmus az $\mathcal{S}$-ről az $\mathcal{S}$-re.

[19] $|G_1|$ a $G_1 := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ gömb (Lebesgue-)mértéke.

2.4. Összegzések

A továbbiakban a szummációk (összegzések) egy olyan speciális osztályát vizsgáljuk, amelyeket egy-egy alkalmasan választott integrálható függvény határoz meg. Látni fogjuk, hogy a szóban forgó szummációk „hatékonysága” (pl. az $\|.\|_1$ normában való konvergenciája) szempontjából kiemelt szerep jut a generáló függvény Fourier-transzformáltjának.

2.4.1. A θ-szummáció fogalma

Legyen $n = 1$ és $g \in L^1$, valamint

$$Pg(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t + 2k\pi) \qquad (t \in [-\pi, \pi])$$

(a g függvény ún. *periodizáltja*). Mivel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(t + 2k\pi)|\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t + 2k\pi)|\, dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |g(y)|\, dy = \int |g(y)|\, dy < +\infty,$$

ezért a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t + 2k\pi)$$

végtelen sor m.m. $t \in [-\pi, \pi]$ helyen abszolút konvergens és

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Pg(t)|\, dt \le \|g\|_1 < +\infty.$$

Így $Pg \in L^1[-\pi, \pi]$ és (a Lebesgue-tétel miatt)

$$\int_{-\pi}^{\pi} Pg(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(t + 2k\pi)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} g(y)\, dy = \int g(y)\, dy.$$

A Pg függvény nyilván kiterjeszthető az $\mathbf{R}$-re a 2π szerint periodikusan. Általában, ha $f \in L^1[-\pi,\pi]$, akkor terjesszük ki az f-et az $\mathbf{R}$-re a 2π szerint periodikusan (a kiterjesztett függvényt is f-fel jelöljük). A $*$ konvolúcióval (ld. 1.1.) vezessük be az

$$f \star g := f * (Pg)$$

„műveletet”, ekkor

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t+2k\pi)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f \star g(x)|\,dx \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx \right) \cdot |g(t+2k\pi)|\,dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t+2k\pi)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \cdot \int |g(t)|\,dt.$$

Tehát

$$f \star g \in L^1[-\pi,\pi]$$

és

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Ha pl.

$$f(t) := e_j(t) := e^{\imath jt} \qquad (j \in \mathbf{Z},\ t \in [-\pi,\pi]),$$

akkor

$$f \star g(x) = e_j \star g(x) = e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\imath jt} \cdot g(t+2k\pi)\,dt =$$

$$= e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\imath j(t+2k\pi)} \cdot g(t+2k\pi)\,dt =$$

$$e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} P(ge_{-j})(t)\,dt = e^{\imath jx} \cdot \int g(t)e^{-\imath jt}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Legyen most a $\theta \in L^1 \cap C$ (integrálható, folytonos) függvény olyan, hogy $\widehat{\theta} \in L^1$ és a $0 < m \in \mathbf{N}$ indexszel

$$g(t) := \theta_m(t) := \frac{m}{2\pi} \cdot \widehat{\theta}(mt) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az előbbiek és az inverziós formula (ld. 2.2.) szerint

$$e_j \star \theta_m(x) = e^{\imath jx}\cdot \frac{m}{2\pi}\cdot \int \widehat{\theta}(mt) e^{-\imath jt}\, dt =$$

$$e^{\imath jx}\cdot \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{\theta}(t) e^{-\imath jt/m} dt = e^{\imath jx}\cdot \theta(j/m) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Definiáljuk ekkor a

$$T_m^\theta,\, \sigma_m^\theta \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátorokat a következőképpen:

$$T_m^\theta f := T_m^\theta(f) := f \star \theta_m \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi])$$

és

$$\sigma_m^\theta f := \sigma_m^\theta(f) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m) c_k(f) e_k \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi]),$$

ahol

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath kt} dt \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az f függvény k-adik Fourier-együtthatója. A fent mondottakból következően bármelyik $f \in L^1[-\pi,\pi]$ függvényre

$$\|T_m^\theta f\|_1 = \|f \star \theta_m\|_1 \le \|f\|_1\cdot \|\theta_m\|_1 = \frac{m\cdot \|f\|_1}{2\pi}\cdot \int |\widehat{\theta}(mt)|\, dt =$$

$$\frac{\|f\|_1}{2\pi}\cdot \int |\widehat{\theta}(t)|\, dt = \frac{\|\widehat{\theta}\|_1}{2\pi}\cdot \|f\|_1,$$

így a

$$T_m^\theta : L^1[-\pi,\pi] \to L^1[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

(nyilván lineáris) operátorok (egyenletesen) korlátos lineáris operátorok.[20] Hasonlóan,

$$\|\sigma_m^\theta f\|_1 \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)|\cdot |c_k(f)|\cdot \|e_k\|_1 \le \|f\|_1\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)|,$$

[20] Tehát van olyan $q > 0$ konstans, hogy $\|T_m^\theta f\|_1 \le q\cdot \|f\|_1 \quad (f \in L^1[-\pi,\pi],\, 0 < m \in \mathbf{N})$. Pl. a $q := \|\widehat{\theta}\|_1/(2\pi)$ ilyen.

ezért a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

feltétel miatt a

$$\sigma_m^\theta : L^1[-\pi,\pi] \to L^1[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátorok is korlátos lineáris operátorok. Mivel

$$c_k(e_j) = \delta_{kj} \qquad (k, j \in \mathbf{Z}),$$ [21]

így

$$\sigma_m^\theta e_j = \theta(j/m) e_j = T_m^\theta e_j \qquad (j \in \mathbf{Z},\, 0 < m \in \mathbf{N}),$$

amiből minden τ trigonometrikus polinomra[22] is

$$\sigma_m^\theta \tau = T_m^\theta \tau$$

következik. Tudjuk, hogy a trigonometrikus polinomok halmaza az $\|.\|_1$ normában mindenütt sűrű az $L^1[-\pi,\pi]$ Banach-térben, így[23] egyúttal

$$\sigma_m^\theta f = T_m^\theta f \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi],\, 0 < m \in \mathbf{N}).$$

Sőt, ha $\theta(0) = 1$, akkor

$$\|\sigma_m^\theta e_j - e_j\|_1 = |1 - \theta(j/m)| \cdot \|e_j\|_1 = |1 - \theta(j/m)| \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Összefoglalva a fentieket (a Banach–Steinhaus[24]-tételre[25] hivatkozva) az alábbi állítást láttuk be:

---

[21] $\delta_{kk} := 1,\, \delta_{kj} := 0 \quad (k \neq j \in \mathbf{N})$.

[22] Az $x \mapsto \cos(kx), \sin(kx) \quad (k \in \mathbf{N})$ függvények véges lineáris kombinációi.

[23] A szóban forgó operátorok folytonossága miatt.

[24] Hugo Dyonizy Steinhaus (Jasło, 1887. I. 14. – Wrocław, 1972. II. 25.)

[25] Tekintsük az $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ Banach-tereket és az $A_k, A : X \to Y \quad (k \in \mathbf{N})$ korlátos lineáris operátorokat. Ekkor a $\lim\limits_{k\to\infty} A_k(x) = A(x) \quad (x \in X)$ *erős konvergenciának* a szükséges és elégséges feltétele a következő: valamilyen $X_0 \subset X$ zárt rendszeren (amikor az $\mathcal{L}[X_0]$ lineáris burok mindenütt sűrű (altér) az X-ben) $\lim\limits_{k\to\infty} A_k(z) = A(z) \quad (z \in X_0)$ és $\sup\limits_n \|A_k\| < +\infty$ (ahol $\|A_k\| = \min\{q \geq 0 : \|A_k(x)\|_Y \leq q \cdot \|x\|_X \;\; (x \in X)\} \;\; (k \in \mathbf{N})$).

tegyük fel, hogy a $\theta \in L^1 \cap C$ *függvényre a következő feltételek teljesülnek:*

- $\widehat{\theta} \in L^1$;
- $\theta(0) = 1$;
- $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \quad (0 < m \in \mathbf{N})$.

Ekkor bármely $f \in L^1[-\pi, \pi]$ *függvény esetén*

$$\|\sigma_m^\theta f - f\|_1 \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő $(L^1[-\pi, \pi], \|.\|_1)$ tér minden további nélkül kicserélhető a $(C[-\pi, \pi], \|.\|_\infty)$ térre, vagy tetszőleges $1 \le p < +\infty$ mellett az $(L^p[-\pi, \pi], \|.\|_p)$ térre, sőt, bármilyen $(X, \|.\|_*)$ homogén Banach-térre[26].

A σ_m^θ $(0 < m \in \mathbf{N})$ operátorok egy speciális szummációs eljárást határoznak meg. Legyen ui. valamilyen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ számsor esetén

$$t_m := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m) x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).^{27}$$

Ha a θ páros függvényre igaz, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N}),$$

akkor nyilván minden korlátos $(x_k, k \in \mathbf{N})$ sorozatra létezik a $(t_m, m \in \mathbf{N})$ számsorozat. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k$ sor θ*-szummábilis,* ha a $(t_m, m \in \mathbf{N})$ sorozatnak van (véges) határértéke. Ez utóbbi esetben a

$$\lim_{m \to \infty} t_m$$

az illető sor θ*-szummája.* Legyen $S_{-1} := 0$ és

$$S_m := \sum_{k=-m}^{m} x_k \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

---

[26] Ekkor (a trigonometrikus polinomok halmazát $\mathbf{T}$-vel jelölve) igaz a $\mathbf{T} \subset X \subset L^1[-\pi, \pi]$ tartalmazás, $\|.\|_1 \le \|.\|_*$, továbbá bármelyik $f \in X$ és $x \in \mathbf{R}$ esetén (ld. 1.3. i) megjegyzés) $\mathcal{T}_x f \in X$ és $\|\mathcal{T}_x f\|_* = \|f\|_*$, valamint minden $f \in X$ függvényhez megadható trigonometrikus polinomoknak egy olyan $(\tau_m, m \in \mathbf{N})$ sorozata, hogy $\|f - \tau_m\|_* \to 0 \quad (m \to \infty)$.

[27] Feltételezve, hogy a t_m-eket definiáló végtelen sorok konvergensek.

Ekkor

$$t_m = \sum_{j=0}^{\infty} \theta(k/m)(S_k - S_{k-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\theta(j/m) - \theta((j+1)/m)\right) S_j =:$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{mj} S_j \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Az ismert Toeplitz[28]-tétel szerint ez a szummáció akkor és csak akkor permanens (azaz, ha az $(S_m, m \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, akkor

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} S_m),$$

ha

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{mj}| < +\infty,$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{mj} = 1$$

és

$$\lim_{m\to\infty} a_{mj} = 0 \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

A

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

feltétel miatt

$$\lim_{k\to\infty} \theta(k/m) = 0 \qquad (0 < m \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{mj} = \theta(0) \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Tehát $\theta(0) = 1$ esetén

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{mj} = 1.$$

[28] Otto Toeplitz (Breslau, 1881. VIII. 1. – Jeruzsálem, 1940. II. 15.)

Amennyiben a θ még folytonos is a 0-ban, akkor nyilván

$$\lim_{m\to\infty} a_{mj} = 0 \qquad (j \in \mathbf{N})$$

is igaz. A

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{mj}| < +\infty$$

korlátossági feltétel is teljesül, ha mondjuk a θ függvény korlátos változású.

Ha pl. a $\theta \in L^1$ függvényről azt tudjuk, hogy $\widehat{\theta} \geq 0$ és $\theta \in C\{0\}$, akkor (ld. 2.5. viii) megjegyzés) $\widehat{\theta} \in L^1$.

Világos, hogy ha

$$\theta := \chi_{[-1,1]},$$

akkor a θ-szummáció a szóban forgó sorok közönséges értelemben vett (szimmetrikus) összegzését jelenti:

$$t_m = \sum_{k=-m}^{m} x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan, ha $\gamma > 0$ és

$$\theta(t) := (1 - |t|^\gamma) \cdot \chi_{[-1,1]}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor a klasszikus *Riesz-szummációhoz* jutunk:

$$t_m = \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \left(\frac{|k|}{m}\right)^\gamma\right) \cdot x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan a $\gamma = 1$ választással kapjuk a $(C, 1)$– (vagy *Fejér*[29]*-féle*) összegzést:

$$t_m = \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m}\right) \cdot x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

(Számos egyéb klasszikus szummációs eljárás írható le még ilyen módon.)

A fentiekben bevezetett $\sigma_m^\theta \quad (0 < m \in \mathbf{N})$ operátorokról a következőket mondhatjuk:

$$\sigma_m^\theta f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m) \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath kt} dt\right) e^{\imath kx} =$$

[29] Fejér Lipót (Pécs, 1880. II. 9. – Budapest, 1959. X. 15.)

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot f(t)\theta(k/m)e^{\imath k(x-t)} dt,$$

ahol

$$C_m := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

miatt

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\theta(k/m)e^{\imath k(x-t)} \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |\theta(k/m)| \leq$$

$$C_m \cdot |f(t)| \qquad (x, t \in [-\pi, \pi]).$$

Ezért a Lebesgue-tétel szerint

$$\sigma_m^\theta f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m)e^{\imath k(x-t)} \right) dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_m^\theta(x-t)\, dt = f * K_m^\theta(x) \qquad (f \in L^1[-\pi, \pi],\ x \in [-\pi, \pi])$$

a

$$K_m^\theta := \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m) e_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

magfüggvénnyel. A $C_m < +\infty$ feltételből következően a (2π szerint periodikus) K_m^θ-t definiáló végtelen sor egyenletesen konvergens, így $K_m^\theta \in C[-\pi, \pi]$. Innen az is következik, hogy az

$$C[-\pi, \pi] \ni f \mapsto \sigma_m^\theta f \in C[-\pi, \pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátor normája[30] a $\|K_m^\theta\|_1$ integrálnormával egyenlő. Mivel

$$\|\sigma_m^\theta f\|_\infty = \|T_m^\theta f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|\theta_m\|_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|\widehat{\theta}\|_1 \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C[-\pi, \pi]),$$

---

[30] Tekintsük adott kompakt $[a, b]$, $[c, d]$ intervallumok esetén a folytonos $K : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ magfüggvényt, a $T : C[a, b] \to C[c, d]$ operátort pedig definiáljuk a következőképpen: $Tf(x) := \int_a^b f(t)K(t, x)\, dt \quad (f \in C[a, b],\ x \in [c, d])$. Ekkor a (nyilván lineáris) T operátor normája a $\|T\| = \max\{\int_a^b |K(t, z)|\, dt : z \in [c, d]\}$ maximum, azaz a $\|Tf\|_\infty \leq q \cdot \|f\|_\infty \quad (f \in C[a, b])$ becslésnek eleget tevő q számok közül az előbbi $\|T\|$ egyúttal a legkisebb.

így

$$\|K_m^\theta\|_1 \le \frac{1}{2\pi}\cdot \|\widehat{\theta}\|_1,$$

más szóval

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 \le \frac{1}{2\pi}\cdot \|\widehat{\theta}\|_1.$$

Később belátjuk (ld. 2.4.2.), hogy az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség is írható.

Világos, hogy $C_m < +\infty \quad (0 < m \in \mathbf{N})$ alapján (ld. Lebesgue-féle konvergencia-tétel) a K_m^θ Fourier-együtthatóira

$$c_l(K_m^\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m)\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath kt}\cdot e^{-\imath lt}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \theta(l/m) \qquad (l \in \mathbf{Z}).$$

Ugyanakkor $\widehat{\theta} \in L^1$ miatt (az inverziós formulát (ld. 2.2.) is alkalmazva)

$$c_l(P\theta_m) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} P\theta_m(t)e^{-\imath lt}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \theta_m(t+2j\pi)e^{-\imath lt}dt =$$

$$\frac{m}{(2\pi)^2}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{\theta}(m(t+2j\pi))e^{-\imath lt}dt =$$

$$\frac{m}{(2\pi)^2}\cdot \int_{0}^{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{\theta}(m(t+2j\pi))e^{-\imath l(t+2j\pi)}dt =$$

$$\frac{m}{(2\pi)^2}\cdot \int \widehat{\theta}(mt)e^{-\imath lt}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{\theta}(t)e^{-\imath tl/m}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \theta(l/m) \qquad (l \in \mathbf{Z}).$$

Tehát

$$K_m^\theta(t) = P\theta_m(t) \qquad (\text{m.m. } t \in [-\pi, \pi]),$$

így

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m)e^{\imath kt} = m\cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\theta}(m(t+2j\pi)) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}, 0 < m \in \mathbf{N}).$$

(Ld. még: *Poisson-formula* (1.3. xv) megjegyzés).)

2.4.2. A Fourier-transzformáció szerepe

Mutassuk meg (*Tyeljakovszkij*[31] (1961), *Zsuk*[32]–*Natanszon*[33] (1983)), hogy (a 2.4.1. pontbeli feltételek mellett)

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot \|\widehat{\theta}\|_1.$$

Bontsuk fel ehhez a $\theta_m \quad (0 < m \in \mathbf{N})$ függvényt a következőképpen:

$$\theta_m = \theta_m\cdot \chi_{[-\pi,\pi]} + \theta_m\cdot \chi_{\mathbf{R}\setminus[-\pi,\pi]} =: \theta_m^{(1)} + \theta_m^{(2)}.$$

Ekkor tetszőleges (a 2π szerint periodikus) $f \in C[-\pi,\pi]$ függvényre

$$\|f * (P\theta_m)\|_\infty \geq \|f * (P\theta_m^{(1)})\|_\infty - \|f * (P\theta_m^{(2)})\|_\infty \geq$$

$$\|f * (P\theta_m^{(1)})\|_\infty - \|f\|_\infty\cdot \|P\theta_m^{(2)}\|_1 \geq \|f * (P\theta_m^{(1)})\|_\infty - \|f\|_\infty\cdot \|\theta_m^{(2)}\|_1,$$

ahol

$$\|\theta_m^{(2)}\|_1 = \int_{\{x\in\mathbf{R}:|x|>\pi\}} |\theta_m(t)|\,dt = \frac{m}{2\pi}\cdot \int_{\{x\in\mathbf{R}:|x|>\pi\}} |\widehat{\theta}(mt)|\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\{x\in\mathbf{R}:|x|>m\pi\}} |\widehat{\theta}(t)|\,dt \to 0 \qquad (m\to\infty).$$

A folytonos magú integrál-operátorok normájával kapcsolatos klasszikus ismeretek alapján

$$\|\theta_m^{(1)}\|_1 = \|P\theta_m^{(1)}\|_1 = \sup_{\{f\in C[-\pi,\pi]:\, \|f\|_\infty=1\}} \|f * (P\theta_m^{(1)})\|_\infty,$$

ezért alkalmas

$$g_k \in C[-\pi,\pi],\ \|g_k\|_\infty = 1 \qquad (0 < k \in \mathbf{N})$$

sorozattal

$$\|\theta_m^{(1)}\|_1 - 1/m < \|g_m * (P\theta_m^{(1)})\|_\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen az előbbiekre tekintettel azt mondhatjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \|\widehat{\theta}\|_1 = \|\theta_m\|_1 \geq \|P\theta_m\|_1 = \|K_m^\theta\|_1 \geq \|g_m * K_m^\theta\|_\infty =$$

$$\|g_m * (P\theta_m)\|_\infty > \|\theta_m^{(1)}\|_1 - 1/m - \|\theta_m^{(2)}\|_1 \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

---

[31] Szergej Alekszandrovics Tyeljakovszkij (Szaratov, 1932. XII. 22. –)
[32] Vlagyimir Vaszilјevics Zsuk (1940. V. 8. –)
[33] Garald Izidorovics Natanszon (Leningrád, 1930. V. 9. – Szentpérvár, 2003. VII. 24.)

Innen

$$\liminf_{m\to\infty}\|K_m^\theta\|_1 \ge \liminf_{m\to\infty}\|\theta_m^{(1)}\|_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\liminf_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} m\cdot|\widehat{\theta}(mt)|\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\liminf_{m\to\infty}\int_{-m\pi}^{m\pi}|\widehat{\theta}(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{m\to\infty}\int_{-m\pi}^{m\pi}|\widehat{\theta}(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\|\widehat{\theta}\|_1,$$

amiből az állításunk már nyilvánvaló.

A továbbiakban azt vizsgáljuk (*Simon*[34] (2013)), hogy a

$$\theta\in L^1\cap C,\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\theta(k/m)|<+\infty \qquad (0<m\in\mathbf{N})$$

feltételek mellett mikor igaz az alábbi következtetés:

$$(*) \qquad \sup_{0<m\in\mathbf{N}}\|K_m^\theta\|_1<+\infty \Longrightarrow \widehat{\theta}\in L^1.$$

Becsüljük meg ehhez a $\|K_m^\theta\|_1$-et az alábbi módon: ha

$$0<m,\ M,\ N\in\mathbf{N}\ \text{ és }\ M\le m\pi,$$

akkor

$$2\pi\cdot\|K_m^\theta\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\theta(k/m)e^{\imath kt}\Big|dt =$$

$$\int_{-m\pi}^{m\pi}\Big|\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big|dt \ge \int_{-M}^{M}\Big|\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big|dt \ge$$

$$\int_{-M}^{M}\Big|\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=-mN}^{mN}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big|dt - \int_{-M}^{M}\Big|\frac{1}{m}\cdot\sum_{|k|>mN}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big|dt \ge$$

$$\int_{-M}^{M}\Big|\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=-mN}^{mN}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big|dt - \frac{2M}{m}\cdot\sum_{|k|>mN}|\theta(k/m)|.$$

Mivel

$$\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=-mN}^{mN}\theta(k/m)e^{\imath kt/m} \qquad (-M\le t\le M)$$

[34] Simon Péter (Nagymaros, 1949. IX. 17. –)

nem más, mint a

$$[-N, N] \ni x \mapsto \theta(x)e^{\imath tx}$$

függvény (Riemann-)integrál közelítő összege, így

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m} = \int_{-N}^{N} \theta(x)e^{\imath tx}dx \qquad (-M \le t \le M).$$

Ugyanakkor tetszőleges $0 < m \in \mathbf{N}$ és $-M \le t \le M$ esetén

$$\left|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m}\right| \le (2N+1)\cdot \max_{|x|\le N} |\theta(x)|,$$

ezért a Lebesgue-féle konvergenciatétel értelmében

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-M}^{M} \left|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m}\right|dt = \int_{-M}^{M} \left|\int_{-N}^{N} \theta(x)e^{\imath tx}dx\right| dt.$$

Továbbá

$$\frac{1}{m}\cdot \sum_{|k|>mN} |\theta(k/m)| \le \frac{1}{m}\cdot \sum_{|j|\ge N} \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)|.$$

Tegyük fel, hogy alkalmas $\gamma_j \ge 0 \quad (j \in \mathbf{Z})$ számokkal

$$\frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \le \gamma_j \qquad (j \in \mathbf{Z},\, 0 < m \in \mathbf{N})$$

és

$$(**) \qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j < +\infty.$$

Ekkor

$$\frac{1}{m}\cdot \sum_{|j|\ge N} \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \le \sum_{|j|\ge N} \gamma_j.$$

Tehát

$$2\pi\cdot \|K_m^\theta\|_1 \ge \int_{-M}^{M} \left|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m}\right|dt - 2M\cdot \sum_{|j|\ge N} \gamma_j,$$

ennek alapján pedig

$$2\pi\cdot \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 \geq \lim_{m\to\infty}\int_{-M}^{M}\left|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN}\theta(k/m)e^{\imath kt/m}\right|dt - 2M\cdot \sum_{|j|\geq N}\gamma_j =$$

$$\int_{-M}^{M}\left|\int_{-N}^{N}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right|dt - 2M\cdot \sum_{|j|\geq N}\gamma_j.$$

Vegyük figyelembe, hogy egyrészt

$$\left|\int_{-N}^{N}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right| \leq \|\theta\|_1 \qquad (|t|\leq M),$$

amiért is a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-M}^{M}\left|\int_{-N}^{N}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right|dt = \int_{-M}^{M}\left|\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right|dt =$$

$$\int_{-M}^{M}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right|dt = \int_{-M}^{M}|\widehat{\theta}(t)|dt.$$

Másrészt a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\gamma_j < +\infty$$

feltételezés miatt

$$\sum_{|j|\geq N}\gamma_j \to 0 \qquad (N\to\infty),$$

következésképpen

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 \geq$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-M}^{M}\left|\int_{-N}^{N}\theta(x)e^{\imath tx}dx\right|dt - 2M\cdot \lim_{N\to\infty}\sum_{|j|\geq N}\gamma_j = \int_{-M}^{M}|\widehat{\theta}(t)|\,dt.$$

Innen

$$\|\widehat{\theta}\|_1 = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}|\widehat{\theta}(t)|\,dt \leq 2\pi\cdot \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty$$

már következik.

A fentiekhez a következő észrevételeket fűzzük (*Simon* (2013)).

- Tegyük fel, hogy $f \in C$ és legyen

$$\|f\|_S := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)|,$$

valamint

$$S(C,\ell_1) := \{f \in C : \|f\|_S < +\infty\}.$$

Mivel

$$\frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| \qquad (f \in S(C,\ell_1),\, 0 < m \in \mathbf{N})$$

az $\int_j^{j+1} |f(t)|\, dt$ integrálnak egy közelítő összege, ezért

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| = \int_j^{j+1} |f(t)|\, dt.$$

Ebből kifolyólag

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| \geq \int_j^{j+1} |f(t)|\, dt.$$

Innen

$$\int |f(t)|\, dt = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f(t)|\, dt \leq$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| = \|f\|_S < +\infty$$

miatt $S(C,\ell_1) \subset L^1 \cap C$ következik.

Könnyen belátható, hogy az $S(C,\ell_1)$ halmaz (a „szokásos” függvényműveletekkel) vektortér az $\mathbf{R}$ felett, a $\|.\|_S$ pedig norma ezen a vektortéren, hiszen $\|0\|_S = 0$ triviális. Ha viszont $\|f\|_S = 0$, akkor tetszőleges $j \in \mathbf{Z}$ és $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén

$$f(j+l/m) = 0 \qquad (l = 0, ..., m-1).$$

Viszont bármely $x \in \mathbf{R}$ számhoz és $\varepsilon > 0$ „küszöbhöz” az f folytonossága miatt megadhatók a $j \in \mathbf{Z}$ és a

$$0 < m \in \mathbf{N},\, l = 0, ..., m-1$$

számok úgy, hogy az $y := j + l/m$ jelöléssel az

$$|f(x) - f(y)| = |f(x)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Ezért $f(x) = 0$, azaz $f = 0$. Továbbá a

$$\|\lambda f\|_S = |\lambda| \cdot \|f\|_S \qquad (f \in S(C, \ell_1),\, \lambda \in \mathbf{R})$$

egyenlőség, ill. az

$$\|f + g\|_S \leq \|f\|_S + \|g\|_S \qquad (f,\, g \in S(C, \ell_1))$$

egyenlőtlenség szintén meglehetősen nyilvánvaló.

- Következésképpen az $(S(C, \ell_1), \|.\|_S)$ valóban normált tér. Legyen adott egy

$$(f_k, k \in \mathbf{N}) : \mathbf{N} \to S(C, \ell_1)$$

sorozat és tegyük fel, hogy valamilyen $f \in S(C, \ell_1)$ függvénnyel

$$\|f_k - f\|_S \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Tehát

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f_k(j + l/m) - f(j + l/m)| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ha a $0 \neq r \in \mathbf{R}$ racionális szám, akkor alkalmas

$$j_0 \in \mathbf{Z},\, 0 < m_0 \in \mathbf{N},\, l_0 = 0, ..., m_0 - 1$$

számokkal $r = j_0 + l_0/m_0$. Világos, hogy

$$|f_k(r) - f(r)| \leq \sum_{l=0}^{m_0-1} |f_k(j_0 + l/m_0) - f(j_0 + l/m_0)| \leq$$

$$m_0 \cdot \|f_k - f\|_S \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

tehát
$$f(r) = \lim_{k\to\infty} f_k(r).$$

• Mutassuk meg, hogy az $(S(C,\ell_1), \|.\|_S)$ tér nem teljes. Legyen ui. ehhez adott $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén
$$f_k(t) := \begin{cases} \sin(\pi/x) & (1/k \le x \le 1) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus (1/k, 1)). \end{cases}$$
Nyilvánvaló, hogy $f_k \in C$ és
$$\|f_k\|_S = \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f_k(l/m)| \le 1$$
miatt $f_k \in S(C,\ell_1)$. Továbbá, ha $0 < j,\ k,\ m \in \mathbf{N}$ és $k > j$, akkor
$$\sum_{l=0}^{m-1} |f_j(l/m) - f_k(l/m)| =$$
$$\sum_{l=0, 1/k<l/m<1/j}^{m-1} |f_j(l/m) - f_k(l/m)| =$$
$$\sum_{l=0, m/k<l<m/j}^{m-1} |f_k(l/m)| \le \frac{m}{j} - \frac{m}{k},$$
ezért
$$\|f_j - f_k\|_S = \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f_j(l/m) - f_k(l/m)| \le$$
$$\frac{1}{j} - \frac{1}{k} \to 0 \qquad (j, k \to \infty).$$
Ez azt jelenti, hogy az $(f_j, j \in \mathbf{N})$ sorozat Cauchy-sorozat a $\|.\|_S$ normára nézve. Ha lenne olyan $f \in S(C,\ell_1)$ függvény, amellyel
$$\|f_j - f\|_S \to 0 \qquad (j \to \infty)$$
teljesülne, akkor az előzőek szerint minden $r \in (0,1)$ racionális számra
$$f(r) = \lim_{j\to\infty} f_j(r) = \sin(\pi/r).$$

Ilyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ folytonos függvény viszont nyilván nincs.

- Egy $f\in C[0,1]$ függvény esetén jelöljük s_m-mel a következő átlagot:

$$s_m(f):=\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=0}^{m-1}|f(l/m)| \qquad (0<m\in\mathbf{N}).$$

Legyen továbbá

$$f_{ml}:=\max\{|f(t)|:l/m\le t\le(l+1)/m\} \qquad (l=0,...,m-1),$$

valamint

$$S_m(f):=\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=0}^{m-1}f_{ml} \qquad (0<m\in\mathbf{N})$$

és

$$s(f):=\sup_{0<m\in\mathbf{N}}s_m(f),\ S(f):=\sup_{0<m\in\mathbf{N}}S_m(f).$$

Világos, hogy $s(f)\le S(f)$. Tekintsük ugyanakkor a $0<k\in\mathbf{N}$ index mellett azt az $f_k\in C[0,1]$ függvényt, aminek a grafikonja a $[0,1/k]$ intervallum felett egy 1 magasságú egyenlő szárú háromszög és

$$f_k(t):=0 \qquad (1/k\le t\le 1).$$

Ekkor $S_1(f_k)=1$ miatt $S(f_k)\ge 1$. Ugyanakkor $m=1,...,n$ esetén $s_m(f_k)=0$, míg ha $m=k+1,k+2,...,$ akkor

$$s_m(f_k)=\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=1}^{[m/k]}f_k(l/m)\le\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=1}^{[m/k]}1\le\frac{1}{k}.$$

Tehát

$$s(f_k)\le\frac{1}{k} \qquad (0<k\in\mathbf{N}),$$

így nincs olyan $q\ge 0$ konstans, amellyel az $S(f)\le q\cdot s(f)$ becslés teljesülne tetsző-leges $f\in C[0,1]$ választással.

Vezessük be egy $f\in S(C,\ell_1)$ függvényre az alábbi jelölést:

$$\|f\|_{SW}:=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sup_{0<m\in\mathbf{N}}\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=0}^{m-1}\|f\chi_{[j+l/m,j+(l+1)/m]}\|_{\infty}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\|.\|_{SW}$ norma és $\|.\|_S \le \|.\|_{SW}$, de a fentiek szerint a két szóban forgó norma nem ekvivalens.

• Az eddigieket figyelembe véve tehát igaz az alábbi következtetés: tegyük fel, hogy $\theta \in S(C, \ell_1)$. Ekkor

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \Longrightarrow \widehat{\theta} \in L^1.$$

• Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j + l/m)| \le \sup_{0\le x<1} |\theta(j + x)| \qquad (j \in \mathbf{Z}).$$

Ezért

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0\le x<1} |\theta(j + x)| < +\infty$$

esetén a

$$\gamma_j := \sup_{0\le x<1} |\theta(j + x)| \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

számok eleget tesznek a $(**)$-nak:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j < +\infty.$$

Legyen azonban a $\theta \in C$ olyan, amelyre

$$\|\theta\chi_{(j,j+1/j)}\|_\infty = \frac{1}{j} \qquad (j = 1, 2, ...)$$

és

$$\theta(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R} \setminus A),$$

ahol

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty} (j, j + 1/j).$$

Ekkor $\theta \in L^1$ és bármely $0 < m \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{Z}$ megadásakor

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j + l/m)| \le \begin{cases} 0 & (j \le 0) \\ m^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{[m/j]} 1/j \le \gamma_j := j^{-2} & (0 < j), \end{cases}$$

tehát az előbb említett $(**)$ feltétel teljesül. Viszont

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0\le x<1} |\theta(j+x)| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

- (*Feichtinger*[35]*–Weisz*[36] (2006).) Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre

$$\|f\|_W := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{x\in[0,1)} |f(k+x)|$$

és jelöljük a $W(C,\ell_1)$ szimbólummal az összes olyan folytonos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény által alkotott halmazt, amelyre $\|f\|_W < +\infty$. Tegyük fel, hogy $\theta \in W(C,\ell_1)$. Ekkor

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \Longrightarrow \widehat{\theta} \in L^1.$$

A fentiek szerint a $W(C,\ell_1)$ valódi altere az $S(C,\ell_1)$-nek, így a most idézett állítás az előbb mondottakból már következik.

- (*Zsuk–Natanszon* (1983).) Világos, hogy ha a szóban forgó θ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor $\theta \in W(C,\ell_1)$. Ezért minden ilyen θ esetén igaz a $(*)$ következtetés:

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \Longrightarrow \widehat{\theta} \in L^1.$$

Megjegyezzük, hogy ekkor ennek a bizonyítása lényegesen leegyszerűsödik. Ha ui. $0 < N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $\operatorname{supp}\theta \subset [-N,N]$, akkor

$$\sum_{|k|>mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m} = 0 \qquad (0 < m \in \mathbf{N},\ |t| \le M),$$

tehát

$$2\pi\cdot \|K_m^\theta\|_1 \ge \int_{-M}^{M} \Big|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big| dt \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$2\pi\cdot \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 \ge \lim_{m\to\infty} \int_{-M}^{M} \Big|\frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-mN}^{mN} \theta(k/m)e^{\imath kt/m}\Big| dt =$$

[35] Hans Georg Feichtinger (Wiener Neustadt, 1951. VI. 16. –)
[36] Weisz Ferenc (Mohács, 1964. I. 25. –)

$$= \int_{-M}^{M} \left| \int_{-N}^{N} \theta(x) e^{\imath tx} dx \right| dt = \int_{-M}^{M} |\widehat{\theta}(t)| dt.$$

- Ha pl. az

$$\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

monoton fogyó, a

$$\beta : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$$

pedig monoton növő függvény és

$$|\theta(x)| \leq \begin{cases} \alpha(x) & (x \geq 0) \\ \\ \beta(x) & (x < 0), \end{cases}$$

akkor minden $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén

$$|\theta(j + l/m)| \leq \begin{cases} \alpha(j) & (j \geq 0) \\ \\ \beta(j) & (j < 0) \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{Z},\ l = 0, ..., m-1).$$

Ezért a

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha(j) + \beta(-j-1)) < +\infty$$

feltétel elegendő a $(*)$-hoz.

- Amennyiben $\theta \in S(C, \ell_1)$, akkor

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| \leq$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j + l/m)| = \|\theta\|_S < +\infty,$$

így

$$(***) \qquad \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty.$$

Viszont

$$\sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \approx \frac{1}{|j|^{1+1/m}} \qquad (0 < m,\ |j| \in \mathbf{N})$$

esetén[37]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|j|^{1+1/m}} \approx m,$$

más szóval a $(***)$ teljesül, de $\theta \notin S(C, \ell_1)$:

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \approx \frac{1}{|j| \cdot \ln |j|} \qquad (1 < |j| \in \mathbf{N}),$$

így

$$\|\theta\|_S \approx \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j \cdot \ln j} = +\infty.$$

Egyelőre nyitva marad a kérdés: elegendő-e a $(*)$ következtetéshez a $(***)$ feltétel? Más szóval igaz-e, hogy ha $\theta \in C \cap L^1$ és fennáll a $(***)$-beli korlátosság, akkor

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \Longrightarrow \widehat{\theta} \in L^1?$$

- (*Trigub*[38] (1974-1975).) Tegyük fel, hogy $f \in L^1$ és $\operatorname{supp} f \subset [-\pi, \pi]$. Legyen

$$\widehat{f}_o(x) := \imath \cdot \int (f(t) \operatorname{sign} t) e^{-\imath t x} dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A) Tekintsük az alábbi kijelentéseket:

1^o $\widehat{f} \in L^1$;

2^o $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \max_{k \le x \le k+1} |\widehat{f}(x)| < +\infty$;

3^o van olyan $\xi \in (0,1)$, hogy $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|\widehat{f}(k)| + |\hat{f}(k+\xi)|) < +\infty$;

4^o $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|\widehat{f}(k)| + |(\widehat{f})'(k)|) < +\infty$;

5^o $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|\widehat{f}(k)| + |\widehat{f}_o(k+1) - \widehat{f}_o(k)|) < +\infty$.

[37]Nem nehéz ilyen θ függvényt konstruálni.
[38]Roald Mihajlovics Trigub

Ekkor

$$1^o \iff 2^o \iff 3^o \iff 4^o \iff 5^o.$$

Megjegyezzük, hogy jóval korábbról már ismert volt a következő állítás (*Wiener* (1933)): van olyan $C>0$ abszolút konstans, amellyel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \max_{k\le x\le k+1} |\widehat{f}(x)| \le C\cdot \|\widehat{f}\|_1.$$

B) Jelöljük f_*-gal a következő függvényt:

$$f_*(t) := t\cdot f(t) \qquad (t\in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy az f-re tett feltétel miatt $f_*\in L^1$. Ezért a Fourier-transzformáció és a deriválás kapcsolatából (ld. 1.2.4.)

$$\widehat{f_*}(x) = -\imath\cdot (\widehat{f})'(x) \qquad (x\in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$|\widehat{f_*}| = |(\widehat{f})'|,$$

következésképpen a 4^o feltétel azt jelenti, hogy az

$$f_{|[-\pi,\pi]},\ f_{*|[-\pi,\pi]}$$

(leszűkített) függvények (trigonometrikus) Fourier-sorai abszolút konvergensek. Így az $1^o \iff 4^o$ ekvivalenciát szem előtt tartva a következőt mondhatjuk: $f\in L^1$, $\operatorname{supp} f\subset[-\pi,\pi]$ esetén $\widehat{f}\in L^1$ akkor és csak akkor igaz, ha az

$$f_{|[-\pi,\pi]},\ f_{*|[-\pi,\pi]}$$

függvények (trigonometrikus) Fourier-sorai abszolút konvergensek.

C) Legyen most $\theta\in C[-\pi,\pi]$ és

$$x_k := \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad (k=-n,...,n).$$

Ekkor a

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=-n}^{n} \theta(x_k)e^{\imath kx}\Big|\,dx < +\infty$$

korlátosság azzal ekvivalens, hogy a

$$\theta_{|_{[-\pi,\pi]}},\ \theta_{*_{|_{[-\pi,\pi]}}}$$

függvények (trigonometrikus) Fourier-sorai abszolút konvergensek, tehát az előbbiek szerint azzal, hogy $\widehat{\theta} \in L^1$.

- Ha most

$$(X, \|.\|_*) := \begin{cases} (C[-\pi,\pi], \|.\|_\infty) \\ \\ \text{vagy} \\ \\ \left(L^1[-\pi,\pi], \|.\|_1\right), \end{cases}$$

akkor a $\sigma_m^\theta : X \to X$ operátor (ld. 2.4.1.) normája:

$$\|\sigma_m^\theta\| = \|K_m^\theta\|_1 \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Ezért $\theta(0) = 1$ esetén az előzményeket (ld. fentebb) és a Banach–Steinhaus-tételt figyelembe véve a következőt mondhatjuk:

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m^\theta f - f\|_* = 0 \quad (f \in X) \iff \widehat{\theta} \in L^1.$$

Végül, ha fent $\theta \in W(C, \ell_1)$ és $\theta(0) = 1$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m^\theta f - f\|_2 = 0 \qquad (f \in L^2[-\pi,\pi]).$$

Valóban, tetszőleges $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén a Parseval-egyenlőség szerint (ld. 1.3. xxii) megjegyés)

$$\|\sigma_m^\theta f\|_2^2 = \|f * K_m^\theta\|_2^2 = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| c_k(f * K_m^\theta)\right|^2 =$$

$$8\pi^3 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \cdot |c_k(K_m^\theta)|^2 = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \cdot |\theta(k/m)|^2 \leq$$

$$2\pi \cdot \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)|^2 \cdot \|f\|_2^2.$$

Ha $k = jm + l \in \mathbf{Z}$ $\ (j \in \mathbf{Z})$ és $l = 0, ..., m-1$, akkor

$$|\theta(k/m)| = |\theta(j + l/m)| \leq \sup_{x\in[0,1)} |\theta(j+x)| \leq \|\theta\|_{W(C,\ell_1)},$$

így

$$\|\sigma_m^\theta f\|_2 \leq \|\theta\|_{W(C,\ell_1)}\cdot \|f\|_2.$$

Ez azt (is) jelenti, hogy a

$$\sigma_m^\theta : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátor-sorozat egyenletesen korlátos. Innen az állításunk már a Banach–Steinhaus-tétel alapján következik (tekintettel arra, hogy a trigonometrikus polinomok halmaza a $\|.\|_2$ normában mindenütt sűrű az $L^2[-\pi,\pi]$ térben).

Jegyezzük meg, hogy mindez nem igaz akkor, ha csak $\theta \in S(C,\ell_1)$. Tekintsük ui. azt a θ függvényt, amelyre

$$\|\theta\cdot \chi_{(j,j+1/j^2)}\|_\infty = \sqrt{j} \qquad (0 < |j| \in \mathbf{N})$$

és

$$\theta(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R} \setminus A),$$

ahol

$$A := \bigcup_{|j|=1}^{\infty} (j, j+1/j^2),$$

valamint

$$\theta(j + 1/(2j^2)) := \sqrt{j} \qquad (0 < |j| \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\theta \in S(C,\ell_1)$ tartalmazás lényegében ugyanúgy adódik, mint az előbb a

$$W(C,\ell_1) \neq S(C,\ell_1)$$

relációt igazoló analóg példánkban (az ottani jelölésekkel a

$$\gamma_j := \frac{1}{j^{3/2}} \qquad (0 < |j| \in \mathbf{N})$$

választással). Viszont a

$$\frac{k}{m} = \frac{jm+l}{m} = j + \frac{l}{m} = j + \frac{1}{2j^2} \qquad (0 < j \in \mathbf{N})$$

esetben, amikor tehát $m := 2j^2$ és $l := 1$, azt mondhatjuk, hogy

$$|\theta(k/m)| = \sqrt{j},$$

amiből

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)| = +\infty$$

következik. Mivel (a konkrét θ-tól függetlenül)

$$\|\sigma_m^\theta e_k\|_2 = \|\theta(k/m)\cdot e_k\|_2 = |\theta(k/m)| \qquad (k \in \mathbf{Z},\, 0 < m \in \mathbf{N}),$$

ezért világos, hogy

$$\|\sigma_m^\theta\| = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)|.$$

Más szóval a most vizsgált esetben a

$$\sigma_m^\theta : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátorok nem egyenletesen korlátosak. A Banach–Steinhaus-tétel miatt van tehát olyan $f \in L^2$ függvény, amelyre a $(\sigma_m^\theta f, m \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|.\|_2$ norma szerint nem konvergens.

2.5. Megjegyzések

i) (*Hobson*[39] (1926), *Bochner* (1932), *Titchmarsh*[40] (1937).) Az előbbi bizonyítás (ld. 2.2.) mögött az alábbi általános érvényű meggondolás húzódik meg. Tegyük fel, hogy $g \in L^1$ és $\int g(t)\,dt = 1$, továbbá legyen (ld. 1.1.)

$$T_\lambda f := f * g_\lambda \qquad (f \in L^1),$$

ahol $\lambda > 0$ és

$$g_\lambda(t) := \lambda^n \cdot g(\lambda t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

(*Fejér-típusú mag.*) Ekkor bármely $f \in L^1$ függvényre

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|T_\lambda f - f\|_1 = 0.$$

Ti. tetszőleges $f \in L^1$, $x \in \mathbf{R}^n$ és $\lambda > 0$ mellett

$$T_\lambda f(x) - f(x) = \lambda^n \cdot \int f(x-t) g(\lambda t)\,dt - f(x) =$$

[39]Ernest William Hobson (Derby, 1856. X. 26. – Cambridge, 1933. IV. 19.)

[40]Edward Charles Titchmarsh (Newbury, Berkshire, 1899. VI. 1. – Oxford, 1963. I. 18.)

$$= \lambda^n \cdot \int (f(x-t) - f(x))\, g(\lambda t)\, dt,$$

hiszen

$$\lambda^n \cdot \int g(\lambda t)\, dt = \int g(t)\, dt = 1.$$

Ezért

$$\|T_\lambda f - f\|_1 \leq \lambda^n \cdot \int \left(\int |f(x-t) - f(x)| \cdot |g(\lambda t)|\, dt \right) dx =$$

$$\lambda^n \cdot \int |g(\lambda t)| \cdot \left(\int |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) dt \leq$$

$$\lambda^n \cdot \int_{G_r} |g(\lambda t)| \cdot \|\mathcal{T}_t f - f\|_1\, dt + 2\lambda^n \cdot \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus K_r(0)} |g(\lambda t)|\, dt \leq$$

$$\sup_{\|t\|_2 \leq r} \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 \cdot \|g\|_1 + 2 \cdot \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus K_{\lambda r}(0)} |g(t)|\, dt,$$

ahol

$$\sup_{\|t\|_2 \leq r} \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 \to 0 \qquad (r \to 0)$$

és

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus K_{\lambda r}(0)} |g(t)|\, dt \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Innen

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|T_\lambda f - f\|_1 = 0$$

már nyilván következik.

Speciálisan (ld. 2.2.) legyen

$$g(t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot h(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\|t\|^2/2} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor $f \in L^1$ esetén

$$T_N f(x) := f * g_N(x) = \int f(t) g_N(x-t)\, dt =$$

$$\int f(t) g_N(t-x)\, dt = \int f(x+t) g_N(t)\, dt =$$

$$= \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int f(x+t)h(Nt)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < N \in \mathbf{N})$$

és (a 2.2. pontbeli jelöléssel)

$$\delta_N = T_N f - f \qquad (0 < N \in \mathbf{N}).$$

ii) Az i) megjegyzésben szereplő $g_\lambda \quad (\lambda > 0)$ függvénysereg egy speciális ún. *egységapproximáció.* Nevezetesen, legyen

- $\varphi_\lambda \in L^1 \quad (\lambda > 0)$,
- $\int \varphi_\lambda(t)\,dt = 1 \quad (\lambda > 0)$,
- $q := \sup_{\lambda > 0} \|\varphi_\lambda\|_1 < +\infty$,
- bármely $r > 0$ esetén

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\,dt \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Ekkor tetszőleges $f \in L^1$ függvényre

$$\|f * \varphi_\lambda - f\|_1 \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Sőt, itt az L^1 teret és az $\|.\|_1$ normát kicserélhetjük az L^p térre és a $\|.\|_p$ normára $(1 \le p < +\infty)$, vagy a

$$C_0 := \{f \in C : \sup_{\|t\| > r} |f(t)| \to 0 \quad (r \to +\infty)\}$$

térre[41] és a $\|.\|_\infty$ normára.

Valóban, legyen $1 \le p < +\infty$ és $f \in L^p$, ekkor

$$f * \varphi_\lambda(x) - f(x) = \int (f(x-t) - f(x))\varphi_\lambda(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ \lambda > 0).$$

Innen a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 1.1.) alapján

$$\|f * \varphi_\lambda - f\|_p = \left(\int \left| \int (f(x-t) - f(x))\varphi_\lambda(t)\,dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

[41] *A végtelenben eltűnő folytonos függvények tere.*

$$\leq \int |\varphi_\lambda(t)|\cdot \left(\int |f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} dt = I_{1r}(\lambda) + I_{2r}(\lambda) \qquad (\lambda,\, r > 0),$$

ahol

$$I_{1r}(\lambda) := \int_{G_r} |\varphi_\lambda(t)|\cdot \left(\int |f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} dt$$

és

$$I_{2r}(\lambda) := \int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\cdot \left(\int |f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} dt.$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor az $r > 0$ megválasztható úgy, hogy

$$\left(\int |f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad (t \in G_r).$$

Ezért

$$I_{1r}(\lambda) \leq \varepsilon\cdot \int_{G_r} |\varphi_\lambda(t)|\,dt \leq q\cdot \varepsilon \qquad (\lambda > 0).$$

Ugyanakkor (az előbbi r-rel)

$$I_{2r} \leq 2\cdot \|f\|_p\cdot \int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\,dt \qquad (\lambda > 0),$$

ahol az

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\,dt \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty)$$

feltétel alapján alkalmas $\lambda_0 > 0$ mellett

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\,dt < \varepsilon \qquad (\lambda_0 < \lambda \in \mathbf{R}).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\|f * \varphi_\lambda - f\|_p \leq (2\cdot \|f\|_p + q)\cdot \varepsilon \qquad (\lambda_0 < \lambda \in \mathbf{R}).$$

Ha $f \in C_0$ és $x \in \mathbf{R}^n$, akkor tetszőleges $r > 0$ sugárral és $\lambda > 0$ paraméterrel

$$|f * \varphi_\lambda(x) - f(x)| \leq \int |f(x-t)-f(x)|\cdot |\varphi_\lambda(t)|\,dt =$$

$$\int_{G_r} |f(x-t)-f(x)|\cdot |\varphi_\lambda(t)|\,dt + \int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r} |f(x-t)-f(x)|\cdot |\varphi_\lambda(t)|\,dt.$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor az f egyenletes folytonosságára tekintettel az r megadható úgy, hogy

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \qquad (u, v \in \mathbf{R}^n,\ \|u - v\| \leq r).$$

Így

$$\int_{G_r} |f(x-t) - f(x)| \cdot |\varphi_\lambda(t)|\, dt \leq \varepsilon \cdot \|\varphi_\lambda\|_1 \leq q \cdot \varepsilon.$$

Továbbá (ld. fent)

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |f(x-t) - f(x)| \cdot |\varphi_\lambda(t)|\, dt \leq$$

$$2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\varphi_\lambda(t)|\, dt \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \varepsilon \qquad (\lambda_0 < \lambda \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$\|f * \varphi_\lambda - f\|_\infty \leq (2 \cdot \|f\|_\infty + q) \cdot \varepsilon \qquad (\lambda_0 < \lambda \in \mathbf{R}).$$

Nyilván (ld. i)) a

$$\varphi_\lambda := g_\lambda \qquad (\lambda > 0)$$

választással egységapproximációt kapunk.

iii) Legyen $\Phi \in C_0$, $\Phi(0) = 1$ és tételezzük fel, hogy a (Lebesgue-)mérhető

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényre minden $\varepsilon > 0$ szám mellett létezik az

$$M_\Phi(f, \varepsilon) := \int f(x) \Phi(\varepsilon x)\, dx$$

integrál (az f-nek az ún. Φ-*integrálközepe*). Világos, hogy tetszőleges $f \in L^1$ függvény ilyen. Ha az

$$\varepsilon \mapsto M_\Phi(f, \varepsilon)$$

leképezésnek van (véges) határértéke $\varepsilon \to 0$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény Φ-*integrálható*, a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\Phi(f, \varepsilon)$$

határérték pedig az f Φ-*integrálja.* A Lebesgue-tétel miatt bármely $f \in L^1$ esetén

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\Phi(f, \varepsilon) = \int f(t)\, dt$$

(tehát a Φ-integrál *permanens*). Pl. (ld. 1.3. ii) megjegyzés) a

$$\Phi(x) := h(x) = e^{-\|x\|^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

választással minden $f \in L^1$ függvényre

$$M_\Phi(f, \varepsilon) = \int f(x) e^{-\varepsilon^2 \cdot \|x\|^2/2} dx \to \int f(x)\, dx \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ebben a speciális esetben *Gauss*[42]- (vagy *Gauss–Weierstrass*)*-integrálról* beszélünk. Hasonlóan, a

$$\Phi(x) := e^{-\|x\|} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

választással *Abel-integrálásnak* nevezzük a szóban forgó eljárást. Nem nehéz meggondolni, hogy az

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R},\, n = 1)$$

esetben az $\int f(x)\, dx$ integrál nem létezik, de az f függvény Abel-integrálható.

Ha (ld. fent) $\Phi := h$, akkor tetszőleges $f \in L^1$ függvénnyel (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} \cdot e^{-\varepsilon^2 \cdot \|t\|^2/2} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha még $\widehat{f} \in L^1$ is igaz, akkor

$$(*) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ugyanakkor (ld. 1.3. ii) megjegyzés) $\widehat{h} = (2\pi)^{n/2} \cdot h$, így

$$M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} \cdot \widehat{h}(\varepsilon t)\, dt =$$

[42] Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777. IV. 30. – Göttingen, 1855. II. 23.)

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int \left(\int f(y) e^{\imath \langle y,t \rangle} dy \right) e^{-\imath \langle t,x \rangle} \cdot \widehat{h}(\varepsilon t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A Fubini-tételt alkalmazva innen azt kapjuk, hogy

$$M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int f(y) \cdot \left(\int \widehat{h}(\varepsilon t) e^{\imath \langle y-x,t \rangle} dt \right) dy.$$

Továbbá

$$\int \widehat{h}(\varepsilon t) e^{\imath \langle y-x,t \rangle} dt = \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \int \widehat{h}(t) e^{\imath \langle (y-x)/\varepsilon,t \rangle} dt =$$

$$\frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^n} \cdot \int h(t) e^{\imath \langle (y-x)/\varepsilon,t \rangle} dt =$$

$$\frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^n} \cdot \widehat{h}((y-x)/\varepsilon) = \frac{(2\pi)^n}{\varepsilon^n} \cdot h((y-x)/\varepsilon) \qquad (x,\, y \in \mathbf{R}^n,\, \varepsilon > 0).$$

Más szóval

$$M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^n} \cdot \int h((y-x)/\varepsilon) f(y)\, dy =$$

$$\int f(y) \widetilde{h}_\varepsilon(y-x)\, dy \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol

$$\widetilde{h}_\varepsilon(t) := (2\pi)^{n/2} \cdot \varepsilon^{-n} h(t/\varepsilon) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Később megmutatjuk (ld. v)), hogy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f(y) \widetilde{h}_\varepsilon(y-x)\, dy =$$

$$f(x) \cdot \int \widetilde{h}_1(t)\, dt = (2\pi)^n \cdot f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

amiből a $(*)$ alapján az inverziós formula (ld. 2.2.) már következik.

iv) Tegyük most fel, hogy (ld. ii)) $\Phi \in L^1 \cap C_0$ és legyen

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \cdot \widehat{\Phi}(x/\varepsilon) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, \varepsilon > 0).$$

Ekkor a szorzási szabály (ld. 1.2.2.1.) és az 1.3. i) megjegyzés szerint bármely $f \in L^1$ függvényre

$$M_\Phi(\mathcal{M}_{-x}\widehat{f}, \varepsilon) = \int \widehat{f}(t) e^{-\imath \langle t,x \rangle} \cdot \Phi(\varepsilon t)\, dt = \int f(t) \widehat{\Phi}_\varepsilon(t-x)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

v) A iv)-ben mondottakhoz kapcsolódva lássuk be az alábbi állítást. Legyen ehhez $\varphi \in L^1 \cap C_0$ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\psi(x) := \|\varphi\cdot \chi_{\mathbf{R}^n \setminus K_{\|x\|}(0)}\|_\infty \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

valamint

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\cdot \varphi(x/\varepsilon) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, \varepsilon > 0).^{43}$$

Feltesszük, hogy $\psi \in L^1$ és $1 \le p \le +\infty$. Ekkor tetszőleges $f \in L^p$ függvényre az f bármely x Lebesgue-pontjában[44] igaz, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = f(x)\cdot \int \varphi(t)\, dt,$$

ahol

$$T_\varepsilon f(z) := \int f(t)\varphi_\varepsilon(t-z)\, dt \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Valóban, ha a $0 < \delta \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor válasszuk az $\eta > 0$ számot úgy, hogy

$$\frac{1}{r^n}\cdot \int_{K_r(0)} |f(x-t) - f(x)|\, dt < \delta \qquad (0 < r \le \eta).$$

Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számra

$$\int \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int \varphi(t)\, dt =: \alpha,$$

ezért

$$|T_\varepsilon f(x) - \alpha f(x)| = \left|\int (f(x+t) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt\right| \le$$

$$\left|\int_{K_\eta(0)} (f(x+t) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt\right| + \left|\int_{\mathbf{R}^n \setminus K_\eta(0)} (f(x+t) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt\right| =:$$

$$I_1 + I_2.$$

Az egyszerűség kedvéért csak az $n = p = 1$ esetben részletezzük a bizonyítás további részét (az egyéb esetek analóg módon „intézhetők” el).

---

[43] Ahol tehát $K_r(0) = \{t \in \mathbf{R}^n : \|t\| < r\}$ $(r > 0)$ és $K_0(0) := \emptyset$.

[44] Tehát $\lim_{r\to 0} r^{-n}\cdot \int_{K_r(0)} |f(x-t) - f(x)|\, dt = 0$. Emlékeztetünk arra, hogy m.m $x \in \mathbf{R}^n$ pont ilyen.

Az I_1 becsléséhez vegyük észre, hogy a

$$\psi_0(r) := \psi(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R},\ r = |x|)$$

függvénnyel (ami nyilván monoton fogyó és a ψ integrálhatósága miatt integrálható, azaz $\lim_{r\to+\infty} \psi_0(r) = 0$)

$$r\psi_0(r) \leq \int_{\{t\in\mathbf{R}:\, r/2\leq\|t\|\leq r\}} \psi(x)\,dx \to 0 \qquad (r \to 0,\ \text{vagy}\ r \to +\infty).$$

Következésképpen $r\psi_0(r) \to 0$, ha $r \to 0$, vagy $r \to +\infty$. Ezért van olyan $C > 0$ konstans, amellyel

$$r\psi_0(r) \leq C \qquad (0 < r < +\infty).$$

Mindezt előrebocsátva azt mondhatjuk, hogy

$$I_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot \int_{-\eta}^{\eta} |f(x+t) - f(x)|\cdot \psi(t/\varepsilon)\,dt =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot \int_0^{\eta} (|f(x-r) - f(x)| + |f(x+r) - f(x)|)\cdot \psi_0(r/\varepsilon)\,dr.$$

Legyen

$$G(s) := \int_0^s (|f(x-s) - f(x)| + |f(x+s) - f(x)|)\,ds \qquad (s \geq 0).$$

Ekkor a δ és az η megválasztásából

$$\int_{-r}^{r} |f(x-t) - f(x)|\,dt = \int_0^r (|f(x-t) - f(x)| + |f(x+t) - f(x)|)\,dt =$$

$$G(r) \leq r\delta \qquad (0 < r \leq \eta).$$

Tehát parciális integrálással

$$I_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot \int_0^{\eta} G'(r)\psi_0(r/\varepsilon)\,dr = \frac{G(\eta)\psi_0(\eta/\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot \int_0^{\eta} G(r)\,d(\psi_0(r/\varepsilon)) \leq$$

$$\frac{\eta\delta\psi_0(\eta/\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot \int_0^{\eta/\varepsilon} G(r\varepsilon)\,d(\psi_0(r)) \leq C\cdot \delta - \delta\cdot \int_0^{\eta/\varepsilon} r\,d(\psi_0(r)) \leq$$

$$\leq \delta\cdot \left(C - \int_0^{+\infty} r\psi_0'(r)\, dr \right) = \delta\cdot \left(C + \int_0^{+\infty} \psi_0(r)\, dr \right) =$$

$$\delta\cdot \left(C + \frac{1}{2}\cdot \int \psi(x)\, dx \right) =: B\cdot \delta.$$

A most definiált B konstans nyilván csak a ψ-től függ.

Az I_2 becsléséhez legyen

$$g_\eta := \chi_{\mathbf{R}\setminus(-\eta,\eta)} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{\psi(x/\varepsilon)}{\varepsilon} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$I_2 \leq \|f\|_1\cdot \|g_\eta \psi_\varepsilon\|_\infty + |f(x)|\cdot \|g_\eta \psi_\varepsilon\|_1.$$

Az előbbi becslés második tagjáról $\psi \in L^1$ miatt a következőt mondhatjuk:

$$\|g_\eta \psi_\varepsilon\|_1 = \int_{\mathbf{R}\setminus(-\eta,\eta)} \psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}\setminus(-\eta/\varepsilon,\eta/\varepsilon)} \psi(x)\, dx \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ugyanakkor

$$\eta\cdot \|g_\eta \psi_\varepsilon\|_\infty = \frac{\eta}{\varepsilon}\cdot \psi_0(\eta/\varepsilon) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Figyelembe véve az előbb az I_1-ről mondottakat az állításunkat bebizonyítottuk.

vi) Az előbbi megjegyzésbeli szereplőkkel a

$$g_\lambda := \varphi_{1/\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

függvénysereg $\int \varphi(t)\, dt = 1$ esetén nyilván egységapproximáció (ld. i), ii)), ezért a ii)-ben megfogalmazott állítás szerint tetszőleges $f \in X$ függvényre

$$\|T_\varepsilon f - f\|_* \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0),$$

ahol

$$(X, \|.\|_*) := \begin{cases} (L^p, \|.\|_p) & (1 \leq p < +\infty) \\ \\ (C_0, \|.\|_\infty) & (p = +\infty). \end{cases}$$

Speciálisan (ld. iv)), ha $\Phi,\,\widehat{\Phi}\in L^1\cap C_0$ és $\int\widehat{\Phi}(t)\,dt=1,$ akkor bármely $f\in L^1$ függvénnyel az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált

$$\int\widehat{f}(t)e^{-\imath\langle t,x\rangle}\cdot\Phi(\varepsilon t)\,dt\qquad(x\in\mathbf{R}^n)$$

Φ-integrálközepei $\varepsilon\to 0$ esetén az $\|.\|_1$-normában konvergálnak az f-hez. Ha itt még $\widehat{f}\in L^1$ is igaz, akkor (az inverziós formula (ld. 2.2.) fentebbi bizonyításában már alkalmazott „technikával") azt kapjuk, hogy a $c:=\Phi(0)$ jelöléssel

$$f(x)=c\cdot\int\widehat{f}(t)e^{-\imath\langle t,x\rangle}\,dt\qquad(\text{m.m. }x\in\mathbf{R}^n).$$

Így pl. (ld. 1.3. ii) megjegyzés) a

$$\Phi(t):=\frac{e^{-\|t\|^2/2}}{(2\pi)^n}\qquad(t\in\mathbf{R}^n)$$

választással $c=(2\pi)^{-n}$, így újfent adódik az inverziós formula. Világos, hogy ha

$$\widehat{f}(x)=0\qquad(\text{m.m. }x\in\mathbf{R}^n),$$

akkor ugyanez igaz az f függvényre is. Innen rögtön következik a Fourier-transzformáció injektivitása: ha $f,\,g\in L^1$ és

$$\widehat{f}(x)=\widehat{g}(x)\qquad(\text{m.m. }x\in\mathbf{R}^n),$$

akkor $f(x)=g(x)$ (m.m. $x\in\mathbf{R}^n$).

vii) Válasszuk pl. vi)-ban ($n=1$ esetén) a

$$\varphi(t):=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\qquad(t\in\mathbf{R})$$

függvényt. Ekkor a φ-t illetően nyilván teljesülnek a vi)-ban (és az v)-ben) megfogalmazott feltételek, ezért akármelyik $f\in C_0$ függvényre

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|T_\varepsilon f-f\|_\infty=0,$$

ahol

$$T_\varepsilon f(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\cdot\int f(t)e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2}\,dt\qquad(x\in\mathbf{R}).$$

Mutassuk meg a fentiek alapján, hogy igaz a Weierstrass-féle approximációs tétel, nevezetesen: *ha* $-\infty < a < b < +\infty$ *és a*

$$g : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvény folytonos, akkor minden $\delta > 0$ *számhoz van olyan* P *(algebrai) polinom, amellyel*

$$\|g - P\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x) - P(x)| < \delta.$$

Terjesszük ki ehhez a g függvényt az egész számegyenesre úgy, hogy a kiterjesztett függvényre (jelöljük ezt f-fel) $f \in C_0$ és

$$\operatorname{supp} f \subset [a-1, b+1]$$

teljesüljön.[45] Ekkor

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|T_\varepsilon f - f\|_\infty = 0$$

miatt tetszőleges $\sigma > 0$ számhoz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\|T_\varepsilon f - f\|_\infty < \sigma.$$

Következésképpen

$$\max_{a \le x \le b} \left| g(x) - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot \int_{a-1}^{b+1} f(t) e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2}\, dt \right| < \sigma.$$

Ha $x \in [a,b]$ és $t \in [a-1, b+1]$, akkor

$$\frac{t-x}{\varepsilon} \in [c,d],$$

ahol

$$c := \frac{a-b-1}{\varepsilon} \quad \text{és} \quad d := \frac{b-a+1}{\varepsilon}.$$

A $[c,d]$ intervallumon a $z \mapsto e^{-z^2/\varepsilon^2}$ függvény 0-körüli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!}$$

[45] Ezt nyilván megtehetjük.

Taylor[46]-sora egyenletesen konvergens, így alkalmas $N \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$\left| e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{(t-x)^{2k}}{\varepsilon^{2k} k!} \right| < \sigma \qquad (x \in [a,b],\ t \in [a-1,b+1]).$$

Következésképpen a

$$C := (b-a+2) \cdot \|f\|_\infty$$

konstanssal tetszőleges $x \in [a,b]$ helyen

$$\left| \int_{a-1}^{b+1} f(t) e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2}\, dt - \int_{a-1}^{b+1} f(t) \cdot \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{(t-x)^{2k}}{\varepsilon^{2k} k!}\, dt \right| =$$

$$\left| \int_{a-1}^{b+1} f(t) \cdot \left(e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{(t-x)^{2k}}{\varepsilon^{2k} k!} \right) dt \right| \le C \cdot \sigma.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\max_{a \le x \le b} \left| g(x) - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{\varepsilon^{2k} k!} \cdot \int_{a-1}^{b+1} f(t)(t-x)^{2k}\, dt \right| \le$$

$$\le \max_{a \le x \le b} \left| g(x) - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot \int_{a-1}^{b+1} f(t) e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2}\, dt \right| +$$

$$\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot \max_{a \le x \le b} \left| \int_{a-1}^{b+1} f(t) \cdot \left(e^{-(t-x)^2/\varepsilon^2} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{(t-x)^{2k}}{\varepsilon^{2k} k!} \right) dt \right| \le$$

$$\left(1 + \frac{C}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \right) \cdot \sigma.$$

Mivel (a binomiális tételt alkalmazva)

$$\int_{a-1}^{b+1} f(t)(t-x)^{2k}\, dt =$$

$$\sum_{j=0}^{2k} \left(\binom{2k}{j} (-1)^j \cdot \int_{a-1}^{b+1} f(t) t^{2k-j}\, dt \right) x^j =: \sum_{j=0}^{2k} c_{kj} x^j \qquad (k = 0, ..., N),$$

[46] Brook Taylor (Edmonton, 1685. VIII. 18. – Somerset House, 1731. XII. 29.)

ezért a

$$P(z) := \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{\varepsilon^{2k} k!} \cdot \sum_{j=0}^{2k} c_{kj} z^j \qquad (z \in \mathbf{R})$$

függvény olyan polinom, amellyel

$$\max_{a \le x \le b} |g(x) - P(x)| \le \left(1 + \frac{C}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\right) \cdot \sigma < \delta,$$

hacsak a σ „elég kicsi”.

viii) Legyen $f \in L^1$, ekkor az $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltnak a vi) megjegyzésben (az ottani szereplőkkel) említett

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} \cdot \Phi(\varepsilon t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

Φ-integrálközepei $\varepsilon \to 0$ esetén az v) megjegyzés szerint az $f(x)$-hez tartanak az f függvény minden x Lebesgue-pontjában. Nyilván minden olyan x pont ilyen, amelyben az f folytonos, így $f \in C\{x\}$ esetén

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} \cdot \Phi(\varepsilon t)\, dt = f(x).$$

Ha tehát $f \in C\{0\}$, akkor

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{f}(t) \Phi(\varepsilon t)\, dt = f(0).$$

Tegyük fel, hogy $\widehat{f} \ge 0$ és legyen

$$\Phi(t) := \frac{e^{-\|t\|^2/2}}{(2\pi)^n} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{f}(t) e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2}\, dt = (2\pi)^n \cdot f(0),$$

következésképpen a Fatou[47]-lemma[48] miatt

$$\int |\widehat{f}(t)|\, dt = \int \widehat{f}(t)\, dt = \int \liminf_{\varepsilon \to 0} \widehat{f}(t) e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2}\, dt \le$$

[47] Pierre Joseph Louis Fatou (Lorient, 1878. II. 28. – Pornichet, 1929. VIII. 10.)

[48] Ha adott (X, Ω, μ) mértéktér esetén az $f_k : X \to [0, +\infty]$ $(k \in \mathbf{N})$ függvények valamennyien mérhetők, akkor $\int \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu$. Ha itt még van olyan $F : X \to [0, +\infty]$ mérhető függvény, amelyre $\int F\, d\mu < +\infty$ és $f_k \le F$ $(k \in \mathbf{N})$, akkor $\limsup_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu \le \int \limsup_{k\to\infty} f_k\, d\mu$ is igaz.

$$\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int \widehat{f}(t)e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \widehat{f}(t)e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2}\,dt =$$

$$(2\pi)^n\cdot f(0) < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy $\widehat{f} \in L^1$. Más szóval, ha az $f \in L^1$ függvényre $\widehat{f} \geq 0$ és $f \in C\{0\}$ teljesül, akkor igaz az inverziós formula (ld. 2.2.):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{f}(t)e^{-\imath\langle t,x\rangle}\,dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

továbbá

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{f}(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{f}}\,(0).$$

Legyen pl. ($n = 1$ esetén)

$$K(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\cdot \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \\ \dfrac{1}{2\pi} & (x = 0) \end{cases}$$

az ún. *Fejér-mag* (ld. még 3.3. iv) megjegyzés). Ekkor (ld. 1.2.2.1.) a $\mathbf{h}_1$ háromszögfüggvénnyel

$$K = \frac{1}{2\pi}\cdot \widehat{\mathbf{h}}_1.$$

Világos, hogy $0 \leq K \in L^1$ és $\mathbf{h}_1 \in C\{0\}$, ezért

$$\int K(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{\mathbf{h}}_1(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot \widehat{\widehat{\mathbf{h}}}_1(0) = \mathbf{h}_1(0) = 1.$$

Ez azt jelenti (ld. ii)), hogy a

$$K_\lambda(x) := \lambda\cdot K(\lambda x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, \lambda > 0)$$

egyenlőséggel értelmezett K_λ $(\lambda > 0)$ függvénysereg egységapproximációt alkot, következésképpen

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|f - K_\lambda * f\|_1 = 0 \qquad (f \in L^1).$$

Megjegyezzük, hogy egyszerű számolással ellenőrizhető, miszerint

$$\widehat{\mathbf{h}}_1(x) = \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \int_{-1}^{1}(1 - |z|)\cdot e^{\imath xz}dz \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Így az előbbi $f \in L^1$ függvénnyel és $\lambda > 0$ paraméterrel (a Fubini-tételt és az 1.3. i) megjegyzést felhasználva)[49]

$$K_\lambda * f(x) = \int f(x-t)K_\lambda(t)\,dt = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\int f(x+t)\widehat{\mathbf{h}}_1(\lambda t)\,dt =$$

$$\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\int f(x+t)\cdot\left(\int_{-1}^{1}(1-|z|)\cdot e^{\imath\lambda tz}dz\right)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int f(x+t)\cdot\left(\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-|y|/\lambda)\cdot e^{\imath ty}dy\right)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int \mathcal{T}_x f(t)e^{\imath ty}dt\right)\cdot(1-|y|/\lambda)\,dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda}\widehat{\mathcal{T}_x f}(y)\cdot(1-|y|/\lambda)\,dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-|y|/\lambda)\cdot\widehat{f}(y)e^{-\imath xy}dy \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Továbbá az is nyilvánvaló, hogy

$$(K_\lambda * f)^\wedge = \widehat{K}_\lambda\cdot\widehat{f}$$

és (ld. 1.3. v) megjegyzés)

$$\widehat{K}_\lambda(x) = \widehat{K}(x/\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\widehat{\widehat{\mathbf{h}}}_1(x/\lambda) = \mathbf{h}_1(x/\lambda) =$$

$$\max\{1-|x|/\lambda\} = 0 \qquad (|x|\geq 1)$$

miatt a $(K_\lambda * f)^\wedge$ Fourier-transzformált kompakt tartójú.

Ha tehát az $\mathcal{L}$ szimbólum jelöli azoknak az L^1-beli függvényeknek a halmazát, amelyeknek a Fourier-transzformáltja kompakt tartójú, akkor az $\mathcal{L}$ (az $\|.\|_1$ norma szerint) egy sűrű altér az L^1-ben (ld. még 4.3. i) megjegyzés).

ix) (*Szőkefalvi-Nagy*[50] (1948), (*Young*–)*Hardy*[51] (1922).) Bármely (a 2π szerint periodikus) $f \in C[-\pi,\pi]$ függvény és $x \in [-\pi,\pi]$ esetén (ld. 2.4.1. az ottani jelölésekkel)

$$\sigma_m^\theta f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int f(x-t/m)\widehat{\theta}(t)\,dt.$$

---

[49] Vegyük figyelembe, hogy a $\widehat{\mathbf{h}}_1$ Fourier-transzformált páros függvény.

[50] Szőkefalvi-Nagy Béla (Kolozsvár, 1913. VII. 29. – Szeged, 1998. XII. 21.)

[51] Godfrey Harold Hardy (Cranleigh, 1877. II. 7. – Cambridge, 1947. XII. 1.)

A

$$T_m^\theta = \sigma_m^\theta \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

egyenlőségből ui.

$$\sigma_m^\theta f(x) = f \star \theta_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-t)\theta_m(t+2k\pi)\,dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-(t+2k\pi))\theta_m(t+2k\pi)\,dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-(t+2k\pi))\theta_m(t+2k\pi)\,dt = \int f(x-t)\theta_m(t)\,dt =$$

$$\frac{m}{2\pi}\cdot \int f(x-t)\widehat{\theta}(mt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int f(x-t/m)\widehat{\theta}(t)\,dt.$$

x) Az inverziós formula (ld. 2.2.) és a Plancherel-tétel, valamint a Parseval-egyenlőség (ld. 1.2.3., valamint xiv)) kapcsolatát illetően induljunk ki először az utóbbi kettő fennállásából. Ekkor

$$\widehat{f}(x) = \int f(t)K(x,t)\,dt \qquad (f,\, \widehat{f} \in L^1 \cap L^2,\, x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol

$$K(u,v) := e^{\imath\langle u,v\rangle} \qquad (u,\, v \in \mathbf{R}^n)$$

alapján az

$$L^1 \cap L^2 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2$$

operátor adjungáltja (azaz az unitér volta miatt az inverze) a fentiek alapján az

$$\mathbf{R}^n \ni (u,v) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \overline{K(v,u)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot e^{-\imath\langle u,v\rangle}$$

magfüggvény által meghatározott T integráloperátor. Tehát

$$f(x) = T\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}dt \qquad (f,\, \widehat{f} \in L^1 \cap L^2,\, x \in \mathbf{R}^n),$$

ami nem más, mint az inverziós formula.

Fordítva, ha $f \in L^1 \cap L^2$, akkor (ld. 1.1.)

$$\|f\|_2^2 = \int f(t)\overline{f(t)}\,dt = f * F(0),$$

ahol

$$F(t) := \overline{f(-t)} \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Továbbá $F \in L^1 \cap L^2$ és $\widehat{f * F} = \widehat{f} \cdot \widehat{F}$, valamint

$$\widehat{F}(x) = \int F(t)e^{\imath\langle x,t\rangle}dt = \overline{\int f(-t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}dt} =$$

$$\overline{\int f(t)e^{\imath\langle x,t\rangle}dt} = \overline{\widehat{f}(x)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Így

$$\widehat{f * F} = |\widehat{f}|^2 \geq 0.$$

Mivel $f, F \in L^2$, ezért tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ esetén a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$|f * F(x) - f * F(0)| = \left| \int f(t)(F(x-t) - F(-t))\,dt \right| \leq$$

$$\|f\|_2 \cdot \sqrt{\int |f(t-x) - f(t)|^2\,dt} = \|f\|_2 \cdot \|\mathcal{T}_{-x}f - f\|_2 \to 0 \qquad (x \to 0).$$

Tehát $f * F \in C\{0\}$, amiből a viii) megjegyzés alapján az inverziós formulának az $f * F$-re való alkalmazhatósága következik:

$$f * F(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f * F}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int |\widehat{f}(t)|^2 \cdot e^{-\imath\langle x,t\rangle}dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Speciálisan az $x := 0$ választással

$$\|f\|_2^2 = f * F(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int |\widehat{f}(t)|^2\,dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \|\widehat{f}\|_2^2,$$

ami a Plancherel-tétel.

xi) Mutassuk meg, hogy ha $n=1$ és $f\in C^2$, továbbá

$$f,\, f',\, f''\in L^1,$$

akkor $\widehat{f}\in L^1$. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy ha a

$$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

függvény folytonosan differenciálható és $g,\, g'\in L^1$, akkor

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

és

$$g(x)=\int_{-\infty}^{x} g'(t)\,dt \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Nyilván

$$\int g'(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} g'(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

is létezik és $g'\in L^1$ miatt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

Következésképpen az előbbi f-re vonatkozó feltételek alapján

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=0.$$

Ezért tetszőleges $0\neq x\in\mathbf{R}$ helyen (parciálisan integrálva)

$$\widehat{f}(x)=\int f(t)e^{\imath tx}dt=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)e^{\imath tx}dt=$$

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{f(a)e^{\imath ax}-f(-a)e^{-\imath ax}}{\imath x}-\frac{1}{\imath x}\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f'(t)e^{\imath tx}dt=$$

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{f'(a)e^{\imath ax}-f'(-a)e^{-\imath ax}}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f''(t)e^{\imath tx}dt=$$

$$-\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f''(t)e^{\imath tx}dt=-\frac{1}{x^2}\cdot\int f''(t)e^{\imath tx}dt=-\frac{1}{x^2}\cdot\widehat{f''}(x).$$

Mivel a feltétel szerint $f''\in L^1$, így

$$\|\widehat{f''}\|_\infty\leq\|f''\|_1,$$

tehát alkalmas $C>0$ konstanssal

$$|\widehat{f}(x)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \|f\|_1 & (|x| \leq 1) \\ \\ \dfrac{1}{x^2} \cdot \|f''\|_1 & (|x| > 1) \end{array} \right\} \leq \frac{C}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Innen már világos, hogy $\widehat{f} \in L^1$ (és így „működik” az inverziós formula).

xii) Speciálisan azt kapjuk a xi) megjegyzésben követett számolásból, hogy

$$n=1,\ f \in C^1,\ f,\ f' \in L^1$$

esetén (ld. 1.2.4.)

$$\widehat{f'}(x) = -\imath x \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ebből a szempontból elegendő azt feltenni, hogy az $f \in L^1$ függvény abszolút folytonos. Ekkor ui.

$$f \in D\{x\} \quad (\text{m.m. x} \in \mathbf{R}) \text{ és } f' \in L^1,$$

továbbá

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

xiii) Lássuk be, hogy ha $f,\ \widehat{f} \in L^1$, akkor $f \in L^2$ (és egyúttal $\widehat{f} \in L^2$). A feltétel miatt ui. az f-re alkalmazható az inverziós formula (ld. 2.2.):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{F}(-x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $F := \widehat{f}$. Mivel az $\widehat{F}$ folytonos és a Riemann–Lebesgue-lemma (ld. 1.2.) alkalmazásával

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \widehat{F}(x) = 0,$$

ezért van olyan $r>0$, hogy

$$|\widehat{F}(x)| < 1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus G_r).$$

Következésképpen

$$\int |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{G_r} |\widehat{F}(x)|^2\, dx + \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\widehat{F}(x)|^2\, dx \leq$$

$$\leq \frac{|G_r|}{(2\pi)^{2n}} \cdot \max_{x \in G_r} |\widehat{F}(x)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\widehat{F}(x)|\, dx \leq$$

$$\frac{|G_r|}{(2\pi)^{2n}} \cdot \max_{x \in G_r} |\widehat{F}(x)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{n}} \cdot \int |f(x)|\, dx < +\infty,$$

ahol a $|G_r|$ a

$$G_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq r\}$$

„gömb” (Lebesgue-)mértéke.[52]

A most mondottak alapján már könnyű igazolni az alábbiakat: ha

$$f,\, g,\, \widehat{f},\, \widehat{g} \in L^1,$$

akkor

$$(1^o) \qquad \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}\, dt = (2\pi)^n \cdot \int f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

és

$$(2^o) \qquad \|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2.$$

Nyilvánvaló, hogy a (2^o) következik az (1^o)-ből $(g := f)$. Az (1^o) bizonyításához vegyük észre, hogy a Fubini-tételt és az inverziós formulát alkalmazva

$$\int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}\, dt = \int \widehat{f}(x) \cdot \left(\int \overline{g(t)} e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \right) dx =$$

$$\int \left(\int \widehat{f}(x) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dx \right) \cdot \overline{g(t)}\, dt = (2\pi)^n \cdot \int f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$[53]

[52] A következőképpen is eljárhatunk: ti. $L^1 \cap L^\infty \subset L^2$. Valóban, ha $g \in L^1 \cap L^\infty$, akkor egyrészt az $A := \{x \in \mathbf{R}^n : |g(x)| > 1\}$ nívóhalmazzal $+\infty > \int |g(x)|\, dx \geq \int_A |g(x)|\, dx \geq |A|$. Másrészt $\int |g(x)|^2\, dx = \int_{\mathbf{R}^n \setminus A} |g(x)|^2\, dx + \int_A |g(x)|^2\, dx \leq \int_{\mathbf{R}^n \setminus A} |g(x)|\, dx + \|g\|_\infty^2 \cdot |A|$, ahol $\|g\|_\infty^2 \cdot |A| < +\infty$ és $\int_{\mathbf{R}^n \setminus A} |g(x)|\, dx \leq \|g\|_1 < +\infty$. Tehát $\|g\|_2 < +\infty$. Persze, egyszerűen azt is megtehetjük, hogy $|g(x)|^2 \leq \|g\|_\infty \cdot |g(x)|$ (m.m. $x \in \mathbf{R}^n$). Így $\|g\|_2^2 = \int |g(x)|^2\, dx \leq \|g\|_\infty \cdot \int |g(x)|\, dx$, más szóval $\|g\|_2 \leq \sqrt{\|g\|_\infty \cdot \|g\|_1} < +\infty$. Ha $f,\, \widehat{f} \in L^1$, akkor az $\widehat{f} \in L^\infty$ korlátosságból $\widehat{f} \in L^1 \cap L^\infty$ és emiatt $\widehat{f} \in L^2$. Ugyanakkor az inverziós formula szerint $f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \widehat{g}(-x)$ (m.m. $x \in \mathbf{R}^n$), ahol $g := \widehat{f}$. Ezért $\widehat{g} \in L^\infty$ alapján megint csak azt mondhatjuk, hogy $f \in L^1 \cap L^\infty$, következésképpen $f \in L^2$.

[53] Megjegyezzük, hogy az $|\widehat{f}(x)\overline{g(t)}e^{-\imath\langle x,t\rangle}| = |\widehat{f}(x)| \cdot |g(t)|$ $(x, t \in \mathbf{R}^n)$ egyenlőség és az $\widehat{f},\, g \in L^1$ tartalmazás miatt a $\mathbf{R}^{2n} \ni (x,t) \mapsto \widehat{f}(x)\overline{g(t)}e^{-\imath\langle x,t\rangle}$ leképezés integrálható („kétváltozós”) függvény, ezért valóban alkalmazható volt a Fubini-tétel.

xiv) Az előbbi megjegyzést felhasználva nem nehéz bebizonyítani az L^2-beli függvények Fourier-transzformáltjával kapcsolatban az 1.2.3. pontban megfogalmazott állításokat. Ehhez először is jegyezzük meg, hogy tetszőlegesen választott $f \in L^2$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan kompakt tartójú $g \in C^2$ függvény, hogy
$$\|f-g\|_2 < \varepsilon.$$
Aaz egyszerűség kedvéért csak az $n = 1$ esetre szorítkozva létezik olyan
$$h = \sum_k c_k \cdot \chi_{[a_k,b_k]}$$
lépcsősfüggvény[54], amellyel
$$\|f-h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Világos, hogy bármely itt szereplő (véges sok) k-hoz és minden $\delta > 0$ számhoz megadható olyan $g_k \in C^2$ kompakt tartójú függvény, hogy
$$\|g_k - \chi_{[a_k,b_k]}\|_2 < \delta.$$
Ha ezek után (a h-t definiáló összegben a $\chi_{[a_k,b_k]}$-kat a g_k-kra cserélve)
$$g := \sum_k c_k g_k,$$
akkor $g \in C^2$, kompakt tartójú és
$$\|h-g\|_2 \le \sum_k |c_k| \cdot \|g_k - \chi_{[a_k,b_k]}\|_2 \le \delta \cdot \sum_k |c_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$
hacsak a $\delta > 0$ „elég kicsi". Következésképpen
$$\|f-g\|_2 \le \|f-h\|_2 + \|h-g\|_2 < \varepsilon.$$
Az előbbi g függvényre nyilván alkalmazható a xi) megjegyzés, miszerint $g, \widehat{g} \in L^1$. Mindez azt jelenti (ld. xiii)), hogy akármelyik $f \in L^2$ függvényhez megadható olyan $L^1 \cap L^2$-beli $(f_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy egyúttal a transzformáltak $(\widehat{f_k}, k \in \mathbf{N})$ sorozata is $L^1 \cap L^2$-beli és
$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

[54] Ahol tehát a $\sum_k \dots$ összegzés véges sok tagra vonatkozik.

Ekkor minden $j,k \in \mathbf{N}$ esetén

$$\|\widehat{f}_k - \widehat{f}_j\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f_k - f_j\|_2 \to 0 \qquad (j,\, k \to \infty),$$

amiből[55] az $(\widehat{f}_k, k \in \mathbf{N})$ sorozatnak a $\|.\|_2$ normában való konvergenciája is következik. Van tehát olyan $F \in L^2$, amellyel

$$\|\widehat{f}_k - F\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Könnyű meggondolni, hogy az előbbi F függvény csak az f-től függ. Más szóval, ha a

$$g_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló sorozat is olyan, hogy

$$\widehat{g}_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és

$$\|f - g_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

akkor a

$$\|G - \widehat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

módon definiált $G \in L^2$ függvényre

$$F(x) = G(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Ti.

$$\|F - G\|_2 \le \|F - \widehat{f}_k\|_2 + \|\widehat{g}_k - \widehat{f}_k\|_2 + \|G - \widehat{g}_k\|_2 =$$

$$\|F - \widehat{f}_k\|_2 + (2\pi)^{n/2} \cdot \|g_k - f_k\|_2 + \|G - \widehat{g}_k\|_2 \le$$

$$\|F - \widehat{f}_k\|_2 + (2\pi)^{n/2} \cdot (\|f_k - f\|_2 + \|f - g_k\|_2) + \|G - \widehat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Innen $\|F - G\|_2 = 0$, így az előbb jelzett, m.m. értelemben vett egyenlőség valóban következik.

Ha az eddigiekben $f \in L^1 \cap L^2$, akkor

$$F(x) = \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

[55] Lévén az $(L^2, \|.\|_2)$ Banach-tér.

Ekkor ui. (egyszerűen beláthatóan) a fenti $(f_k, k \in \mathbf{N})$ sorozatról az is feltehető, hogy

$$\|f - f_k\|_1 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Így minden $x \in \mathbf{R}^n$ helyen

$$|\widehat{f}(x) - \widehat{f}_k(x)| =$$

$$\left| \int (f(t) - f_k(t))\, e^{\imath\langle x,t\rangle} dt \right| \leq \|f - f_k\|_1 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

tehát

$$\widehat{f}_k(x) \to \widehat{f}(x) \qquad (k \to \infty),$$

mégpedig az x-ben egyenletesen. Tudjuk, hogy

$$\|\widehat{f}_k - F\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Legyen $r > 0$, ekkor (ld. xiii))

$$\sqrt{\int_{G_r} |F(x) - \widehat{f}(x)|^2\, dx} \leq$$

$$\sqrt{\int_{G_r} |F(x) - \widehat{f}_k(x)|^2\, dx} + \sqrt{\int_{G_r} |\widehat{f}(x) - \widehat{f}_k(x)|^2\, dx} \leq$$

$$\|F - f_k\|_2 + \sqrt{|G_r|} \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\widehat{f}(x) - \widehat{f}_k(x)| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\int_{G_r} |F(x) - \widehat{f}(x)|^2\, dx = 0,$$

ezért

$$F(x) = \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in G_r).$$

Mivel itt az $r > 0$ tetszőleges, ezért az

$$F(x) = \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n)$$

egyenlőség már következik.

Összefoglalva a jelen megjegyzésbeli előzetes fejtegetéseinket kézenfekvő tehát a következő definíció: ha $f \in L^2$, akkor legyen

$$\widehat{f} := F.$$

xv) Lássuk be, hogy

1^o bármely $f,\, g \in L^2$ esetén:

a) $\langle \widehat{f},\, \widehat{g}\rangle = (2\pi)^n \cdot \langle f, g\rangle$ (*Parseval-egyenlőség*);

b) $\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2$ (*Plancherel-formula*);

c) $\int \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int f(x) \widehat{g}(x)\, dx$ (*szorzási szabály*).

2^o Ha $n = 1$ és $f \in L^2 \cap D$, valamint $f' \in L^2$, akkor

$$\widehat{f'}(x) = -\imath x \cdot \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

3^o Tegyük fel, hogy $f \in L^1$, $g \in L^2$. Ekkor

$$\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{g}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n)$$ [56]

és (ld. 2.3.) alkalmas $g_k \in \mathcal{S}$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \lim_{k \to \infty} \int \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}_k(t) e^{-\imath \langle t, x\rangle} dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

4^o Tetszőleges $f, g \in L^2$ függvényekre

$$\widehat{f * g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t) e^{-\imath t x} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

és

$$(2\pi)^n \cdot \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Az 1^o igazolásához legyen először is az L^1-beli $(f_k, k \in \mathbf{N})$ és a $(g_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat olyan, hogy

$$\widehat{f}_k,\, \widehat{g}_k \in L^1 \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

és

$$\|g - g_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

[56] Ld. még 4.3. i) megjegyzés. Emlékeztetünk arra (ld. 1.1.), hogy $f, g \in L^2$ esetén csak annyit mondhatunk, hogy $f * g \in L^\infty$, így az $\widehat{f * g}$-nek nincs értelme.

akkor a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$\left|\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle-\langle\widehat{f_k},\widehat{g_k}\rangle\right|\le\left|\langle\widehat{f}-\widehat{f_k},\widehat{g}\rangle\right|+\left|\langle\widehat{f_k},\widehat{g}-\widehat{g_k}\rangle\right|\le$$

$$\|\widehat{f}-\widehat{f_k}\|_2\cdot\|\widehat{g}\|_2+\|\widehat{f_k}\|_2\cdot\|\widehat{g}-\widehat{g_k}\|_2\le$$

$$\|\widehat{f}-\widehat{f_k}\|_2\cdot\|\widehat{g}\|_2+\sup_{j\in\mathbf{N}}\|\widehat{f_j}\|_2\cdot\|\widehat{g}-\widehat{g_k}\|_2\to 0\qquad(k\to\infty).$$ [57]

Ezért igaz az

$$\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle\widehat{f_k},\widehat{g_k}\rangle$$

egyenlőség. A xiii) megjegyzésben viszont már láttuk, hogy

$$\langle\widehat{f_k},\widehat{g_k}\rangle=(2\pi)^n\cdot\langle f_k,g_k\rangle\qquad\qquad(k\in\mathbf{N}),$$

ahol (az előbbiek analógiájára)

$$\langle f_k,g_k\rangle\to\langle f,g\rangle\qquad(k\to\infty).$$

Így

$$\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle=(2\pi)^n\cdot\langle f,g\rangle,$$

ami az a) állítás.

A b)-beli Plancherel-formula nyilván speciális esete az a) Parseval-egyenlőségnek (a $g:=f$ választással).

A c) szorzási szabály igazolása az a) egyenlőséghez hasonló módon történhet. Ha ui. az

$$f_k,\ g_k\qquad(k\in\mathbf{N})$$

az a) bizonyításában szereplő függvények, akkor a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\left|\int\widehat{f}(x)g(x)\,dx-\int\widehat{f_k}(x)g_k(x)\,dx\right|\le$$

$$\left|\int(\widehat{f}(x)-\widehat{f_k}(x))g(x)\,dx\right|+\left|\int\widehat{f_k}(x)(g(x)-\widehat{g_k}(x))\,dx\right|\le$$

$$\|\widehat{f}-\widehat{f_k}\|_2\cdot\|g\|_2+\|\widehat{f_k}\|_2\cdot\|g-\widehat{g_k}\|_2\to 0\qquad(k\to\infty).$$

[57]Ui. (ld. xiii)) $\sup_{j\in\mathbf{N}}\|\widehat{f_j}\|_2=2^{n/2}\cdot\sup_{j\in\mathbf{N}}\|f_j\|_2<+\infty$.

Következésképpen

$$\int \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \widehat{f_k}(x)g_k(x)\,dx,$$

ahol minden $k \in \mathbf{N}$ esetén (az L^1-beli szorzási szabály (ld. 1.2.2.1.) miatt)

$$\int \widehat{f_k}(x)g_k(x)\,dx = \int \widehat{g_k}(x)f_k(x)\,dx.$$

Mivel (az előbbiekkel analóg módon)

$$\int f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \widehat{g_k}(x)f_k(x)\,dx,$$

ezért a c) már következik az eddigiekből.

A 2^o igazolásához először is vegyük észre, hogy az $f, f' \in L^2$ feltételezésből következően (ld. Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség) $f' \cdot f \in L^1$. Így

$$\left(f^2\right)' = 2f \cdot f' \in L^1,$$

más szóval az f^2 függvény abszolút folytonos[58] és

$$\int_0^{+\infty} f'(t) \cdot f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t) \cdot f(t)\,dt =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^2(x) - f^2(0)}{2}.$$

Innen világos, hogy létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x)$$

határérték, ami az $f^2 \in L^1$ integrálhatóságra tekintettel csak nulla lehet. Tehát (ugyanilyen meggondolás után)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

Legyen most már

$$g_k := f' \cdot \chi_{[-k,k]} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

[58] Az $f \in D$ differenciálhatóság helyett kiindulhatnánk abból, hogy az f abszolút folytonos. Ekkor ui. az f^2 is „automatikusan” abszolút folytonos.

amikor

$$\|f' - g_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ezért (ld. b))

$$\|\widehat{f'} - \widehat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

ahol $g_k \in L^1 \cap L^2 \quad (k \in \mathbf{N})$ miatt parciálisan integrálva (figyelembe véve azt, hogy az $f_{|_{[-k,k]}}$ függvény abszolút folytonos)

$$\widehat{g}_k(x) = \int_{-k}^{k} f'(t)e^{\imath xt}dt = f(k)e^{\imath kx} - f(-k)e^{-\imath kx} - \imath x\cdot \int_{-k}^{k} f(t)e^{\imath xt}dt =$$

$$f(k)e^{\imath kx} - f(-k)e^{-\imath kx} - \imath x\cdot \widehat{h}_k(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$h_k := f\cdot \chi_{[-k.k]} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Jegyezzük meg, hogy itt

$$\|f - h_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

tehát egyúttal (ld. b))

$$\|\widehat{f} - \widehat{h}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Így van olyan $(\nu_j, j \in \mathbf{N})$ indexsorozat,[59] amellyel

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{h}_{\nu_j}(x) = \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

teljesül. Ekkor persze

$$\|\widehat{f'} - \widehat{g}_{\nu_j}\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

is igaz, amiből ismét csak egy alkalmas $(\mu_l, l \in \mathbf{N})$ indexsorozattal

$$\lim_{l\to\infty} \widehat{g}_{\nu_{\mu_l}}(x) = \widehat{f'}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

adódik. Ugyanakkor az előzetes megjegyzésünk alapján

$$\lim_{k\to\infty} (f(k)e^{\imath kx} - f(-k)e^{-\imath kx}) = 0,$$

[59] Ha $1 \le p \le +\infty$ és az $f_k,\, f \in L^p \quad (k \in \mathbf{N})$ függvényekkel $\|f_k - f\|_p \to 0 \quad (k \to \infty)$, akkor valamilyen $(\nu_j, j \in \mathbf{N})$ indexsorozattal $\lim_{j\to\infty} f_{\nu_j}(x) = f(x) \quad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$.

más szóval

$$\widehat{f'}(x) = \lim_{l\to\infty} \widehat{g}_{\nu_{\mu_l}}(x) = -\imath x\cdot \lim_{l\to\infty} \widehat{h}_{\nu_{\mu_l}}(x) = -\imath x\cdot \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

A 3^o igazolásához legyen (ld. 2.3.) a

$$g_k \in \mathcal{S} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

sorozat olyan, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \|g - g_k\|_2 = 0.$$

Ekkor a Young-egyenlőtlenség (ld. 1.1.) alapján

$$\|f * g - f * g_k\|_2 = \|f * (g - g_k)\|_2 \le \|f\|_1 \cdot \|g - g_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

amiből (ld. 1.2.2.1.)

$$\|\widehat{f * g} - \widehat{f * g_k}\|_2 = \|\widehat{f * g} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ugyanakkor (ld. b))

$$\|\widehat{f * g_k} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}\|_2 = \|\widehat{f}\cdot \widehat{g}_k - \widehat{f}\cdot \widehat{g}\|_2 = \|\widehat{f}\cdot (\widehat{g}_k - \widehat{g})\|_2 \le \|\widehat{f}\,\|_\infty \cdot \|\widehat{g}_k - \widehat{g}\,\|_2 \le$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \|\widehat{f}\,\|_1 \cdot \|g_k - g\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Következésképpen

$$\|\widehat{f * g} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}\,\|_2 \le \|\widehat{f * g} - \widehat{f * g_k}\|_2 + \|\widehat{f * g_k} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}\,\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

más szóval

$$\|\widehat{f * g} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}\,\|_2 = 0 \Longrightarrow \widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\cdot \widehat{g}(x) \quad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Mivel (ld. fent)

$$\|\widehat{f}\cdot \widehat{g} - \widehat{f}\cdot \widehat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

ezért (ld. b))

$$\left\|\widehat{\widehat{f}\cdot \widehat{g}} - \widehat{\widehat{f * g_k}}\right\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Itt

$$f * g_k,\ \widehat{f * g_k} = \widehat{f}\cdot \widehat{g}_k \in L^1 \cap L^2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

is igaz, így az inverziós formula (ld. 2.2.) szerint

$$F_k(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{f * g_k}}(-x) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{f}\cdot \widehat{g}_k}(-x) = f * g_k(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\ \text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Továbbá (ld. 1.1.)

$$\|f * g_k - f * g\|_2 = \|f * (g_k - g)\|_2 \le \|f\|_1\cdot \|g_k - g\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

amiből

$$\|f * g - F_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

adódik. Ezért egy alkalmas $(\nu_k, k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal

$$f * g(x) = \lim_{k\to\infty} F_{\nu_k}(x) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \lim_{k\to\infty} \int \widehat{f}(t)\cdot \widehat{g}_{\nu_k}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Végül, a 4^o állítás $f,\, g \in \mathcal{S}$ esetén közvetlenül ellenőrizhető. Pl.

$$(2\pi)^n\cdot \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g} \iff (2\pi)^n\cdot \widehat{\widehat{fg}} = (\widehat{f} * \widehat{g})^\wedge,$$

ahol (ld. 2.2.)

$$(2\pi)^n\cdot \widehat{\widehat{fg}}(x) = (2\pi)^{2n}\cdot (fg)(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

és (ld. 1.2.2.)

$$(\widehat{f} * \widehat{g})^\wedge(x) = \widehat{\widehat{f}}\,(x)\cdot \widehat{\widehat{g}}(x) = (2\pi)^n\cdot f(-x)\cdot (2\pi)^n\cdot g(-x) =$$

$$(2\pi)^{2n}\cdot (fg)(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Innen az általános $f, g \in L^2$ esetet az előzőekkel analóg technikával kapjuk.

xvi) Gondoljuk meg, hogy ha $f \in L^2$ és az $(f_k, k \in \mathbf{N})$ tetszőleges olyan L^2-beli sorozat, amelyre

$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

akkor

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ti. a Plancherel-formula miatt

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_k\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Az

$$L^2 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2$$

leképezés nyilván lineáris, ezért az

$$\widehat{L^2} := \{\widehat{f} \in L^2 : f \in L^2\}$$

képtér altere az L^2-nek. Ez az altér a fenti (ld. xv)) 2^o miatt zárt is (az $(L^2, \|.\|_2)$ Banach-térben). Ha ui. $f_k \in L^2 \quad (k \in \mathbf{N})$ és az $(\widehat{f}_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|.\|_2$ normában konvergens: legyen

$$F := \lim_{k\to\infty} \widehat{f}_k,$$

azaz

$$\|\widehat{f}_k - F\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

akkor

$$\|f_k - f_j\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_j\|_2 \to 0 \qquad (k,\, j \to \infty).$$

Tehát van olyan $f \in L^2$, amellyel

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2 = 0.$$

Következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_k\|_2 = 0,$$

amiből $F = \widehat{f} \in \widehat{L^2}$, azaz az $\widehat{L^2}$ zártsága adódik.

Mutassuk meg, hogy $\widehat{L^2} = L^2$, más szóval: az

$$L^2 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2$$

Fourier-transzformáció szürjekció. Valóban, $\widehat{L^2} \neq L^2$ esetén a funkcionálanalízis alaptételei miatt lenne olyan $g \in L^2$, amelyre $\|g\|_2 \neq 0$ és

$$\int \widehat{f}(x) g(x)\, dx = 0 \qquad (f \in L^2)$$

teljesülne.[60] A fentiek szerint (ld. xv) 3^o szorzási szabály) ezért minden $f \in L^2$ függvényre fennállna, hogy

$$\int \widehat{g}(x) f(x)\, dx = 0,$$

amiből $\widehat{g} = 0\,(\in L^2)$, így

$$0 = \|\widehat{g}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|g\|_2$$

következne. Tehát $\|g\|_2 = 0$ lenne, ami (az indirekt feltételezésünk miatt) nem igaz.

xvii) A xv) megjegyzésbeli 3^o szorzási szabályt (is) felhasználva „pontonkénti" előállítást is adhatunk egy $f \in L^2$ függvény $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltjára. Csak az $n = 1$ esetre részletezve mindezt legyen ui. pl. $x > 0$ mellett $g := \chi_{[0,x]}$. Ekkor a 3^o alapján

$$\int_0^x \widehat{f}(t)\, dt = \int \widehat{f}(t) g(t)\, dt = \int f(t) \widehat{g}(t)\, dt =$$

$$-\imath \cdot \int f(t) \cdot \frac{e^{\imath xt} - 1}{t}\, dt =: F(x).$$

Mivel $\widehat{f} \in L^2$, ezért az $\widehat{f}$ lokálisan integrálható[61], az F pedig az integrálfüggvénye a $(0, +\infty)$ félegyenesen. Ezért az integrálfüggvények differenciálására vonatkozó Lebesgue-tétel alapján

$$\widehat{f}(x) = F'(x) \qquad (\text{m.m. } x > 0)$$

(és mindezt az $x < 0$ esetén is hasonló módon kapjuk). Ha itt $f \in L^1 \cap L^2$, akkor a

$$0 \neq t \mapsto \frac{e^{\imath ht} - 1}{ht}$$

függvény korlátossága miatt

$$\left| f(t) e^{\imath xt} \cdot \frac{e^{\imath ht} - 1}{ht} \right| \leq C \cdot |f(t)| \qquad (t,\, h \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

---

[60] (*Riesz-tétel.*) Legyen az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-térben az $Y \subset X$ valódi, zárt altér. Ekkor tetszőleges $x \in X \setminus Y$ elemhez egyértelműen létezik olyan $z \in Y$, hogy $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in Y\}$. Mindez azzal ekvivalens, hogy $x - z \perp Y$, azaz $\langle x - z, y \rangle = 0 \quad (y \in Y)$. Nyilván $x - z \neq 0$.

[61] Ha ui. a $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}$ halmaz kompakt, akkor a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva $\int_K |f(x)|\, dx = \int |f(x)| \cdot \chi_K(x)\, dx \leq \|f\|_2 \cdot \|\chi_K\|_2 = \|f\|_2 \cdot \sqrt{|K|} < +\infty$.

alkalmas $C > 0$ abszolút konstanssal. Tehát az

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\imath\cdot \lim_{h\to 0} \int f(t)\cdot \frac{e^{\imath(x+h)t} - e^{\imath xt}}{th}\, dt =$$

$$-\imath\cdot \lim_{h\to 0} \int f(t)e^{\imath xt}\cdot \frac{e^{\imath ht} - 1}{h}\cdot \frac{1}{t}\, dt$$

derivált kiszámításakor (az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségéről szóló Lebesgue-tétel alapján) a „$\lim_{h\to 0}$" operáció „bevihető" az integráljel mögé:

$$F'(x) = -\imath\cdot \int f(t)e^{\imath xt}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{\imath ht} - 1}{h}\cdot \frac{1}{t}\, dt =$$

$$\int f(t)e^{\imath xt} dt = \widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).^{62}$$

xviii) A 2^o Plancherel-formula (ld. xv) megjegyzés) alkalmazásával mutassuk meg, hogy

$$\int \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi.$$

Számítsuk ki ehhez az $f := \chi_{[-1,1]}$ függvény Fourier-transzformáltját: ha $x \neq 0$, akkor

$$\widehat{f}(x) = \int_{-1}^{1} e^{\imath xt} dt = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{\imath x} = \frac{2 \sin x}{x}.$$

Ezért a 2^o szerint

$$2\pi\cdot \|f\|_2^2 = 4\pi = \|\widehat{f}\|_2^2 = 4\cdot \int \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

xix) Egy L^1-beli f függvény Fourier-transzformáltját gyakran az

$$f^\circ(x) := \int f(t)e^{-2\pi\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

előírással értelmezik. Ekkor

$$f^\circ(x) = \widehat{f}(-2\pi x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

[62] Ezzel mellesleg újra megmutattuk az L^2-beli Fourier-transzformáció egyfajta permanenciáját, miszerint $f \in L^1 \cap L^2$ esetén az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált L^1-, ill. L^2-értelemben ugyanaz.

és az inverziós formula (ld. 2.2.) a következő alakot ölti:

$$f(x) = \int f^{\circ}(t) e^{2\pi\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

xx) Egy másik gyakori változat a Fourier-transzformáció értelmezésére az alábbi:

$$f^{\diamond}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int f(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Nyilván

$$f^{\diamond}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \widehat{f}(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

továbbá az inverziós formula alakja:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int f^{\diamond}(t) e^{\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

xxi) Ha

$$f^{\star} := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot f^{\diamond},$$

akkor az inverziós formula így néz ki:

$$f(x) = \int f^{\star}(t) e^{\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy

$$f^{\star}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int f(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt =$$

$$\int f(2\pi z) e^{-2\pi\imath\langle x,z\rangle} dz = F^{\circ}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol

$$F(z) := f(2\pi z) \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

3. fejezet

Absztrakció

Az eddigiekben (adott $1 \le n \in \mathbf{N}$ mellett) az

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

típusú függvények *trigonometrikus* Fourier-transzformáltját vizsgáltuk. A továbbiakban röviden bemutatjuk, hogy az előbb említett speciális vonások valójában csak látszólagosak, és az egész témakör egy sokkal általánosabb keretbe illeszthető. Ennek során vázlatosan érintjük a Fourier-sorok esetét és a gyakorlat szempontjából kiemelten fontos gyors Fourier-transzformációt, illetve mindennek a Walsh–Fourier-analízisbeli analogonjait.

3.1. Fourier-transzformált

Az eddigi vizsgálódásaink mögött az alábbi általános érvényű háttér húzódik meg. Legyen ti. az $(X, \mathcal{T})$ tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoport (ld. 1.1.), a $\mathbf{\Gamma}$ a csoport karaktereinek[1] a halmaza, a ν pedig Haar[2]-mérték[3] az $(X, \mathcal{T})$ csoporton, és vezessük be az alábbi definíciót: az

$$f : X \to \mathbf{C}$$

[1]A $\gamma : X \to \mathbf{C}$ folytonos függvény a szóban forgó csoport *karaktere,* ha $|\gamma(x)| = 1$ és $\gamma(x \bullet y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$ $(x, y \in X)$, ahol a $\bullet$ szimbólum jelenti az X-beli csoportműveletet. Röviden szólva: a γ karakter folytonos homomorfizmus az X csoport és a $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ komplex egységkör között. Ha $e \in X$ a csoport egységeleme, akkor $\gamma(x) = \gamma(x \bullet e) = \gamma(x) \cdot \gamma(e)$ $(x \in X)$ alapján $\gamma(e) = 1$. Világos, hogy a $\mathbf{\Gamma}$ a függvények közötti „szokásos" szorzásra nézve csoport.

[2]Haar Alfréd (Budapest, 1885. X. 11. – Szeged, 1933. III. 16.)

[3]A ν tehát eltolásinvariáns mérték, azaz minden $A \subset X$ ν-mérhető halmazra és $x \in X$ elemre az $x \bullet A$ halmaz is ν-mérhető és $\nu(x \bullet A) = \nu(A)$. Az X összes Borel-halmaza ilyen.

(a ν mértékre nézve) integrálható függvény ($f \in L^1$) esetén a

$$\mathbf{\Gamma} \ni \gamma \mapsto \widehat{f}(\gamma) := \int f\gamma \, d\nu$$

leképezést az f függvény *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.[4]

Legyen

$$\widehat{L}^1 := \{\widehat{f} \in \mathbf{C}^{\mathbf{\Gamma}} : f \in L^1\}$$

és vezessünk be a $\mathbf{\Gamma}$-ban egy $\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}$ topológiát a következőképpen: a $\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}$ a leggyengébb olyan topológia, amelyre vonatkozóan az $\widehat{L}^1$ elemei folytonosak.[5] Ekkor a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ lokálisan kompakt Abel-csoport (az $(X, \mathcal{T})$ *duális csoportja*). Jelöljük $\mathcal{N}$-nel azoknak az

$$f : X \to \mathbf{C}$$

függvényeknek az osztályát, amelyek valamilyen λ, a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ csoport Borel-halmazain értelmezett korlátos (Borel-)mérték segítségével a következőképpen állíthatók elő:

$$f(x) = \int \gamma(x) \, d\lambda(\gamma) \qquad (x \in X).^6$$

Az $\mathcal{N}$ halmaz elemeire bebizonyítható az alábbi állítás: megadható olyan m Haar-mérték a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ karaktercsoporton, hogy tetszőleges $f \in L^1 \cap \mathcal{N}$ függvény[7] $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltja az L^1-ben van és igaz a következő *inverziós formula*:

$$f(x) = \int \widehat{f}(\overline{\gamma})\gamma(x) \, dm(\gamma) \qquad (x \in X).$$

Ha pl. $X := \mathbf{R}$ (az euklideszi topológiával és a valós számok közötti összeadással, mint csoportműveletettel), akkor (ld. 3.2.1.) az

$$e_\gamma(x) := e^{\imath\gamma x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényekkel

$$\mathbf{\Gamma} = \{e_\gamma : \gamma \in \mathbf{R}\} \equiv \mathbf{R},$$

[4] Időnként az $f^\diamond(\gamma) := \int f\overline{\gamma} \, d\nu$ $(\gamma \in \mathbf{\Gamma})$ egyenlőség révén értelmezik az f függvény Fourier-transzformáltját. Világos, hogy pusztán formai különbségről van szó, ui. az előbbi jelölésekkel $f^\diamond(\gamma) = \widehat{f}(\overline{\gamma})$.

[5] Ha tehát a $\mathcal{T}_*$ topológia a $\mathbf{\Gamma}$-ban és ennek értelmében az $\widehat{L}^1$ elemei folytonosak, akkor $\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathcal{T}_*$.

[6] Minden rögzített $x \in X$ esetén a $\mathbf{\Gamma} \ni \gamma \mapsto \gamma(x)$ leképezés (a λ szerinti) integráljáról van szó.

[7] Az $f : X \to \mathbf{C}$ a ν mértékre nézve integrálható $\mathcal{N}$-beli függvény.

továbbá alkalmas α, $\beta > 0$ számokkal

$$\nu = \alpha\mu \text{ és } m = \beta\mu$$

(ahol a μ az $\mathbf{R}$-beli Lebesgue-mérték). Az

$$f(t) := e^{-|t|} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvény $L^1 \cap \mathcal{N}$-beli és

$$\widehat{f}(\gamma) = \int e^{-|t|} \cdot e^{\imath\gamma t}\, d\nu(t) = \alpha \cdot \int e^{-|t|} \cdot e^{\imath\gamma t}\, dt = \frac{2\alpha}{1+\gamma^2} \qquad (\gamma \in \mathbf{R}).$$

Így az előbb idézett inverziós formula szerint

$$e^{-|x|} = \int \frac{2\alpha}{1+\gamma^2} \cdot e^{-\imath\gamma x}\, dm(\gamma) = 2\alpha\beta \cdot \int \frac{e^{-\imath\gamma x}}{1+\gamma^2}\, d\gamma \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az $x := 0$ választással innen

$$1 = 2\alpha\beta \cdot \int \frac{1}{1+\gamma^2}\, d\gamma = 2\pi \cdot \alpha\beta$$

adódik.

Rögzítsük a ν Haar-mértéket (azaz az α-t), ekkor az inverziós formulában szereplő m Haar-mérték a következő:

$$m = \frac{\mu}{2\pi\alpha}.$$

Például $\alpha := 1$ és $\beta := 1/2\pi$, amikor (pl. (ld. 2.2.) f, $\widehat{f} \in L^1$ esetén)

$$\widehat{f}(\gamma) = \int f(t) e^{\imath\gamma t} dt \qquad (\gamma \in \mathbf{R})$$

és

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath t x} dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

vagy

$$\alpha := \beta := \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

amikor meg

$$\widehat{f}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f(t) e^{\imath\gamma t} dt \qquad (\gamma \in \mathbf{R})$$

és

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath t x}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(ld. 2.5. xix)–xxi) megjegyzések).

3.2. Speciális csoportok

Említsünk meg néhány fontos, az elmélet és a gyakorlat szempontjából is egyaránt kiemelt jelentőséggel bíró csoportot.

3.2.1. A valós számok csoportja

Legyen $X := \mathbf{R}$, a $\mathcal{T}$ az euklideszi távolság által meghatározott „szokásos” topológia, továbbá a ν legyen a Lebesgue-mérték a számegyenesen, a $\bullet$ pedig az $\mathbf{R}$-beli összeadás. Ekkor az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport. Ha $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$, akkor a φ folytonos, $\varphi(0) = 1$, ezért egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$\alpha := \int \varphi(t) \cdot \chi_{[0,\delta]}(t)\, dt \neq 0.$$

Ugyanakkor (a φ karakter lévén)

$$\varphi(x+t) = \varphi(x) \cdot \varphi(t) \qquad (x,\, t \in X),$$

következésképpen

$$\alpha \cdot \varphi(x) = \int \varphi(x+t) \cdot \chi_{[0,\delta]}(t)\, dt = \int_x^{x+\delta} \varphi(t)\, dt \qquad (x \in X).$$

Más szóval a φ differenciálható[8] és (a karaktertulajdonságot kifejező fenti egyenlőségre tekintettel)

$$\varphi'(x+t) = \varphi(x) \cdot \varphi'(t) \qquad (x,\, t \in X)$$

miatt

$$\varphi' = \varphi'(0) \cdot \varphi.$$

Ez nem más, mint egy, a φ-re nézve homogén lineáris differenciálegyenlet. Mivel

$$\varphi(0) = |\varphi(x)| = 1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

így van olyan $y \in \mathbf{R}$, hogy $\varphi = e_y$, azaz

$$\varphi(x) = e_y(x) = e^{\imath xy} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

[8]Ti. egy folytonos függvény integrálfüggvénye differenciálható.

Nyilván bármely $y \in \mathbf{R}$ esetén $e_y \in \mathbf{\Gamma}$. Tehát:

$$\mathbf{\Gamma} = \{e_y : y \in \mathbf{R}\}$$

és a

$$\mathbf{\Gamma} \ni e_y \mapsto y \in \mathbf{R}$$

leképezés izomorfia. Így ez utóbbi értelemben az $\mathbf{R}$ duális csoportja önmaga, amikor egy $f \in L^1$ függvény Fourier-transzformáltja az előzőekben vizsgált „klasszikus” trigonometrikus Fourier-transzformált:

$$\widehat{f}(y) = \int f(t)e^{\imath ty}dt \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

3.2.2. Trigonometrikus rendszer

Tekintsük az $X := [0, 2\pi)$ intervallumot, az $A \subset [0, 2\pi)$ halmaz pedig akkor legyen „nyílt”, ha bármely $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$A \supset K_r(a) := \begin{cases} (a - r, a + r) & (a \neq 0) \\ \\ [0, r) \cup (2\pi - r, 2\pi) & (a = 0). \end{cases}$$

(Ha a $[0, 2\pi)$ intervallumot egy egységsugarú körrel reprezentáljuk, akkor a környezetek körívek.) A $\bullet$ csoportművelet legyen az X-beli moduló 2π vett összeadás, a ν mérték a Lebesgue-mérték a $[0, 2\pi)$-ben. Ekkor az $(X, \mathcal{T})$ kompakt topologikus Abel-csoport. Minden $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$ esetén valamilyen $y \in \mathbf{R}$ mellett (ld. 3.2.1.)

$$\varphi(x) = e_y(x) =: \widetilde{e}_y(x) \qquad (x \in X).$$

Ugyanakkor

$$\varphi(0) = 1 = \lim_{x \to 2\pi - 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 2\pi} e^{\imath yx} = e^{2\pi \imath y},$$

amiből $y \in \mathbf{Z}$ következik. Továbbá világos, hogy bármely $y \in \mathbf{Z}$ számra $\widetilde{e}_y \in \mathbf{\Gamma}$. Másképp fogalmazva

$$\mathbf{\Gamma} = \{\widetilde{e}_y : y \in \mathbf{Z}\}$$

(*komplex trigonometrikus rendszer*). A

$$\mathbf{\Gamma} \ni \widetilde{e}_y \mapsto y \in \mathbf{Z}$$

megfeleltetés nyilván izomorfia, a $[0, 2\pi)$ duális csoportja megegyezik a $\mathbf{Z}$-vel. Ekkor tehát egy

$$f \in L^1 = L^1[0, 2\pi]$$

függvény

$$\widehat{f} : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$$

Fourier-transzformáltja a következő:

$$\widehat{f}(l) = \int f\widetilde{e}_l \, d\nu = \int_0^{2\pi} f(t)e^{\imath lt}dt \qquad (l \in \mathbf{Z}),$$

vagy (ld. 2.5. xxi) megjegyzés)

$$f^{\star}(l) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t)e^{-\imath lt}dt \qquad (l \in \mathbf{Z})$$

(az f függvény l-edik *Fourier-együtthatója*).

Legyen a továbbiakban $X := \mathbf{Z}$, a $\mathbf{Z}$-beli $\bullet$ csoportművelet a szokásos összeadás, a $\mathcal{T} := \mathcal{P}(\mathbf{Z})$ topológia a $\mathbf{Z}$ hatványhalmaza[9] és egy $A \subset \mathbf{Z}$ halmaz $\mu(A)$ mértéke az A számossága. Világos, hogy bármely $x \in [0, 2\pi)$ esetén a

$$\varphi_x(k) := e^{\imath kx} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

függvény karakter. Könnyű meggondolni, hogy tetszőleges

$$\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$$

karakter ilyen alakú. Ugyanis

$$\varphi(k) = (\varphi(1))^k \qquad (1 \leq k \in \mathbf{Z}),$$

ahol $|\varphi(1)| = 1$ miatt egy egyértelműen létező $x \in [0, 2\pi)$ számmal

$$\varphi(1) = e^{\imath x}.$$

Így

$$\varphi(k) = e^{\imath kx} = \varphi_x(k) \qquad (1 \leq k \in \mathbf{Z}).$$

[9] Általában egy U halmaz esetén a $\mathcal{P}(U)$ jelenti az U *hatványhalmazát,* azaz az U összes részhalmaza által alkotott halmazt.

Ha már most $j \in \mathbf{Z}$ és $j < 0$, akkor $\varphi(0) = 1$ miatt a $k := -j$ jelöléssel

$$1 = \varphi(k+j) = \varphi(k) \cdot \varphi(j) = \varphi_x(k) \cdot \varphi(j),$$

amiből

$$\varphi(j) = \frac{1}{\varphi_x(k)} = \overline{\varphi_x(k)} = \varphi_x(-k) = \varphi_x(j)$$

következik.

Tehát

$$\mathbf{\Gamma} = \{\varphi_x : x \in [0, 2\pi)\} \equiv [0, 2\pi)$$

(ld. 3.3. i) megjegyzés). Ha az

$$s = (s_k, k \in \mathbf{Z}) : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$$

függvény (sorozat) a μ mérték szerint integrálható, azaz

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s_k| < +\infty,$$

akkor az $\widehat{s}$ Fourier-transzformáltja:

$$\widehat{s}(x) = \int s\varphi_x \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \varphi_x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{\imath kx} \qquad (x \in [0, 2\pi)).$$

Legyen itt $f \in L^1[0, 2\pi]$ és a fenti

$$f^\star(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\imath kt} dt \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

Fourier-együtthatókkal

$$s := (f^\star(k), k \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor az s (előbbi értelemben vett) integrálhatósága azt jelenti, hogy

$$(f^\star(k), k \in \mathbf{Z}) \in \ell_1.$$

Ebből kifolyólag az

$$\widehat{s}(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f^\star(k) e^{\imath kx} \qquad (x \in [0, 2\pi))$$

Fourier-transzformált (az f függvény (trigonometrikus) Fourier-sora) egyenletesen konvergens és

$$(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^\star(k)e^{\imath kx} = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0, 2\pi))$$

(más szóval „működik” az inverzió).

A most mondottakkal kapcsolatban a következőket jegyezzük meg. Máig nyitott kérdés annak az

$$\mathcal{L} \subset L^1[0, 2\pi]$$

függvényosztálynak a „felderítése”, aminek az $f \in \mathcal{L}$ elemeire a $(*)$ egyenlőség igaz, míg az $f \in L^1[0, 2\pi] \setminus \mathcal{L}$ függvényekre nem. A történeti hátteret illetően jól ismert a Kolmogorov[10]-tétel (1923), miszerint *egy alkalmas* $f \in L^1[0, 2\pi]$ *függvénnyel az* f *Fourier-sora* m.m. *divergens,* sőt (1926) *mindenütt divergens.* Ugyanakkor a XX. századi matematika egyik átütő eredménye a Carleson-tétel (1966), nevezetesen: *tetszőleges* $f \in L^2[0, 2\pi]$ *esetén az* f *Fourier-sora* m.m. *konvergál az* f*-hez* (azaz fennáll a $(*)$ egyenlőség). Ugyanez igaz az $f \in L^p[0, 2\pi]$ $\quad (1 < p \leq +\infty)$ függvényekre is (*Hunt*[11] (1968)). Így azt mondhatjuk, hogy

$$\bigcup_{p>1} L^p[0, 2\pi] \subset \mathcal{L} \subset L^1[0, 2\pi].$$

A m.m. való konvergencia szempontjából „negatív”, ill. „pozitív” halmazok az azóta eltelt évtizedek során jelentősen közeledtek egymáshoz. Itt csak két eredményt idézünk:

a) (*Konjagin*[12] (2000).) *Ha a*

$$\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

függvényre

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)\cdot \sqrt{\ln(\ln t)}}{\sqrt{\ln t}} = 0$$

teljesül, akkor van olyan $f \in L\Phi(L)[0, 2\pi]$ *függvény*[13]*, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora mindenütt divergens.*

---

[10] Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (Tambov, 1903. IV. 25. – Moszkva, 1987. X. 20.)

[11] Richard Allen Hunt (1937. VI. 16. – 2009.III. 22.)

[12] Szergej Vlagyimirovics Konjagin (Szaratov, 1957. IV. 25. –)

[13] Tehát $\int_0^{2\pi} |f(t)|\cdot \Phi(|f(t)|)\, dt < +\infty$.

b) (*Antonov*[14] (1996).) *Ha*[15] $f \in L\log^+ L\log^+\log^+\log^+ L[0,2\pi]$, *akkor az* f *trigonometrikus Fourier-sora m.m. konvergál az* f*-hez.*

3.2.3. Diszkrét trigonometrikus rendszer

Legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ és
$$X := \mathbf{Z}_n := \{0, 1, ..., n-1\},$$
valamint
$$\mathcal{T} := \mathcal{P}(X).$$
Továbbá a $\mathbf{Z}_n$-beli $\bullet$ csoportműveleten értsük a modulo n vett összeadást, a ν (nyilvánvalóan Haar-mértéket) pedig definiáljuk a következőképpen:
$$\nu(A) := \nu_n(A) := \frac{[A]}{n} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).^{16}$$
Ekkor a $(\mathbf{Z}_n, \mathcal{T})$ kompakt topologikus Abel-csoport és (ld. 3.2.1) bármely $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$ karakterhez van olyan $y \in \mathbf{R}$, amellyel
$$\varphi(x) = e^{\imath xy} \qquad (x \in X).$$
Viszont a φ karakter, ezért (az argumentumban n-szeres művelettel)
$$1 = \varphi(0) = \varphi(1 \bullet 1 \bullet ... \bullet 1) = \varphi(1)^n = e^{\imath ny},$$
így egy alkalmas $k \in \mathbf{Z}$ számmal
$$y = \frac{2k\pi}{n}.$$
Legyen
$$\varphi_k(x) := \varphi_k^{(n)}(x) := e^{2k\pi\imath x/n} \qquad (x \in X).^{17}$$
Figyelembe véve a nyilvánvaló
$$k \equiv j \pmod n \iff \varphi_k = \varphi_j$$

[14] Nyikolaj Jurevics Antonov
[15] A $\Phi := \log^+ \cdot (\log^+ \circ \log^+ \circ \log^+)$ függvénnyel, ahol $\log^+(t) := \max\{0, \ln t\} \quad (t > 0)$.
[16] Az A halmaz számosságát $[A]$-val jelölve.
[17] Speciálisan $\varphi_0(x) = 1 \quad (x \in X)$.

relációt azt mondhatjuk tehát (az eddigi példák szellemében (ld. 3.2.1., 3.2.2.)), hogy

$$\mathbf{\Gamma} = \{\varphi_k : k = 0, 1, ..., n-1\},$$

és így a $(\mathbf{Z}_n, \mathcal{T})$ duális csoportja önmaga. A $(\mathbf{Z}_n, \mathcal{T})$ csoport kompakt, a ν normáltsága[18] alapján pedig a

$$\varphi_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

diszkrét trigonometrikus rendszer ortonormáltságát kapjuk:

$$\int \varphi_k \overline{\varphi_j}\, d\nu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=0}^{n-1} \varphi_k(x) \cdot \overline{\varphi_j(x)} =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{x=0}^{n-1} e^{2(k-j)\pi \imath x/n} = \begin{cases} 1 & (k = j) \\ \\ 0 & (k \neq j) \end{cases} \qquad (k, j = 0, ..., n-1).^{19}$$

Ha tehát

$$f : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{C}$$

(azaz az f egy n-dimenziós vektor), akkor az $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltja a következő:

$$(*) \qquad \widehat{f}(k) = \int f \varphi_k^{(n)}\, d\nu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{2k\pi \imath l/n} \qquad (k = 0, ..., n-1)$$

(az f vektor *diszkrét Fourier-transzformáltja*), továbbá igaz az inverzió:

$$f(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) e^{-2k\pi \imath j/n} \qquad (j = 0, ..., n-1).$$

Ugyanis itt a jobb oldalon az áll, hogy

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-2k\pi \imath j/n} \cdot e^{2k\pi \imath l/n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} f(l) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{2k\pi \imath (l-j)/n}.$$

---

[18] $\nu(\mathbf{Z}_n) = 1$.

[19] Általában is igaz, hogy a $\mathbf{\Gamma}$ ortogonális: $\int \gamma(x)\overline{\theta(x)}\, d\nu(x) = 0$ $(\gamma, \theta \in \Gamma, \gamma \neq \theta)$. Ha ui. az $y \in X$ olyan, hogy $\gamma(y)\overline{\theta(y)} \neq 1$, akkor (a ν mérték eltolás-invarianciája miatt) $\int \gamma(x)\overline{\theta(x)}\, d\nu(x) = \int \gamma(x \bullet y)\overline{\theta(x \bullet y)}\, d\nu(x) = \gamma(y)\overline{\theta(y)} \cdot \int \gamma(x)\overline{\theta(x)}\, d\nu(x)$.

Mivel

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} e^{2k\pi\imath(l-j)/n} = \begin{cases} 1 & (j = l) \\ \\ 0 & (j \neq l) \end{cases} \qquad (l = 0, ..., n-1),$$

ezért valóban fennáll a fenti inverziós egyenlőség.

Formálisan a $(*)$ definíció alapján számolva az $\widehat{f}(k)$ helyettesítési értékeket, ekkor (az $1/n$ normálási tényezővel való szorzástól eltekintve) n darab szorzást kell végezni. Ha ezt így minden $k = 0, ..., n-1$ esetén elvégezzük, akkor összesen n^2 darab szorzásra van szükség, azaz (az összeadásokkal együtt) n^2 nagyságrendű műveletre. Ugyanakkor a számolásokat „ügyesen" szervezve ez a nagyságrend lecsökkenthető $n\cdot \log_2 n$-re.[20] Az egyszerűség kedvéért csak az

$$n = 2^N \qquad (1 \leq N \in \mathbf{N})$$

esetben vázoljuk a gyorsabb számolást lehetővé tevő *Cooley*[21]*–Tukey*[22]*-algoritmust,* más elnevezéssel *gyors Fourier-transzformációt,* vagy *FFT-algoritmust.*[23] Legyen tehát az

$$f : \{0, 1, ..., 2^N - 1\} \to \mathbf{C}$$

adott vektor, ekkor tetszőleges $k = 0, ..., 2^N - 1$ mellett

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2^N}\cdot\sum_{k=0}^{2^N-1} f(l)\varphi_k^{(n)}(l) =$$

$$\frac{1}{2^N}\cdot\sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} f(2j)\varphi_k^{(n)}(2j) + \frac{1}{2^N}\cdot\sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} f(2j+1)\varphi_k^{(n)}(2j+1).$$

[20] Óriási különbségről van szó: pl. $n = 2^{10} \approx 1000$ esetén 10^6 nagyságrendű művelet helyett 10^4 nagyságrendű műveletről, ami stratégiai szempontból sem elhanyagolható. Nem véletlen, hogy az alábbiakban vázolt „gyors" számítási algoritmust is nagyban inspirálták katonai szempontok.

[21] James William Cooley (New York, 1926. IX. 18. – 2016. VI. 29.)

[22] John Wilder Tukey (New Bedford, 1915. VI. 16. – New Brunswich, 2000. VI. 26.)

[23] A szóban forgó algoritmust tartalmazó közlemény 1965-ben jelent meg. A történeti hűség kedvéért jegyezzük meg, hogy már 1805 táján Gauss használt hasonló módszereket aszteroidák pályaszámításához. Ezzel együtt nem túlzás a *The top 10 algorithms* című (ld. Computing in Science and Engineering, 2(1) (2000), 22-23.) írás megállapítása, miszerint *... Daniel Rockmore describes the FFT as an algorithm „the whole family can use." The FFT is perhaps the most ubiquitous algorithm in use today to analyze and manipulate digital or discrete data...,* és ahol a XX. század egyik legnagyobb hatású algoritmusaként említik, olyanok között, mint pl. a szimplex módszer.

Vegyük észre, hogy itt

$$\varphi_k^{(n)}(2j) = e^{2k\pi\imath 2j/2^N} = e^{2k\pi\imath j/2^{N-1}} = \begin{cases} \varphi_k^{(n/2)}(j) & (k < 2^{N-1}) \\ \varphi_{\widetilde{k}}^{(n/2)}(j) & (k \geq 2^{N-1}), \end{cases}$$

ahol

$$\widetilde{k} := k - 2^{N-1}.$$

Az utóbbi esetben ui.

$$e^{2k\pi\imath 2j/2^N} = e^{2(\widetilde{k}+2^{N-1})\pi\imath j/2^{N-1}} = e^{2\widetilde{k}\pi\imath j/2^{N-1}}.$$

Hasonlóan kapjuk azt is, hogy

$$\varphi_k^{(n)}(2j+1) = e^{2k\pi\imath(2j+1)/2^N} = e^{2k\pi\imath/2^N} \cdot e^{2k\pi\imath j/2^{N-1}} = \varphi_k^{(n)}(1) \cdot e^{2k\pi\imath j/2^{N-1}} =$$

$$\begin{cases} \varphi_k^{(n)}(1) \cdot \varphi_k^{(n/2)}(j) & (k < 2^{N-1}) \\ \varphi_k^{(n)}(1) \cdot \varphi_{\widetilde{k}}^{(n/2)}(j) & (k \geq 2^{N-1}). \end{cases}$$

Vezessük be az

$$f_1,\ f_2 : \mathbf{Z}_{n/2} \to \mathbf{C}$$

függvényeket ($n/2$-dimenziós vektorokat) az alábbiak szerint:

$$f_1(j) := f(2j) \quad \text{és} \quad f_2(j) := f(2j+1) \qquad (j = 0, ..., 2^{N-1} - 1).$$

Ekkor az előbbiekre tekintettel

$$(**) \qquad \widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\widehat{f_1}(k) + \varphi_k^{(n)}(1) \cdot \widehat{f_2}(k)\right) & (k < 2^{N-1}) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\widehat{f_1}(\widetilde{k}) + \varphi_k^{(n)}(1) \cdot \widehat{f_2}(\widetilde{k})\right) & (k \geq 2^{N-1}) \end{cases}$$

(ahol értelemszerűen az $\widehat{f_1},\ \widehat{f_2}$ Fourier-transzformáltak a

$$\varphi_s^{(n/2)} \qquad (s = 0, ..., 2^{N-1} - 1)$$

rendszer szerint értendők).

Ha a most bemutatott, az n-dimenziós vektorok Fourier-transzformáltjának a kiszámítását az $n/2$-dimenziós vektorok Fourier-transzformáltjának a kiszámítására visszavezető lépést ezután az $\widehat{f_1}$, $\widehat{f_2}$ kiszámítására alkalmazzuk, majd ugyanezt ismételjük, akkor az $(N-1)$-edik lépésben a

$$g : \{0,1\} \to \mathbf{C}$$

alakú 2-dimenziós vektorok Fourier-transzformáltját kell kiszámítani a

$$\varphi_0^{(2)}(s) = 1,\ \varphi_1^{(2)}(s) = e^{2\pi\imath s/2} = (-1)^s \qquad (s = 0, 1)$$

rendszerre vonatkozóan:

$$(***) \qquad \widehat{g}(0) = \frac{1}{2}\cdot (g(0) + g(1)) \quad \text{és} \quad \widehat{g}(1) = \frac{1}{2}\cdot (g(0) - g(1)).$$

A fentiekben leírt algoritmusban szereplő állandóan feleződő dimenziójú vektorokat egymás alá egy háromszög-mátrixban elképzelve, ennek a háromszögnek a legfelső szintjén (csúcsán) az f vektor van, az alatta lévő szinten az f_1, f_2, a következő szinten (sorban) az f_1, f_2-ből képzett f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} ($n/2$-dimenziós vektorok) és így tovább, a legalsó szinten a 2^{N-1} darab 2-dimenziós g vektor áll. Legyen pl. $N := 4$, ekkor az előbbi háromszög-mátrix a következő (az

$$x_j := f(j) \qquad (j = 0, ..., 15)$$

jelöléssel):

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15})$$

$$(x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{14}) \ \ (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{15})$$

$$(x_0, x_4, x_8, x_{12}) \ \ (x_2, x_6, x_{10}, x_{14}) \ \ (x_1, x_5, x_9, x_{13}) \ \ (x_3, x_7, x_{11}, x_{15})$$

$$(x_0, x_8) \ \ (x_4, x_{12}) \ \ (x_2, x_{10}) \ \ (x_6, x_{14}) \ \ (x_1, x_9) \ \ (x_5, x_{13}) \ \ (x_3, x_{11}) \ \ (x_7, x_{15}).$$

Az utolsó sorban elhelyezkedő összes (2^{N-1} darab) 2-dimenziós vektor Fourier-transzformáltjának a kiszámítása (ld. $(***)$) 2–2 összeadást és 2–2 szorzást, tehát egyenként 4 műveletet igényel, az összes ilyen g-re vonatkozóan így

$$4\cdot 2^{N-1} = 2^{N+1}$$

számú műveletet. Az utolsó előtti szinten lévő 2^{N-2} darab 4-dimenziós vektor bármelyikének a Fourier-transzformáltját (a 4–4 darab helyettesítési érték mindegyikét) a $(**)$ rekurzió alapján az utolsó szintről alkalmasan választott (már kiszámolt) 2 darab Fourier-transzformáltból 3 művelettel (2 szorzás, 1 összeadás) kapjuk meg, azaz összesen

$$3 \cdot 4 \cdot 2^{N-2} = 3 \cdot 2^N$$

számú műveletre van szükség. Ugyanígy kapjuk a többi szinten is rendre a műveletigényt. Így végül az $\widehat{f}$ meghatározásához ezen műveletigények összegével egyenlő számú műveletre van szükség, azaz

$$2^{N+1} + 3(N-1) \cdot 2^N = (3N-1) \cdot 2^N$$

műveletre.

3.2.4. Diadikus csoport

Tekintsük az

$$m = (m_k, k \in \mathbf{N}) \qquad (2 \leq m_k \in \mathbf{N} \ \ (k \in \mathbf{N}))$$

sorozatot és legyen (ld. 3.2.3.)

$$\mathbf{G}_m := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}_{m_k}.$$

A $\mathbf{G}_m$-beli $\mathcal{T}_m$ topológiát a $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_{m_n})$ $(n \in \mathbf{N})$ topológiák által meghatározott szorzattopológiaként definiáljuk, a csoportművelet pedig legyen a következő: az

$$x = (x_n, n \in \mathbf{N}),\ y = (y_n, n \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G}_m$$

sorozatokra

$$x \bullet y := (x_k + y_k \,(\mathrm{mod}\, m_k), k \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan, a ν mérték legyen (ld. 3.2.3.) a ν_{m_n} $(n \in \mathbf{N})$ mértékek által meghatározott szorzatmérték. Ekkor (*Vilenkin*[24] (1947)) a $(\mathbf{G}_m, \mathcal{T}_m)$ kompakt topologikus Abel-csoport.

Ha $m_k := 2 \quad (k \in \mathbf{N})$, azaz

$$m = \mathbf{2} := (2, k \in \mathbf{N}),$$

[24]Naum Jakovlevics Vilenkin (Moszkva, 1920. X. 30. – Moszkva, 1991.)

akkor a $(\mathbf{G_2}, \mathcal{T}_\mathbf{2})$ csoport az ún. *diadikus csoport.*

Illusztrációképpen csak az utóbbi csoport karaktereivel foglalkozunk részletesebben. Ha

$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \qquad (k \in \mathbf{N},\ x = (x_l, l \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G_2}),$$

akkor az r_k-k nyilván karakterek (*Rademacher*[25] (1922)). Az is világos, hogy bármely véges $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmazzal a

$$\prod_{k \in \mathcal{N}} r_k$$

szorzat is karakter. Legyen

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} l_k 2^k$$

az $l \in \mathbf{N}$ szám diadikus kifejtése[26] és

$$w_l := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{l_k},$$

azaz az

$$l(x) := \sum_{k=0}^{\infty} l_k x_k$$

jelöléssel

$$w_l(x) = (-1)^{l(x)} \qquad (x = (x_j, j \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G_2}).$$

Az így definiált $\{w_l \in \mathbf{\Gamma} : l \in \mathbf{N}\}$ halmaz tehát az $r_k \quad (k \in \mathbf{N})$ függvények véges szorzatainak a halmaza.[27] Megmutatható, hogy ez nem más, mint a karakterek $\mathbf{\Gamma}$ halmaza (*Walsh*[28]*–Paley*[29]*-rendszer*). Legyen ui. $k \in \mathbf{N}$ esetén az

$$s_k := (s_{kj}, j \in \mathbf{N})$$

az a sorozat, amelyre $s_{kk} = 1$ és $s_{kj} = 0 \quad (k \neq j \in \mathbf{N})$. Ekkor az

$$E := \{s_k \in G_\mathbf{2} : k \in \mathbf{N}\}$$

[25] Hans Rademacher (Wandsbeck, 1892. IV. 3. – Haverford, 1969. II. 7.)

[26] Tehát $l_k \in \{0, 1\} \quad (k \in \mathbf{N})$.

[27] Ha az előbbi $\mathcal{N}$ indexhalmazzal $l := \sum_{k \in \mathcal{N}} 2^k$, akkor nyilván $\prod_{k \in \mathcal{N}} r_k = w_l$.

[28] Joseph Leonard Walsh (Washington, 1895. IX. 21. – College Park, 1973. XII. 6.)

[29] Raymond Edward Alan Christopher Paley (Bournemouth, 1907. I. 7. – Banff, 1933. IV. 7.)

zárt rendszer a $G_{\mathbf{2}}$-ben. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor – lévén a γ folytonos –

$$\lim_{k\to\infty} \gamma(s_k) = \gamma\Big(\lim_{k\to\infty} s_k\Big) = \gamma(\mathbf{0}) = 1,$$

ahol $\mathbf{0} := (0, j \in \mathbf{N})$. Mivel

$$\gamma^2(x) = \gamma(x)\cdot\gamma(x) = \gamma(x \bullet x) = \gamma(\mathbf{0}) = 1 \qquad (x \in G_{\mathbf{2}}),$$

ezért

$$\gamma(x) \in \{-1, 1\} \qquad (x \in G_{\mathbf{2}})$$

és így egy alkalmas $N_\gamma \in \mathbf{N}$ indexszel szükségszerűen

$$\gamma(s_k) = 1 \qquad (N_\gamma < k \in \mathbf{N}).$$

Más szóval megfelelően választott

$$(j_k, k \in \mathbf{N}) : \mathbf{N} \to \{0, 1\}$$

sorozattal $j_i = 0 \quad (N_\gamma < i \in \mathbf{N})$ és

$$\gamma(s_k) = (-1)^{j_k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Továbbá a

$$j := \sum_{l=0}^{\infty} j_l 2^l$$

indexszel

$$w_j(s_k) = (-1)^{j_k} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

következésképpen

$$\gamma_{|E} = w_{j_{|E}}.$$

Innen (a folytonosság figyelembe vételével) a $\gamma = w_j$ egyenlőség már nyilvánvaló.

Tehát a diadikus csoport minden karaktere $w_j \quad (j \in \mathbf{N})$ alakú (*Walsh* (1923)–*Paley* (1932)–*Fine*[30] (1949)). A $(\mathbf{G_2}, \mathcal{T}_\mathbf{2})$ csoport kompakt, a $\mathbf{\Gamma}$ rendszer ortonormált.

Vezessük be az $\mathbf{N}$-ben a következő műveletet: ha

$$j = \sum_{k=0}^{\infty} j_k\cdot 2^k \ \text{ és } \ p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\cdot 2^k$$

[30] Nathan Jacob Fine (Philadelphia, 1916. X. 22. – Deerfield Beach, 1994. XI. 18.)

a $j, p \in \mathbf{N}$ számok diadikus kifejtése, akkor legyen

$$j \oplus p := \sum_{k=0}^{\infty} |j_k - p_k| \cdot 2^k.$$

Eléggé nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{N}$ ezzel a művelettel Abel-csoport és

$$w_{j \oplus p} = w_j \cdot w_p.$$

Ez azt is jelenti, hogy a $\boldsymbol{\Gamma}$ karaktercsoport izomorf az $\mathbf{N}$-nel.

A Walsh-függvényeket (és így speciálisan a Rademacher-rendszert) könnyűszerrel reprezentálhatjuk a diadikus csoport helyett a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvényekként. Ti. legyen ehhez $x \in [0, 1]$ és tekintsük az x-nek azt az egyértelműen létező

$$(*) \qquad x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}}$$

előállítását, ahol

$$x_k \in \{0, 1\} \qquad (k \in \mathbf{N})$$[31]

és $x < 1$ esetén (ha létezik)

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0.$$

Vegyük ennek megfelelően a ρ *Fine-leképezést,* amikor

$$\rho(x) := (x_k, k \in \mathbf{N}) : \mathbf{N} \to \{0, 1\} \qquad (x \in [0, 1])$$

és legyen

$$\widetilde{r}_j := r_j \circ \rho \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan:

$$\widetilde{w}_j := w_j \circ \rho \qquad (j \in \mathbf{N}),$$

a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $(\widetilde{r}_j, j \in \mathbf{N})$ *Rademacher-,* valamint $(\widetilde{w}_j, j \in \mathbf{N})$ *Walsh–Paley-rendszer.* Könnyen belátható, hogy a $(\widetilde{w}_j, j \in \mathbf{N})$ rendszer a „szokásos" (Lebesgue-) értelemben ortonormált rendszer az $L^1[0, 1]$-ben:

$$\int_0^1 \widetilde{w}_j(x) \widetilde{w}_l(x)\, dx = \begin{cases} 1 & (j = l) \\ 0 & (j \neq l) \end{cases} \qquad (j, l \in \mathbf{N}).$$

[31] A $[0, 1]$-beli számok diadikus törtfelbontására gondolva az ún. *diadikusan racionális* számokra két $(*)$ alakú összeg is megadható: az egyikben az $(x_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat 0-ra, a másikban pedig 1-re „végződik", azaz egy indextől kezdve minden tag 0, ill. 1.

Ha az

$$r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

az az 1 szerint periodikus függvény, amire

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2) \\ \\ -1 & (1/2 \le x < 1), \end{cases}$$

akkor

$$\widetilde{r}_j(x) = r(2^j x) \qquad (j \in \mathbf{N},\, x \in [0,1]).^{32}$$

Valóban, a $(*)$ egyenlőség szerint itt adott $x \in [0,1)$ és $j \in \mathbf{N}$ esetén

$$2^j x = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{x_k}{2^{k+1-j}} + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1-j}} =: u + v,$$

ahol $u \in \mathbf{N}$ és

$$v = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x_{l+j}}{2^{l+1}} \in [0,1).$$

Ezért egyrészt

$$\widetilde{r}_j(x) = r_j(\rho(x)) = (-1)^{x_j},$$

másrészt

$$r(2^j x) = r(v) = \begin{cases} 1 & (0 \le v < 1/2) \\ \\ -1 & (1/2 \le v < 1). \end{cases}$$

Világos, hogy

$$0 \le v < \frac{1}{2} \iff x_j = 0 \iff (-1)^{x_j} = 1$$

és

$$\frac{1}{2} \le v < 1 \iff x_j = 1 \iff (-1)^{x_j} = -1.$$

Tehát

$$r(2^j x) = (-1)^{x_j} = \widetilde{r}_j(x).$$

---

[32]Szemléletesen: a $[0,1]$ intervallumot 2^j darab egyenlő hosszúságú részintervallum egyesítéseként tekintve ez utóbbi intervallumok mindegyikének az első balról zárt, jobbról nyílt felében az $\widetilde{r}_j$ függvény 1, a másik felében pedig -1.

A továbbiakban az $\widetilde{r}_j$ $(\widetilde{w}_j)$ szimbólum helyett is $r_j\,(w_j)$-t $(j \in \mathbf{N})$ írunk.[33]

A Rademacher-rendszer egyik emblematikus tulajdonsága a következő, Rademachertől származó állítás: *bármely* $(a_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_2$ *valós együtthatósorozat*[34] *esetén majdnem minden* $x \in [0,1]$ *helyen létezik és véges a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(x)$$

összeg.

Legyen ui.

$$S_k := \sum_{l=0}^{k} a_l r_l \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és (a Riesz–Fischer-tétel szerint létező) $f \in L^2[0,1]$ függvény olyan, hogy

$$\int_0^1 |f(x) - S_k(x)|^2\,dx \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Világos, hogy egyúttal tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ intervallumra is

$$\int_\alpha^\beta |f(x) - S_k(x)|^2\,dx \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Innen a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján az is következik, hogy

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - S_k(x))\,dx \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

azaz

$$(**) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta S_k(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Ha $k \in \mathbf{N}$ és az (α_k, β_k) a $[0,1]$-nek olyan 2^{-k-1} hosszúságú részintervalluma, amelyen az r_k függvény (és ugyanakkor persze minden r_l $(l = 0, ..., k-1)$) állandó

---

[33] Megjegyezzük, hogy a Walsh által 1923-ban bevezetett rendszer a fenti $(w_k, k \in \mathbf{N})$ rendszertől csak a függvények sorrendjében különbözött, nevezetesen: a Walsh-féle (úgymond „eredeti”) sorrendben a k-adik Walsh-függvény jelváltásainak a száma éppen k $(k \in \mathbf{N})$.

[34] Emlékeztetőül: $\sum_{l=0}^{\infty} |a_l|^2 < +\infty$.

(tehát 1, vagy -1), akkor

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r_m(x)\,dx = 0 \qquad (k < m \in \mathbf{N}).^{35}$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} S_j(x)\,dx = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} S_k(x)\,dx + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \sum_{m=k+1}^{j} a_m r_m(x)\,dx =$$

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} S_k(x)\,dx \qquad (k \le j \in \mathbf{N})$$

és (ld. $(**)$)

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)\,dx = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} S_k(x)\,dx.$$

Nyilván minden

$$x \in [0,1] \setminus D := [0,1] \setminus \{p\cdot 2^{-q} : 1 \le q \in \mathbf{N},\, p = 0, ..., 2^q - 1\}$$

és $k \in \mathbf{N}$ esetén egyértelműen létezik a fenti (α_k, β_k) intervallum úgy, hogy

$$x \in (\alpha_k, \beta_k).$$

Az S_k az (α_k, β_k)-n állandó, ezért az előbbi x helyen

$$S_k(x) = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k}\cdot \int_{\alpha_k}^{\beta_k} S_k(t)\,dt = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k}\cdot \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t)\,dt = \frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k},$$

ahol az F az f integrálfüggvénye. Mivel (az integrálszámítás alaptétele szerint) az F m.m $x \in [0,1]$ helyen differenciálható és a D halmaz megszámlálható (így nulla Lebesgue-mértékű), ezért m.m $x \in [0,1]$ mellett létezik az[36]

$$F'(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{F(\beta_k) - F(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(x) \in \mathbf{R}$$

[35] Ti. az r_m az (α_k, β_k) páros sok, azonos hosszúságú részintervallumokra való felbontásán rendre 1 és -1.

[36] Vegyük figyelembe, hogy $\lim_{k\to\infty}(\beta_k - \alpha_k) = 0$.

határérték.

Később Kolmogorov egy észrevétele alapján kiderült (*Kolmogorov-tétel*), hogy a fentieknek mintegy a „megfordítása” is igaz: *tegyük fel, hogy a valós* $(a_k, k \in \mathbf{N})$ *sorozatra*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = +\infty$$

teljesül. Ekkor a $\sum(a_k r_k)$ *Rademacher-sor, azaz a*

$$\sum_{l=0}^{k} a_l r_l \qquad (k \in \mathbf{N})$$

részletösszegekből álló függvénysorozat a $[0,1]$ *intervallum majdnem minden pontjában divergens.*

A most mondott állítást mindjárt kissé általánosabb formában látjuk be. Legyen ehhez a kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallummal a

$$\varphi_k : [a,b] \to \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

ortogonális rendszer olyan, hogy a

$$\varphi_{jk} := \varphi_j \cdot \overline{\varphi_k} \qquad (j,k \in \mathbf{N},\ j < k)$$

szorzatrendszer is ortogonális:

$$\int_a^b \varphi_{jk}(x)\overline{\varphi_{lm}(x)}\, dx = 0 \qquad (\{j,k\} \neq \{l,m\}).$$

Ekkor minden

$$(a_k, k \in \mathbf{N}) \notin \ell_2$$

számsorozatra a $\sum(a_k \varphi_k)$ függvénysor majdnem mindenütt divergens.

Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy a szóban forgó sor egy pozitív (Lebesgue-)mértékű halmazon konvergens. Ekkor a Jegorov[37]-tétel[38] miatt van olyan pozitív mértékű

[37]Dmitrij Fjodorovics Jegorov (Moszkva, 1869. XII. 22. – Kazany, 1931. IX. 10.)

[38]Legyen adott az (X, Ω, μ) mértéktér, és tegyük fel, hogy a μ mérték véges (azaz $\mu(X) < +\infty$), az $f_k : X \to \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ mérhető függvényekből álló sorozat pedig pontonként konvergál az $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbf{R}$ $(x \in X)$ határfüggvényhez. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $X_\varepsilon \in \Omega$ halmaz, hogy $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ és az $(f_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat az X_ε halmazon egyenletesen konvergál az f-hez.

$E \subset [a,b]$ halmaz, amelyen az illető sor egyenletesen konvergens. Így alkalmas $M > 0$ konstanssal

$$|\Delta_{mp}(x)| := \left|\sum_{k=m}^{m+p} a_k \varphi_k(x)\right| \le M \qquad (x \in E,\, m, p \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen tetszőleges $m, p \in \mathbf{N}$ esetén

$$M^2 \cdot |E| \ge \int_E |\Delta_{mp}(x)|^2\, dx = |E| \cdot \sum_{k=m}^{m+p} |a_k|^2 + 2 \cdot \sum_{mp} a_j \overline{a}_k \cdot \int_E \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_k(x)}\, dx,$$

ahol a $\sum_{mp}$ szimbólum az

$$m \le j < k \le m+p \qquad (k \in \mathbf{N})$$

indexekre való összegzést jelöli. Itt

$$\int_E \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_k(x)}\, dx = \int_a^b \chi_E(x) \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_k(x)}\, dx = \widehat{\chi}_E(j,k)$$

a χ_E függvény aktuális Fourier-együtthatóját jelenti (egy normálási tényezőtől eltekintve) a fent említett szorzatrendszer szerint. Ezért a Bessel-egyenlőtlenség[39] alapján bármely $c > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$\sum_{mp} |\widehat{\chi}_E(j,k)|^2 < (c \cdot |E|)^2 \qquad (N < m \in \mathbf{N},\, p \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alkalmazásával azonban

$$\left|\sum_{mp} a_j \overline{a}_k \cdot \int_E \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_k(x)}\, dx\right| \le \sqrt{\sum_{mp} |a_j a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{mp} \left|\widehat{\chi}_E(j,k)\right|^2} \le$$

$$c \cdot |E| \cdot \sqrt{\sum_{mp} |a_j a_k|^2} \le c \cdot |E| \cdot \sum_{j=m}^{m+p} |a_j|^2 \qquad (N < m \in \mathbf{N},\, p \in \mathbf{N}).$$

Mindezekből következően azt mondhatjuk, hogy

$$M^2 \cdot |E| \ge |E| \cdot \sum_{k=m}^{m+p} |a_k|^2 - 2c \cdot |E| \cdot \sum_{j=m}^{m+p} |a_j|^2 =$$

---

[39] Legyen az $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi térben $e_k \in X$ és $\langle e_k, e_k \rangle = 1$, $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ $(j \ne k \in \mathbf{N})$. Ekkor $\sum_{k=0}^n |\langle z, e_k \rangle|^2 = \|z\|^2 - \|z - \sum_{k=0}^n \langle z, e_k \rangle e_k\|^2 \le \|z\|^2$ $(z \in X,\, n \in \mathbf{N})$.

$$= (1-2c)\cdot |E|\cdot \sum_{k=m}^{m+p} |a_k|^2 \qquad (N < m \in \mathbf{N},\, p \in \mathbf{N}).$$

Legyen most már $c := 1/4$, ekkor

$$\sum_{k=m}^{m+p} |a_k|^2 \leq 2M^2 \qquad (N < m \in \mathbf{N},\, p \in \mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty,$$

szemben az $(a_k, k \in \mathbf{N}) \notin \ell_2$ feltételezéssel.

Speciális esetként legyen

$$[a,b] := [0,1],$$

a $(\varphi_k, k \in \mathbf{N})$ rendszer pedig a Rademacher-rendszer, amikor

$$\varphi_{jk} = r_j r_k \qquad (j,k \in \mathbf{N},\, j < k).$$

Gondoljuk meg, hogy

$$\int_0^1 r_j r_k r_l r_s = 0 \qquad (\{j,k\} \neq \{l,s\}).$$

Ehhez nyilván feltehető, hogy az itt szereplő indexek páronként különbözők, legyen közülük pl. az s a legnagyobb. Ekkor az előbbi integrál olyan $\pm \int_I r_s$ integrálok összegére bomlik, ahol az $I \subset [0,1]$ diadikus intervallumot páros sok azonos hosszúságú olyan intervallum egyesítésére bonthatjuk, amelyeken az r_s rendre $1,-1,1,-1...$ értékeket vesz fel. Következésképpen $\int_I r_s = 0$, amiért is

$$\int_0^1 \varphi_{jk}\varphi_{ls} = 0.$$

Tehát az előbbi választással a Rademacher-sorokra megfogalmazott Kolmogorov-tételhez jutunk. Ezt a Rademacher-tétellel „egybeolvasztva” azt kapjuk, hogy *egy valós együtthatós* $\sum(a_k r_k)$ *Rademacher-sor akkor és csak akkor konvergens majdnem mindenütt, ha*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty.$$

Mivel

$$r_k(x) = \pm 1 \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in [0,1]),$$

ezért mindennek a valószínűségelméleti interpretációja így hangzik: *ha a* $\sum(\pm a_k)$ *sorban az előjeleket találomra választjuk meg, akkor* 1 *valószínűséggel állítható, hogy az előjelezett sor konvergens* (*divergens*) *lesz, attól függően, hogy* $(a_k, k \in \mathbf{N}) \in \ell_2$*, vagy* $(a_k, k \in \mathbf{N}) \notin \ell_2$.

Legyen most

$$[a,b] := [0, 2\pi]$$

és

$$\varphi_k(x) := e^{\imath 2^k x} \qquad (x \in [0,2\pi],\ k \in \mathbf{N}).$$

Ha $j,k,l,m \in \mathbf{N}$ és $j < k$, valamint $l < m$ és $\{j,k\} \neq \{l,m\}$, akkor

$$2^j + 2^m \neq 2^k + 2^l.$$

Így (a trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt)

$$\int_0^{2\pi} \left(e^{\imath 2^j x} \cdot e^{-\imath 2^k x}\right) \cdot \left(e^{-\imath 2^l x} \cdot e^{\imath 2^k x}\right) dx = \int_0^{2\pi} e^{\imath(2^j + 2^m)x} \cdot e^{-\imath(2^k+2^l)x} dx = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy most is igaz az

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{jk}(x) \overline{\varphi_{lm}(x)}\, dx = 0$$

ortogonalitás. Ekkor azt kapjuk, hogy pl. a

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot e^{\imath 2^k x}\right) \qquad (x \in [0, 2\pi])$$

sor m.m. divergens.

Világos, hogy a komplex trigonometrikus rendszer ugyanúgy kapható meg (szorzatrendszerként) a most vizsgált $(\varphi_k, k \in \mathbf{N})$ (és a $(\overline{\varphi}_k, k \in \mathbf{N})$) rendszerből, ahogyan a Rademacher-rendszerből a Walsh-rendszer.

Megjegyezzük, hogy ez a $(\varphi_k, k \in \mathbf{N})$ rendszer speciális esete egy általánosabb

$$\varphi_k(x) := e^{\imath \theta_k(x)} \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in [0, 2\pi])$$

rendszernek (alkalmasan megadott $\theta_k \quad (k \in \mathbf{N})$ függvényekkel).

A trigonometrikus Fourier-sorok konvergenciájával kapcsolatban a 3.2.2. pontban említett karakterisztikus eredmények analogonjait illetően a következőket mondhatjuk egy $f \in L^1[0,1]$ függvény

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f(t) w_k(t)\, dt \right) \cdot w_k$$

Walsh–Fourier-soráról. Először is fennáll a divergenciáról szóló Kolmogorov-tétel Walsh-változata, nevezetesen (*Stein*[40] (1961)): *van olyan* $f \in L^1[0,1]$ *függvény, amelynek a Walsh–Fourier-sora* m.m. $x \in [0,1]$ *helyen divergál,* sőt (*Schipp*[41] (1969)): *minden* $x \in [0,1]$ *pontban divergál.*

Igaz továbbá a Carleson-tétel megfelelője (*Billard*[42] (1966-67), ha $p = 2$ és *Sjölin*[43] (1969), ha $p > 1$) : *bármely* $1 < p \le +\infty$ *kitevőre és* $f \in L^p[0,1]$ *függvényre az* f *Walsh–Fourier-sora* m.m. $x \in [0,1]$ *mellett konvergál az* $f(x)$*-hez.*

A Walsh–Fourier-analízisben sem ismert az a függvényosztály, ami pontosan azokat az $f \in L^1[0,1]$ függvényeket tartalmazza, amelyeknek a Walsh–Fourier-sora m.m. konvergens. Itt is jelentősen bővültek az idők folyamán a m.m. való konvergencia szempontjából „negatív”, ill. „pozitív” halmazok. Két eredményt idézünk ezzel kapcsolatban:

a) (*Sjölin* (1969).) *Ha* $f \in L\log^+ L \log^+ \log^+ L[0,1]$, *akkor az* f *Walsh–Fourier-sora* m.m. $x \in [0,1]$ *helyen konvergál az* $f(x)$*-hez.*

b) (*Schipp–Simon* (1983).) *Legyen*

$$Wf := \sup_k \left| \sum_{l=0}^{2^k-1} \left(\int_0^1 f(t) w_l(t)\, dt \right) \cdot w_l \right| \qquad (f \in L^1[0,1]),$$

továbbá a

$$\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

monoton növekedő, folytonos és a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{\ln(\ln x)} = 0$$

[40]Elias Menachem Stein (Antwerpen, 1931. I. 13. –)
[41]Schipp Ferenc (Somberek, 1939. VI. 4. –)
[42]Pierre Billard
[43]Per Sjölin (1943. –)

nagyságrendi feltételnek eleget tevő tetszőleges függvény. Ekkor megadható olyan $f \in L^1[0,1]$, *amelyre*

$$\int_0^1 Wf(t) \cdot \Phi(Wf(t))\, dt < +\infty$$

és az f *Walsh–Fourier-sora minden* $x \in [0,1]$ *pontban divergál.*

Legyen a $k, l \in \mathbf{N}$ számok diadikus kifejtése

$$k = \sum_{j=0}^{\infty} k_j 2^j \quad \text{és} \quad l = \sum_{j=0}^{\infty} l_j 2^j,$$

ahol tehát

$$k_j,\, l_j \in \{0,1\} \qquad (j \in \mathbf{N}),$$

és tekintsük a k, l fentebb bevezetett

$$k \oplus l = \sum_{j=0}^{\infty} |k_j - l_j| \cdot 2^j$$

diadikus összegét. Ha adott $N \in \mathbf{N}$ esetén

$$X_N := \{0, 1, ..., 2^N - 1\},$$

akkor az X_N a $\oplus$ művelettel Abel-csoport, aminek (az analógiát illetően ld. 3.2.3.) a karakterrendszere a

$$\varphi_j(k) := w_j(k/2^N) \qquad (k \in X_N,\, j = 0, ..., 2^N - 1)$$

függvényekből áll. Ennek megfelelően egy

$$g : X_N \to \mathbf{R}$$

függvény (2^N-dimenziós vektor) *diszkrét Walsh–Fourier-transzformáltja*:

$$(***) \qquad \widehat{g}_w(j) := \frac{1}{2^N} \cdot \sum_{k=0}^{2^N-1} g(k) w_j(k/2^N) \qquad (j = 0, ..., 2^N - 1),$$

amikor alkalmazható az „inverz” transzformáció (inverzió):

$$g(k) := \sum_{j=0}^{2^N-1} \widehat{g}_w(j) w_k(j/2^N) \qquad (k = 0, ..., 2^N - 1).$$

Valóban,

$$\sum_{j=0}^{2^N-1} \widehat{g}_w(j) w_k(j/2^N) = \frac{1}{2^N} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{l=0}^{2^N-1} g(l) w_j(l/2^N) \cdot w_k(j/2^N) =$$

$$\frac{1}{2^N} \cdot \sum_{l=0}^{2^N-1} g(l) \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} w_j(l/2^N) \cdot w_k(j/2^N)$$

és itt

$$\frac{1}{2^N} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} w_j(l/2N) \cdot w_k(j/2^N) = \frac{1}{2^N} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} w_l(j/2^N) \cdot w_k(j/2^N) =$$

$$\frac{1}{2^N} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} w_{l \oplus k}(j/2^N) = \int_0^1 w_{l \oplus k}(x)\, dx = \begin{cases} 1 & (l = k) \\ 0 & (l \neq k). \end{cases}$$

Speciálisan, ha a $G \in L^1[0, 1]$ függvény minden egyes

$$\left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) \qquad (k = 0, ..., 2^N - 1)$$

diadikus intervallumon állandó,[44] akkor

$$\widehat{G}_w(j) := \int_0^1 G(x) w_j(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{2^N} \cdot \sum_{k=0}^{2^N-1} G(k2^{-N}) w_k(k2^{-N}) = \widehat{g}_w(j) \qquad (j = 0, ..., 2^N - 1),$$

ahol $k = 0, ..., 2^N - 1$ esetén

$$g(k) := G(x) \qquad \left(\frac{k}{2^N} \leq x < \frac{k+1}{2^N}\right)$$

[44] Más szóval mérhető a szóban forgó intervallumok által meghatározott legszűkebb szigma-algebrára nézve.

és a bal oldalon álló integrál a G függvény j-edik *Walsh–Fourier-együtthatója.* Világos, hogy ha pl. az

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}$$

függvény Riemann-integrálható és

$$g^{(N)}(k) := f(k2^{-N}) \qquad (k = 0, ..., 2^N - 1),$$

akkor

$$\widehat{f}_w(j) = \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_w^{(N)}(j) \qquad (j \in \mathbf{N}).$$

Belátható (*Schipp* (1977)), hogy a 3.2.3. pontban bemutatott FFT-algoritmus megfelelője, a *gyors Walsh–Fourier-transzformáció* segítségével adott $N \in \mathbf{N}$ mellett a $(***)$–beli $\widehat{g}_w(j)$–k kiszámítása $\mathrm{O}(N \cdot 2^N)$ számú művelettel elvégezhető.

3.2.5. Vilenkin-rendszer

Tetszőleges fenti m sorozat (ld. 3.2.4.) esetén tekintsük a

$$\rho_k(x) := e^{2\pi\imath x_k/m_k} \qquad (k \in \mathbf{N},\ x = (x_l, l \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G}_m)$$

függvényeket[45] és az

$$M_j := \prod_{k=0}^{j-1} m_k \qquad (j \in \mathbf{N})$$

„általánosított” hatványokat.[46] Ekkor minden $l \in \mathbf{N}$ szám egyértelműen írható fel

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} l_k M_k \qquad (l_k = 0, ..., m_k - 1 \quad (k \in \mathbf{N}))$$

alakban és belátható, hogy a

$$\mathbf{\Gamma} = \{\Psi_l : l \in \mathbf{N}\}$$

karakterrendszer (az ún. *Vilenkin-rendszer*) a következő:

$$\Psi_l := \prod_{k=0}^{\infty} \rho_k^{l_k}.$$

[45] Ha $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ és $k \in \mathbf{N}$, akkor az $s_k \in \mathbf{G}_m$ „koordinátasorozattal” (ld. 3.2.4.) (az argumentumban m_k-szoros „szorzást” véve) $\gamma(s_k \bullet ... \bullet s_k) = \gamma(\mathbf{0}) = 1 = (\gamma(s_k))^{m_k}$. Ezért alkalmas $x_k = 0, ..., m_k - 1$ választással $\gamma(s_k) = e^{2\pi\imath x_k/m_k}$.

[46] $M_0 := 1$.

A $\mathbf{G}_m$ csoport kompakt, a $\Psi_l \quad (l \in \mathbf{N})$ függvények ortonormált rendszert alkotnak. Ha $m_k = 2 \quad (k \in \mathbf{N})$, akkor (ld. 3.2.4.) nyilván

$$\rho_k(x) := e^{\pi \imath x_k} = (-1)^{x_k} = r_k(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x = (x_j, j \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G_2}),$$

továbbá

$$M_k = 2^k \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és

$$\Psi_l = w_l \qquad (l \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan legyen a $p \in \mathbf{N}$ prímszám és $m_j := p \quad (j \in \mathbf{N})$, azaz

$$m = \mathbf{p} := (p, j \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$\rho_k(x) = e^{2\pi \imath x_k / p} \qquad (k \in \mathbf{N},\, x = (x_j, j \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G_p})$$

és

$$\Psi_l(x) = e^{2\pi \imath l(x)/p} \qquad (x = (x_j, j \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G_p},\, l \in \mathbf{N})$$

(*Chrestenson*[47]*-rendszer* (1955)), ahol

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} l_k p^k \qquad (l_k = 0, ..., p-1 \;\; (k \in \mathbf{N}))$$

és

$$l(x) := \sum_{k=0}^{\infty} l_k x_k.$$

A Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos vizsgálatokban kiemelt szerep jut a $\mathbf{G}_m$ csoportot meghatározó m sorozat korlátosságának. Így pl. a Carleson-tétel (ld. 3.2.2.) megfelelője igaz a Vilenkin–Fourier-sorokra akkor, ha az m korlátos (*Gosselin*[48](1973)), viszont máig eldöntetlen akkor, ha az m nem korlátos. Ugyanakkor a Kolmogorov-féle mindenütt való divergencia (ld. 3.2.2.) tetszőleges m mellett fennáll alkalmas $f \in L^1(\mathbf{G}_m)$ függvényre (*Simon* (1983)).

[47] H. E. Chrestenson
[48] John Anthony Gosselin

3.3. Megjegyzések

i) Mivel a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ duális csoport lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport (ld. 3.1.), ezért képezhető ennek is a karaktercsoportja, az $(X, \mathcal{T})$ ún. *második duálisa*. Ekkor: az X izomorf a második duálisával (*Pontrjagin*[49]*-dualitási tétel*). Igaz továbbá a *Plancherel-tétel*: megadható egy olyan mindenütt sűrű $L_0^2(\mathbf{\Gamma})$ altér az $L^2(\mathbf{\Gamma})$ térben, hogy az

$$L^1(X) \cap L^2(X) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L_0^2(\mathbf{\Gamma})$$

leképezés izometria (a $\|.\|_2$ norma értelmében). Ez a leképezés egyértelműen kiterjeszthető egy

$$L^2(X) \to L^2(\mathbf{\Gamma})$$

izometriává. Ha speciálisan az $(X, \mathcal{T})$ csoport kompakt, akkor $L^2(X) \subset L^1(X)$ és a Plancherel-tétel az ortogonális sorok elméletéből jól ismert Riesz–Fischer-tételt jelenti.

ii) Röviden vázoljuk a Plancherel-tételben (ld. i)) említett izometria egy megvalósítását a „klasszikus" trigonometrikus Fourier-transzformációt illetően, amikor (ld. 3.2.1.) $X = \mathbf{R}$ és $\mathbf{\Gamma} = \{e_\gamma : \gamma \in \mathbf{R}\}$. Jelöljük ehhez az $\mathbf{R}$-en értelmezett, az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$$

súlyfüggvényhez tartozó *Hermite*[50]*-polinomokat* H_j-vel $(j \in \mathbf{N})$[51] és legyen

$$h_j(x) := \alpha_j \cdot \frac{H_j(x)}{e^{x^2/2}} \qquad (x \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{N}).$$

Itt az $\alpha_j > 0$ számok úgy vannak definiálva, hogy

$$\|h_j\|_2 = 1 \qquad (j \in \mathbf{N})$$

teljesüljön. Nem nehéz megmutatni, hogy a $(h_k, k \in \mathbf{N})$ függvényrendszer – az ún. *Hermite-függvények* rendszere – egy teljes, ortonormált rendszer az $(L^2, \|.\|_2)$ Hilbert-térben, így ugyanebben a térben Schauder[52]-bázis: minden

[49] Lev Szemjonovics Pontrjagin (Moszkva, 1908. IX. 3. – Moszkva, 1988. V. 3.)

[50] Charles Hermite (Dieuze, 1822. XII. 24. – Párizs, 1901. I. 14.)

[51] Tehát az j-edfokú H_j $(j \in \mathbf{N})$ polinomokra $\int H_j(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 0$ $(j,\, k \in \mathbf{N},\, j \neq k)$.

[52] Juliusz Pawel Schauder (Lemberg, 1899. IX. 21. – Lvov, 1943. IX.)

$f \in L^2$ függvény egyértelműen állítható elő

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$$

alakban alkalmas $c_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ együtthatókkal, ahol a szóban forgó végtelen sor a $\|.\|_2$ normában konvergens. Az is rögtön adódik, hogy az Hermite-függvények valamennyien beletartoznak az L^1 függvényosztályba is,[53] következésképpen kiszámíthatjuk a (módosított) $h_k^\diamond$ $(k \in \mathbf{N})$ Fourier-transzformáltakat (ld. 2.5. xx) megjegyzés). Felhasználva az Hermite-polinomok előállítására vonatkozó ismert *Rodrigues*[54]*-formulát* azt kapjuk, hogy a

$$\Psi(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvénnyel k-szoros deriválással

$$h_k(x) = \alpha_k(-1)^k e^{x^2/2} \cdot \Psi^{(k)}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, k \in \mathbf{N}).$$

Itt mindkét oldalt deriválva

$$h_k'(x) = \alpha_k(-1)^k \cdot \left(xe^{x^2/2} \cdot \Psi^{(k)}(x) + e^{x^2/2} \cdot \Psi^{(k+1)}(x)\right) =$$

$$xh_k(x) - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot h_{k+1}(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen az $f \mapsto f^\diamond$ Fourier-transzformációt alkalmazva (és az utóbbira adaptálva a $f \mapsto \widehat{f}$-ra megismert formulákat (ld. 1.2.2.1., 1.2.4.))

$$\imath \cdot xh_k^\diamond(x) = \imath \cdot (h_k^\diamond)'(x) - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot h_{k+1}^\diamond(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Ha itt $\imath^{k+1}$-gyel megszorozzuk mindkét oldalt, akkor

$$-\imath^k \cdot xh_k^\diamond(x) = -\imath^k \cdot (h_k^\diamond)'(x) - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot \imath^{k+1} \cdot h_{k+1}^\diamond(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}),$$

más szóval

$$\imath^k \cdot (h_k^\diamond)'(x) = \imath^k \cdot xh_k^\diamond(x) - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot \imath^{k+1} \cdot h_{k+1}^\diamond(x) \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

[53] Ti. a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből $\int |H_k(x)| \cdot e^{-x^2/2} dx \le \|H_k\|_2 \cdot \sqrt{\int e^{-x^2} dx} < +\infty$.

[54] Benjamin Olinde Rodrigues (Bordeaux, 1795. X. 6. – Párizs, 1851. XII. 17.)

Ez azt jelenti, hogy a $(h_k, k \in \mathbf{N})$ és az $(\imath^k \cdot h_k^\diamond, k \in \mathbf{N})$ sorozat ugyananannak a rekurziónak tesz eleget. Mivel $k = 0$ esetén

$$h_0(x) = \alpha_0 \cdot e^{x^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$h_0^\diamond(x) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{-t^2/2} \cdot e^{-\imath xt}\, dt = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot \int e^{-(t+\imath x)^2/2}\, dt =$$

$$\alpha_0 \cdot e^{-x^2/2} = h_0(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).^{55}$$

Ezért azt mondhatjuk, hogy

$$\imath^k \cdot h_k^\diamond = h_k \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$h_k^\diamond = (-\imath)^k \cdot h_k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Így a $h_k \quad (k \in \mathbf{N})$ Hermite-függvény *sajátfüggvénye* a $^\diamond$ Fourier-transzformációnak a $(-\imath)^k$ sajátértékkel. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az Hermite-függvényekre igaz az inverziós formula (ld. 2.2.).[56]

Tekintsünk ezek után egy tetszőleges $f \in L^2$ függvényt, és fejtsük Fourier-sorba az f-et a $(h_k, k \in \mathbf{N})$ rendszer szerint. Ekkor tehát (ld. fent) a

$$c_k := \int f(x) h_k(x)\, dx \qquad (k \in \mathbf{N})$$

Hermite–Fourier-együtthatókkal

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k.$$

Mivel az itt szereplő $(c_k, k \in \mathbf{N})$ sorozattal együtt a

$$((-\imath)^k \cdot c_k, k \in \mathbf{N})$$

[55] Emlékeztetünk arra (ld. 1.3. ii) megjegyzés), hogy $\int e^{-(t+\imath x)^2/2}\, dt = \int e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

[56] Az $n > 1$ esetben az Hermite-függvények vektorváltozós változatai lesznek a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei: a $h_\mathbf{k}(x_1, ..., x_n) := \prod_{j=1}^n h_{k_j}(x_j) \quad (\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbf{N}^n,\ x \in \mathbf{R}^n)$ függvényekre $h_\mathbf{k}^\diamond = (-\imath)^{|k|} \cdot h_\mathbf{h}$.

sorozat is az ℓ_2-be tartozik[57], ezért a Riesz–Fischer-tétel miatt a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-\imath)^k\cdot c_k h_k$$

végtelen sor is konvergens a $\|.\|_2$ normában. Legyen ebben az értelemben

$$Tf := \sum_{k=0}^{\infty}(-\imath)^k\cdot c_k h_k,$$

azaz $Tf \in L^2$ és

$$\lim_{m\to\infty}\left\|Tf - \sum_{k=0}^{m}(-\imath)^k\cdot c_k h_k\right\|_2 = 0.$$

Ezzel egy

$$T : L^2 \to L^2$$

leképezést értelmeztünk, ami nyilván lineáris és a Parseval-egyenlőség (ld. 1.3. xxii) megjegyzés) alapján

$$\|Tf\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|(-\imath)^k\cdot c_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 = \|f\|_2^2$$

miatt izometria. A könnyen ellenőrizhető

$$h_k(-x) = (-1)^k\cdot h_k(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}),$$

más szóval a

$$T(Tf)(x) = f(-x) \qquad (f \in L^2,\ x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség alapján az is következik, hogy a fenti T leképezés bijekció.[58] Belátható, hogy

$$Tf = f^{\diamond} \qquad (f \in L^1 \cap L^2),$$

azaz a T valóban tekinthető úgy, mint a Fourier-transzformáció kiterjesztése az L^2 függvényosztályra: az előbb idézett Parseval-egyenlőség szerint tetszőleges $g \in L^2$ függvényre

$$(*) \qquad \langle Tf, g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}(-\imath)^k\cdot c_k\cdot\overline{\langle g, h_k\rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot\langle(-\imath)^k h_k, g\rangle.$$

[57] $\sum_{k=0}^{\infty}|(-\imath)^k\cdot c_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 < +\infty$.

[58] A funkcionálanalízis nyelvén fogalmazva a T unitér operátor.

Speciálisan legyen itt

$$g := g_z := \begin{cases} \chi_{[0,z]} & (z \geq 0) \\ \\ -\chi_{[z,0]} & (z < 0) \end{cases} \qquad (z \in \mathbf{R}),$$

ekkor a $(*)$ egyenlőség a következőket jelenti:

$$\int_0^z Tf(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \int_0^z h_k^{\diamond}(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \int_0^z \left(\int h_k(t) e^{-\imath t x}\,dt \right) dx.$$

Vegyük észre, hogy az itt szereplő

$$(x,t) \mapsto h_k(t) e^{-\imath t x}$$

folytonos kétváltozós függvényre alkalmazható a szukcesszív integrálásról szóló Fubini-tétel, így

$$\int_0^z \left(\int h_k(t) e^{-\imath t x}\,dt \right) dx = \int h_k(t) \cdot \left(\int_0^z e^{-\imath t x}\,dx \right) dt = \langle h_k, G_z \rangle,$$

ahol

$$G_z(t) := \int_0^z e^{\imath t x}\,dx = \frac{1}{\imath t} \cdot \left(e^{\imath t z} - 1 \right) \qquad (z \in \mathbf{R},\ 0 \neq t \in \mathbf{R}).$$

Tehát a fentiekre tekintettel (ismét alkalmazva a Parseval-egyenlőséget)

$$\int_0^z Tf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \langle h_k, G_z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \langle f, G_z \rangle.$$

Az integrálfüggvény differenciálhatóságával kapcsolatos alaptételből innen azt kapjuk, hogy a

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \langle f, G_z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f(t) \cdot \frac{e^{-\imath t z} - 1}{-\imath t}\,dt \qquad (z \in \mathbf{R})$$

függvénnyel

$$Tf(x) = \Phi'(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ami egy „pontonkénti” előállítás a Tf függvényre. Ha már most az $f \in L^2$ függvényre az is igaz, hogy $f \in L^1$, akkor az

$$\left| f(t)\cdot \frac{1}{h}\cdot \left(\frac{e^{-\imath t(x+h)}-1}{-\imath t} - \frac{e^{-\imath tx}-1}{-\imath t} \right) \right| =$$

$$\left| f(t)\cdot \frac{\sin(ht/2)}{ht/2} \right| \leq |f(t)| \qquad (0 \neq h \in \mathbf{R},\, t \in \mathbf{R})$$

(integrálható majoránssal való) becslésre és a Lebesgue-tételre figyelemmel a $\Phi'(x)$ deriváltak kiszámolásakor „szabad az integráljel mögött deriválni”:

$$Tf(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int f(t)e^{-\imath tx}\,dt = f^{\diamond}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Legyen $f \in L^2$ és $a, b \in (0, +\infty)$ esetén

$$I_{ab}f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int f(t)e^{-\imath xt}\cdot \chi_{[-a,b]}(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az

$$f_{ab} := f\cdot \chi_{[-a,b]} \in L^1 \cap L^2$$

jelöléssel az előbb mondottakra tekintettel

$$I_{ab}f = f_{ab}^{\diamond} = Tf_{ab}.$$

Ezért

$$\|Tf - I_{ab}f\|_2 = \|f - f_{ab}\|_2 \to 0 \qquad (a,\, b \to +\infty).$$

Más szóval (a $\|.\|_2$ normában való konvergenciára bevezetett (ld. 2.) l.i.m. jelöléssel (a Tf helyett már $f^{\diamond}$-t írva)

$$f^{\diamond}(x) = \underset{a,b\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int_{-a}^{b} f(t)e^{-\imath xt}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá, ha

$$J_{ab}f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int Tf(t)e^{\imath xt}\cdot \chi_{[-a,b]}(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor (az előbbiekkel analóg meggondolással)

$$\|f - J_{ab}f\|_2 \to 0 \qquad (a,\, b \to +\infty).$$

Mivel (a fenti paraméterekkel)

$$J_{ab}f(x) = I_{ab}(Tf)(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért az

$$\|f - J_{ab}f\|_2 \to 0 \qquad (a,\, b \to +\infty),$$

azaz az

$$f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{a,b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-a}^{b} f^{\diamond}(t) e^{\imath xt}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

reláció is tekinthető egyfajta *inverziós formulának.* A különbség „csupán" annyi, hogy itt az f előállítása a Fourier-transzformáltjából nem pontonként történik, hanem a $\|.\|_2$ normában.

iii) Ha a fentiekben (ld. ii)) $f \in L^1 \cap L^2$, akkor (a Fubini-tétel alkalmazásával) tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen[59]

$$J_{ab}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f^{\diamond}(t) \chi_{[-a,b]}(t) e^{\imath xt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\int f(y) e^{-\imath yt} dy \right) \cdot \chi_{[-a,b]}(t) e^{\imath xt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\int f(x-y) e^{-\imath (x-y)t} dy \right) \cdot \chi_{[-a,b]}(t) e^{\imath xt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\int \chi_{[-a,b]}(t) e^{\imath yt} dt \right) \cdot f(x-y)\, dy = \int f(x-y) D_{ab}(y)\, dy,$$

ahol

$$D_{ab}(y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{\imath by} - e^{-\imath ay}}{\imath y} \qquad (0 \neq y \in \mathbf{R}).$$

A D_{ab} függvény a Fourier-sorok elméletéből jól ismert *Dirichlet*[60]*-féle magfüggvény* megfelelője. Speciálisan $(a = b)$

$$J_{aa}f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int f(x-y) \frac{\sin(ay)}{y}\, dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$J_{aa}f(x) \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \qquad (a \to +\infty),$$

[59] Kihasználva a Lebesgue-integrál eltolás-invarianciáját.

[60] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 1805. II. 13. – Göttingen, 1859. V. 5.)

hacsak az f korlátos változású az $x \in \mathbf{R}$ pont egy környezetében.[61]

iv) Legyen (ld. iii))

$$K_a(y) := \frac{1}{a} \cdot \int_0^a D_{tt}(y)\, dt = \frac{1}{\pi a} \cdot \int_0^a \frac{\sin(ty)}{y}\, dt =$$

$$\frac{2}{\pi a} \cdot \frac{\sin^2(ay/2)}{y^2} \qquad (0 \neq y \in \mathbf{R},\, a > 0)$$

(*Fejér-féle magfüggvény*). Ekkor minden $f \in L^p \quad (1 \leq p < +\infty)$ függvényre

$$\lim_{a \to +\infty} f * K_a = f$$

teljesül mind a $\|.\|_p$ norma, mind pedig m.m. értelemben.

v) Lássuk be: az $(L^1, +, *)$ Banach-algebrának nincs egységeleme.[62] Ha ui. mondjuk az $u \in L^1$ függvény az lenne, akkor $u * f = f$, így (ld. 1.2.2.1.)

$$\widehat{f} = \widehat{u * f} = \widehat{u} \cdot \widehat{f} \qquad (f \in L^1).$$

Ugyanakkor az $f := \chi_{[-1,1]}$ választással

$$\widehat{f}(x) = \int_{-1}^{1} e^{\imath x t}\, dt = \frac{2 \sin x}{x} \neq 0 \qquad (k\pi \neq x \in \mathbf{R} \ \ (k \in \mathbf{Z})),$$

ezért szükségszerűen

$$\widehat{u}(x) = 1 \qquad (k\pi \neq x \in \mathbf{R} \ \ (k \in \mathbf{Z})).$$

Így

$$\widehat{u}(t) \to 0 \qquad (|t| \to +\infty)$$

nem teljesülhet, ami ellentmond a Riemann–Lebesgue-lemmának (ld. 1.2.2.1).

---

[61] Megjegyezzük, hogy nyilván $D_{aa} \notin L^1$, de $D_{aa} \in L^q \quad (q > 1)$. Ezért tetszőlegesen választott $f \in L^p \quad (1 < p < +\infty)$ függvényre képezhető az $f * D_{aa}$ konvolúció.

[62] A $*$ konvolúciót illetően ld. 1.1. Tehát az L^1-ben a függvények közötti összeadást $(+)$, mint vektortér-műveletet és a $*$ konvolúciót, mint szorzást tekintve.

vi) Legyen $1 \le s \in \mathbf{N}$ és az

$$f : \mathbf{Z}_{2^s} \to \mathbf{C}$$

vektor esetén az összes

$$\widehat{f}(k) \qquad (k = 0, ..., 2^s - 1)$$

diszkrét Fourier-transzformált helyettesítési érték kiszámításának a Cooley–Tukey-algoritmus (ld. 3.2.3.) szerinti műveletigénye λ_s. Ekkor a 3.2.3. pontbeli $(**)$ rekurzió alapján azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{s+1} = 2\lambda_s + 3 \cdot 2^{s+1},$$

ahol (ld. 3.2.3. $(***)$) $\lambda_1 = 4$. Mindez egy inhomogén elsőrendű lineáris differenciaegyenlet. Ennek a homogén részét az $s \mapsto 2^s$ sorozat nyilván megoldja, ezért egy $s \mapsto q_s$ sorozattal kereshetünk partikuláris megoldást $s \mapsto q_s \cdot 2^s$ alakban, amikor

$$\lambda_{s+1} = q_{s+1} \cdot 2^{s+1} = 2q_s \cdot 2^s + 3 \cdot 2^{s+1} \qquad (1 \le s \in \mathbf{N}).$$

Innen

$$q_{s+1} = q_s + 3 \qquad (1 \le s \in \mathbf{N}),$$

amiből pl. (mint számtani sorozat)

$$q_s = 3s \qquad (1 \le s \in \mathbf{N}).$$

Tehát valamilyen $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\lambda_s = c \cdot 2^s + 3s \cdot 2^s \qquad (1 \le s \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$4 = \lambda_1 = 2c + 6,$$

ezért $c = -1$ és

$$\lambda_s = -2^s + 3s \cdot 2^s = (3s - 1) \cdot 2^s \qquad (1 \le s \in \mathbf{N})$$

(mint amire fentebb is (ld. 3.2.3.) jutottunk).

vii) Legyen

$$\mathfrak{h} := \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$$

és definiáljuk a $(\mathfrak{h}_l, l \in \mathbf{N})$ *Haar-rendszert* a következőképpen (*Haar* (1909)):

$$\mathfrak{h}_0(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$

és

$$\mathfrak{h}_{2^k+j}(x) := 2^{k/2} \cdot \mathfrak{h}(2^k x - j) \qquad (x \in [0,1],\ k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1).$$

Tehát az előbbi $k \in \mathbf{N}$, $j = 0, ..., 2^k - 1$ indexekkel

$$\mathfrak{h}_{2^k+j}(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & (j2^{-k} \le x < (2j+1)2^{-k-1}) \\ \\ -2^{k/2} & ((2j+1)2^{-k-1} \le x < (j+1)2^{-k}) \\ \\ 0 & (x \in [0,1] \setminus [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}). \end{cases}$$

Világos, hogy a Haar-rendszer ortonormált:

$$\int_0^1 \mathfrak{h}_l(x) \mathfrak{h}_s(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (l \ne s) \\ \\ 1 & (l = s) \end{cases} \qquad (l, s \in \mathbf{N}),^{63}$$

továbbá (ld. 3.2.4.) az

$$x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}) \qquad (k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1)$$

[63]Legyen $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ és tetszőleges $k, j \in \mathbf{Z}$ esetén definiáljuk a ψ_{kj} függvényeket az alábbiak szerint: $\psi_{kj}(x) := 2^{k/2} \cdot \psi(2^k x - j)$ $(x \in \mathbf{R})$. Azt mondjuk, hogy a ψ *wavelet,* ha a ψ_{kj} $(k, j \in \mathbf{Z})$ függvényrendszer ortonormált bázist alkot az $(L^2(\mathbf{R}), \langle , \rangle)$ Hilbert-térben. Pl. belátható, hogy a $\mathfrak{h}$ függvény wavelet (az ún. *Haar-wavelet*). Megmutatható, hogy a $(\mathfrak{h}_l, l \in \mathbf{N})$ rendszer bázis az L^p $(1 \le p < +\infty)$ terekben. Megjegyezzük, hogy a Haar által megadott $(\widetilde{\mathfrak{h}}_l, l \in \mathbf{N})$ rendszer csak a $[0,1]$ intervallum diadikusan racionális helyein különbözött legfeljebb a $(\mathfrak{h}_l, l \in \mathbf{N})$ rendszertől: $\widetilde{\mathfrak{h}}_{2^k+j}(x) := 2^{k/2}$ $(j2^{-k} < x < (2j+1)2^{-k-1})$ és $\widetilde{\mathfrak{h}}_{2^k+j}(x) := -2^{k/2}$ $((2j+1)2^{-k} < x < (j+1)2^{-k})$, valamint $\widetilde{\mathfrak{h}}_{2^k+j}(x) := 0$ $(x \in (0,1) \setminus [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}])$, $k \in \mathbf{N}$, $j = 0, ..., 2^k - 1)$. A $[0,1]$ intervallum azon x belső pontjaiban, amikben ezzel még nem definiáltuk a $\widetilde{\mathfrak{h}}_s(x)$ $(s \in \mathbf{N})$ értékeket, legyen $\widetilde{\mathfrak{h}}_s(x) := (\widetilde{\mathfrak{h}}_s(x-0) + \widetilde{\mathfrak{h}}_s(x+0))/2$, továbbá $\widetilde{\mathfrak{h}}_s(0) := \widetilde{\mathfrak{h}}_s(0+0)$ és $\widetilde{\mathfrak{h}}_s(1) := \widetilde{\mathfrak{h}}_s(1-0)$. A rendszer legmeglepőbb tulajdonsága az, hogy bármely folytonos $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ függvény Sf Haar–Fourier-sora *egyenletesen* konvergál az f-hez. Haar azt is belátta, hogy $f \in L^1[0,1]$ esetén az Sf sor m.m. helyen konvergál az f-hez. Speciálisan az f minden Lebesgue-pontjában.

helyeken a Rademacher-, ill. a Walsh-függvényekkel a kapcsolat:

$$\mathfrak{h}_{2^k+j}(x) = 2^{k/2}\cdot r_k(x)$$

és

$$2^{-k/2}\cdot\sum_{j=0}^{2^k-1}\mathfrak{h}_{2^k+j} = r_k = w_{2^k} \qquad (k\in\mathbf{N}).$$

Azt sem nehéz megmutatni, hogy

$$w_{2^s+l} = \frac{1}{2^{s/2}}\cdot\sum_{j=0}^{2^s-1} w_l(j/2^s)\mathfrak{h}_{2^s+j} \qquad (s\in\mathbf{N},\, l=0,...,2^s-1),$$

ahol valamennyi

$$H_s := \big(w_l(j/2^s)\big)_{l,j=0}^{2^s-1}\in\mathbf{R}^{2^s\times 2^s} \qquad (s\in\mathbf{N})$$

mátrix szimmetrikus és ortogonális.

Az előbbi H_s $(s\in\mathbf{N})$ *Hadamard*[64]*–Paley-mátrixok* a következők:

$$H_0=(+1), H_1=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}, H_2=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1\\ +1 & -1 & +1 & -1\\ +1 & -1 & -1 & +1\end{pmatrix}, ...$$

ahol formálisan a H_{s+1}-et úgy kapjuk a H_s-ből, hogy a H_s minden sorát kétszer leírjuk egymás alá, utána mindegyik mellé rendre ugyanazt, ill a (-1)-szeresét írjuk.

viii) Az „eredeti”, a Walsh-által megadott sorrendben vett rendszer egy másik nevezetes átrendezése a Kaczmarz[65]-ról elnevezett függvényrendszer (*Šneider*[66] (1948)). Legyen ehhez a

$$t:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$$

leképezés a következő bijekció:

$$t(0) := 0 \quad\text{és}\quad t(1) := 1,$$

[64] Jacques Salomon Hadamard (Versailles, 1865. XII. 8. – Párizs, 1963. X. 17.)
[65] Stefan Marian Kaczmarz (Sambor, 1895. III. 20. – 1939. IX. 4.)
[66] A. A. Šneider

valamint $1 \le s \in \mathbf{N}$ esetén

$$t\Big(2^s + \sum_{k=0}^{s-1} \mu_k 2^k\Big) := 2^n + \sum_{k=0}^{s-1} \mu_{s-1-k} 2^k \qquad (\mu_0, ..., \mu_{s-1} \in \{0,1\}).$$

A Walsh-rendszer $(w_{t(s)}, s \in \mathbf{N})$ átrendezésére, a *Walsh–Kaczmarz-rendszerre* könnyen igazolható, hogy

$$w_{2^k} = r_k = w_{t(2^k)} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

továbbá: ha

$$s = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} s_k 2^k$$

az $s \in \mathbf{N}$ index diadikus kifejtése, akkor

$$w_{t(s)} = r_s \cdot \prod_{k=0}^{p-1} r_k^{s_{p-k-1}} \qquad (1 \le p \in \mathbf{N}).$$

Végül, álljon itt az előbb említett Walsh-féle rekurzív módon megkonstruált $(\phi_s, s \in \mathbf{N})$ függvényrendszer. Nevezetesen, legyen

$$\phi_0(x) := 1 \qquad (0 \le x \le 1)$$

és

$$\phi_1(x) := \phi_1^{(1)}(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2) \\ \\ -1 & (1/2 < x \le 1). \end{cases}$$

Továbbá

$$\phi_2^{(k)}(x) := \begin{cases} \phi_1^{(1)}(2x) & (0 \le x < 1/2) \\ \\ (-1)^k \cdot \phi_1^{(1)}(2x) & (1/2 < x \le 1) \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

és a

$$\phi_s := \phi_l^{(k)} \qquad (2 \le l \in \mathbf{N},\ k = 1, ..., 2^{l-1})$$

jelöléssel

$$\phi_{l+1}^{(2k-1)}(x) := \begin{cases} \phi_l^{(k)}(2x) & (0 \le x < 1/2) \\ \\ (-1)^{k+1} \cdot \phi_l^{(k)}(2x) & (1/2 < x \le 1), \end{cases}$$

valamint

$$\phi_{l+1}^{(2k)}(x) := \begin{cases} \phi_l^{(k)}(2x) & (0 \leq x < 1/2) \\ \\ (-1)^k \cdot \phi_l^{(k)}(2x) & (1/2 < x \leq 1). \end{cases}$$

Azokban a diadikusan racionális $x \in (0,1)$ pontokban, ahol még nem definiáltuk a függvényértékeket, legyen

$$\phi_s(x) := \frac{\phi_s(x-0) + \phi_s(x+0)}{2}.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy a $(0,1)$ intervallumon a $\phi_s \quad (s \in \mathbf{N})$ függvény előjelváltásainak a száma éppen s, ami a trigonometrikus rendszerre is jellemző. Az is igaz, hogy ha egy $(\Phi_s, s \in \mathbf{N})$, a $[0,1]$-en ortonormált rendszerre az ugráshelyek kivételével (ahol a Φ_s nulla) $\Phi_s(x) = \pm 1$ és $\Phi_s(0) = 1$, a Φ_s előjelváltásainak a $(0,1)$-beli száma s, akkor $\Phi_s = \phi_s \quad (s \in \mathbf{N})$.

4. fejezet

L^p-beli függvények Fourier-transzformáltja

Legyen most $1 \le p \le +\infty$ és „próbáljuk meg" egy $f \in L^p$ függvény Fourier-transzformáltját értelmezni.[1] Látni fogjuk, hogy ez az $1 \le p \le 2$ esetben minden további nélkül megy a „hagyományos" függvények körében. Ugyanakkor, ha $p > 2$, akkor a helyzet drasztikusan megváltozik, és ekkor egy $f \in L^p$ függvény Fourier-transzformáltja általában már csak az „általánosított függvények", a disztribúciók körében értelmezhető.

4.1. Az $1 \le p \le 2$ eset

Emlékeztetünk arra, hogy tetszőlegesen adott

$$1 \le r \le p \le q \le +\infty$$

kitevők esetén

$$L^p \subset L^r + L^q := \{\varphi + \psi : \varphi \in L^r,\, \psi \in L^q\}.^2$$

Ha ebben a relációban $r := 1$ és $q := 2$, akkor bármely $p \in [1, 2]$ választással

$$L^p \subset L^1 + L^2.$$

[1]Világos, hogy az eddigiek után már csak az $1 < p \ne 2$ eset az érdekes.

[2]Legyen az $f \in L^p$ függvénnyel $\varphi := f \cdot \chi_{\{|f|>1\}}$ és $\psi := f \cdot \chi_{\{|f|\le 1\}}$. Ekkor $f = \varphi + \psi$ és $|\varphi|^r \le |f|^p$ miatt $\|\varphi\|_r \le \|f\|_p^{p/r} < +\infty$ (itt nyilván feltehető, hogy $p < +\infty$). Továbbá $\psi \in L^\infty$, ill. $|\psi|^q \le |f|^p$ alapján $\|\psi\|_q \le \|f\|_p^{p/q} < +\infty$ (ha $p < q < +\infty$).

Ez azt jelenti, hogy minden $f \in L^p$ függvény előállítható

$$f = f_1 + f_2$$

alakban alkalmas $f_1 \in L^1$ és $f_2 \in L^2$ függvénnyel. Legyen

$$\widehat{f} := \widehat{f_1} + \widehat{f_2} \in L^\infty + L^2$$

(ld. még 4.3. iii) megjegyzés). Ez az értelmezés korrekt, mert

$$f = F_1 + F_2 \qquad (F_1 \in L^1,\, F_2 \in L^2)$$

esetén

$$f_1 - F_1 = F_2 - f_2 \in L^1 \cap L^2,$$

amiből

$$(f_1 - F_1)^\wedge = \widehat{f_1} - \widehat{F_1} = (F_2 - f_2)^\wedge = \widehat{F_2} - \widehat{f_2} \Longrightarrow \widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2}.$$

Ezzel tehát $1 \le p \le 2$ mellett értelmeztük az L^p-beli függvények *Fourier-transzformáltját.* Vegyük észre, hogy ha ekkor az $f \in L^p$ függvényre $\widehat{f} \in L^1$ teljesül, akkor igaz az inverziós formula (ld. 2.2.):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Ehhez a 2.2. pontban követett bizonyítással kapcsolatban csak a következőket kell meggondolni (az ottani jelölésekkel): az

$$F_N(t) = \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N) \qquad (x, t \in \mathbf{R}^n,\, 0 < N \in \mathbf{N})^3$$

függvényekre egyrészt ugyanúgy kapjuk az

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt = \lim_{N\to\infty} \int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

egyenlőséget, hiszen ebben az f-et illetően csak az $\widehat{f} \in L^1$ feltétel játszott szerepet. Másrészt az

$$\int \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\, dt = N^n \cdot \int f(x+t) h(Nt)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, 0 < N \in \mathbf{N})$$

[3] $h(y) = e^{-\|y\|^2/2} \quad (y \in \mathbf{R}^n)$.

egyenlőség részben azon múlott, hogy

$$\widehat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} = \widehat{\mathcal{T}_x f}(t) \qquad (x,t \in \mathbf{R}^n).$$

Ez viszont most is igaz, hiszen az

$$f = f_1 + f_2 \qquad (f_1 \in L^1,\ f_2 \in L^2)$$

előállíthatóság alapján

$$\widehat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} = \widehat{f_1}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} + \widehat{f_2}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} =$$

$$\widehat{\mathcal{T}_x f_1}(t) + \widehat{\mathcal{T}_x f_2}(t) = \widehat{\mathcal{T}_x f}(t) \qquad (x,t \in \mathbf{R}^n)$$

(ui. az itt felhasznált, a transzláció-moduláció és a Fourier-transzformácó kapcsolatára vonatkozó azonosság az L^2-ben is igaz (ld. 1.3. i) megjegyzés)). Továbbá a

$$H_N(t) = h(t/N) \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ 0 < N \in \mathbf{N})$$

függvénnyel az

$$\int \widehat{\mathcal{T}_x f}(t) H_N(t)\,dt = \int \widehat{\mathcal{T}_x f_1}(t) H_N(t)\,dt + \int \widehat{\mathcal{T}_x f_2}(t) H_N(t)\,dt =$$

$$\int \mathcal{T}_x f_1(t) \widehat{H}_N(t)\,dt + \int \mathcal{T}_x f_2(t) \widehat{H}_N(t)\,dt =$$

$$\int \mathcal{T}_x f(t) \widehat{H}_N(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < N \in \mathbf{N})$$

egyenlőség is fennáll, mivel az itt alkalmazott szorzási szabály a 2.5. xv) megjegyzés szerint az L^2 térben is „működik” (így az f_1 mellett az f_2-re is).

Mindezek alapján a

$$g_N(t) := \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot h(Nt) \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ 0 < N \in \mathbf{N})$$

függvénnyel a

$$\delta_N(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} \cdot h(t/N)\,dt - f(x) =$$

$$f * g_N(x) - f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < N \in \mathbf{N})$$

előállítás is következik, amiből (ld. 2.5. i), ii) megjegyzések)

$$\lim_{N\to\infty} \|\delta_N\|_p = \|f * g_N - f\|_p = 0$$

adódik. Az inverziós formula igazolása most már ugyanúgy fejezhető be, mint a $p = 1$ esetben.[4]

4.2. A $2 < p < +\infty$ eset

A 2-nél nagyobb kitevők esete az előbbieknél lényegesen bonyolultabb, a „szokásos" függvényfogalom keretén belül nem is valósítható meg a Fourier-transzformáció fogalmának a kiterjesztése. Ezért először az ún. általánosított függvények (vagy más néven disztribúciók) fogalmát vezetjük be, egyúttal felelevenítve néhány alapvető tulajdonságukat.

4.2.1. Disztribúciók

A 2.3. pontban bevezetett $\mathcal{S}$ Schwartz-osztályra utalva legyen az $\mathcal{S}'$ az

$$F : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$$

folytonos lineáris funkcionálok halmaza (az *általánosított függvények* (vagy más néven („temperált") *disztribúciók*) halmaza).[5] Ha pl. $1 \le p \le +\infty$ és $f \in L^p$, továbbá

$$F_f(u) := \int f(t)u(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}),^{6}$$

akkor az

$$F_f : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$$

leképezés nyilván lineáris funkcionál. Könnyen láthatóan folytonos is. Vegyünk ehhez ui. olyan $\mathcal{S}$-beli $(u_k, k \in \mathbf{N})$ sorozatot, amelyre

$$\rho(u_k, 0) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

[4] Mindezt más megvilágításban ld. 4.2.2.

[5] A folytonosságot az $\mathcal{S}$-ben a ρ metrika (ld. 2.3.) értelmében értjük.

[6] Mivel (ld. 2.3) $u \in L^q$ (ahol $1/p + 1/q = 1$), így a Hölder-egyenlőtlenség miatt $fu \in L^1$.

A 2.3. pontban mondottak szerint az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőségnek eleget tevő q-val

$$\|u_k\|_q \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

is igaz. Következésképpen a Hölder-egyenlőtlenségből következően

$$|F_f(u_k)| \leq \|f\|_p \cdot \|u_k\|_q \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

azaz az F_f folytonos a $\mathcal{S} \ni 0$-ban, így a linearitása miatt minden $\mathcal{S}$-beli helyen. Tehát $F_f \in \mathcal{S}'$. Nyilván ugyanez igaz akkor is, ha $f \in L^p + L^r$ $(1 \leq r \leq +\infty)$ (*reguláris disztribúció*).

Az $F_f \equiv f$ azonosítással így azt mondhatjuk, hogy az f egyúttal általánosított függvény is. Legyen pl. $f = 1$. Ekkor

$$F_1(u) = \int u(t)\, dt \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

tehát az

$$\mathcal{S} \ni u \mapsto \int u(t)\, dt$$

integrálfunkcionál reguláris disztribúció. Ugyanakkor legyen $z \in \mathbf{R}^n$ és a

$$\delta_z : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$$

leképezés a

$$\delta_z(u) := u(z) \qquad (u \in \mathcal{S})$$

utasítással értelmezett (nyilván lineáris) funkcionál. Világos, hogy a δ_z folytonos is, azaz $\delta_z \in \mathcal{S}'$ (*Dirac-disztribúció*), viszont (eléggé nyilvánvalóan) a δ_z nem reguláris a fenti értelemben: nincs olyan (az előbbi tulajdonságú) f függvény, amellyel

$$\delta_z(u) = u(z) = F_f(u) = \int f(t)u(t)\, dt \qquad (u \in \mathcal{S})$$

teljesülne.

Az $\mathcal{S}'$ jellemzését illetően a következő ekvivalencia látható be: az

$$F : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$$

lineáris funkcionál akkor és csak akkor általánosított függvény (azaz $F \in \mathcal{S}'$), ha alkalmas $C > 0$ és $m, l \in \mathbf{N}$ számokkal

$$|F(u)| \leq C \cdot \sum_{|k| \leq m} \sum_{|j| \leq l} \|u\|_{k,j} \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

A „közönséges” függvényekkel kapcsolatos bizonyos „manipulációk” analógia alapján könnyen átvihetők a disztribúciókra is. Illusztrációképpen mutassuk meg mindezt először a deriválás vonatkozásában. Legyen ehhez $f, g \in \mathcal{S}$ és $j \in \mathbf{N}^n$. Ekkor (parciálisan $|j|$-szer integrálva) azt kapjuk, hogy

$$\int \partial^j f(t) g(t)\, dt = (-1)^{|j|} \cdot \int \partial^j g(t) f(t)\, dt.$$

Logikusnak látszik ezért $F \in \mathcal{S}'$ esetén a $\partial^j F \in \mathcal{S}'$ disztribúciót úgy definiálni, hogy

$$\partial^j F(u) := (-1)^{|j|} \cdot F(\partial^j u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

(Egyszerűen meggondolható, hogy ezzel valóban egy $\mathcal{S}'$-beli funkcionált definiáltunk.)

Tegyük fel, hogy $n = 1$ és a differenciálható $f \in L^1$ függvényre $f' \in L^1$, amikor (ld. 1.2.4.)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0.$$

Mindezek alapján gondoljuk meg, hogy

$$F'_f = F_{f'}.$$

Ugyanis tetszőleges $g \in \mathcal{S}$ függvényre parciális integrálással (figyelembe véve azt is, hogy

$$\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0)$$

$$F'_f(g) = -F_f(g') = -\int f(t) g'(t)\, dt = \int f'(t) g(t)\, dt = F_{f'}(g).$$

Ha az előbbiekben az $f,\, f' \in L^2$ feltételezéssel élünk, akkor (ld. 2.5. xv) megjegyzés)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0,$$

amiből a fentiek szerint újra csak az

$$F'_f = F_{f'}$$

egyenlőséghez jutunk.

Legyen pl. ($n = 1$ esetén) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és $F := F\chi_{[a,b]}$. Ekkor bármely $u \in \mathcal{S}$ függvényre

$$F'(u) = -F\chi_{[a,b]}(u') = -\int_a^b u'(t)\,dt = u(a) - u(b) = \delta_a(u) - \delta_b(u),$$

így (az $F\chi_{[a,b]} \equiv \chi_{[a,b]}$ azonosításra gondolva) a disztribúció-értelemben vett deriválás szerint

$$\chi'_{[a,b]} = \delta_a - \delta_b.$$

Hasonlóan, ha $f, g \in L^1$, akkor az

$$\widetilde{f}(t) := f(-t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel (ld. 1.1.)

$$F_{f*g}(u) = \int f * g(t)\cdot u(t)\,dt = \int \left(\int g(x) f(t-x)\,dx\right)\cdot u(t)\,dt =$$

$$\int g(x)\left(\int u(t) f(t-x)\,dt\right)dx = \int g(x)\cdot\left(\int u(t)\widetilde{f}(x-t)\,dt\right)dx =$$

$$\int g(x)\cdot \widetilde{f} * u(x)\,dx = F_g(\widetilde{f} * u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Mindez az alábbi definíciót motiválja:

$$f * F(u) := F(\widetilde{f} * u) \qquad (f, u \in \mathcal{S},\ F \in \mathcal{S}').^7$$

Speciálisan

$$f * \delta_z(u) = \delta_z(\widetilde{f} * u) = \widetilde{f} * u(z) = \int f(t-z)u(t)\,dt \qquad (z \in \mathbf{R}^n),$$

tehát (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$f * \delta_z = F_{\mathcal{T}_{-z}f} \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Ha itt $z := 0$, akkor

$$f * \delta_0 = F_f \equiv f \qquad (f \in \mathcal{S}),$$

más szóval a δ_0 az $\mathcal{S}$-beli konvolúció-szorzásra nézve az egységoperátor.

---

[7] Tehát $f * F_g = F_{f*g}$.

4.2.2. Fourier-transzformált

A 4.2.1. pontban mondottak szellemében emlékeztetünk arra (ld. szorzási szabály), hogy ha $f \in L^1$ (vagy $f \in L^2$), akkor bármely $u \in \mathcal{S}$ esetén

$$F_{\widehat{f}}(u) = \int \widehat{f}(t)u(t)\,dt = \int f(t)\widehat{u}(t)\,dt = F_f(\widehat{u}).$$

Ezért kézenfekvőnek látszik tetszőleges $F \in \mathcal{S}'$ disztribúció esetén az $\widehat{F}$ *Fourier-transzformáltat* olyan $\widehat{F} \in \mathcal{S}'$ általánosított függvényként definiálni, amelyre

$$\widehat{F}(u) := F(\widehat{u}) \qquad (u \in \mathcal{S})$$

teljesül.[8] Így pl. az inverziós formula (ld. 2.2.) szerint (ld. 4.2.1.)

$$\widehat{F_1}(u) = F_1(\widehat{u}) = \int \widehat{u}(t)\,dt = (2\pi)^n \cdot u(0) = (2\pi)^n \cdot \delta_0(u) \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

más szóval

$$\widehat{F_1} = (2\pi)^n \cdot \delta_0.$$

Hasonlóan kapjuk a Dirac-féle δ_z $(z \in \mathbf{R}^n)$ disztribúció (ld. 4.2.1.) Fourier-transzformáltját is:

$$\widehat{\delta}_z(u) = \delta_z(\widehat{u}) = \widehat{u}(z) = \int u(t)e^{\imath\langle t,z\rangle}dt = F_{e_z}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}),^{9}$$

azaz

$$\widehat{\delta}_z = F_{e_z} \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Legyen az $F \in \mathcal{S}'$ disztribúció esetén (ld. 4.2.1.)

$$\widetilde{F}(u) := F(\widetilde{u}) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Ekkor az alábbi *inverziós formula* igaz:

$$\widehat{\widehat{F}} = (2\pi)^n \cdot \widetilde{F}.$$

Valóban,

$$\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \cdot \widetilde{u} \qquad (u \in \mathcal{S})$$

[8] Mivel az $\mathcal{S} \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathcal{S}$ leképezés homeomorfizmus az $\mathcal{S}$-ről az $\mathcal{S}$-re (ld. 2.3.), az előbbiekben valóban egy $\widehat{F} \in \mathcal{S}'$ funkcionált (általánosított függvényt) definiáltunk.

[9] $e_z(t) := e^{\imath\langle t,z\rangle}$ $(t \in \mathbf{R})$.

miatt (ld. 2.2.)

$$\widehat{\widehat{F}}(u) = \widehat{F}(\widehat{u}) = F(\widehat{\widehat{u}}) = (2\pi)^n \cdot F(\widetilde{u}) = (2\pi)^n \cdot \widetilde{F}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Ha $1 \le q \le 2$ és $f \in L^q$, akkor könnyen belátható, hogy

$$(*) \qquad \widehat{F_f} = F_{\widehat{f}}.$$

Ti. az

$$f = f_1 + f_2 \qquad (f_1 \in L^1,\, f_2 \in L^2)$$

felbontással

$$\widehat{F_f}(u) = F_f(\widehat{u}) = \int f\widehat{u} = \int (f_1 + f_2)\widehat{u} =$$

$$\int f_1\widehat{u} + \int f_2\widehat{u} = \int u\widehat{f_1} + \int u\widehat{f_2} =$$

$$\int u(\widehat{f_1} + \widehat{f_2}) = \int u\widehat{f} = F_{\widehat{f}}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Így az $\widehat{F_f}$ reguláris disztribúció: $\widehat{F_f} \equiv \widehat{f}$. Tegyük fel itt, hogy még $\widehat{f} \in L^1$ is igaz. Tehát a fenti inverziós formula szerint

$$\widehat{\widehat{F_f}} = (2\pi)^n \cdot \widetilde{F}_f,$$

ahol

$$\widetilde{F}_f(u) = F_f(\widetilde{u}) = \int f(t)u(-t)\,dt = \int f(-t)u(t)\,dt = F_{\widetilde{f}}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Következésképpen (a $(*)$-ra is tekintettel)

$$\widehat{F_{\widehat{f}}} = \widehat{\widehat{F_f}} = (2\pi)^n \cdot F_{\widetilde{f}} = F_{(2\pi)^n \cdot \widetilde{f}},$$

amikor

$$\widehat{F_{\widehat{f}}}(u) = F_{\widehat{f}}(\widehat{u}) = \int \widehat{f} \cdot \widehat{u} = \int \widehat{\widehat{f}} \cdot u = F_{\widehat{\widehat{f}}}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Mindezeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$F_{\widehat{\widehat{f}}} = F_{(2\pi)^n \cdot \widetilde{f}},$$

ezért

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{f}} = \widetilde{f}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $1 \leq q \leq 2$ és $f \in L^q$, akkor az $\widehat{f} \in L^1$ feltételezéssel igaz (a $q=1$ esetben megismert) *inverziós formula* (ld. 2.2., 4.1.):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{f}(t)e^{-\imath\langle t,x\rangle}dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Az F_f reguláris disztribúciókra kapott $\widehat{F}_f \equiv \widehat{f}$ azonosításra gondolva logikus a következő értelmezés: ha $p > 2$ és $f \in L^p$, akkor legyen

$$\widehat{f} := \widehat{F}_f.$$

Más szóval

$$\widehat{F}_f(u) = F_f(\widehat{u}) = \int f(t)\widehat{u}(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Pl. a disztribúció-deriválásra utalva (ld. 4.2.1.) azt mondhatjuk, hogy ha $F \in \mathcal{S}'$ és $j \in \mathbf{N}^n$, akkor[10]

$$\widehat{\partial^j F}(u) = \partial^j F(\widehat{u}) = (-1)^{|j|}\cdot F(\partial^j\widehat{u}) = (-\imath)^{|j|}\cdot F(\widehat{u}_j) = (-\imath)^{|j|}\cdot \widehat{F}(u) =$$

$$\widehat{F}\left((-\imath)^{|j|}\cdot u_j\right) = \widehat{F}(u_j^*) \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

ahol

$$(-\imath)^{|j|}\cdot u_j(t) = (-\imath)^{|j|}\cdot t^j\cdot u(t) = (-\imath t)^j\cdot u(t) =: u_j^*(t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Speciálisan az $F := \delta_0$ esetben (ld. 4.2.1.)

$$\widehat{\partial^j \delta_0}(u) = (-\imath)^{|j|}\cdot \widehat{u}_j(0) = (-\imath)^{|j|}\cdot \int t^j u(t)\,dt = \int (-\imath t)^j\cdot u(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

következésképpen a $\widehat{\partial^j\delta_0}$ Fourier-transzformáció reguláris disztribúció és a

$$\kappa_j(t) := (-\imath t)^j\cdot u(t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel $\widehat{\partial^j\delta_0} = F_{\kappa_j}$.

---

[10] Emlékeztetőül: $u_j(t) := t^j\cdot u(t) \quad (t \in \mathbf{R}^n)$.

Megjegyezzük, hogy bizonyos $h \in C^{\infty}$ függvényekre (amelyek az összes derivált-jukkal együtt a $+\infty$-ben legfeljebb „polinomiális nagyságrendűek") értelmezhető a hF szorzat tetszőleges $F \in \mathcal{S}'$ esetén:

$$(hF)(u) := F(hu) \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Ekkor a

$$g_j(t) := (-\imath t)^j \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

függvénnyel a fentiek szerint

$$\widehat{\partial^j F}(u) = g_j \cdot \widehat{F}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

így

$$\widehat{\partial^j F} = g_j \cdot \widehat{F}.$$

Ez teljes összhangban van a „klasszikus" (ld. 1.2.4.)

$$\widehat{\partial_j f}(x) = (-\imath x)^j \cdot \widehat{f}(x) \qquad (f \in \mathcal{S},\ x \in \mathbf{R}^n)$$

egyenlőséggel.

Legyen pl. ($n = 1$ esetén) $f,\ f' \in L^1$ (vagy $f,\ f' \in L^2$), ekkor (ld. 4.2.1.)

$$\widehat{F'_f} = \widehat{F}_{f'} = F_{\widehat{f'}},$$

ahol (ld. fent)

$$\widehat{F'_f}(g) = \widehat{F}_f(g_1^*) = F_{\widehat{f}}(g_1^*) \qquad (g \in \mathcal{S}).$$

Tehát

$$\int \widehat{f'}(t)g(t)\,dt = \int \widehat{f}(t)g_1^*(t)\,dt = \int (-\imath t\widehat{f}(t))g(t)\,dt \qquad (g \in \mathcal{S}),$$

amiből az

$$\widehat{f'}(x) = -\imath x\widehat{f}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség már következik.

Hasonlóan: mivel

$$\widetilde{g}_j(t) = g_j(-t) = (\imath t)^j \qquad (t \in \mathbf{R}^n),$$

ezért (az előbbi függvény-disztribúció szorzást is figyelembe véve)

$$\partial_j \widehat{F}(u) = (-1)^{|j|} \cdot \widehat{F}(\partial_j u) =$$

$$= (-1)^{|j|}\cdot F(\widehat{\partial_j u}) = F(\widetilde{g}_j\cdot\widehat{u}) = \widehat{\widetilde{g}_j F}(u) \qquad (F\in\mathcal{S}',\, u\in\mathcal{S}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\partial_j\widehat{F} = \widehat{\widetilde{g}_j F},$$

megint csak összhangban a már jól ismert

$$\partial_j\widehat{f} = \widehat{\widetilde{g}_j f} \qquad (f\in\mathcal{S})$$

egyenlőséggel.

A disztribúció-értelemben vett Fourier-transzformáció és bizonyos operátorok kapcsolatát tárgyaló előbbi példákhoz csatlakozva mutassuk meg, hogy

$$\widehat{f*F} = \widehat{f}\cdot\widehat{F} \qquad (f\in\mathcal{S},\, F\in\mathcal{S}').$$

Valóban, tetszőleges $u\in\mathcal{S}$ esetén

$$\widehat{f*F}(u) = f*F(\widehat{u}) = F(\widetilde{f}*\widehat{u}),$$

ahol

$$\widetilde{f}*\widehat{u}(x) = \int\widehat{u}(t)\widetilde{f}(x-t)\,dt = \int\left(\int u(y)e^{\imath\langle y,t\rangle}dy\right)\cdot f(t-x)\,dt =$$

$$\int\left(\int f(t-x)e^{\imath\langle y,t\rangle}dt\right)\cdot u(y)\,dy = \int\left(\int f(z)e^{\imath\langle y,z\rangle}dz\right)\cdot e^{\imath\langle y,x\rangle}u(y)\,dy =$$

$$\int\widehat{f}(y)u(y)e^{\imath\langle y,x\rangle}dy = \widehat{\widehat{f}\cdot u}(x) \qquad (x\in\mathbf{R}^n).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f*F}(u) = F(\widehat{\widehat{f}\cdot u}) = \widehat{F}(\widehat{f}\cdot u) = (\widehat{f}\cdot\widehat{F})(u) \qquad (u\in\mathcal{S}).$$

Ez a fentebb említett függvény-disztribúció szorzás szerint éppen azt jelenti, amit állítottunk.

Ugyanígy kapjuk az

$$\widehat{fF} = \widehat{f}*\widehat{F} \qquad (f\in\mathcal{S},\, F\in\mathcal{S}')$$

„fordított” szabályt is. Ti.

$$\widehat{fF}(u) = (fF)(\widehat{u}) = F(f\cdot\widehat{u}) \qquad (u\in\mathcal{S}),$$

míg (a $h := \widehat{f}$ jelöléssel)

$$\widehat{f}*\widehat{F}(u) = \widehat{F}(\widetilde{h}*u) = F(\widehat{\widetilde{h}*u}) = F(\widehat{\widetilde{h}}\cdot\widehat{u}) = F(f\cdot\widehat{u}).$$

4.3. Megjegyzések

i) Jegyezzük meg, hogy ha $1 \le p \le 2$ és

$$f \in L^1,\ h \in L^p,$$

akkor (ld. 1.1.) $f * h \in L^p$ és

$$\widehat{f * h} = \widehat{f} \cdot \widehat{h}.$$

Legyen ui.

$$h = \varphi + \psi \qquad (\varphi \in L^1,\ \psi \in L^2),$$

ekkor $f * \varphi \in L^1$ és $f * \psi \in L^2$ miatt

$$\widehat{f * h} = \widehat{f * \varphi} + \widehat{f * \psi},$$

ahol (ld. 1.2.2.1 és 2.5. xv) megjegyzés)

$$\widehat{f * \varphi} = \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \quad \text{és} \quad \widehat{f * \psi} = \widehat{f} \cdot \widehat{\psi}.$$

Tehát

$$\widehat{f * h} = \widehat{f} \cdot (\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}) = \widehat{f} \cdot \widehat{h}.$$

A 2.5. viii) megjegyzésben mondottak egyszerűen kiterjeszthetők az L^1 térről az L^p-re $(1 \le p \le 2)$. Nevezetesen, ha $f \in L^p$, akkor az

$$f_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\lambda}^{\lambda} (1 - |y|/\lambda) \cdot \widehat{f}(y) e^{-\imath xy} dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|f - f_\lambda\|_p = 0.$$

Továbbá a kompakt tartójú Fourier-transzformálttal bíró L^p-beli függvények sűrű alteret alkotnak az L^p-ben a $\|.\|_p$ norma szerint.

ii) A Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) szerint az

$$L^2 \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2$$

leképezés (és az inverze) folytonos. Mivel bármely $f \in L^2$ esetén az

$$f_r := f \cdot \chi_{G_r} \qquad (r > 0)$$

jelöléssel[11]

$$\|f - f_r\|_2 \to 0 \qquad (r \to +\infty),$$

ezért

$$\|\widehat{f_r} - \widehat{f}\|_2 \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Világos, hogy

$$\widehat{f_r}(x) = \int_{G_r} f(t)e^{\imath\langle x,t\rangle}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ugyanígy kapjuk azt is, hogy ha

$$\widetilde{f_r}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int_{G_r} \widehat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor

$$\|\widetilde{f_r} - f\|_2 \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

iii) Legyen $1 \le p \le 2$ és jelöljük q-val a p „konjugáltját”:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ha $f \in L^p$, akkor $\widehat{f} \in L^q$ és

$$\|\widehat{f}\|_q \le C_p\cdot \|f\|_p,$$

ahol a $C_p > 0$ konstans csak a p-től (és az n-től) függ (*Hausdorff*[12]*–Young-egyenlőtlenség*).[13] Az utóbbi konstanst illetően a következőket mondhatjuk: ha az A_p jelöli a Babenko–Beckner-számot (ld. 1.1.), akkor a

$$C_p := (2\pi)^{n/q}\cdot A_p^n$$

választás megfelelő, azaz

$$\|\widehat{f}\|_q \le (2\pi)^{n/q}\cdot A_p^n\cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p).$$

---

[11] $G_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \le r\}$.

[12] Felix Hausdorff (Wrocaw, 1868. XI. 8. – Bonn, 1942. I. 26.)

[13] Maga az itt szereplő korlátosság a *Riesz–Thorin*[14]*-interpolációs tétel* nyilvánvaló következménye. Legyen ui. $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le +\infty$ és a $0 < \theta < 1$ paraméterrel $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$, valamint $q^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$. Tegyük fel, hogy a $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ lineáris operátorra $\|Tf\|_{q_0} \le B_0\cdot \|f\|_{p_0}$ $(f \in L^{p_0})$ és $\|Tf\|_{q_1} \le B_1\cdot \|f\|_{p_1}$ $(f \in L^{p_1})$ teljesül alkalmas B_i $(i = 0, 1)$ együtthatókkal. Ekkor $\|Tf\|_q \le B_0^{1-\theta}\cdot B_1^{\theta}\cdot \|f\|_p$ $(f \in L^p)$.

[14] G. Olof Thorin (Halmstad, 1912. II. 23. – Danderyds, 2004. II. 14.)

Ha itt $p=2$, akkor nyilván $q=2$ és visszakapjuk a Plancherel-tétel kapcsán említett $C_2=(2\pi)^{n/2}$ konstanst:

$$\|\widehat{f}\|_2=(2\pi)^{n/2}\cdot\|f\|_2 \qquad (f\in L^2).$$

Tehát a ii)-ben mondottakhoz hasonlóan következik, hogy az

$$L^p\ni f\mapsto \widehat{f}\in L^q$$

leképezés folytonos és

$$\|\widehat{f}_r-\widehat{f}\|_q\to 0 \qquad (r\to+\infty).$$

iv) A iii)-beli feltételekkel, jelölésekkel legyen $n=1$ és

$$Mf(x):=\sup_{u\geq 0}\left|\int_{-u}^{u}f(t)e^{\imath xt}\,dt\right| \qquad (f\in L^p,\ x\in\mathbf{R}).$$

Ekkor $Mf\in L^q$ és (alkalmas, csak a p-től függő $\widetilde{C}_p>0$ konstanssal) igaz, hogy

$$\|Mf\|_q\leq\widetilde{C}_p\cdot\|f\|_p.$$

Továbbá

$$\widehat{f}(x)=\lim_{z\to+\infty}\widehat{f}_z(x) \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}),$$

ahol most

$$\widehat{f}_z(x)=\int_{-z}^{z}f(t)e^{\imath xt}\,dt \qquad (z>0,\ x\in\mathbf{R}).$$

Megjegyezzük, hogy itt az $1\leq p\leq 2$ feltétel lényeges, ui. van olyan f függvény, amelyre $f\in L^p \quad (p>2)$ és

$$Mf(x)=+\infty \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}).$$

Legyen ui.[15]

$$f:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\chi_{[2^k,2^k+1]}.$$

Mivel

$$|f|^p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{p/2}}\cdot\chi_{[2^k,2^k+1]},$$

[15] Luis Rodriguez Piazza

ezért

$$\|f\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/2}} < +\infty \qquad (p > 2).$$

Világos, hogy $k = 1, 2, ...$ esetén a

$$\chi_k := \chi_{[2^k, 2^k+1]} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

függvényekre

$$\widehat{\chi}_k(x) = \int_{2^k}^{2^k+1} e^{\imath xt} dt = \frac{1}{\imath x} \cdot \left(e^{\imath (2^k+1)x} - e^{\imath 2^k x} \right) =$$

$$\frac{e^{\imath x} - 1}{\imath x} \cdot e^{\imath 2^k x} \qquad (k \in \mathbf{N},\, 0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

és

$$Mf(x) \geq \sup_k \left| \int_{-2^k-1}^{2^k+1} f(t) e^{\imath xt} dt \right| = \sup_k \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot \widehat{\chi}_j(x) \right| =$$

$$\sup_k \left| \frac{e^{\imath x} - 1}{\imath x} \right| \cdot \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| =$$

$$\left| \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right| \cdot \sup_k \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Ha

$$A := \left\{ x \in \mathbf{R} : \sup_k \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| = +\infty \right\},$$

akkor az A minden $N \in \mathbf{N}$ esetén periodikus a $2\pi/2^N$ szerint, hiszen

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} : \sup_{k \geq N} \left| \sum_{j=N}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| = +\infty \right\}$$

és

$$\left| \sum_{j=N}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j (x + 2\pi l/2^N)} \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=N}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| \qquad (x \in \mathbf{R},\, l \in \mathbf{Z},\, N \leq k \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$c_l := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \chi_A(x) e^{-\imath l x} dx \qquad (l \in \mathbf{Z}),$$

ekkor tetszőleges $N \in \mathbf{N}$ és $l \in \mathbf{Z}$ választással

$$c_l = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} \int_{2\pi j/2^N}^{2\pi(j+1)/2^N} \chi_A(x) e^{-\imath l x} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} \int_0^{2\pi/2^N} \chi_A(x + 2\pi j/2^N) e^{-\imath l (x + 2\pi j/2^N)} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} \int_0^{2\pi/2^N} \chi_A(x) e^{-\imath l (x + 2\pi j/2^N)} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi/2^N} \chi_A(x) e^{-\imath l x} dx \cdot \sum_{j=0}^{2^N-1} \left(e^{-2\pi \imath l 2^{-N}} \right)^j .$$

Ha itt $l 2^{-N} \notin \mathbf{Z}$, akkor

$$\sum_{j=0}^{2^N-1} \left(e^{-2\pi \imath l 2^{-N}} \right)^j = \frac{e^{-2\pi \imath l} - 1}{e^{-2\pi \imath l 2^{-N}} - 1} = 0,$$

így bármelyik $0 \neq l \in \mathbf{Z}$ egész számra $c_k = 0$.[16] Ez azt jelenti, hogy a $\chi_{A|_{[0,2\pi)}}$ függvény Fourier-sora a konstans c_0 sor. Más szóval

$$\chi_{A \cap [0,2\pi)}(x) = c_0 \qquad (\text{m.m. } x \in [0, 2\pi)).$$

Következéskésképpen az $A \cap [0, 2\pi)$ halmaz $|A \cap [0, 2\pi)|$ mértéke 0, vagy 2π. Némi meggondolással belátható, hogy ez a mérték pozitív. Ehhez először is vegyük észre, hogy bármely

$$T(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j e^{\imath 2^j x} \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in [0, 2\pi],\, a_j \in \mathbf{C} \;\; (j = 0, ..., k))$$

[16] Ui. van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $l 2^{-N} \notin \mathbf{Z}$.

trigonometrikus polinomra (ld. 2.4.1.)

$$\|T\|_4^4 = \int_0^{2\pi} |T(x)|^4\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j e^{\imath 2^j x}\right)^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \overline{a}_j e^{-\imath 2^j x}\right)^2 dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j,v=0}^{k} a_j \overline{a}_v e^{\imath 2^j x} \cdot e^{-\imath 2^v x}\right)^2 dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j,v,m,s=0}^{k} a_j \overline{a}_v a_m \overline{a}_s e^{\imath 2^j x} \cdot e^{-\imath 2^v x} \cdot e^{\imath 2^m x} \cdot e^{-\imath 2^s x} dx =$$

$$4 \cdot \sum_{j \neq v=0}^{k} |a_j|^2 \cdot |a_v|^2 + \sum_{j=0}^{k} |a_j|^2 \le 2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} |a_j|^2\right)^2 = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \|T\|_2^4.$$

Legyen most

$$B := \left\{ x \in [0, 2\pi) : |T(x)| \ge \frac{\|T\|_2}{4} \right\}.$$

Ekkor

$$\|T\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |T(x)|^2\, dx = \int_{[0,2\pi]\setminus B} |T(x)|^2\, dx + \int_B |T(x)|^2\, dx \le$$

$$\frac{\pi}{8} \cdot \|T\|_2^2 + \int_B |T(x)|^2\, dx.$$

Következésképpen innen és a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$\left(1 - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \|T\|_2^2 \le \int_B |T(x)|^2\, dx \le \sqrt{|B|} \cdot \sqrt{\int_B |T(x)|^4\, dx} \le$$

$$\sqrt{|B|} \cdot \|T\|_4^2 \le \sqrt{\frac{|B|}{2\pi}} \cdot \|T\|_2^2 \Longrightarrow |B| \ge \frac{3}{2}.$$

Speciálisan a

$$T_k(x) := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \qquad (1 \le k \in \mathbf{N},\ x \in [0, 2\pi])$$

esetben

$$\|T_k\|_2 = \sqrt{2\pi \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}} \geq \sqrt{2\pi \cdot (1 + \ln k)} \geq \sqrt{\ln k} \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$B_k := \left\{ x \in [0, 2\pi) : |T_k(x)| \geq \frac{\|T_k\|_2}{4} \right\} \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}),$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$B_k \subset \left\{ x \in [0, 2\pi) : |T_k(x)| \geq \frac{\sqrt{\ln k}}{4} \right\} =: \widetilde{B}_k \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$|\widetilde{B}_k| \geq |B_k| \geq \frac{3}{2}.$$

Ugyanakkor[17]

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=s}^{\infty} \widetilde{B}_k \subset A \cap [0, 2\pi),$$

így

$$|A \cap [0, 2\pi)| \geq \lim_{s \to \infty} \left| \bigcup_{k=s}^{\infty} \widetilde{B}_k \right| \geq \frac{3}{2},$$

az előbbiek szerint pedig

$$|A \cap [0, 2\pi)| = 2\pi.$$

Mivel

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j x} \right| = \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot e^{\imath 2^j (x + 2\pi l)} \right| \qquad (x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N},\ l \in \mathbf{Z}),$$

ezért egyúttal

$$|A \cap [2l\pi, 2(l+1)\pi)| = 2\pi \qquad (l \in \mathbf{Z}).$$

Ha

$$A_l := [2l\pi, 2(l+1)\pi) \setminus A \qquad (l \in \mathbf{Z}),$$

[17] Az $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=s}^{\infty} \widetilde{B}_k$ tartalmazás azzal ekvivalens, hogy végtelen sok $1 \leq k \in \mathbf{N}$ indexre $x \in \widetilde{B}_k$, azaz $|T_k(x)| \geq \sqrt{\ln k}/4$.

akkor

$$|A_l| = 0 \qquad (l \in \mathbf{Z})$$

és

$$\mathbf{R} \setminus A = \bigcup_{l=-\infty}^{+\infty} A_l$$

alapján az $\mathbf{R} \setminus A$ halmaz 0-mértékűsége már nyilván adódik.

Vegyük figyelembe, hogy ha $x \in A$ és $\sin(x/2) \neq 0$, akkor $Mf(x) = +\infty$. Mivel a $\sin(x/2) = 0$ egyenlőség az $x = 2\pi l \quad (l \in \mathbf{Z})$ feltétellel ekvivalens, ezért valóban

$$Mf(x) = +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

v) Tegyük fel a iv)-ben, hogy $1 < p \leq 2$ és legyen

$$\widetilde{M}f(x) := \sup_{u \geq 0} \left| \int_{-u}^{u} \widehat{f}(t) e^{-\imath xt} dt \right| \qquad (f \in L^p,\ x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor $\widetilde{M}f \in L^p$ és (alkalmas, csak a p-től függő $C_p^* > 0$ konstanssal) igaz, hogy

$$\|\widetilde{M}f\|_p \leq C_p^* \cdot \|f\|_p,$$

továbbá

$$\|\widetilde{f}_z - f\|_p \to 0 \qquad (z \to +\infty)$$

és

$$f(x) = \lim_{z \to +\infty} \widetilde{f}_z(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ahol most

$$\widetilde{f}_z(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-z}^{z} \widehat{f}(t) e^{-\imath xt} dt \qquad (z > 0,\ x \in \mathbf{R})$$

(*Carleson–Hunt-tétel*).

vi) Ha pl. $n = 1$, $f \in C^1(\mathbf{R} \setminus U)$, ahol az $U \subset \mathbf{R}$ véges halmaz és $f' \in L^1$, akkor (ld. v))

$$\lim_{z \to +\infty} \widetilde{f}_z(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

vii) Az előbbi megjegyzések bizonyos analogonjai átvihetők az $n > 1$ kitevőkre is. Így pl. legyen $z > 0$ esetén

$$I_z := [-z, z]^n$$

(n dimenziós „kocka”) és

$$f_{I_z}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{I_z} \widehat{f}(t) e^{-\imath \langle x,t \rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor – hacsak $1 < p \leq 2$ és $f \in L^p$ teljesül –

$$\|f_{I_z} - f\|_p \to 0 \qquad (z \to +\infty),$$

valamint

$$f(x) = \lim_{z \to +\infty} f_{I_z}(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

viii) A vii) (és részben a ii)) megjegyzésben mondottakhoz kapcsolódik a következő kérdésfelvetés (ld. még 2.5. iii) megjegyzés): legyen valamilyen

$$\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvény esetén $\Phi(0) = 1$ és

$$T_r f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \Phi(t/r) \widehat{f}(t) e^{-\imath \langle x,t \rangle} dt \qquad (f \in L^1,\, x \in \mathbf{R}^n,\, r > 0).$$

Mit mondhatunk a $T_r f$-ről $r \to +\infty$ esetén (különböző értelemben, pl. a $\|.\|_p$ normában, m.m. stb.)? Ha pl. $\Phi := \chi_{G_1}$, akkor

$$\Phi(t/r) = \chi_{G_r}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\, r > 0)$$

és $T_r f = \widetilde{f}_r$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a T_r operátor (L^p, L^p)-korlátossága ekvivalens az

$$M_\Phi f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \Phi(t) \widehat{f}(t) e^{-\imath \langle x,t \rangle} dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

operátor (L^p, L^p)-korlátosságával. Ha ez utóbbi korlátosság igaz, akkor a Φ egy ún. *L^p-Fourier-multiplier.* A ii)-ben mondottakra tekintettel a $\Phi := \chi_{G_1}$ egy L^2-Fourier-multiplier. Megmutatható ugyanakkor, hogy ebből a szempontból az L^2 nem cserélhető fel más L^p-vel: ha $n \geq 2$ és $p \neq 2$, akkor a $\Phi := \chi_{G_1}$ *nem* L^p-Fourier-multiplier.

ix) Mindez speciális esete a *Bochner–Riesz-multipliereknek,* amikor

$$\Phi_\lambda(t) := (1-|t|^2)_+^\lambda := (\max\{1-|t|^2, 0\})^\lambda \qquad (t \in \mathbf{R}^n),$$

ahol a $\lambda \geq 0$ adott paraméter (ld. 1.3. xxii) megjegyzés). Világos, hogy $\Phi_0 = \chi_{G_1}$. A fentiek szerinti T_r operátor tehát a következő alakú:

$$T_{r,\lambda} f(x) :=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int (1-|t|^2/r^2)_+^\lambda \cdot \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (f \in L^1,\ x \in \mathbf{R}^n,\ r > 0)$$

(az f függvény r-edrendű *Bochner–Riesz-közepe*). Az

$$M_\lambda f(x) :=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int (1-|t|^2)_+^\lambda \cdot \widehat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \qquad (f \in L^1,\ x \in \mathbf{R}^n,\ r > 0)$$

Bochner–Riesz-multiplier (L^p, L^p)-korlátosságáról pl. az alábbiakat mondhatjuk: ha

$$\lambda > \frac{n-1}{2},$$

akkor az M_λ minden $1 \leq p \leq +\infty$ esetén (L^p, L^p)-korlátos. Továbbá, ha

$$0 < \lambda \leq \frac{n-1}{2}$$

és

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\lambda}{n-1},$$

akkor az előbb említett korlátosság igaz, míg az

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{2\lambda+1}{2n}$$

esetben nem.

A $T_{\lambda,r} f$ Bochner–Riesz-közepek $r \to +\infty$ esetén vett m.m. konvergenciáját illetően a

$$T_\lambda^* f := \sup_{r>0} |T_{\lambda,r} f| \qquad (f \in L^1)$$

maximáloperátor vizsgálatával kaphatunk eredményeket. Feltéve pl., hogy

$$\lambda > \frac{n-1}{2}$$

(„kritikus index”), a Hardy–Littlewood[18]-féle maximáloperátor tulajdonságaiból következően a T_λ^* operátor (L^p, L^p)-korlátos és ezért

$$\lim_{r\to+\infty} T_{\lambda,r} f(x) = f(x) \qquad (f \in L^1 \cap L^p, \text{ m.m. } x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha

$$0 < \lambda < \frac{n-1}{2},$$

akkor pl. az $n = 2$ és $p \geq 2$ választással

$$\lim_{r\to+\infty} T_{\lambda,r} f(x) = f(x) \qquad (f \in L^1 \cap L^p, \text{ m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

hacsak

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{2\lambda+1}{4}.$$

Ugyanez igaz $n \geq 3$ esetén, amennyiben

$$p \geq 2 \quad \text{és} \quad \lambda \geq \frac{n-1}{2(n+1)}.$$

Mindkét most idézett eredmény azon múlik, hogy a T_λ^* maximáloperátor (L^p, L^p)-korlátos.

x) Nem nehéz belátni, hogy (ld. 4.2.) az

$$\mathcal{S}' \ni F \mapsto \widehat{F} \in \mathcal{S}'$$

leképezés izomorfizmus, ha az $\mathcal{S}'$-ben a gyenge*-topológiát[19] vezetjük be.

xi) Megmutatható továbbá, hogy minden $p > 2$ esetén van olyan $f \in L^p$, amelyre az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált nem „közönséges” függvény, azaz (ld. 4.2.1.) nincs olyan g függvény, hogy

$$\int f(t)\widehat{u}(t)\,dt = \int g(t)u(t)\,dt$$

---

[18] John Edensor Littlewood (Rochester, 1885. VI. 9. – Cambridge, 1977. IX. 6.)

[19] Tehát azt a leggyengébb topológiát, amelyre nézve az $\mathcal{S}' \ni F \mapsto F(u) \in \mathbf{C}$ lineáris funkcionál minden rögzített $u \in \mathcal{S}$ függvényre folytonos.

teljesülne bármely $u \in \mathcal{S}$ elemre. Tegyük fel ui. indirekt módon (az egyszerűség kedvéért $n = 1$ mellett), hogy valamilyen $p > 2$ „kitevőre" minden $f \in L^p$ választással az $\widehat{f}$ reguláris disztribúció: az $\widehat{f}$ (Lebesgue-mérhető) függvény, amellyel

$$\int f(t)\widehat{u}(t)\,dt = \int \widehat{f}(t)u(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Ha ebben az egyenlőségben

$$u(t) = 1 \qquad (t \in [0,1])$$

(ilyen $u \in \mathcal{S}$ nyilván van), akkor az $\int \widehat{f}(t)u(t)\,dt$ integrál létezéséből következik, hogy az $\int_0^1 \widehat{f}(t)\,dt$ integrál is létezik. Megmutatjuk, hogy az

$$L^p \ni f \mapsto \widehat{f}\cdot \chi_{[0,1]} \in L^1$$

(nyilván lineáris) operátor folytonos. Legyenek ehhez (adott $f \in L^p$ mellett) az

$$f_k \in L^p \qquad (k \in \mathbf{N})$$

függvények olyanok, hogy

$$\|f_k - f\|_p \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ekkor az indirekt feltevésünkre tekintettel

$$\int \widehat{f_k}(t)u(t)\,dt = \int f_k(t)\widehat{u}(t)\,dt \qquad (k \in \mathbf{N},\ u \in \mathcal{S}),$$

ahol a Hölder-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $u \in \mathcal{S}$ függvénnyel

$$\left|\int f_k(t)\widehat{u}(t)\,dt - \int f(t)\widehat{u}(t)\,dt\right| \le \|f_k - f\|_p \cdot \|\widehat{u}\|_q \to 0 \qquad (k \to \infty).^{20}$$

Következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \int \widehat{f_k}(t)u(t)\,dt = \int f(t)\widehat{u}(t)\,dt = \int \widehat{f}(t)u(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

Szorítkozzunk itt olyan kompakt tartójú C^∞-beli u függvényekre, amelyekre $\operatorname{supp} u \subset [0,1]$ (legyen ezeknek a halmaza $\mathcal{S}_*$), akkor

$$\lim_{k\to\infty} \int \widehat{f_k}(t)u(t)\,dt = \int_0^1 \widehat{f}(t)u(t)\,dt \qquad (u \in \mathcal{S}_*).$$

[20] Az $1 \le q < 2$ „kitevőre" tehát $1/p + 1/q = 1$.

Ha mármost valamilyen (Lebesgue-mérhető) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvénnyel teljesül, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 |\widehat{f}_k(t) - g(t)|\, dt = 0,$$

akkor bármely $u \in \mathcal{S}_*$ függvényre

$$\left| \int_0^1 \widehat{f}_k(t)u(t)\, dt - \int_0^1 g(t)u(t)\, dt \right| \leq$$

$$\|u\|_\infty \cdot \int_0^1 |\widehat{f}_k(t) - g(t)|\, dt \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Így

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \widehat{f}_k(t)u(t)\, dt = \int_0^1 g(t)u(t)\, dt.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_0^1 (\widehat{f}(t) - g(t))u(t)\, dt = 0 \qquad (u \in \mathcal{S}_*).$$

Innen

$$\widehat{f}(t) = g(t) \qquad (\text{m.m. } t \in [0,1]),$$

más szóval

$$\|(\widehat{f}_k - \widehat{f})\chi_{[0,1]}\|_1 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Az eddigieket összegezve azt mondhatjuk, hogy az

$$L^p \ni f \mapsto \widehat{f} \cdot \chi_{[0,1]} \in L^1$$

leképezés zárt operátor[21]. Alkalmazható ezért a *zárt leképezések tétele*[22], miszerint a szóban forgó leképezés korlátos lineáris operátor: egy alkalmas $C_p > 0$ konstanssal

$$(*) \qquad \int_0^1 |\widehat{f}(t)|\, dt \leq C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p).$$

[21] Tekintsük az (X_i, ρ_i) $(i = 1, 2)$ metrikus tereket és a $\Phi \in X_1 \to X_2$ leképezést. A Φ *zárt* (operátor), ha minden olyan $\mathcal{D}_\Phi$-beli konvergens $(x_l, l \in \mathbf{N})$ sorozatra, amelyre a $(\Phi(x_l), l \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, igaz az, hogy $x := \lim_{l\to\infty} x_l \in \mathcal{D}_\Phi$ és $\lim_{l\to\infty} \Phi(x_l) = \Phi(x)$. Mindez ekvivalens azzal, hogy az illető metrikus terek által meghatározott szorzattérben a $\{(t, \Phi(t)) \in X_1 \times X_2 : t \in \mathcal{D}_\Phi\}$ halmaz (a Φ „grafikonja") zárt.

[22] Banach-teret Banach-térbe képező zárt lineáris operátor folytonos, azaz korlátos lineáris operátor.

Lássuk be, hogy az utóbbi egyenlőtlenség nem lehet igaz minden $f \in L^p$ függvényre. Definiáljuk ehhez ui. valamilyen $\delta > 1$ paraméterrel a

$$c := 1 + \imath \cdot \delta$$

számot és a

$$h_\delta(t) := \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot e^{-t^2/(2c)} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényt (a $\sqrt{c}$ értékeként szóba jöhető két szám közül azt választva, amelyiknek az imaginárius része pozitív). Nyilván[23] $h_\delta \in L^1 \cap L^p$. Számítsuk ki a $\widehat{h}_\delta$ Fourier-transzformáltat, azaz mutassuk meg, hogy (ld. 1.3. ii) megjegyzés)

$$\widehat{h}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int e^{-t^2/(2c)} \cdot e^{\imath t x} dt = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-cx^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Legyen tehát $x \in \mathbf{R}$, ekkor

$$\widehat{h}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int e^{-t^2/(2c)} \cdot e^{\imath x t} dt = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int e^{-(t/\sqrt{2c})^2} \cdot e^{\imath x t} dt$$

Vegyük valamilyen $r > 0$ mellett a komplex síkon azt a (pozitív körüljárású) Φ_r zárt, szakaszonként sima utat, hogy ti. ez a

$$[0, r],\ [0, r \cdot \sqrt{c}/|\sqrt{c}|]$$

szakaszoknak és annak a φ_r origó középpontú r sugarú körívnek az egyesítése, ami (a komplex síkon) az r és az $r \cdot \sqrt{c}/|\sqrt{c}|$ pontokat köti össze. Ha

$$F(z) := e^{-(z/\sqrt{2c})^2} \cdot e^{\imath x z} \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

akkor a komplex függvénytani Cauchy-alaptétel miatt

$$0 = \int_{\Phi_r} F(z)\, dz = \int_{[0,r]} F(z)\, dz - \int_{[0, r\sqrt{c}/|\sqrt{c}|]} F(z)\, dz + \int_{\varphi_r} F(z)\, dz =:$$

$$I_{1r} - I_{2r} + I_{3r}.$$

Ekkor

$$|I_{3r}| \le r\alpha \cdot \max_{z \in \varphi_r} |F(z)|,$$

[23] Világos, hogy bármely $z = u + \imath v \in \mathbf{C}$ $(u, v \in \mathbf{R},\ u > 0)$ és $1 \le q < +\infty$ választással $\int |e^{-zt^2}|^q dt = \int e^{-qut^2} dt < +\infty$.

ahol $\alpha \in (0, \pi/4)$ a $\sqrt{c}$ argumentuma: a

$$\rho := |\sqrt{c}| = \sqrt[4]{1+\delta^2}$$

jelöléssel

$$\sqrt{c} = \rho \cdot e^{\imath\alpha},$$

és $z \in \varphi_r$ esetén alkalmas 0 és α közötti γ-val $z = re^{\imath\gamma}$. Ezért

$$|F(z)| = \left|e^{-z^2/2c}\right| \cdot |e^{\imath xz}| =$$

$$e^{-r^2\cos(2\alpha-2\gamma)/(2\rho^2)} \cdot e^{-xr\sin\gamma} \leq e^{-r^2\cos(2\alpha)/(2\rho^2)}.$$

Innen világos, hogy

$$r\alpha \cdot \max_{z\in\varphi_r} |F(z)| \to 0 \qquad (r \to +\infty),$$

így

$$\lim_{r\to+\infty} I_{3r} = 0.$$

Egyúttal

$$\lim_{r\to+\infty} (I_{1r} - I_{2r}) = 0.$$

Továbbá

$$I_{1r} = \int_0^r e^{-t^2/2c} \cdot e^{\imath xt} dt \to \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2c} \cdot e^{\imath xt} dt \qquad (r \to +\infty),$$

valamint

$$I_{2r} =$$

$$\sqrt{c} \cdot \int_0^{r/\rho} e^{-t^2/2} \cdot e^{\imath x\sqrt{c}t} dt \to \sqrt{c} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cdot e^{\imath x\sqrt{c}t} dt \qquad (r \to +\infty),$$

következésképpen

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2c} \cdot e^{\imath xt} dt = \sqrt{c} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cdot e^{\imath x\sqrt{c}t} dt.$$

Ugyanígy kapjuk azt is, hogy

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2c} \cdot e^{\imath xt} dt = \sqrt{c} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} \cdot e^{\imath x\sqrt{c}t} dt,$$

más szóval teljesül az

$$\int e^{-t^2/2c}\cdot e^{\imath xt}dt = \sqrt{c}\cdot \int e^{-t^2/2}\cdot e^{\imath x\sqrt{c}t}dt$$

egyenlőség.[24] Mindezek alapján (ld. 1.3. ii) megjegyzés)

$$\widehat{h}_\delta(x) = \sqrt{c}\cdot \sqrt{2\pi}\cdot e^{-cx^2/2}$$

és

$$\int_0^1 |\widehat{h}_\delta(x)|\, dx = \sqrt{2\pi}\cdot \int_0^1 e^{-x^2/2}dx =: A\,(> 0).$$

Ugyanakkor

$$|h_\delta(t)| = \frac{e^{-t^2\cdot\cos(2\alpha)/(2\sqrt{1+\delta^2})}}{(1+\delta^2)^{1/4}} \leq \frac{e^{-t^2/(2(1+\delta^2))}}{(1+\delta^2)^{1/4}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\|h_\delta\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

viszont $2 < p < +\infty$ esetén

$$\|h_\delta\|_p^p = \frac{1}{(1+\delta^2)^{p/4}}\cdot \int e^{-pt^2/(2(1+\delta^2))}dt =$$

$$\frac{1}{(1+\delta^2)^{p/4}}\cdot \sqrt{\frac{2(1+\delta^2)}{p}}\cdot \int e^{-y^2}dy =$$

$$\frac{1}{(1+\delta^2)^{p/4}}\cdot \sqrt{\frac{2\pi(1+\delta^2)}{p}} < 2\cdot \sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot \delta^{1-p/2}.$$

Innen a

$$\widetilde{C}_p := \begin{cases} 1 & (p = +\infty) \\ \left(2\cdot \sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)^{1/p} & (p < +\infty) \end{cases}$$

(csak a p-től függő) konstanssal

$$\|h_\delta\|_p \leq \widetilde{C}_p\cdot \delta^{1/p-1/2}$$

[24] Tehát igaz a $t = \sqrt{c}y$ „komplex” helyettesítéssel formálisan megkapható egyenlőség a fenti integrálok között.

adódik. Az előbbi $(*)$ egyenlőtlenségből ezért

$$A \leq C_p \cdot \widetilde{C}_p \cdot \delta^{1/p-1/2},$$

ami a $p > 2$ feltétel[25] miatt nem teljesülhet.

xii) Megmutatjuk, hogy ha $f \in L^1$ és $t \in \mathbf{R}^n$, továbbá az $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor van olyan $H \in L^1$ függvény, amellyel $\|H\|_1 < \varepsilon$ és

$$(f + H)^{\wedge}(x) = \widehat{f}(t) \qquad (x \in U)$$

teljesül a t pontnak egy alkalmas U környezetében. Tehát a Fourier-transzformáció a függvények $\|.\|_1$-approximációjára nézve egyfajta (lokális) stabilitással rendelkezik. Válasszunk ehhez először is egy olyan $g \in L^1$ függvényt, amelyre a $0 \in \mathbf{R}^n$ vektor valamilyen $\mathcal{K}$ környezetében

$$\widehat{g}(x) = 1 \qquad (x \in \mathcal{K})$$

teljesül.[26] Legyen ezek után a $\lambda > 0$ paraméterrel

$$g_\lambda(y) := \frac{e^{-\imath\langle t,y\rangle} \cdot g(y/\lambda)}{\lambda^n} \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

és (ld. 1.1.)

$$H_\lambda := \widehat{f}(t) \cdot g_\lambda - f * g_\lambda.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy a t pont egy $\mathcal{K}_\lambda$ környezetében

$$\widehat{g_\lambda}(x) = 1 \qquad (x \in \mathcal{K}_\lambda).$$

Ti. (egyszerű helyettesítéssel)

$$\widehat{g_\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda^n} \cdot \int e^{-\imath\langle t,y\rangle} \cdot g(y/\lambda) e^{\imath\langle x,y\rangle} dy = \int e^{-\imath\langle t,\lambda y\rangle} \cdot g(y) e^{\imath\langle x,\lambda y\rangle} dy =$$

$$\int g(y) e^{\imath\langle \lambda(x-t),y\rangle} dy = \widehat{g}(\lambda(x-t)) = 1,$$

ha $\lambda(x - t) \in \mathcal{K}$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy

$$x \in \mathcal{K}_\lambda := t + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{K}.$$

[25] Ebből következően $\delta^{1/p-1/2} \to 0 \quad (\delta \to +\infty)$.

[26] Ha pl. arra gondolunk, hogy az $\mathcal{S} \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathcal{S}$ leképezés bijekció (ld. 2.3.), akkor könnyen belátható az ilyen g létezése.

Úgyhogy $\|H_\lambda\|_1 < \varepsilon$ esetén (ld. 1.2.2.1.)

$$\widehat{H_\lambda} = \widehat{g}_\lambda \cdot (\widehat{f}(t) - \widehat{f})$$

miatt a $H := H_\lambda$ választás megfelelő lesz:

$$(f + H)^\wedge(x) = \widehat{f}(x) + \widehat{H}(x) =$$

$$\widehat{f}(x) + \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}_\lambda(x) - \widehat{g}_\lambda(x) \cdot \widehat{f}(x) = \widehat{f}(t) \qquad (t \in U := \mathcal{K}_\lambda).$$

Viszont

$$H_\lambda(x) = \int f(y) \cdot \left(e^{\imath\langle t,y\rangle} \cdot g_\lambda(x) - g_\lambda(x-y)\right) dy \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol

$$\left|e^{\imath\langle t,y\rangle} \cdot g_\lambda(x) - g_\lambda(x-y)\right| = \frac{|g(x/\lambda) - g((x-y)/\lambda)|}{\lambda^n}.$$

Ezért (a Fubini-tételt és megfelelő helyettesítést alkalmazva)

$$\|H_\lambda\|_1 \leq \frac{1}{\lambda^n} \cdot \int |f(y)| \cdot \left(\int |g(x/\lambda) - g((x-y)/\lambda)| \, dx\right) dy =$$

$$\int |f(y)| \cdot \left(\int |g(x) - g(x - y/\lambda)| \, dx\right) dy =$$

$$\int |f(y)| \cdot \|g - \mathcal{T}_{-y/\lambda} g\|_1 \, dy.$$

Nyilván (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$\|g - \mathcal{T}_{-y/\lambda} g\|_1 \leq 2 \cdot \|g\|_1,$$

továbbá

$$\|g - \mathcal{T}_{-y/\lambda} g\|_1 \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty),$$

ezért a Lebesgue-féle konvergenciatétel alapján

$$\|H_\lambda\|_1 \to 0 \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Következésképpen van olyan $\lambda > 0$, amellyel

$$\|H\|_1 = \|H_\lambda\|_1 < \varepsilon.$$

xiii) Legyen $F \in \mathcal{S}'$ és értelmezzük az F funkcionál Supp F *„tartóját”* a következőképpen. Tegyük fel, hogy valamilyen $A \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmazzal $F(u) = 0$ minden olyan $u \in \mathcal{S}$ függvényre, amelyre supp $u \subset A$. Ekkor azt mondjuk, hogy az F *eltűnik az* A *halmazon.* Ha az $\mathcal{A}$ szimbólum jelöli az összes ilyen A egyesítésével létrejött halmazt, akkor

$$\operatorname{Supp} F := \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{A}.$$

Pl. a $\delta_z \quad (z \in \mathbf{R}^n)$ Dirac-disztribúció (ld. 4.2.1.) nyilván eltűnik minden olyan nyílt $A \subset \mathbf{R}^n$ halmazon, amelyre $z \notin A$, így $\operatorname{Supp} \delta_z = \{z\}$. Világos továbbá (ld. 4.2.1.), hogy bármely $f \in C$ (folytonos függvény) esetén

$$\operatorname{Supp} F_f = \operatorname{supp} f.$$

Legyen már most $\varphi \in L^\infty$, az $\mathcal{L} \subset L^1$ halmaz pedig olyan altere az L^1-nek, hogy (ld. 1.1.)

$$f * \varphi = 0 \, (\in L^\infty) \qquad (f \in \mathcal{L}).$$

Ekkor

$$\operatorname{Supp} \widehat{\varphi} \subset Z := \bigcap_{f \in \mathcal{L}} \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \widehat{f}(x) = 0 \right\}.$$

Tetszőleges $t \in \mathbf{R}^n \setminus Z$ ponthoz ui. válasszunk egy olyan $f \in \mathcal{L}$ függvényt, amelyre $\widehat{f}(t) = 1$. Az előbbi megjegyzés szerint van olyan $H \in L^1$, hogy egyrészt $\|H\|_1 < 1$, másrészt pedig a t pont valamilyen K_t környezetében

$$\widehat{H}(x) = 1 - \widehat{f}(x) \qquad (x \in K_t).$$

Így

$$\widehat{f}(x) = 1 - \widehat{H}(x) \qquad (x \in K_t),$$

más szóval $|\widehat{H}| \leq \|H\|_1 < 1$ miatt

$$\widehat{f}(x) \neq 0 \qquad (x \in K_t).$$

Ez azt jelenti, hogy $K_t \cap Z = \emptyset$. Ha tehát a $\widehat{\varphi}$ eltűnik a $K_t \quad (t \in \mathbf{R}^n \setminus Z)$ halmazon, akkor

$$\operatorname{Supp} \widehat{\varphi} \subset \mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{t \in \mathbf{R}^n \setminus Z} K_t \subset Z.$$

Az, hogy a $\widehat{\varphi}$ eltűnik a $K_t \quad (t \in \mathbf{R}^n \setminus Z)$ halmazon, nyilván azzal ekvivalens, hogy[27]

$$\widehat{\varphi}(\widehat{u}) = 0$$

minden olyan $u \in \mathcal{S}$ függvényre, amelyre

$$\operatorname{supp} \widehat{u} \subset K_t$$

(ti. az $u \mapsto \widehat{u}$ leképezés szürjekció az $\mathcal{S}$-ről az $\mathcal{S}$-re). Viszont (ld. 2.2.)

$$\widehat{\varphi}(\widehat{u}) = \int \varphi(t)\widehat{\widehat{u}}(t)\,dt = (2\pi)^n \cdot \int \varphi(t)u(-t)\,dt = (2\pi)^n \cdot \varphi * u(0).$$

Elegendő ezért azt megmutatni, hogy $\varphi * u = 0\,(\in L^\infty)$. Az előbbi u-t rögzítve ehhez tekintsük az alábbi rekurzióval megadott $g_m \in L^1 \quad (m \in \mathbf{N})$ függvény-sorozatot:

$$g_0 := u,\ g_m := H * g_{m-1} \qquad (m = 1, 2, ...).$$

Ekkor (ld. 1.1.) egyrészt

$$\|g_m\|_1 \le \|H\|_1^m \cdot \|u\|_1 \qquad (m \in \mathbf{N}),$$

másrészt $\|H\|_1 < 1$ miatt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|H\|_1^m < +\infty,$$

így létezik a

$$G := \sum_{m=0}^{\infty} g_m \in L^1$$

függvény. Továbbá (ld. 1.2.2.1.)

$$\widehat{g_m}(x) = \widehat{H}(x) \cdot \widehat{g}_{m-1}(x) = ... = (\widehat{H}(x))^m \cdot \widehat{u}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

valamint[28]

$$\widehat{G}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\widehat{H}(x))^m \cdot \widehat{u}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

[27] Emlékeztetünk arra, hogy $\mathcal{S}' \ni \widehat{\varphi} = \widehat{F}_\varphi$, tehát $\widehat{\varphi}(u) = \int \varphi(t)\widehat{u}(t)\,dt \quad (u \in \mathcal{S})$.

[28] Mivel tetszőlegesen rögzített $x \in \mathbf{R}^n$ hely mellett $\int |g_m(t)e^{\imath xt}|\,dt = \|g_m\|_1 \quad (m \in \mathbf{N})$, ezért $\sum_{m=0}^{\infty} |g_m(t)e^{\imath xt}|\,dt \le \sum_{m=0}^{\infty} \|g_m\|_1 \le \|u\|_1 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \|H_m\|_1 < +\infty$. Így a Lebesgue-féle konvergenciatétel miatt $G \in L^1$ és $\widehat{G}(x) = \int \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t)e^{\imath xt}dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int g_m(t)e^{\imath xt}dt = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}_m(x)$.

Nyilvánvaló, hogy

$$\widehat{f}(x) = 1 - \widehat{H}(x) \qquad (x \in \text{ supp } \widehat{u}),$$

következésképpen

$$(1 - \widehat{H}(x)) \cdot \widehat{u}(x) = \widehat{u}(x) \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Innen

$$|\widehat{H}(x)| < 1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

alapján

$$\widehat{u}(x) = \frac{\widehat{u}(x) \cdot \widehat{f}(x)}{1 - \widehat{H}(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} (\widehat{H}(x))^m \cdot \widehat{u}(x) \cdot \widehat{f}(x) =$$

$$\widehat{G}(x) \cdot \widehat{f}(x) = \widehat{G * f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

következik. Ezért $u = G * f$, amiből az $f * \varphi = 0$ feltételezést is figyelembe véve

$$\varphi * u = u * \varphi = G * f * \varphi = 0$$

már adódik.

xiv) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{L} \subset L^1$ zárt altér eltolás-invariáns[29] és (ld. xiii))

$$(*) \qquad \bigcap_{f \in \mathcal{L}} \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \widehat{f}(x) = 0 \right\} = \emptyset.$$

Ekkor $\mathcal{L} = L^1$.

Ha ui. az $\mathcal{L}$ valódi (és a feltételezés szerint zárt) altere lenne az L^1-nek (azaz $\mathcal{L} \neq L^1$), akkor a Hahn[30]–Banach-tétel[31] ismert következménye szerint lenne olyan

$$\Phi : L^1 \to \mathbf{C}$$

---

[29]Tehát bármely $f \in \mathcal{L}$ és $x \in \mathbf{R}^n$ esetén (ld. 1.3. i) megjegyzés) $\mathcal{T}_x f \in \mathcal{L}$.

[30]Hans Hahn (Bécs, 1879. IX. 27. – Bécs, 1934. VII. 24.)

[31]Bármely $(X, \|.\|)$ normált tér és minden $Y \subset X$ altér, valamint $f \in Y^*$ korlátos lineáris funkcionál esetén van olyan $F \in X^*$, amelyre $F_{|_Y} = f$ és (a megfelelő $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$ funkcionálnormákkal) $\|F\|_X = \|f\|_Y$.

korlátos lineáris funkcionál ($\Phi \in (L^1)^*$), amely nem azonosan nulla, de $\Phi_{|\mathcal{L}} = 0$. Az $(L^1)^*$ duálisra vonatkozó Riesz-tétel miatt viszont egy egyértelműen létező $\widetilde{\varphi} \in L^\infty$ függvénnyel

$$\Phi(f) = \int f(t)\widetilde{\varphi}(t)\,dt \qquad (f \in L^1).$$

Az $\mathcal{L}$ altér feltételezett eltolás-invarianciájára hivatkozva ezért a

$$\varphi(t) := \widetilde{\varphi}(-t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel tetszőleges $f \in \mathcal{L}$ függvényre

$$f * \varphi(x) = \int f(t)\widetilde{\varphi}(t-x)\,dt = \int f(x+t)\widetilde{\varphi}(t)\,dt =$$

$$\int \mathcal{T}_x f(t)\widetilde{\varphi}(t)\,dt = \Phi(\mathcal{T}_x f) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Alkalmazható ezért a xiii) megjegyzésben szereplő állítás, miszerint a $(*)$ feltételt is figyelembe véve $\operatorname{Supp}\widehat{\varphi} = \emptyset$. Ez nyilván azt jelenti, hogy

$$\int \varphi(t)\widehat{u}(t)\,dt = 0 \quad (u \in \mathcal{S}) \iff \int \varphi(t)v(t)\,dt = 0 \quad (v \in \mathcal{S}),$$

így $\varphi = 0\,(\in L^\infty)$. Más szóval $\Phi = 0\,(\in (L^1)^*)$, ami az indirekt feltételezésünkből kifolyólag nem igaz. Következésképpen $\mathcal{L} = L^1$.

xv) Jegyezzük meg a xiv)-beli állítás alábbi következményét: legyen $K \in L^1$ és jelölje $\mathcal{L}$ az L^1-nek azt a legszűkebb eltolás-invariáns alterét, ami tartalmazza a K-t. Ekkor az $\mathcal{L} = L^1$ egyenlőség pontosan abban az esetben áll fenn, ha

$$\widehat{K}(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Valóban, a feltételekből (figyelembe véve a korábban mondottakat)

$$\bigcap_{f \in \mathcal{L}} \left\{x \in \mathbf{R}^n : \widehat{f}(x) = 0\right\} = \{x \in \mathbf{R}^n : \widehat{K}(x) = 0\} =: Y.$$

Ha tehát

$$\widehat{K}(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

más szóval $Y = \emptyset$, akkor a xiv) megjegyzés miatt $\mathcal{L} = L^1$. Fordítva a dolog triviális: ha $\mathcal{L} = L^1$ és az $x \in \mathbf{R}^n$ olyan, hogy $\widehat{K}(x) = 0$, akkor (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$\widehat{\mathcal{T}_\xi K}(x) = e^{-\imath\langle x,\xi\rangle} \cdot \widehat{K}(x) = 0 \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n)$$

miatt $\widehat{f}(x) = 0 \quad (f \in L^1)$. Ez utóbbi nyilván nem igaz.

xvi) Mutassuk meg, hogy bármely $u \in \mathcal{S}$ függvényre létezik az

$$\mathcal{F}(u) := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbf{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{u(x)}{x}\, dx$$

véges határérték[32] és ezzel egy $\mathcal{F} \in \mathcal{S}'$ disztribúciót értelmeztünk.

Ehhez vegyük figyelembe, hogy $0 < \varepsilon < 1$ esetén az

$$A_\varepsilon := [-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$$

halmazzal

$$\int_{A_\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0.$$

Ezért ekkor

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{u(x)}{x}\, dx = \int_{A_\varepsilon} \frac{u(x) - u(0)}{x}\, dx + \int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} \frac{u(x)}{x}\, dx.$$

Ugyanakkor egy

$$\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

folytonos függvénnyel

$$\lim_{x \to 0} \eta(x) = \eta(0)$$

és

$$\frac{u(x) - u(0)}{x} = u'(0) + \eta(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

így

$$\int_{A_\varepsilon} \frac{u(x) - u(0)}{x}\, dx =$$

$$u'(0) \cdot (2 - 2\varepsilon) + \int_{A_\varepsilon} \eta(x)\, dx \to 2u'(0) + \int_{-1}^{1} \eta(x)\, dx \qquad (\varepsilon \to +0).$$

[32] A „szokásos” elnevezéssel, ill. jelöléssel élve: $\mathcal{F}(u) = \text{p.v.} \displaystyle\int \frac{u(x)}{x}\, dx$ (*principal value*).

Továbbá (a Lagrange-féle középértéktételre tekintettel)

$$\left|\int_{A_\varepsilon} \frac{u(x)-u(0)}{x}\,dx\right| \le 2\cdot\|u'\|_\infty$$

és (az

$$u_*(t) := tu(t) \qquad (t\in\mathbf{R})$$

jelöléssel)

$$\left|\int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} \frac{u(x)}{x}\,dx\right| = \left|\int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} \frac{u_*(x)}{x^2}\,dx\right| \le$$

$$2\cdot\|u_*\|_\infty\cdot\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = 2\cdot\|u_*\|_\infty,$$

amiből (az $\mathcal{F}$ nyilvánvaló linearitását is figyelembe véve) az $\mathcal{F}$ funkcionál folytonossága már következik.

5. fejezet

Alkalmazások

A Fourier-transzformáció széleskörű alkalmazásai közül ebben a fejezetben először is bemutatjuk a Gauss-féle *prímszámtétel* (egyfajta) bizonyítását. Mindehhez szükségünk lesz két, önmagában is érdekes állításra, ezeket vizsgáljuk a fejezet első két alpontjában. Szót ejtünk a több területen fontos szerepet játszó *határozatlansági relációkról* is. A jel- és képfeldolgozás témakörébe vágóan röviden érintünk *mintavételezési* kérdéseket. Végül a Fourier-transzformációnak a *parciális differenciálegyenletek* vizsgálatában betöltött szerepét illusztráljuk néhány feladaton keresztül.

5.1. Wiener-tétel

Először (a későbbiekben felhasználásra kerülő) *Wiener-tételt* tárgyaljuk.

Tekintsük a $\varphi \in L^\infty$, $K \in L^1$ *függvényeket. Tegyük fel, hogy*

$$\widehat{K}(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

és valamilyen $\alpha \in \mathbf{C}$ *számmal*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} K * \varphi(x) = \alpha \cdot \widehat{K}(0).$$

Ekkor

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f * \varphi(x) = \alpha \cdot \widehat{f}(0) \qquad (f \in L^1).$$

Tekintsük ui. a

$$\psi(x) := \varphi(x) - \alpha \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvényt és az alábbi $\mathcal{L} \subset L^1$ (nyilván) alteret:

$$\mathcal{L} := \Big\{ f \in L^1 : \lim_{\|x\| \to +\infty} f * \psi(x) = 0 \Big\}.$$

Gondoljuk meg, hogy az $\mathcal{L}$ zárt is az L^1-ben. Ha ui. $f_k \in \mathcal{L}$ $(k \in \mathbf{N})$ és valamilyen $f \in L^1$ függvénnyel

$$\|f_k - f\|_1 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

akkor (ld. 1.1.)

$$\|f * \psi - f_k * \psi\|_\infty \leq \|f - f_k\|_1 \cdot \|\psi\|_\infty \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

miatt

$$f_k * \psi(x) \to f * \psi(x) \qquad (k \to \infty),$$

mégpedig az $x \in \mathbf{R}^n$ helyekre nézve egyenletesen: tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$|f_k * \psi(x) - f * \psi(x)| < \varepsilon \qquad (N < k \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}^n).$$

Legyen a $k \in \mathbf{N}$ (rögzített) ilyen index, akkor

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f_k * \psi(x) = 0$$

miatt alkalmas $r > 0$ mellett

$$|f_k * \psi(x) - f * \psi(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus G_r).^1$$

Ezért

$$|f * \psi(x)| \leq |f_k * \psi(x)| + |f_k * \psi(x) - f * \psi(x)| < 2\varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus G_r),$$

más szóval

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f * \psi(x) = 0,$$

így $f \in \mathcal{L}$.

Azt sem nehéz belátni, hogy az $\mathcal{L}$ eltolás-invariáns:

$$(\mathcal{T}_y f) * \psi(x) = \int \mathcal{T}_y f(t) \psi(x - t)\, dt = \int f(t + y) \psi(x - t)\, dt =$$

[1] $G_r := \{u \in \mathbf{R}^n : \|u\| \leq r\}$.

$$= \int f(t)\psi(x+y-t)\,dt = f*\psi(x+y) \qquad (f\in\mathcal{L},\, x,y\in\mathbf{R}^n).$$

Mivel

$$\|x+y\| \geq \|x\| - \|y\| \to +\infty \qquad (y\in\mathbf{R}^n,\, \|x\|\to+\infty),$$

ezért minden $y\in\mathbf{R}^n$ mellett

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} (\mathcal{T}_y f)*\psi(x) = \lim_{\|x\|\to+\infty} f*\psi(x+y) = 0.$$

Tehát $\mathcal{T}_y f\in\mathcal{L}$.

Az is igaz, hogy $K\in\mathcal{L}$, hiszen

$$K*\psi(x) = K*\varphi(x) - K*\alpha(x) = K*\varphi(x) - \alpha\cdot\int f(t)\,dt =$$

$$K*\varphi(x) - \alpha\cdot\widehat{K}(0) \to 0 \qquad (\|x\|\to+\infty).$$

Következésképpen alkalmazható az 4.3. xv) megjegyzés: $\mathcal{L}=L^1$, amiből a Wiener-tétel állítása már nyilván következik.

Nevezzük a $\varphi\in L^\infty$ függvényt *lassan oszcillálónak,* ha bármely $\varepsilon>0$ számhoz megadható olyan $\delta>0$ és $0<r<+\infty$, hogy

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| < \varepsilon \qquad (x,y\in\mathbf{R}^n\setminus G_r,\, \|x-y\|<\delta).$$

Megjegyezzük, hogy ha itt $n=1$, akkor az

$$x,y\in\mathbf{R}\setminus G_r \iff |x|,\,|y|>r$$

feltétel kicserélhető az $x,y>r$ (vagy az $x,y<-r$) kikötésre is. Ekkor *a* $+\infty$*-ben* ($-\infty$*-ben*) *lassan oszcilláló függvényről* beszélünk. Világos, hogy minden egyenletesen folytonos és korlátos függvény lassan oszcilláló, de mindez fordítva nem igaz.

Mutassuk meg, hogy ha a fenti Wiener-tételben tett feltételek mellett a φ függvény még lassan oszcilláló is, akkor (*Pitt*[2]):

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) = \alpha.$$

[2]Harry Raymond Pitt (Greets Green, 1914. VI. 3. – Derby, 2005. X. 8.)

Ti. legyen ekkor egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számmal (és a fentiek szerint a hozzá megadható $\delta, r > 0$ paraméterekkel) a $0 \leq f \in L^1$ olyan függvény, hogy $\widehat{f}(0) = 1$ és

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\| \geq \delta).^3$$

Ugyanakkor $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| > r + \delta$ esetén

$$|\varphi(x) - f * \varphi(x)| = \left| \int_{\{y \in \mathbf{R}^n : \|y\| < \delta\}} (\varphi(x) - \varphi(x-t))\, f(t)\, dt \right| \leq$$

$$\int_{\{y \in \mathbf{R}^n : \|y\| < \delta\}} |\varphi(x) - \varphi(x-t)| \cdot f(t)\, dt \leq \varepsilon \cdot \int f(t)\, dt = \varepsilon \cdot \widehat{f}(0),$$

más szóval

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (\varphi(x) - f * \varphi(x)) = 0.$$

Innen a Wiener-tétel alapján a

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = \alpha$$

egyenlőség már nyilván következik.

5.2. Ingham-tétel

Az alkalmazások között másodikként vizsgáljuk az *Ingham*[4]*-tételt.*

Legyen a

$$g : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

olyan monoton növekedő függvény, amelyre

$$g(x) = 0 \qquad (0 < x < 1).$$

A

$$G(x) := \sum_{m=1}^{\infty} g(x/m) \qquad (0 < x < +\infty)$$

[3]Ilyen f nyilván van, ha pl. $n = 1$, akkor legyen $f := \chi_{[0,\delta]}$.

[4]Albert Edward Ingham (Northampton, 1900. IV. 3. – Chamonix, 1967. IX. 6.)

függvényről tegyük fel, hogy alkalmas $a, b \in \mathbf{R}$ *konstansokkal*

$$G(x) = ax\cdot \ln x + bx + x\cdot \varepsilon(x) \qquad (0 < x < +\infty),$$

ahol az

$$\varepsilon : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvényre

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = a.$$

A bizonyításhoz először is mutassuk meg, hogy

$$\sup\left\{\frac{g(x)}{x} : x > 0\right\} < +\infty.$$

Vegyük észre ehhez, hogy alkalmas $x_0 > 2$ mellett

$$|\varepsilon(x)| < 1 \qquad (x > x_0).$$

Továbbá[5]

$$|\varepsilon(x)| = \left|\frac{G(x)}{x} - a\cdot \ln x - b\right| \le 2G(x_0) + |a\cdot \ln x_0| + |b| \qquad (1/2 \le x \le x_0).$$

A g feltételezett növekedése alapján

$$g(x) - g(x/2) \le \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}\cdot g(x/m) = \sum_{m=1}^{\infty} g(x/m) - 2\cdot \sum_{m=1}^{\infty} g(x/(2m)) =$$

$$G(x) - 2G(x/2) = x(a\cdot \ln 2 + \varepsilon(x) - \varepsilon(x/2)) < Ax \qquad (x \ge 1),$$

ahol (az ε-ra az előbbiekben mondott becslésből adódóan) az A egy alkalmas konstans. Mivel a $G(x)$-et előállító végtelen sorban[6] minden $x > 0$ esetén

$$g(x/m) = 0 \qquad (x < m \in \mathbf{N}),$$

[5]Világos, hogy a $G : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ függvény is monoton növő.

[6]Ez utóbbi $g_{|(0,1)} = 0$ miatt minden $x > 0$ helyen valójában egy véges sok tagú összeg.

ezért

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (g(x/2^m) - g(x/2^{m+1})).$$

Az előző becslés miatt[7]

$$g(x/2^m) - g(x/2^{m+1}) < \frac{Ax}{2^m} \qquad (m \in \mathbf{N},\ x > 0),$$

tehát

$$g(x) < A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x}{2^m} = 2Ax \qquad (x > 0).$$

Vezessük be az alábbi függvényeket:

$$h(x) := g(e^x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$H(x) := G(e^x) = \sum_{m=1}^{\infty} h(x - \ln m) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor $h(x) = 0 \quad (x < 0)$ és a G-re tett feltétel miatt

$$H(x) = e^x(ax + b + \varepsilon_1(x)) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_1(x) := \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(e^x) = 0.$$

A g-re az előbb kapott egyenlőtlenség alapján a

$$\varphi(x) := \frac{h(x)}{e^x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

definícióval értelmezett φ függvény korlátos. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = a$$

(ami nyilván ekvivalens a bizonyítandó

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = a$$

[7]Figyelembe véve még azt is, hogy $g(t) - g(t/2) = 0 \qquad (0 < t < 1)$).

állítással). Legyen ehhez

$$k(x) := \frac{[e^x]}{e^x} \qquad (x \in \mathbf{R}),^{8}$$

a $\lambda > 0$ szám pedig irracionális, továbbá

$$K(x) := 2k(x) - k(x-1) - k(x-\lambda) \qquad (x \in \mathbf{R}).^{9}$$

Ekkor

$$e^x \cdot |K(x)| \leq e^x \cdot |k(x) - k(x-1)| + e^x \cdot |k(x) - k(x-\lambda)| \qquad (x > 0),$$

ahol bármely $q > 0$ választással

$$e^x \cdot |k(x) - k(x-q)| = \left|[e^x] - \frac{[e^{x-q}]}{e^{-q}}\right| = e^q \cdot \left|\frac{[e^x]}{e^q} - \left[e^{x-q}\right]\right| \qquad (x > 0).$$

Ha itt $x > 0$, akkor alkalmas $\alpha, \beta < 1$ számokkal

$$e^x = [e^x] + \alpha \quad \text{és} \quad e^{x-q} = \left[e^{x-q}\right] + \beta,$$

így

$$\left|\frac{[e^x]}{e^q} - \left[e^{x-q}\right]\right| = \left|\beta - \frac{\alpha}{e^q}\right| < 1.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy

$$\sup\{e^x \cdot |K(x)| : x \in \mathbf{R}\} \leq e + e^{\lambda}.$$

Innen világos, hogy $K \in L^1$.

Ha

$$s := \sigma + \imath t \qquad (\sigma > 0,\, t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$(*) \qquad \int k(x) e^{-xs} dx = \int_0^{+\infty} [e^x] \cdot e^{-x(s+1)} dx = \int_1^{+\infty} [y] \cdot y^{-s-2} dy = \frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

ahol $z \in \mathbf{C}$, Re $z > 1$ esetén

$$\zeta(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z}.$$

[8] $[\gamma]$ jelöli a $\gamma \in \mathbf{R}$ szám egészrészét.

[9] Mivel $k(x) = 0 \quad (x < 0)$, ezért $K(x) = 0 \quad (x < 0)$.

Egyszerű számolással ui. azt kapjuk, hogy

$$z\cdot\int_1^{N+1}[x]\cdot x^{-1-z}dx = z\cdot\sum_{m=1}^{N} m\cdot\int_m^{m+1} x^{-1-z}dx =$$

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^z} - \frac{N}{(N+1)^z} \qquad (0 < N \in \mathbf{N}).$$

Itt a $\operatorname{Re} z > 1$ feltételből adódóan

$$\frac{N}{(N+1)^z} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

amiből

$$\zeta(z) = z\cdot\int_1^{+\infty}[x]\cdot x^{-1-z}dx.$$

A

$$b(x) := [x] - x \qquad (x \geq 1)$$

helyettesítéssel innen oda jutunk, hogy

$$(**) \qquad \zeta(z) = \frac{z}{z-1} + z\cdot\int_1^{+\infty} b(x)x^{-1-z}dx.$$

A b függvény nyilván korlátos, ezért a

$$z \mapsto \Phi(z) := z\cdot\int_1^{+\infty} b(x)x^{-1-z}dx$$

leképezés egy holomorf függvényt határoz meg a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ halmazon. Mindez azt jelenti, hogy a $(**)$ tekinthető az eredetileg a

$$\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$$

félsíkon definiált ζ függvény analitikus folytatásának a

$$\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$$

„kilyukasztott” félsíkra. Az így kiterjesztett Riemann-féle ζ-függvény analitikus, a $z = 1$ pontban elsőrendű pólusa van és itt a reziduuma: $\operatorname{res}_1\zeta = 1$. Ismert tulajdonsága továbbá a ζ-nak, hogy

$$\zeta(z) \neq 0 \qquad (1 \neq z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z = 1).$$

Visszatérve az Ingham-tétel bizonyításához, a $(*)$-ban a $k(x)$ helyettesítési értéket a $k(x-1)$-re, ill. a $k(x-\lambda)$-ra cserélve és figyelembe véve a K függvény értelmezését, a $\sigma \to 0$ határátmenet után (a Lebesgue-féle konvergenciatételre is hivatkozva)

$$\widehat{K}(-t) = \int K(x)e^{-\imath tx}dx = \left(2 - e^{-\imath t} - e^{-\imath\lambda t}\right) \cdot \frac{\zeta(1+\imath t)}{1+\imath t} \qquad (0 \neq t \in \mathbf{R})$$

adódik. A λ irracionalitása[10] és

$$\zeta(1+\imath t) \neq 0 \qquad (0 \neq t \in \mathbf{R})$$

miatt így azt kapjuk, hogy

$$\widehat{K}(t) \neq 0 \qquad (0 \neq t \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$2 - e^{-\imath t} - e^{-\imath\lambda t} = 2 - \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(-\imath t)^j}{j!} + \frac{(-\imath\lambda t)^j}{j!}\right) =$$

$$\imath t \cdot \left(1 + \lambda + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{(-\imath t)^{j-1}}{j!} + \lambda \cdot \frac{(-\imath\lambda t)^{j-1}}{j!}\right)\right) =: \imath t(1+\lambda+\Psi(t)),$$

ahol

$$\lim_{t\to 0}\Psi(t) = 0.$$

A

$$\Phi(1+\imath t) \to \Phi(1) = 0 \qquad (t \to 0)$$

egyenlőség alapján

$$\left(2 - e^{-\imath t} - e^{-\imath\lambda t}\right) \cdot \frac{\zeta(1+\imath t)}{1+\imath t} =$$

$$\imath t(1+\lambda+\Psi(t)) \cdot \left(\frac{1+\imath t}{\imath t} + \Phi(1+\imath t)\right) \cdot \frac{1}{1+\imath t} \to 1+\lambda \qquad (t \to 0),$$

következésképpen

$$\widehat{K}(0) = \lim_{t\to 0}\widehat{K}(-t) = 1 + \lambda \neq 0$$

is teljesül.

---

[10]Ezért $2-e^{-\imath t}-e^{-\imath\lambda t} \neq 0$ $(0 \neq t \in \mathbf{R})$. Ui. $2 = e^{-\imath t}+e^{-\imath\lambda t} \iff e^{-\imath t} = e^{-\imath\lambda t} = 1 \iff t = 2l\pi$ és $\lambda t = 2j\pi$ alkalmas $0 \neq l, j \in \mathbf{N}$ mellett. Az utóbbi esetben viszont $\lambda = j/l$ racionális, ami nem igaz.

A Wiener-tétel (ld. 5.1.) alkalmazhatóságához be kell még látnunk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} K * \varphi(x) = a\cdot \widehat{K}(0).$$

Ennek érdekében tekintsük az

$$u(x) := [e^x] \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és a

$$v := \chi_{[0,+\infty)}$$

függvényt, továbbá az

$$X := \{\ln m : m = 1, 2, 3, ...\}$$

halmazt. Legyen továbbá a

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

az a mérték, amelyre

$$\mu(\{x\}) := 1 \qquad (x \in X).$$

Ekkor (ld. 1.1.)

$$H = h * \mu \quad \text{és} \quad u = v * \mu.$$

Ezért

$$h * u(x) = h * v * \mu(x) = H * v(x) = \int_0^x H(y)\, dy \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ugyanakkor

$$\varphi * k(x) = \int e^{y-x}\cdot h(x-y)\cdot [e^y] \cdot e^{-y} dy = e^{-x}\cdot h * u(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amiből a H-ra vonatkozó korábbi előállítást is figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\varphi * k(x) = e^{-x}\cdot \int_0^x H(y)\, dy = ax + b - a + \varepsilon_2(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Ebből kifolyólag tehát

$$\lim_{x\to+\infty} K * \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(2\varphi * k(x) - \varphi * k(x-1) - \varphi * k(x-\lambda)\Big) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big(2ax + 2\varepsilon_2(x) - a(x-1) - \varepsilon_2(x-1) - a(x-\lambda) - \varepsilon_2(x-\lambda)\Big) =$$

$$(1+\lambda)a = a\cdot \widehat{K}(0).$$

A Wiener-tétel (ld. 5.1.) szerint pedig

$$\lim_{x\to+\infty} f * \varphi(x) = (1+\lambda)a = a\cdot \widehat{f}(0) \qquad (f \in L^1).$$

Az előbbi egyenlőséget szem előtt tartva tekintsük végül adott $\varepsilon > 0$ mellett az

$$f_1 := \frac{1}{\varepsilon}\cdot \chi_{[0,\varepsilon]},\ f_2 := \frac{1}{\varepsilon}\cdot \chi_{[-\varepsilon,0]} \in L^1$$

függvényeket. Mivel a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto e^t\cdot \varphi(t) = g(e^t)$$

függvény monoton növekedő, ezért

$$e^y\cdot \varphi(y) \le e^x\cdot \varphi(x) = e^\varepsilon\cdot e^{x-\varepsilon}\cdot \varphi(x) \le e^\varepsilon\cdot e^y\cdot \varphi(x) \qquad (x-\varepsilon \le y \le x)$$

és

$$e^u\cdot \varphi(u) \le e^v\cdot \varphi(v) = e^\varepsilon\cdot e^{v-\varepsilon}\cdot \varphi(v) \le e^\varepsilon\cdot e^u\cdot \varphi(v) \qquad (u \le v \le u+\varepsilon),$$

más szóval

$$\varphi(y) \le e^\varepsilon\cdot \varphi(x) \qquad (x-\varepsilon \le y \le x)$$

és

$$\varphi(v) \ge e^{-\varepsilon}\cdot \varphi(u) \qquad (u \le v \le u+\varepsilon).$$

Következésképpen

$$f_1 * \varphi(x) = \int f_1(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{x-\varepsilon}^x f_1(x-y)\varphi(y)\,dy \le$$

$$\varepsilon^{-1}\cdot e^\varepsilon\cdot \varphi(x)\cdot \int_{x-\varepsilon}^x dy = e^\varepsilon\cdot \varphi(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és

$$f_2 * \varphi(x) = \int f_2(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_x^{x+\varepsilon} f_2(x-y)\varphi(y)\,dy \ge$$

$$\varepsilon^{-1} e^\varepsilon\cdot \varphi(x) \int_x^{x+\varepsilon} dy = e^\varepsilon\cdot \varphi(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

így

$$e^{-\varepsilon}\cdot f_1 * \varphi(x) \le \varphi(x) \le e^{\varepsilon}\cdot f_2 * \varphi(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Innen

$$\lim_{x\to+\infty} f_j * \varphi(x) = a\cdot \widehat{f_j}(0) = a \qquad (j = 1, 2)$$

alapján azt kapjuk, hogy

$$ae^{-\varepsilon} \le \liminf_{x\to+\infty} \varphi(x) \le \limsup_{x\to+\infty} \varphi(x) \le ae^{\varepsilon} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy (az $\varepsilon \to 0$ határátmenet után)

$$\liminf_{x\to+\infty} \varphi(x) = \limsup_{x\to+\infty} \varphi(x) = a,$$

ezért létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = a$$

határérték.

5.3. Prímszámtétel

Az Ingham-tétel (ld. 5.2.) alkalmazásával röviden vázoljuk a prímszámtétel egy bizonyítását. A tétel megfogalmazásához legyen tehát $0 < x \in \mathbf{R}$ és a $\pi(x)$ jelentse a $p \le x$ feltételnek eleget tevő p prímszámok számát. Ekkor igaz a *prímszámtétel*[11]:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\cdot \ln x}{x} = 1.$$

Legyen ehhez először is

$$\Lambda(m) := \begin{cases} \ln p & (m = p^k \ \ (p \ \text{prím}, \ k \in \mathbf{N})) \\ & \\ 0 & (\text{különben}) \end{cases} \qquad (m \in \mathbf{N}),^{14}$$

[11]Az állítást (sejtés szintjén) először Gauss (∼ 1790) és Legendre[12] (∼ 1800) fogalmazta meg. Az egzakt bizonyítást 1896-ban (egymástól függetlenül) Hadamard[13] és de la Vallée Poussin adta meg.

[12]Adrien-Marie Legendre (Párizs, 1752. IX. 18 – Párizs, 1833. I. 10.)

[13]Jacques Salomon Hadamard (Versailles, 1865. XII. 8. – Párizs, 1963. X. 17.)

[14]Ez az ún. *Mangoldt*[15]*-függvény.*

[15]Hans Carl Friedrich von Mangoldt (Weimar, 1854. V. 18. – Danzig-Langfuhr, 1925. X. 27.)

továbbá

$$\psi(x) := \sum_{x \geq m \in \mathbf{N}} \Lambda(m) \qquad (x > 0)$$

és

$$F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \psi(x/j) \qquad (x > 0).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\text{a)} \qquad \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \cdot \ln x}{x} < \frac{1}{\ln x} + \frac{\psi(x) \cdot \ln x}{x \cdot \ln(x/\ln^2 x)} \qquad (x > e);$$

$$\text{b)} \qquad F(x) = x \cdot \ln x - x + c(x) \cdot \ln x \qquad (x > 1),$$

ahol alkalmas $x_0 > 0$ mellett

$$\sup\{|c(x)| : x > x_0\} < +\infty.$$

Ha ui. $x > 0$, akkor a

$$p^k \leq x \qquad (k \in \mathbf{N})$$

feltételnek (valamilyen rögzített p prímszám esetén) eleget tevő p^k hatványok száma nyilván $[\ln x/\ln p]$. Ezért (a p-vel továbbra is prímszámot jelölve)

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \cdot \ln p \leq \sum_{p \leq x} \ln x = \pi(x) \cdot \ln x \qquad (x > 0),$$

ami az a)-beli első egyenlőtlenség. Továbbá $1 < y < x$ esetén

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \sum_{y < p \leq x} \frac{\ln p}{\ln y} \leq \frac{\psi(x)}{\ln y},$$

így

$$\pi(x) \leq \pi(y) + \frac{\psi(x)}{\ln y} < y + \frac{\psi(x)}{\ln y}.$$

Legyen

$$y := \frac{x}{\ln^2 x} \qquad (x > e),$$

akkor az a)-beli második egyenlőtlenség is nyilván következik.

A b) igazolásához használjuk fel, hogy

$$F(m) - F(m-1) = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi(m/j) - \psi((m-1)/j)) \qquad (1 < m \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy az előbbi $1 < m \in \mathbf{N}$ mellett

$$\psi(m/j) - \psi((m-1)/j) = \begin{cases} 0 & (m/j \notin \mathbf{N}) \\ \\ \Lambda(m/j) & (m/j \in \mathbf{N}) \end{cases} \qquad (1 \le j \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$F(m) - F(m-1) = \sum_{j=1}^{\infty}(\psi(m/j) - \psi((m-1)/j)) = \sum_{j, m/j \in \mathbf{N}} \Lambda(m/j) =$$

$$\sum_{k, m/k \in \mathbf{N}} \Lambda(k) = \ln m \qquad (1 < m \in \mathbf{N})$$

(ahol az utolsó egyenlőséget illetően gondoljunk az m szám prímhatványok szorzataként való egyértelmű előállítására). Mivel $F(1) = 0$, ezért

$$F(m) = \sum_{k=2}^{m}(F(k) - F(k-1)) = \sum_{k=1}^{m} \ln k = \ln(m!) \qquad (1 \le m \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$J(x) := \int_1^x \ln t\, dt = x \cdot \ln x - x + 1 \qquad (x \ge 1).$$

Ha itt

$$m \le x \le m+1 \qquad (1 \le m \in \mathbf{N}),$$

akkor (az integrálok és a közelítő összegek „szokásos” egybevetéséből)

$$J(m) < F(m) \le F(x) \le F(m+1) < J(m+2)$$

miatt[16]

$$|F(x) - J(x)| < |J(m+2) - J(m)| = (m+2)\cdot \ln(m+2) - 2 - m \cdot \ln m =$$

[16] Vegyük figyelembe, hogy $J(m) \le J(x) \le J(m+1) < J(m+2)$.

$$= \ln\left(\frac{(m+2)^{m+2}}{m^m}\right) - 2 =$$

$$\ln\left((1+2/m)^m \cdot (m+2)^2\right) - 2 < \ln\left(e^2(m+2)^2\right) - 2 =$$

$$2\cdot \ln(m+2) \leq 2\cdot \ln(x+2).$$

Tehát

$$F(x) = J(x) + F(x) - J(x) = x\cdot \ln x - x + 1 + F(x) - J(x) =$$

$$x\cdot \ln x - x + c(x)\cdot \ln x \qquad (x > 1),$$

ahol

$$|c(x)| := \frac{|1 + F(x) - J(x)|}{\ln x} \leq \frac{1 + 2\cdot \ln(x+2)}{\ln x} \to 2 \qquad (x \to +\infty).$$

Ezzel a b)-t is beláttuk.

Nyilvánvaló, hogy az a) szerint a prímszámtétel igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy[17]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Ez viszont következik az Ingham-tételből (ld. 5.2.), ha az ottani szereplők a következők:

$$g := \psi,\ G := F,\ a := 1,\ b := -1$$

és

$$\varepsilon(x) := \frac{c(x)\cdot \ln x}{x} \qquad (x > 1),$$

amikor (ld. b))

$$\sup\{|c(x)| : x > x_0\} < +\infty$$

miatt

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

[17] Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x/(\ln(x/\ln^2 x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1/(1 - (2\ln(\ln x))/\ln x) = 1.$

5.4. Határozatlansági relációk

Legyen a továbbiakban $n = 1$ és valamilyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvény esetén

$$f_*(x) := x\cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Definiáljuk továbbá a $\mathcal{D}$ halmazt a következőképpen:

$$\mathcal{D} := \{f \in L^2 \cap D : f_*,\ f' \in L^2\}.$$

Világos, hogy (ld. 2.3.) $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathcal{D}$, akkor

$$\int |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + \int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} \frac{1}{|x|}\cdot |f_*(x)|\, dx,$$

ahol (a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva)

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \le \sqrt{2}\cdot \|f\|_2 < +\infty$$

és

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} \frac{1}{|x|}\cdot |f_*(x)|\, dx \le \|f_*\|_2\cdot \sqrt{\int_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]} x^{-2}\, dx} < +\infty$$

miatt $f \in L^1$. Továbbá (ld. 2.5. xv) megjegyzés)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

Tekintsük ezek után az

$$Af := f_* \qquad (f \in \mathcal{D})$$

és a

$$Bf := \imath\cdot f' \qquad (f \in \mathcal{D})$$

hozzárendeléssel értelmezett A, B operátorokat. Ezek mindegyike nyilván lineáris, ill. könnyen igazolhatóan rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$\langle Af, g\rangle = \int x f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int f(x)\overline{xg(x)} dx = \langle f, Ag\rangle,$$

valamint parciális integrálással

$$\langle Bf, g\rangle = \int \imath\cdot f'(x)\overline{g(x)} dx = -\int \imath\cdot f(x)\overline{g'(x)} dx =$$

$$= \int f(x)\overline{\imath\cdot g'(x)}dx = \langle f, Bg\rangle \qquad (f, g \in \mathcal{D}).$$

Legyen

$$[A, B] := AB - BA$$

(az A, B operátorok *kommutátora*), ekkor bármely $f \in \mathcal{D}$ esetén

$$[A, B]f(x) = ABf(x) - BAf(x) = xBf(x) - \imath\cdot (f_*)'(x) =$$

$$\imath\cdot xf'(x) - \imath\cdot f(x) - \imath\cdot xf'(x) = -\imath\cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amiből

$$\|f\|_2^2 = |\langle [A, B]f, f\rangle|.$$

Továbbá

$$\langle [A, B]f, f\rangle = \langle ABf, f\rangle - \langle BAf, f\rangle = \langle Bf, Af\rangle - \langle Af, Bf\rangle = 2\imath\cdot \operatorname{Im}\langle Bf, Af\rangle.$$

Innen a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\|f\|_2^2 = |\langle [A, B]f, f\rangle| = 2\cdot |\operatorname{Im}\langle Bf, Af\rangle| \leq 2\cdot |\langle Bf, Af\rangle| \leq 2\cdot \|Af\|_2\cdot \|Bf\|_2$$

adódik.

Mikor van a most kapott

$$(*) \qquad |\langle [A, B]f, f\rangle| \leq 2\cdot \|Af\|_2\cdot \|Bf\|_2 \qquad (f \in \mathcal{D})$$

egyenlőtlenségben egyenlőség? Ehhez (a fentiekre tekintettel) nyilván szükséges és elégséges az, hogy egyrészt

$$|\langle Bf, Af\rangle| = |\operatorname{Im}\langle Bf, Af\rangle|,$$

azaz

$$\operatorname{Re}\langle Bf, Af\rangle = 0,$$

másrészt

$$|\langle Bf, Af\rangle| = \|Af\|_2\cdot \|Bf\|_2,$$

így[18] valamilyen $\lambda \in \mathbf{C}$ számmal

$$Bf = \lambda\cdot Af$$

[18] A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségben az egyenlőség ismert kritériumára gondolva.

legyen. Ezért

$$0 = \operatorname{Re}\langle Bf, Af\rangle = \operatorname{Re}(\lambda\cdot \|Af\|_2^2) = \|Af\|_2^2\cdot \operatorname{Re}\lambda.$$

Következésképpen $\operatorname{Re}\lambda = 0$, azaz a λ nulla, vagy „tiszta imaginárius” szám:

$$\lambda = \imath\cdot c,$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Mindez tehát a következőt jelenti:

$$f'(x) = cxf(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A most kapott differenciálegyenlet megoldásai: tetszőleges $\alpha \in \mathbf{C}$ paraméterrel

$$f(x) = \alpha\cdot e^{cx^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $f \in L^2$, ezért itt $c < 0$.

Legyen most az $f \in \mathcal{D}$ tetszőleges és számítsuk ki az $\|Af\|_2$, $\|Bf\|_2$ normákat:

$$\|Af\|_2 = \sqrt{\int x^2\cdot |f(x)|^2\,dx}.$$

A Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) és (ld. 1.2.4., ill. 4.2.2.) az

$$\widehat{f'}(x) = -\imath\cdot x\widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

azonosság szerint

$$\|Bf\|_2 = \|f'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \|\widehat{f'}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \sqrt{\int x^2\cdot |\widehat{f}(x)|^2\,dx}.$$

A fentieket összefoglalva kapjuk az alábbi *határozatlansági reláció* néven ismert egyenlőtlenséget (vagy más néven a *Heisenberg*[19]*–Pauli*[20]*–Weyl*[21]*-egyenlőtlenséget*):[22]

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot \int |f(x)|^2\,dx \le \sqrt{\int x^2\cdot |f(x)|^2\,dx}\cdot \sqrt{\int x^2\cdot |\widehat{f}(x)|^2\,dx} \qquad (f \in \mathcal{D}),$$

[19] Werner Karl Heisenberg (Würzburg, 1901. XII. 5. – München, 1976. II. 1.)
[20] Wolfgang Ernst Pauli (Bécs, 1900. IV. 25. – Zürich, 1958. XII. 15.)
[21] Hermann Klaus Hugo Weyl (Elmshorn, 1885. IX. 9. – Zürich, 1955. XII. 9.)
[22] Röviden: HPW-egyenlőtlenség.

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $\alpha \in \mathbf{C}$ és $0 > c \in \mathbf{R}$ paraméterrel

$$f(x) = \alpha \cdot e^{cx^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A $(*)$ egyenlőtlenségből az elemi

$$2ab \leq a^2 + b^2 \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

összefüggés alapján az

$$a := \|Af\|_2 \quad \text{és} \quad b := \|Bf\|_2$$

választással azt mondhatjuk, hogy

$$\int x^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx + \int |f'(x)|^2 \, dx \geq \int |f(x)|^2 \, dx \qquad (f \in \mathcal{D}).$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b$ és a $(*)$ egyenlőtlenségben is egyenlőség van:

$$Bf = \imath \cdot cAf \quad (c \in \mathbf{R}) \Longrightarrow \|Bf\|_2 = |c| \cdot \|Af\|_2 = \|Af\|_2,$$

azaz $|c| = 1$. Ezért $Bf = \pm\imath \cdot Af$, amiből (a fenti analóg helyzetben már látott módon) alkalmas $\alpha \in \mathbf{C}$ együtthatóval

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-x^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik.

Az előbbi gondolatmenet értelemszerű módosításával kapjuk a határozatlansági reláció alábbi kiterjesztését: tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ és $f \in \mathcal{D}$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \int |f(x)|^2 \, dx \leq \sqrt{\int (x-a)^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx} \cdot \sqrt{\int (x-b)^2 \cdot |\widehat{f}(x)|^2 \, dx}.$$

Legyen itt az $f \in \mathcal{D}$ függvény olyan, hogy $\|f\|_2 = 1$ és

$$\langle g, h \rangle_* := \int g(x)\overline{h(x)} \cdot |f(x)|^2 \, dx \qquad (g, h \in \mathcal{D}),$$

valamint

$$\|g\|_* := \sqrt{\langle g, g \rangle_*} = \sqrt{\int |g(x)|^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx}.$$

Ekkor bármely $a \in \mathbf{R}$ esetén az

$$f_a(x) := a \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre

$$\|f_a\|_* = |a| \cdot \|f\|_2 = |a|.$$

Továbbá $f \in \mathcal{D}$ miatt $\|\varphi\|_* < +\infty$, ahol

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

hiszen

$$\|\varphi\|_* = \sqrt{\int x^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx} = \|f_*\|_2.$$

Mivel az $\{f_a : a \in \mathbf{R}\}$ altér nyilván véges dimenziós,[23] ezért egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\sqrt{\int (x-c)^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx} = \|\varphi - f_c\|_* = \min\{\|\varphi - f_a\|_* : a \in \mathbf{R}\} =$$

$$\min\left\{\sqrt{\int (x-a)^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx} : a \in \mathbf{R}\right\} =: \Delta_f.$$

Vegyük észre,[24] hogy bármely $a \in \mathbf{R}$ mellett

$$0 = \langle \varphi - f_c, f_a \rangle_* = \int (x-c)a \cdot |f(x)|^2 \, dx = a \cdot \int x \cdot |f(x)|^2 \, dx - ac,$$

tehát[25]

$$c = \int x \cdot |f(x)|^2 \, dx.$$

Ugyanígy kapjuk (a Plancherel-tételre (ld. 1.2.3.) tekintettel), hogy a

$$\widetilde{c} := \frac{1}{2\pi} \cdot \int x \cdot |\widehat{f}(x)|^2 \, dx$$

[23] A $\{g : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \|g\|_* < +\infty\}$ vektortérben.

[24] Emlékeztetünk arra, hogy – lévén az f_c a φ-t legjobban közelítő altérbeli elem – a $\varphi - f_c$ különbség „merőleges” az altérre.

[25] $\int |x| \cdot |f(x)|^2 \, dx = \int |f_*(x)| \cdot |f(x)| \, dx \le \|f_*\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f_*\|_2 < +\infty$, így $c \in \mathbf{R}$.

konstanssal[26]

$$\delta_f := \min\left\{\sqrt{\int (x-b)^2\cdot|\widehat{f}(x)|^2\,dx} : b\in\mathbf{R}\right\} = \sqrt{\int (x-\widetilde{c})^2\cdot|\widehat{f}(x)|^2\,dx}.$$

Következésképpen a határozatlansági reláció fent megfogalmazott általánosítását figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\Delta_f\cdot\delta_f \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5.5. Mintavételezés

A továbbiakban a jelfeldolgozás egyik kiindulópontjának számító mintavételezési tételt (angolul: *sampling theorem*) (*Nyquist*[27](1928) – *Shannon*[28](1949)) tárgyaljuk. Tegyük fel ehhez, hogy $n=1$ és az $f\in L^2\cap C$ függvényre az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált kompakt tartójú, speciálisan

$$\widehat{f}(x) = 0 \qquad (x\in\mathbf{R}\setminus[-\pi,\pi]).^{29}$$

Megjegyezzük, hogy az a feltételezés, hogy ti.

$$\operatorname{supp}\widehat{f}\subset[-\pi,\pi],$$

csak első pillanatra tűnik önkényesnek. Ha ui. valamilyen $\omega>0$ mellett egy adott $h\in L^2\cap C$ függvényre

$$\widehat{h}(x) = 0 \qquad (x\in\mathbf{R}\setminus[-\omega,\omega]),$$

akkor a h-t a

$$h_0(x) := h(\pi x/\omega) \qquad (x\in\mathbf{R})$$

egyenlőséggel definiált h_0-ra cserélve[30] (ld. 1.3. v) megjegyzés)

$$\widehat{h}_0(x) = \frac{\omega}{\pi}\cdot\widehat{h}(\omega x/\pi) = 0 \qquad (x\in\mathbf{R}\setminus[-\pi,\pi]).$$

---

[26] $\int|x|\cdot|\widehat{f}(x)|^2\,dx = \int|x\cdot\widehat{f}(x)|\cdot|\widehat{f}(x)|\,dx = \int|\widehat{f'}(x)|\cdot|\widehat{f}(x)|\,dx \leq \|\widehat{f'}\|_2\cdot\|\widehat{f}\|_2 = 2\pi\cdot\|f'\|_2\cdot\|f\|_2 = 2\pi\cdot\|f'\|_2 < +\infty$, így $\widetilde{c}\in\mathbf{R}$.

[27] Harry Theodor Nyquist (Stora Kil, 1889. II. 7. – Harlingen, 1976. IV. 4.)

[28] Claude Elwood Shannon (Petoskey, 1916. IV. 30. – Medford, 2001. II. 24.)

[29] Angolul: az f egy ún. *band-limited function.*

[30] Nyilván $h_0\in L^2\cap C$.

Az előbbi f függvényt véve az

$$[-\pi,\pi] \ni x \mapsto \widehat{f}(x)$$

leképezést[31] (trigonometrikus) Fourier-sorba fejtve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{f}(x) - \sum_{k=-j}^{j} c_k e^{\imath kx}\right|^2 dx \to 0 \qquad (j \to \infty),$$

ahol

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(t)e^{-\imath kt}\,dt \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az $\widehat{f}_{|_{[-\pi,\pi]}}$ leszűkítés k-adik Fourier-együtthatója. Tehát az inverziós formulát (ld. 4.1.) alkalmazva

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\cdot \widehat{\widehat{f}}\,(-k) = f(k) \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ezért[32] (ismét csak az inverziós formula alapján)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \widehat{\widehat{f}}\,(-x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(t)e^{-\imath xt}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(k-x)t}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Itt

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(k-x)t}\,dt = \frac{e^{\imath(k-x)\pi} - e^{-\imath(k-x)\pi}}{2\pi\cdot \imath(k-x)} = \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{Z}),$$

ahol

$$\left.\frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi}\right|_{x=k} := \lim_{z\to k} \frac{\sin(\pi z - k\pi)}{\pi z - k\pi} = 1 \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

---

[31] Világos, hogy (ld. Plancherel-tétel (1.2.3.)) ez a függvény $L^2[-\pi,\pi]$-beli. Innen az is rögtön következik, hogy $\widehat{f} \in L^1$.

[32] Emlékeztetünk arra, hogy az $L^2[-\pi,\pi]$-beli függvények Fourier-sorát „szabad tagonként integrálni”, azaz: ha most a d_k $(k \in \mathbf{Z})$ számok egy $g \in L^2[-\pi,\pi]$ függvénynek a Fourier-együtthatói, továbbá $S_j(x) := \sum_{k=-j}^{j} d_k e^{\imath kx}$ $(j \in \mathbf{N},\ x \in [-\pi,\pi])$, akkor a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből adódóan $\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{\imath\alpha x}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_j(x)e^{\imath\alpha x}\,dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - S_j(x)|\,dx \le \sqrt{2\pi}\cdot \|g - S_j\|_2 \to 0$ $(j \to \infty)$. Így $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{\imath\alpha x}\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_j(x)e^{\imath\alpha x}\,dx = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=-j}^{j} \int_{-\pi}^{\pi} d_k e^{\imath(k+\alpha)x}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(k+\alpha)x}\,dx$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

Következésképpen

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\cdot \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

vagy a sinc függvény (ld. 2.1.) segítségével

$$f(x) = \pi\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\cdot \operatorname{sinc}(x-k) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$[33]

A fentiek mintegy kiterjesztéseként most tegyük fel azt, hogy az $f \in L^2 \cap C$ függvényre valamilyen $\omega > 0$ esetén

$$\widehat{f}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-\omega, \omega])$$

teljesül. Ekkor (ld. fent) az

$$f_0(x) := f(\pi x/\omega) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

jelöléssel és a

$$\left.\frac{\sin(\omega x - k\pi)}{\omega x - k\pi}\right|_{x=k\pi/\omega} := \lim_{z \to k\pi/\omega} \frac{\sin(\omega z - k\pi)}{\omega z - k\pi} = 1 \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

megállapodással az előbbiek szerint

$$f(x) = f_0(\omega x/\pi) = \frac{1}{\pi}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/\omega)\cdot \frac{\sin(\omega x - k\pi)}{\omega x/\pi - k} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/\omega)\cdot \frac{\sin(\omega x - k\pi)}{\omega x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A most kapott *Nyquist–Shannon-formula* (ld. még 5.7. x) megjegyzés) duálisát megfogalmazandó válasszunk egy olyan $f \in L^2 \cap C$ függvényt, amelyre

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-\pi, \pi]).$$

[33] Fizikai (jelfeldolgozási) terminológiával élve: *ha egy jel nem tartalmaz egy kompakt intervallumon kívül eső frekvenciákat, akkor ezt a jelet alkalmasan választott diszkrét pontokbeli értékei teljesen meghatározzák* (Shannon). Más szóval az f ismeretéhez elég az előbb említett diszkrét pontokban mintavételezni az f-et.

Legyen

$$a_k := \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\imath kt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \widehat{f}(-k) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az $\widehat{f}_{|_{[-\pi,\pi]}}$ (nyilván $L^2[-\pi,\pi]$-beli) függvény k-adik Fourier-együtthatója, amikor a fentiekkel analóg módon azt mondhatjuk, hogy

$$\widehat{f}(x) = \int f(t)e^{\imath xt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(k+x)t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(x-k)t}\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\cdot \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{x-k} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá, ha adott $\delta > 0$ mellett

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-\delta, \delta]),$$

akkor

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k\pi/\delta)\cdot \frac{\sin(\delta x - k\pi)}{\delta x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az eddigiekhez az alábbi észrevételeket fűzzük. Tekintsük a

$$\varphi_k(x) := \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{x-k} \qquad (k \in \mathbf{Z},\, x \in \mathbf{R})$$

és a

$$\Phi_k(x) := \begin{cases} e^{\imath kx} & (|x| \le \pi) \\ \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{Z},\, x \in \mathbf{R})$$

függvényt, ahol most értelemszerűen

$$\frac{\sin(\pi x - k\pi)}{x-k}\Big|_{x=k} := \pi\cdot \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi}\Big|_{x=\pi} = \pi \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ekkor

$$\widehat{\Phi}_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(k+x)t}\,dt = 2\cdot \varphi_k(-x) \qquad (k \in \mathbf{Z},\, x \in \mathbf{R}).$$

Mindezek alapján azt kapjuk, hogy az

$$\widehat{f}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-\pi, \pi])$$

feltételnek eleget tevő $f \in L^2 \cap C$ függvényekre a Nyquist–Shannon-tétel szerint

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \cdot \widehat{\Phi}_k(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így a Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) alkalmazásával

$$\left\| f - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-j}^{j} 2f(k) \cdot \varphi_k \right\|_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left\| \widehat{\widehat{f}} - \left(\sum_{k=-j}^{j} f(k) \cdot \Phi_k \right)^{\wedge} \right\|_2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\| \widehat{f} - \sum_{k=-j}^{j} f(k) \cdot \Phi_k \right\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy a $(\varphi_k, k \in \mathbf{Z})$ rendszer (a $\|.\|_2$ norma értelmében) ortogonális bázis az

$$L^2_\pi := \{ g \in L^2 : \widehat{g}(x) = 0 \ \ (|x| > \pi) \}$$

térben.[34]

5.6. Differenciálegyenletek

Az 1.3. xii) megjegyzésben már érintettük a Fourier-transzformáció alkalmazhatóságát bizonyos differenciálegyenletek (integrálható) megoldásának az előállítását illetően. Ebben a pontban röviden, egy-két (a gyakorlat szempontjából is fontos) példán keresztül illusztráljuk ugyanezt a parciális differenciálegyenletek területén.

1° Elsőként tekintsük az ún. *hővezetési egyenlet* alábbi változatát: keressük azt a kétszer differencálható

$$u : \mathbf{R} \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvényt, amire a

$$\partial_2 u(x,y) = q \cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

egyenlőség teljesül, ahol a $q > 0$ adott paraméter és az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

[34] Az ortogonalitás a trigonometrikus rendszer ortogonalitásának az egyszerű következménye: ui. (ld. 2.5. xv) megjegyzés) $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \langle \widehat{\Phi}_l, \widehat{\Phi}_k \rangle / 4 = \pi \cdot \langle \Phi_l, \Phi_k \rangle / 2 = 0 \quad (k \neq l \in \mathbf{Z})$ és $\|\varphi_k\|_2^2 = \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \pi \cdot \|\Phi_k\|_2^2 / 2 = \pi^2 \quad (k \in \mathbf{Z})$. Más szóval a $(\varphi_k / \pi, k \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált.

integrálható, folytonos és korlátos függvénnyel

$$u(x,0)=f(x) \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Ha figyelembe vesszük a Fourier-transzformáció és a differenciálás kapcsolatát (ld. 1.2.4.), akkor az

$$\widehat{u}(x,y):=\int u(t,y)e^{\imath xt}\,dt \qquad (x\in\mathbf{R},\ y>0)$$

„első változó szerinti" Fourier-transzformálttal[35]

$$\widehat{\partial_2 u}(x,y)=\partial_2\widehat{u}(x,y)=-qx^2\cdot\widehat{u}(x,y) \qquad (x\in\mathbf{R},\ y>0).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\partial_2\widehat{u}(x,y)+qx^2\cdot\widehat{u}(x,y)=0 \qquad (x\in\mathbf{R},\ y>0)$$

és

$$\widehat{u}(x,0)=\widehat{f}(x) \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Ez minden $x\in\mathbf{R}$ mellett egy, az „ y változóra nézve" közönséges homogén lineáris differenciálegyenlet az

$$y\mapsto\widehat{u}(x,y)$$

függvényre vonatkozóan a 0-ban előírt $\widehat{f}(x)$ kezdeti értékkel. Ennek a megoldása:[36]

$$\widehat{u}(x,y)=\widehat{f}(x)e^{-qx^2y} \qquad (x\in\mathbf{R},\ y\geq 0).$$

Világos, hogy az

$$x\mapsto\widehat{f}(x)e^{-qx^2y} \qquad (y>0)$$

leképezés integrálható, ezért az inverziós formula (2.2.) szerint

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\widehat{u}(t,y)e^{-\imath xt}\,dt=$$

[35] A továbbiakban feltesszük, hogy a $t\mapsto u(t,y)$ és a $t\mapsto\partial_2 u(t,y)$ $(y>0)$ függvény integrálható, létezik a $\partial_2\widehat{u}(x,y)$ derivált és $\partial_2\widehat{u}(x,y)=\widehat{\partial_2 u}(x,y)$ $(x\in\mathbf{R},\ y>0)$.

[36] Legyen a $g:I\to\mathbf{R}$ függvény folytonos az $I\subset\mathbf{R}$ nyílt intervallumon, a G pedig a g (egy) primitív függvénye. Ekkor a $\varphi_0(x):=e^{G(x)}$ $(x\in I)$ függvénnyel $\{\varphi:I\to\mathbf{R}:\varphi\in D,\ \varphi'=g\cdot\varphi\}=\{c\cdot\varphi_0:c\in\mathbf{R}\}$.

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \widehat{f}(t) e^{-qt^2 y} \cdot e^{-\imath xt} \, dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Ugyanakkor emlékeztetünk arra (ld. 1.3. ii) megjegyzés), hogy a

$$h(t) := e^{-t^2/2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényre

$$\widehat{h} = \sqrt{2\pi} \cdot h.$$

Ha már most

$$\widehat{H}(t) := e^{-qt^2 y} = h(\sqrt{2qy} \cdot t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{h}(\sqrt{2qy} \cdot t) \qquad (t \in \mathbf{R},\ y > 0),$$

akkor (ld. 1.3. iv) megjegyzés)

$$\widehat{H}_y(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi qy}} \cdot \widehat{h}_0(t),$$

ahol

$$h_0(t) := h(t/\sqrt{2qy}) \qquad (t \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Ezért

$$H_y(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi qy}} \cdot e^{-t^2/(4qy)} \qquad (t \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Következésképpen (ld. 1.2.2.1.)

$$\widehat{u}(x, y) = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{H}_y(x) = (f * H_y)^{\wedge}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0),$$

innen pedig

$$u(x, y) = f * H_y(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi qy}} \cdot \int f(t) e^{-(x-t)^2/(4qy)} \, dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Az utóbbi függvényről közvetlenül is belátható, hogy eleget tesz a hővezetési egyenletnek.

2° A második mintapéldát megelőzendő az alábbiakat bocsátjuk előre. Legyen ui. az $a > 0$ paraméter esetén

$$f_a(x) := e^{-a \cdot |x|} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $f_a \in L^1$ és

$$\widehat{f_a}(x) = \int e^{-a\cdot|t|}\cdot e^{\imath xt}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a+\imath x)t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-a+\imath x)t}\,dt =$$

$$\frac{1}{a+\imath x} + \frac{1}{a-\imath x} = \frac{2a}{x^2+a^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az is nyilvánvaló ebből, hogy $\widehat{f_a} \in L^1$, így az inverziós formula (ld. 2.2.) alapján

$$f_a(x) = e^{-a\cdot|x|} = \frac{a}{\pi}\cdot \int \frac{1}{t^2+a^2}\cdot e^{-\imath xt}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amiből

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\cdot e^{-\imath xt}\,dt = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-a\cdot|x|} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha tehát

$$g_a(t) := \frac{1}{t^2+a^2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\widehat{g_a}(x) = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-a\cdot|x|} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Minden „készen áll” ahhoz, hogy megoldhassuk az alábbi (síkbeli) *Dirichlet-problémát*: adjunk meg olyan kétszer differenciálható

$$u : \mathbf{R} \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvényt, hogy

$$\partial_{11}u(x,y) + \partial_{22}u(x,y) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

és az $f \in L^1 \cap C$ korlátos függvénnyel

$$u(x,0) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az előzőekhez hasonlóan az u megoldásról most is feltételezve mindazt, mint az **1°** példában, azt kapjuk, hogy

$$-x^2\cdot \widehat{u}(x,y) + \partial_{22}\widehat{u}(x,y) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

és

$$\widehat{u}(x,0) = \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ez utóbbi feladat egy, a második változóra vonatkozó közönséges másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet (minden rögzített $x \in \mathbf{R}$ mellett) az

$$y \mapsto \widehat{u}(x, y)$$

függvényre. Az ismert „megoldóképlet” szerint alkalmas

$$c_1,\, c_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvényekkel

$$\widehat{u}(x, y) = c_1(x) \cdot e^{|x| \cdot y} + c_2(x) \cdot e^{-|x| \cdot y} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R},\, y \geq 0)$$

és

$$\widehat{u}(0, y) = c_1(0) \cdot y + c_2(0) \qquad (y \geq 0).$$ [37]

Ha csak a korlátos megoldásokra szorítkozunk, akkor $c_1 = 0$, azaz

$$\widehat{u}(x, y) = c_2(x) \cdot e^{-|x| \cdot y} \qquad (x \in \mathbf{R},\, y \geq 0),$$

ahol a kezdeti feltétel miatt

$$\widehat{u}(x, 0) = c_2(x) = \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Összefoglalva mindezt azt mondhatjuk, hogy (ld. 1.2.2.1.)

$$\widehat{u}(x, y) = \widehat{f}(x) \cdot e^{-|x| \cdot y} = \widehat{f}(x) \cdot f_y(x) =$$

$$\frac{y}{\pi} \cdot \widehat{f}(x) \cdot \widehat{g}_y(x) = \frac{y}{\pi} \cdot (f * g_y)^{\wedge}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, y > 0).$$

Más szóval

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \cdot f * g_y(x) = \frac{y}{\pi} \cdot \int \frac{f(x - t)}{t^2 + y^2}\, dt = f * P_y(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, y > 0)$$

(*Poisson-féle integrálformula*), ahol a

$$P_y(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{t^2 + y^2} \qquad (t \in \mathbf{R},\, y > 0)$$

[37] Ti. a szóban forgó másodrendű egyenlet karakterisztikus polinomja: $\lambda^2 - x^2 \quad (\lambda \in \mathbf{R})$, aminek a gyökei: $\lambda = \pm x \quad (x \neq 0)$, ill. $\lambda = 0 \quad (x = 0)$. Az első esetben a bázismegoldások: $y \mapsto e^{|x| \cdot y}$ és $y \mapsto e^{-|x| \cdot y}$, a második esetben: $y \mapsto 1$ és $y \mapsto y$.

előírással definiált P_y függvény a *Poisson-magfüggvény.* Világos, hogy (ld. inverzió (2.2.))

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi} \cdot g_y(x) = \frac{y}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int \widehat{g}_y(t) e^{-\imath xt}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int e^{-y|x|} \cdot e^{-\imath xt}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0),$$

továbbá $P_y \in L^1$ és

$$\|P_y\|_1 = \frac{y}{\pi} \cdot \int \frac{dt}{t^2+y^2} = \frac{1}{\pi y} \cdot \int \frac{dt}{1+(t/y)^2} =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \lim_{t\to+\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}(-t)) = 1 \qquad (y > 0).$$

Tehát

$$|u(x,y)| \le \|f\|_\infty \cdot \|P_y\|_1 = \|f\|_\infty \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az előbbi u függvény valóban megoldása a Dirichlet-problémának. Továbbá

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

hiszen könnyen igazolható, hogy (ld. 2.5. ii) megjegyzés) a $P_y \quad (y > 0)$ függvénysereg egyúttal egységapproximáció. Mivel az utóbbival kapcsolatos követelmények egy kivételével triviálisan teljesülnek, ezért csak a következőket kell megjegyezni: bármely $y > 0$ esetén

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-r,r]} |P_y(t)|\, dt = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{\mathbf{R}\setminus[-r,r]} \frac{dt}{t^2+y^2} = \frac{1}{\pi y} \cdot \int_{\mathbf{R}\setminus[-r,r]} \frac{dt}{1+(t/y)^2} =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot (\operatorname{arctg}(-r/y) + \pi/2 + \pi/2 - \operatorname{arctg}(r/y)) \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

3$^{\text{o}}$ Vizsgáljuk most (az előzőek szellemében) a

$$\partial_{22} u(x,y) = c^2 \cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x > 0,\ y \in \mathbf{R})$$

hullámegyenletet, ahol a $c > 0$ adott paraméter, valamint

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{és} \quad \partial_2 u(x,0) = g(x) \qquad (x > 0)$$

alkalmas f, g függvényekkel. Ekkor

$$\partial_{22}\widehat{u}(x,y) = -c^2\cdot x^2\cdot \widehat{u}(x,y) \qquad (x>0,\ y\in \mathbf{R}),$$

továbbá

$$\widehat{u}(x,0) = \widehat{f}(x) \quad \text{és} \quad \partial_2\widehat{u}(x,0) = \widehat{g}(x) \qquad (x>0).$$

Tehát minden $x > 0$ esetén egy közönséges másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémát kaptunk az

$$y \mapsto \widehat{u}(x,y)$$

függvényre. Ez utóbbi feladat megoldási módszere szerint a (valós) megoldások:

$$\widehat{u}(x,y) = \alpha\cdot\cos(cxy) + \beta\cdot\sin(cxy) \qquad (x>0,\ y\in\mathbf{R}),^{38}$$

ahol az $\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$ együtthatók a következők:

$$\widehat{u}(x,0) = \alpha = \widehat{f}(x) \quad \text{és} \quad \partial_2\widehat{u}(x,0) = \beta\cdot cx = \widehat{g}(x) \qquad (x>0).$$

Így

$$\widehat{u}(x,y) = \widehat{f}(x)\cdot\cos(cxy) + \frac{\widehat{g}(x)}{cx}\cdot\sin(cxy) \qquad (x>0,\ y\in\mathbf{R}).$$

Vegyük észre (ld. 2.1.), hogy a

$$\chi_y := \begin{cases} \chi_{[-cy,cy]} & (y>0) \\ \\ -\chi_{[cy,-cy]} & (y<0) \end{cases}$$

függvénnyel

$$\widehat{\chi}_y(x) = \frac{2\sin(cxy)}{x} \qquad (0\neq y\in\mathbf{R},\ x>0),$$

más szóval

$$\widehat{u}(x,y) = \widehat{f}(x)\cdot\frac{e^{\imath cxy}+e^{-\imath cxy}}{2} \pm \frac{\widehat{g}(x)}{2c}\cdot\widehat{\chi}_y(x) \qquad (0\neq y\in\mathbf{R},\ x>0).$$

Ugyanakkor (ld. 1.3. i) megjegyés) az $\mathcal{M}_{\pm cy}$, $\mathcal{T}_{\pm cy}$ modulációs, ill. transzlációs operátorokkal az előbbi $x, y\in$ helyeken

$$\widehat{f}(x)\cdot e^{\imath cxy} = \mathcal{M}_{cy}\widehat{f}(x) \quad \text{és} \quad \widehat{f}(x)\cdot e^{-\imath cxy} = \mathcal{M}_{-cy}\widehat{f}(x),$$

[38] Ui. a szóban forgó másodrendű differenciálegyenletnek a karakterisztikus polinomja a következő: $\lambda^2 + c^2\cdot x^2 \quad (\lambda\in\mathbf{C})$, ennek a gyökei: $\lambda = \pm\imath cx$. Ezért az illető egyenlet valós bázismegoldásai az $y\mapsto\cos(cxy)$, $y\mapsto\sin(cxy)$ függvények.

ezért
$$\mathcal{M}_{cy}\widehat{f}(x) = (\mathcal{T}_{-cy}f)^\wedge(x) \quad \text{és} \quad \mathcal{M}_{-cy}\widehat{f}(x) = (\mathcal{T}_{cy}f)^\wedge(x).$$
Végül is azt kapjuk, hogy (ld. 1.2.2.1.)
$$\widehat{u}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\big((\mathcal{T}_{-cy}f)^\wedge(x) + (\mathcal{T}_{cy}f)^\wedge(x)\big) \pm \frac{\widehat{g}(x)}{2c}\cdot\widehat{\chi}_y(x) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\big((\mathcal{T}_{-cy}f)^\wedge(x) + (\mathcal{T}_{cy}f)^\wedge(x)\big) \pm \frac{1}{2c}\cdot(g * \chi_y)^\wedge(x) \qquad (0 \neq y \in \mathbf{R},\ x > 0).$$
Innen máris adódik az
$$u(x,y) = \frac{f(x+cy)+f(x-cy)}{2} + \frac{1}{2c}\cdot\int_{-cy}^{cy} g(x-t)\,dt =$$
$$\frac{f(x+cy)+f(x-cy)}{2} + \frac{1}{2c}\cdot\int_{x-cy}^{x+cy} g(t)\,dt \qquad (x>0,\ y\in\mathbf{R})$$
ún. *d'Alembert*[39]*-formula.*

4° Az eddigiekben tárgyalt „egydimenziós” parciális differenciálegyenletekhez hasonlóan kezelhetők bizonyos esetekben azok többdimenziós változatai is. Legyen pl. $n \geq 2$ esetén a kétszer differenciálható n-változós u függvényeken értelmezett L differenciáloperátor a következő: adott
$$a_j, b_j, c_{jk} \in \mathbf{R} \qquad (j,k = 1,...,n)$$
paraméterekkel
$$L(u) := au + \sum_{j=1}^{n} b_j\cdot \partial_j u + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\cdot \partial_{jk} u.$$
Ha
$$P(x) := a + \imath\cdot\sum_{j=1}^{n} b_j x_j - \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k \qquad (x = (x_1,...,x_n) \in \mathbf{C}^n),$$
akkor (az eddigiekben is már többször alkalmazott „szabályok” szerint)
$$\widehat{L(u)}(x) = a\cdot\widehat{u}(x) + \imath\cdot\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\cdot\widehat{u}(x) - \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k\cdot\widehat{u}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

[39] Jean Le Rond d'Alembert (Párizs, 1717. XI. 16. – Párizs, 1783. X. 29.)

tehát

$$\widehat{L(u)}(x) = P(x) \cdot \widehat{u}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha itt egy

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

integrálható függvénnyel az

$$L(u) = f$$

(inhomogén) egyenletet akarjuk megoldani, akkor az

$$\widehat{f} = P \cdot \widehat{u}$$

egyenlethez jutunk.

Különösen „egyszerű” az az eset, amikor

$$P(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ekkor ui.

$$\widehat{u}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{P(x)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Innen inverzióval kap(hat)juk az

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \frac{\widehat{f}(t)}{P(t)} \cdot e^{-\imath \langle x,t \rangle} \, dt \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

megoldást, vagy a $\widehat{K} = 1/P$ egyenlőségnek eleget tevő K magfüggvénnyel az

$$\widehat{u} = \widehat{f} \cdot \widehat{K} = (f * K)^{\wedge}$$

konvolúciós egyenlőségből az

$$u = f * K$$

függvényt.[40]

Speciálisan, a hővezetési egyenlet „magasabb dimenziós” változata a következő. Particionáljuk ehhez az $\mathbf{R}^n$-beli $(n \geq 2)$ vektorokat az alábbi módon: ha

$$z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{R}^n,$$

[40] Ha a P-nek vannak az $\mathbf{R}^n$-ben gyökei, akkor technikailag bonyolultabbá válik a helyzet. Hangsúlyozni kell továbbá, hogy a most vázolt úton csak „egy” megoldást kapunk, nem pedig az összeset.

akkor az

$$\mathbf{x} := (z_1, ..., z_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ y := z_n \in \mathbf{R}$$

jelölésekkel legyen

$$z = (\mathbf{x}, y).$$

Jelentsék továbbá egy

$$u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

függvény esetén a $\partial_{\mathbf{1}\mathbf{1}} u$ és a $\partial_{\mathbf{2}} u$ („első”, ill. „második” változó szerinti parciális deriváltak) a következőt:

$$\partial_{\mathbf{1}\mathbf{1}} u := \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{jj} u \quad \text{és} \quad \partial_{\mathbf{2}} u := \partial_n u.$$

Ekkor a hővezetési egyenlet:

$$\partial_{\mathbf{2}} u(\mathbf{x}, y) = q \cdot \partial_{\mathbf{1}\mathbf{1}} u(\mathbf{x}, y) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y \in \mathbf{R}),$$

ahol egy

$$f : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1}).$$

Ha

$$H_y(\mathbf{t}) := \frac{1}{\sqrt{4\pi q y}} \cdot e^{-\|\mathbf{t}\|^2/(4qy)} \qquad (\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0),$$

akkor

$$u(\mathbf{x}, y) = f * H_y(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0).$$

Az n-dimenziós Dirichlet-probléma a

$$\partial_{\mathbf{2}\mathbf{2}} u := \partial_{nn} u$$

szimbólummal a következő:

$$\Delta u(\mathbf{x}, y) := \partial_{\mathbf{1}\mathbf{1}} u(\mathbf{x}, y) + \partial_{\mathbf{2}\mathbf{2}} u(\mathbf{x}, y) = 0 \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0)^{41}$$

[41] A Δ az ún. *Laplace-operátor.* Tehát $\Delta u(z) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} u(z) \quad (z \in \mathbf{R}^n)$.

és

$$u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1}).$$

Ekkor

$$u(\mathbf{x},y) = f * P_y(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0),$$

ahol a P_y most az *n-dimenziós Poisson-magfüggvény*:

$$P_y(\mathbf{x}) := \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \cdot \frac{y}{(\|\mathbf{x}\|^2 + y^2)^{n/2}} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0).$$

Gondoljuk meg, hogy

$$P_y(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \cdot \int e^{-y\|\mathbf{t}\|} \cdot e^{\imath\langle \mathbf{x},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y > 0).$$

Valóban (ld. **2^o^** az ottani jelölésekkel), a Fubini-tételt alkalmazva először is vegyük észre, hogy tetszőleges $z \in \mathbf{R}$ helyen

$$e^{-z} = f_1(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \int \frac{e^{-\imath vz}}{v^2+1}\, dv = \frac{1}{\pi} \cdot \int e^{-\imath vz} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-v^2 s} \cdot e^{-s} ds\, dv =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s} \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot \int e^{-v^2 s} \cdot e^{-\imath vz} dv \right) ds.$$

Itt a

$$h(v) := e^{-v^2/2} \qquad (v \in \mathbf{R})$$

függvénnyel (ld. 1.3. ii) megjegyzés)

$$\widehat{h} = \sqrt{2\pi} \cdot h,$$

ezért

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int e^{-v^2 s} \cdot e^{-\imath vz}\, dv = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2s}} \cdot \int e^{-v^2/2} \cdot e^{-\imath vz/\sqrt{2s}}\, dv =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2s}} \cdot \widehat{h}(-z/\sqrt{2s}) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{-z^2/(4s)} \qquad (s > 0).$$

Következésképpen

$$e^{-z} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{-z^2/(4s)}\, ds \qquad (z \in \mathbf{R})$$

és így[42]

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\cdot\int e^{-y\|\mathbf{t}\|}\cdot e^{\imath\langle\mathbf{x},\mathbf{t}\rangle}d\mathbf{t}=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\cdot\int\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{-y^2\|\mathbf{t}\|^2/(4s)}ds\right)\cdot e^{\imath\langle\mathbf{x},\mathbf{t}\rangle}d\mathbf{t}=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\cdot\left(\int e^{-y^2\|\mathbf{t}\|^2/(4s)}\cdot e^{\imath\langle\mathbf{x},\mathbf{t}\rangle}d\mathbf{t}\right)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\cdot(2\pi)^{(n-1)/2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2s}}{y}\right)^{n-1}\cdot e^{-s\|\mathbf{x}\|^2/y^2}ds=$$

$$\frac{2^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{(n-1)/2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot y^{n-1}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\cdot s^{(n-1)/2}\cdot e^{-s\|\mathbf{x}\|^2/y^2}ds=$$

$$\frac{1}{\pi^{n/2}\cdot y^{n-1}}\cdot\int_0^{+\infty}s^{n/2-1}\cdot e^{-s(y^2+\|\mathbf{x}\|^2)/y^2}\,ds=$$

$$\frac{1}{\pi^{n/2}\cdot y^{n-1}}\cdot\left(\frac{y^2}{y^2+\|\mathbf{x}\|^2}\right)^{n/2}\cdot\Gamma(n/2)=$$

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\cdot\frac{y}{(y^2+\|\mathbf{x}\|^2)^{n/2}}\qquad(\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n-1},\ y>0).$$

Az n-dimenziós $(n\geq 3)$

$$\partial_{\mathbf{22}}u(\mathbf{x},y)=c^2\cdot\partial_{\mathbf{11}}(\mathbf{x},y)\qquad(\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n-1},\ y\in\mathbf{R})$$

hullámegyenletet illetően csupán az alábbiakat jegyezzük meg. Nevezetesen, az $n=2$ esethez hasonlóan „minden további nélkül” jutunk el az

$$\widehat{u}(\mathbf{x},y)=\widehat{f}(\mathbf{x})\cdot\cos(cy\cdot\|\mathbf{x}\|)+\frac{\widehat{g}(\mathbf{x})}{c\|\mathbf{x}\|}\cdot\sin(cy\cdot\|\mathbf{x}\|)\qquad(\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n-1},\ y\in\mathbf{R})$$

egyenlőséghez.[43] Innen viszont a további lépésekhez (az inverzió alkalmazásához) „általánosított függvényekre” (disztribúciókra) van szükség, az n dimenzió növekedtével egyre bonyolultabb technikai nehézségekkel.[44]

[42] A $z:=y\|\mathbf{t}\|$ helyettesítéssel.

[43] Ugyanis $\widehat{\partial_{\mathbf{11}}u}(\mathbf{x},y)=\sum_{j=1}^{n-1}\widehat{\partial_{jj}u}(\mathbf{x},y)=-\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2\cdot\widehat{u}(\mathbf{x},y)=-\|\mathbf{x}\|^2\cdot\widehat{u}(\mathbf{x},y)$, így $\partial_{\mathbf{22}}\widehat{u}(\mathbf{x},y)=-c^2\cdot\|\mathbf{x}\|^2\cdot\widehat{u}(\mathbf{x},y)$ $(\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n-1},\ y\in\mathbf{R})$.

[44] A fizika szempontjából az $n=3,4$ esetek különösen fontosak.

5.7. Megjegyzések

i) Legyen $0 \le \varepsilon \le 1$, a $T \subset \mathbf{R}^n$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ pedig (Lebesgue-)mérhető halmaz, és nevezzük az $f \in L^2$ függvényt *a T halmazon ε-koncentráltnak,* ha

$$\sqrt{\int_{\mathbf{R}^n \setminus T} |f(x)|^2 \, dx} \le \varepsilon \cdot \|f\|_2.$$

Világos, hogy $\varepsilon = 0$ esetén

$$f(x) = 0 \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n \setminus T).$$

A most bevezetett fogalommal igaz az alábbi, határozatlansági reláció-szerű állítás (*Donoho*[45]– *Stark*[46] (1989)): *tegyük fel, hogy a $T, S \subset \mathbf{R}^n$ halmazok mérhetők, $0 \le \varepsilon, \delta \le 1$ és a $0 \ne f \in L^2$ olyan, a T halmazon ε-koncentrált függvény, amelyre az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált az S halmazon δ-koncentrált. Ekkor*

$$\sqrt{|T| \cdot |S|} \ge 1 - \varepsilon - \delta$$

(ahol a $|T|$ és az $|S|$ a szóban forgó halmazok Lebesgue-mértéke).

Ugyanis nyilván feltehető, hogy $|T|, |S| < +\infty$. Jelöljük ekkor P-vel és $\widehat{P}$-vel az alábbi operátorokat:

$$Ph := h \cdot \chi_T \qquad (h \in L^2)$$

és

$$\widehat{P}h(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{\widehat{h} \cdot \chi_S}(-x) \qquad (h \in L^2, \, x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha[47]

$$L_T := \{h \in L^2 : \{h \ne 0\} \subset T\},$$

akkor a

$$P : L^2 \to L_T$$

operátor nyilván lineáris, $P^2 = P$ és

$$\langle h - Ph, g \rangle = 0 \qquad (h \in L^2, \, g \in L_T),$$

[45] David Leigh Donoho (Los Angeles, 1957. III. 5. –)
[46] Philip B. Stark
[47] $\{h \ne 0\} := \{x \in \mathbf{R}^n : h(x) \ne 0\}$.

azaz a P ortogonális projekció az L_T-re. Hasonlóan,[48] ha

$$\widehat{L}_S := \{h \in L^2 : \{\widehat{h} \neq 0\} \subset S\},$$

akkor a Plancherel-tételt (ld. 1.2.3.) is felhasználva a

$$\widehat{P} : L^2 \to \widehat{L}_S$$

is ortogonális projekció az $\widehat{L}_S$-re: egyrészt

$$\widehat{\widehat{P}h}(z) = \int \widehat{P}h(t)e^{\imath\langle t,z\rangle}dt = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{\widehat{h}\cdot \chi_S}(-t)e^{\imath\langle t,z\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{\widehat{h}\cdot \chi_S}(t)e^{-\imath\langle t,z\rangle}dt = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{\widehat{h}\cdot \chi_S}}(-z) =$$

$$\widehat{h}(z)\cdot \chi_S(z) \qquad (h \in L^2,\ z \in \mathbf{R}^n),$$

tehát $\widehat{P}h \in \widehat{L}_S \quad (h \in L^2)$. Másrészt

$$(\widehat{P})^2 h(z) = \widehat{P}(\widehat{P}h)(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{\widehat{P}h}(t)\cdot \chi_S(t)e^{-\imath\langle t,z\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \int \widehat{h}(t)\cdot \chi_S(t)e^{-\imath\langle t,z\rangle}dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\widehat{h}\cdot \chi_S}(-z) = \widehat{P}h(z) \qquad (h \in L^2,\ z \in \mathbf{R}^n)$$

és

$$\langle h - \widehat{P}h, g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \langle \widehat{h} - \widehat{\widehat{P}h}, \widehat{g}\rangle =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \langle \widehat{h} - \widehat{h}\cdot \chi_S, \widehat{g}\rangle = 0 \qquad (h \in L^2,\ g \in \widehat{L}_S).$$

Ezekkel a jelölésekkel az f-re tett feltételek nyilván így fogalmazhatók meg:

$$\|f - Pf\|_2 \le \varepsilon\cdot \|f\|_2$$

és

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}\cdot \chi_S\|_2 \le \delta\cdot \|\widehat{f}\|_2.$$

[48] Emlékeztetünk arra (ld. 1.2.3.), hogy a $L^2 \ni h \mapsto \widehat{h} \in L^2$ Fourier-transzformáció inverze a $L^2 \ni h \mapsto (2\pi)^{-n}\cdot H \in L^2$ leképezés, ahol $H(x) := \widehat{h}(-x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$.

Az utóbbi becslésből (részben a Plancherel-tétel szerint) azt kapjuk, hogy

$$\|f - \widehat{P}f\|_2 = \frac{\|\widehat{f} - \widehat{\widehat{P}f}\|_2}{(2\pi)^n} = \frac{\|\widehat{f} - \widehat{f}\cdot \chi_S\|_2}{(2\pi)^n} \leq \frac{\delta\cdot \|\widehat{f}\|_2}{(2\pi)^n} = \delta\cdot \|f\|_2.$$

Mivel a $\widehat{P}$ projekció $\|\widehat{P}\|$ (operátor-)normája legfeljebb egy: $\|\widehat{P}\| \leq 1$, ezért

$$\|f - \widehat{P}Pf\|_2 = \|f - \widehat{P}f + \widehat{P}f - \widehat{P}Pf\|_2 \leq$$

$$\|f - \widehat{P}f\|_2 + \|\widehat{P}(f - Pf)\|_2 \leq \|f - \widehat{P}f\|_2 + \|f - Pf\|_2 \leq (\varepsilon + \delta)\cdot \|f\|_2.$$

Innen (a háromszög-egyenlőtlenség alapján) egyszerűen következik, hogy

$$\|\widehat{P}Pf\|_2 \geq \|f\|_2 - \|f - \widehat{P}Pf\|_2 \geq (1 - \varepsilon - \delta)\cdot \|f\|_2.$$

Ugyanakkor nem nehéz ellenőrizni, hogy a $\widehat{P}P$ operátort meghatározó

$$\mathcal{K} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

magfüggvényre[49]

$$\int |\mathcal{K}(x,t)|^2 \, dx \, dt = |T|\cdot |S|,$$

ami a feltételek miatt véges. Ezért $\sqrt{|T|\cdot |S|}$ egyúttal a $\widehat{P}P$ operátor $\|\widehat{P}P\|_{hs}$ ún. *Hilbert–Schmidt*[50]*-normája* is. Tehát bármely, az L^2 térben ortonormált $(e_k, k \in \mathbf{N})$ bázis esetén

$$\|\widehat{P}P\|_{hs} = \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} \|\widehat{P}Pe_k\|_2^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|T|\cdot |S|}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\|\widehat{P}P\| \leq \|\widehat{P}P\|_{hs}.$$

Ugyanis minden

$$g = \sum_{k\in\mathbf{N}} \alpha_k e_k \in L^2$$

függvényre

$$\|\widehat{P}Pg\|_2 \leq \sum_{k\in\mathbf{N}} |\alpha_k|\cdot \|\widehat{P}Pe_k\|_2 \leq \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} \|\widehat{P}Pe_k\|_2^2 \right)^{1/2} =$$

---

[49] $\widehat{P}Pf(x) = \int f(t)\mathcal{K}(x,t)\, dt$, ahol $\mathcal{K}(x,t) := (2\pi)^{-n}\cdot \widehat{\chi}_S(t-x)\cdot \chi_T(t) \quad (f \in L^2,\ x, t \in \mathbf{R}^n)$.

[50] Erhard Schmidt (Dorpat, 1876. I. 13. – Berlin, 1959. XII. 16.)

$$= \|\widehat{P}P\|_{hs} \cdot \|g\|_2 .$$

Következésképpen

$$(1-\varepsilon-\delta)\cdot \|f\|_2 \le \|\widehat{P}Pf\|_2 \le \|\widehat{P}P\|\cdot \|f\|_2 \le$$

$$\|\widehat{P}P\|_{hs} \cdot \|f\|_2 = \sqrt{|T|\cdot |S|}\cdot \|f\|_2 .$$

Világos, hogy

$$\|f\|_2 > 0 \Longrightarrow \sqrt{|T|\cdot |S|} \ge 1-\varepsilon-\delta .$$

ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $f \in L^2$ függvénnyel a $T, S \subset \mathbf{R}^n \quad (1 \le n \in \mathbf{N})$ halmazok a következők:

$$T := \{f \ne 0\} := \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \ne 0\}$$

és

$$S := \{\widehat{f} \ne 0\} := \{x \in \mathbf{R}^n : \widehat{f}(x) \ne 0\}.$$

Ekkor vagy $f = 0$, vagy pedig $|T|\cdot |S| \ge 1$.

Ti. az f a T halmazon, az $\widehat{f}$ pedig az S halmazon nyilván 0-koncentrált (ld. i)), ezért $f \ne 0$ mellett alkalmazható az i)-beli határozatlansági reláció az $\varepsilon := \delta := 0$ választással. Ha tehát $|T|\cdot |S| < 1$, akkor $f = 0$.

iii) A fentiek mintegy ellenpontjaként mutassuk meg, hogy ha a ii)-beli f függvényről azt tesszük fel, hogy $f \in L^1$, akkor (a ii)-beli jelölésekkel) $|T|\cdot |S| < +\infty$ esetén $f = 0$ (*Benedicks*[51] (1985)).

Ti. (esetleg az f-et alkalmas $a > 0$ mellett az

$$\widetilde{f}(x) := f(ax) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvényre cserélve

$$\{\widetilde{f} \ne 0\} \subset \frac{1}{a}\cdot \{f \ne 0\}$$

miatt) feltehető, hogy $|T| < (2\pi)^n$. Ekkor

$$\int_{[0,2\pi]^n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \chi_T(x + 2k\pi)\, dx = \int \chi_T \, d\mu = |T| < (2\pi)^n$$

[51] Michael Benedicks (Stockholm, 1949. –)

és
$$\int_{[0,1]^n} \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \chi_S(y+k)\,dy = \int \chi_S\,d\mu = |S| < +\infty.$$
Ezért
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \chi_T(x+2k\pi) < +\infty \qquad (\text{m.m. } x\in[0,2\pi]^n)$$
és
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \chi_S(y+k) < +\infty \qquad (\text{m.m. } y\in[0,1]^n).$$
Következésképpen m.m. $y\in[0,1]^n$ esetén az $y+k\in S$ tartalmazás, így az $\widehat{f}(y+k)\neq 0$ egyenlőtlenség legfeljebb véges sok $k\in\mathbf{Z}^n$ vektor mellett lehet igaz. Továbbá, ha a mérhető $A\subset[0,2\pi]^n$ halmazra és minden $x\in A$ elemre legalább egy $j\in\mathbf{Z}^n$ vektorral $x+2j\pi\in T$, akkor
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \chi_T(x+2k\pi) \geq 1.$$
Ezért
$$|A| \leq \int_{[0,2\pi]^n} \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \chi_T(x+2k\pi)\,dx = |T| < (2\pi)^n.$$
Világos, hogy ez nem teljesülhet akkor, ha $|A|>|T|$. Van tehát olyan
$$A\subset[0,2\pi]^n,\ |A|>0$$
halmaz, hogy $x+2k\pi\notin T$, más szóval
$$f(x+2k\pi)=0 \qquad (x\in A,\ k\in\mathbf{Z}^n).$$
A Poisson-formulával (ld. 1.3. xv) megjegyzés) kapcsolatban mondottakkal analóg módon kapjuk, hogy m.m. $y\in[0,1]^n$ vektorra a $t\in[0,2\pi]^n$ helyeken
$$\varphi_y(t) := \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} f(t+2\pi j)e^{\imath\langle y,t+2\pi j\rangle} = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \widehat{f}(j+y)e^{-\imath\langle j,t\rangle}.$$
Mivel itt a jobb oldal m.m. $y\in[0,1]^n$ esetén egy véges sok tagú összeg, ezért minden ilyen y-ra a φ_y olyan trigonometrikus polinom, amelyre
$$\varphi_y(x)=0 \qquad (x\in A).$$

Ez $|A| > 0$ miatt csak úgy lehetséges, hogy $\varphi_y = 0$. Innen

$$\widehat{f}(j + y) = 0 \qquad (\text{m.m. } y \in [0,1]^n,\ j \in \mathbf{Z}^n).$$

Így $\widehat{f} = 0$, azaz $f = 0$.

iv) A iii) megjegyzés alapján a ii)-beli utolsó konklúziót az alábbiak szerint „erősíthetjük”: ha $1 \leq p \leq 2$ és $f \in L^p$, valamint (a ii)-ben szereplő halmazokkal) $|T| \cdot |S| < +\infty$, akkor $f = 0$.

Ez $|T| = 0$ esetén triviális. Ha $0 < |T| < +\infty$, akkor (az $1/p + 1/q = 1$ egyenlőségnek megfelelő $2 \leq q < +\infty$ kitevővel) a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\int |f(x)|\, dx = \int |f(x)| \cdot \chi_T(x)\, dx \leq \|f\|_p \cdot |T|^{1/q} < +\infty.$$

Ezért $f \in L^1$ (és az $\widehat{f}$ ugyanazt jelenti az L^p-értelemben, mint az L^1-értelemben).

v) Az előbbi megjegyzésben szereplő eredménynek egy korábbi, a funkcionálanalízis eszköztárával való kezelése a következő (*Amrein*[52]–*Berthier*[53] (1977)). Legyen a továbbiakban $A, B \subset \mathbf{R}^n$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$ egy-egy (Lebesgue-)mérhető halmaz és tekintsük az alábbi

$$P_A,\, \mathcal{P}_B : L^2 \to L^2$$

leképezéseket:

$$P_A f := f \cdot \chi_A \quad \text{és} \quad \widehat{\mathcal{P}_B f} := \widehat{f} \cdot \chi_B \qquad (f \in L^2).$$

Jegyezzük meg, hogy $f \in L^2$ esetén nyilván $\widehat{f} \cdot \chi_B \in L^2$, más szóval

$$\mathcal{P}_B f = \mathcal{F}(\widehat{f} \cdot \chi_B),$$

ahol az $\mathcal{F}$ az $L^2 \to L^2$ Fourier-transzformáció inverze (ld. 1.2.3.):

$$\mathcal{F}h(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{h}(-x) \qquad (h \in L^2,\ x \in \mathbf{R}^n).$$

---

[52]Werner Oskar Amrein

[53]Anne-Marie Boutet de Monvel-Berthier (1948–)

Könnyű meggondolni, hogy a P_A és a $\mathcal{P}_B$ képtere (X_A és $\mathcal{X}_B$) zárt altér, továbbá a

$$P_A : L^2 \to X_A$$

és a

$$\mathcal{P}_B : L^2 \to \mathcal{P}_B$$

egyaránt ortogonális projekció. Jelöljük $P_A \cap \mathcal{P}_B$-vel a

$$P_A \cap \mathcal{P}_B : L^2 \to X_A \cap \mathcal{X}_B$$

ortogonális projekciót. Ekkor igaz a következő (nem triviális) állítás:

$$|A|,\, |B| < +\infty \Longrightarrow P_A \cap \mathcal{P}_B = 0.$$

Ha most $1 \le p \le 2$ és az $f \in L^p$ függvényre a iv)-beli feltételek teljesülnek,[54] akkor már láttuk, hogy egyúttal $f \in L^1$, amiből $\widehat{f} \in L^\infty$ adódik. Ezért bármely $1 \le r < +\infty$ mellett

$$\int |\widehat{f}(x)|^r \, dx = \int |\widehat{f}(x)|^r \cdot \chi_S(x) \, dx \le |S| \cdot \|\widehat{f}\|_\infty^r < +\infty,$$

így $\widehat{f} \in L^r$ is igaz. Speciálisan $\widehat{f} \in L^2$. Következésképpen $f = \mathcal{F}\widehat{f}$, ami azt is jelenti, hogy $f \in L^2$. Tehát $f \in X_T$ és $\widehat{f} = \widehat{f} \cdot \chi_S$ miatt

$$f = \mathcal{F}\widehat{f} = \mathcal{F}(\widehat{f} \cdot \chi_S) = \mathcal{P}_S f,$$

emiatt pedig $f \in \mathcal{X}_S$. Mindez oda vezet, hogy $f \in X_T \cap \mathcal{X}_S$, ezért $P_T \cap \mathcal{P}_S = 0$ alapján $f = (P_T \cap \mathcal{P}_S) f = 0$.

vi) A most tárgyalt Amrein–Berthier-féle megközelítés (ld. v)) már korábban ismert volt (*Matolcsi*[55]–*Szűcs*[56] (1973)) azzal a kiegészítő feltétellel, hogy a szóban forgó

$$T = \{f \ne 0\},\ S = \{\widehat{f} \ne 0\}$$

halmazokra $|S| \cdot |T| < (2\pi)^n$. Ebben az esetben a $P_T \cap \mathcal{P}_S = 0$ következtetés lényegesen egyszerűbb.

[54] Feltehető, hogy $0 < |T|, |S| < +\infty$.
[55] Matolcsi Tamás (Budapest, 1941. II. 1. –)
[56] Szűcs József

Ugyanis $|T|, |S| > 0$ feltehető, ill. bármelyik $g \in L^2$ függvényre $|T| < +\infty$ miatt a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\|P_T g\|_1 = \int_T |g(z)|\, dz \leq \sqrt{\int |g(z)|^2\, dz}\cdot \sqrt{|T|} < +\infty,$$

tehát $P_T g \in L^1$. Ezt felhasználva azt mondhatjuk, hogy

$$\|\mathcal{P}_S P_T g\|_\infty = \|\mathcal{F}(\widehat{P_T g}\cdot \chi_S)\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \|\widehat{P_T g}\cdot \chi_S\|_1 \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \|\widehat{P_T g}\|_\infty\cdot \|\chi_S\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \|\widehat{P_T g}\|_\infty\cdot |S|,$$

ahol $\|\widehat{P_T g}\|_\infty \leq \|P_T g\|_1$. Következésképpen

$$\|\mathcal{P}_S P_T g\|_\infty \leq \frac{|S|}{(2\pi)^n}\cdot \|P_T g\|_1 = \frac{|S|}{(2\pi)^n}\cdot \int_T |g(t)|\, dt.$$

Innen világos, hogy

$$\|(\mathcal{P}_S P_T)^2 g\|_\infty \leq \frac{|S|}{(2\pi)^n}\cdot \int_T |(\mathcal{P}_S P_T g)(t)|\, dt \leq$$

$$\frac{|S|}{(2\pi)^n}\cdot |T|\cdot \|\mathcal{P}_S P_T g\|_\infty \leq \frac{|S|^2}{(2\pi)^{2n}}\cdot |T|\cdot \|P_T g\|_1.$$

Teljes indukcióval tehát egyszerűen adódnak az alábbiak:

$$\|(\mathcal{P}_S P_T)^N g\|_\infty \leq \frac{|S|^N\cdot |T|^{N-1}}{(2\pi)^{Nn}}\cdot \|P_T g\|_1 =$$

$$\left(\frac{|S|\cdot |T|}{(2\pi)^n}\right)^N \cdot \frac{\|P_T g\|_1}{|T|} \qquad (1 \leq N \in \mathbf{N}).$$

Ha az előbbi becslésben $g \in X_T \cap \mathcal{X}_S$, akkor $\mathcal{P}_S P_T g = \mathcal{P}_S g = g$, így

$$(\mathcal{P}_S P_T)^N g = g \qquad (1 \leq N \in \mathbf{N}).$$

Az $|S|\cdot |T| < (2\pi)^n$ feltételt figyelembe véve

$$\|g\|_\infty = \|(\mathcal{P}_S P_T)^N g\|_\infty \leq \left(\frac{|S|\cdot |T|}{(2\pi)^n}\right)^N \cdot \frac{\|P_T g\|_1}{|T|} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

más szóval $\|g\|_\infty = 0$. Következésképpen $g = 0$, ezért $\mathcal{P}_S \cap P_T = 0$.

vii) Legyen $n=1$ és az $f \in D$ (differenciálható) függvény olyan, hogy

$$f,\, f_*,\, f' \in L^2$$

teljesül.[57] Ekkor

$$\lim_{|x|\to+\infty} x\cdot (f(x))^2 = 0.$$

Valóban, mivel

$$(f_*\cdot f)'(x) = \left(\left(f^2\right)_*\right)'(x) =$$

$$f^2(x) + 2xf(x)f'(x) = f^2(x) + 2f_*(x)f'(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz

$$(f_*\cdot f)' = f^2 + 2f_*\cdot f',$$

ahol (a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján)

$$f^2,\, f_*\cdot f' \in L^1.$$

Így egyúttal $(f_*\cdot f)' \in L^1$ és

$$\int_0^{+\infty} (f^2(t) + 2f_*(t)f'(t))\, dt =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (f^2(t) + 2f_*(t)f'(t))\, dt = \lim_{x\to+\infty} f_*(x)f(x).$$

Innen világos, hogy létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} xf^2(x) = \lim_{x\to+\infty} f_*(x)f(x)$$

határérték. Ez utóbbi az $f_*f \in L^1$ integrálhatóságra tekintettel csak nulla lehet.

Ugyanígy kapjuk a

$$\lim_{x\to-\infty} xf^2(x) = 0$$

egyenlőséget is.

[57] Emlékeztetőül: $f_*(x) = xf(x) \quad (x \in \mathbf{R})$.

A most mondottak alapján az 5.4. pontban tárgyalt HPW-egyenlőtlenséghez (határozatlansági relációhoz) az alábbi úton is eljuthatunk. Ti. parciális integrálás után[58] a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\int |f(x)|^2\,dx = -\int x(f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)})\,dx \leq$$

$$2\cdot \int |x|\cdot |f'(x)|\cdot |f(x)|\,dx \leq$$

$$2\cdot \sqrt{\int x^2\cdot |f(x)|^2\,dx}\cdot \sqrt{\int |f'(x)|^2\,dx}.$$

A Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) és a derivált Fourier-transzformáltjára vonatkozó egyenlőség (ld. 4.2.2.) felhasználásával

$$2\cdot \sqrt{\int |f'(x)|^2\,dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \sqrt{\int x^2\cdot |\widehat{f'}(x)|^2\,dx},$$

amiből a HPW-egyenlőtlenség már nyilvánvaló.

viii) Ha $n = 1$ és a továbbiakban az $f, g \in D^2$ függvényekre

$$f,\ f_*,\ f',\ f'',\ g,\ g_*,\ g',\ g'' \in L^2,$$

akkor tekintsük az

$$U_t f := f' + t\cdot f_* \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$V_t f := -f' + t\cdot f_* \qquad (t \in \mathbf{R})$$

előírásokkal értelmezett $(U_t, , t \in \mathbf{R})$ és $(V_t, t \in \mathbf{R})$ operátorsereget. Lássuk be először is azt, hogy

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)g(x) = 0 :$$

a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$(fg)' = fg' + f'g \in L^1$$

[58]Vegyük figyelembe, hogy $((|f|^2)_*)' = |f|^2 + (f'\overline{f} + f\overline{f'})_* + |f|^2 \in L^1$.

miatt

$$\int_0^{+\infty} (fg)'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (fg)'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} (f(x)g(x) - f(0)g(0)).$$

Ezért létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$$

határérték, ami $fg \in L^1$ alapján csak nulla lehet. A

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)g(x) = 0,$$

valamint a

$$\lim_{|x|\to+\infty} f'(x)g(x) = 0$$

egyenlőséget ugyanígy kapjuk.

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\langle U_t f, g\rangle = \int (f'(x) + txf(x))\overline{g(x)}\,dx =$$

$$-\int f(x)\overline{g'(x)}\,dx + t\cdot \int xf(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és hasonlóan

$$\langle f, V_t g\rangle = -\int f(x)\overline{g'(x)}\,dx + t\cdot \int xf(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Más szóval

$$\langle U_t f, g\rangle = \langle f, V_t g\rangle.$$

Speciálisan, az $f = g$ esetben

$$\langle V_t(U_t f), f\rangle = \overline{\langle f, V_t(U_t f)\rangle} = \langle U_t f, U_t f\rangle = \|U_t f\|_2^2 \geq 0.$$

Itt némi számolás után

$$V_t(U_t f) = V_t(f' + tf_*) = -f'' - t\cdot f + t^2\cdot (f_*)_* \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és így

$$0 \leq \langle V_t(U_t f), f\rangle = -\int f''(x)\overline{f(x)}\,dx - t\cdot \|f\|_2^2 + t^2\cdot \int x^2\cdot |f(x)|^2\,dx =$$

$$= \|f'\|_2^2 - t\cdot \|f\|_2^2 + t^2\cdot \|f_*\|_2^2 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ez utóbbi kifejezés a t-nek (valós, legfeljebb) másodfokú polinomja, ami nemnegatív, következésképpen (a „diszkriminháns-szabály" szerint)

$$\|f\|_2^4 - 4\cdot \|f'\|_2^2\cdot \|f_*\|_2^2 \leq 0.$$

Átrendezés után (a Plancherel-tételt (ld. 1.2.3.) és a derivált Fourier-transzformáltjára vonatkozó formulát (ld. 1.2.4.) felhasználva)

$$\frac{1}{4}\cdot \|f\|_2^4 \leq \|f'\|_2^2\cdot \|f_*\|_2^2 =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \left(\int x^2\cdot |f(x)|^2\, dx\right)\cdot \left(\int x^2\cdot |\widehat{f}(x)|^2\, dx\right),$$

ami nem más, mint a HPW-egyenlőtlenség (ld. 5.4.).

ix) Legyen $n = 1$ és (ld. 5.4.) az

$$f \in \mathcal{D} = \{g \in L^2 \cap D : g_*,\, g' \in L^2\}^{59}$$

függvény olyan, hogy $\|f\|_2 = 1$. Az ismert Planck[60]-féle állandót a $\hbar$ szimbólummal jelölve[61] legyen továbbá

$$f^o(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot \widehat{f}(x/\hbar) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor a Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.) alapján

$$\|f^o\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot \sqrt{\int \left|\widehat{f}(x/\hbar)\right|^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 = 1.$$

Ha (ld. 5.4.)

$$\Delta_f = \min\left\{\sqrt{\int (x-a)^2\cdot |f(x)|^2\, dx} : a \in \mathbf{R}\right\}$$

---

[59] Emlékeztetőül: $g_*(x) := x\cdot g(x) \quad (x \in \mathbf{R})$.

[60] Max Karl Ernst Ludwig Planck (Kiel, 1858. IV. 23. – Göttingen, 1947. X. 4.)

[61] A $\mathbf{h} \approx 6.62607015\cdot 10^{-34} Js$ Planck-állandó szemléletesen az 1 Hz-es foton energiáját adja meg. Ennek a Dirac-féle redukált változata: $\hbar = \mathbf{h}/(2\pi) \approx 1,054571800\cdot 10^{-34} Js$.

és

$$\delta_f := \min \left\{ \sqrt{\int (x-b)^2 \cdot |\widehat{f}(x)|^2 \, dx} : b \in \mathbf{R} \right\},$$

akkor

$$\Delta_f \cdot \delta_f \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$\Delta_{f^o} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}} \cdot \delta_f,$$

így tehát fennáll a

$$\Delta_f \cdot \Delta_{f^o} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\hbar}{2}$$

egyenlőtlenség.[62]

x) Tegyük fel, hogy $n = 1$ és az $f \in L^2 \cap C$ függvényre

$$\widehat{f}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [a,b])$$

valamilyen kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallummal. Legyen ekkor

$$g(t) := e^{\imath(a+b)t/2} \cdot f(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

amikor (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x + (a+b)/2) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\widehat{g}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x| > (b-a)/2).$$

A Nyquist–Shannon-tétel (ld. 5.5.) szerint ezért (az ottani jelöléseket használva az $\omega := (b-a)/2$ választással)

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k\pi/\omega) \cdot \frac{\sin(\omega x - k\pi)}{\omega x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

[62] Fizikai szóhasználattal: egy részecskét illetően a hely és az impulzus mérésében fellépő „bizonytalanságokra” vonatkozó alsó becslésről ($\hbar/2$) van szó. Ez elméleti határt szab a hely és az impulzus egyszerre, teljes pontossággal való megismerhetőségére: minél pontosabb (közelítő) értéke van az egyiknek, annál pontatlanabb a másiknak. Az eredeti heurisztikus érvelést, hogy ti. léteznie kell egy ilyen határnak, Heisenberg adta meg 1927-ben (*Heisenberg-féle határozatlansági reláció*).

azaz tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen a

$$\varphi_k^{(a,b)}(t) := \frac{\sin((b-a)t/2 - k\pi)}{(b-a)t/2 - k\pi} \qquad (k \in \mathbf{Z},\, t \in \mathbf{R})$$

függvényekkel

$$f(x) =$$

$$e^{-\imath(a+b)x/2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\imath(a+b)k\pi/(b-a)} \cdot f(2k\pi/(b-a)) \cdot \varphi_k^{(a,b)}(x).$$

xi) Legyen $n = 1$ és $f \in L^2$, valamint (ld. 5.5.)

$$L^2_\pi := \{g \in L^2 : \widehat{g}(x) = 0 \ \ (|x| > \pi)\}.$$

Ekkor tetszőleges $g \in L^2_\pi$ esetén a Plancherel-tételt (ld. 1.2.3.) alkalmazva

$$\|f - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_2^2 =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{\mathbf{R} \setminus [-\pi,\pi]} |\widehat{f}(x)|^2 \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(x) - \widehat{g}(x)|^2 \, dx \right) \geq$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbf{R} \setminus [-\pi,\pi]} |\widehat{f}(x)|^2 \, dx.$$

Ugyanakkor tekintsük a

$$g_f(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(t) e^{-\imath x t} \, dt \qquad (x \in \mathbf{R})^{63}$$

függvényt, amikor a $\chi := \chi_{[-\pi,\pi]}$ jelöléssel

$$\widetilde{g}_f(x) := g_f(-x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \widehat{\widehat{f} \cdot \chi}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $\widehat{f} \cdot \chi \in L^2$, ezért $g_f \in L^2$. Ha a

$$L^2 \ni h \mapsto \widehat{h} \in L^2$$

[63] Világos, hogy az $[-\pi, \pi] \ni x \mapsto \varphi(x) := \widehat{f}(x)$ leképezés integrálható, hiszen $\widehat{f} \in L^2$, ezért egyúttal $\varphi \in L^2[-\pi,\pi] \subset L^1[-\pi,\pi]$. Más szóval $\widehat{f} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]} \in L^1$.

hozzárendelés (az L^2-beli Fourier-transzformáció) inverzét alkalmazzuk, akkor (ld. 1.2.3.)

$$(\widehat{f}\cdot \chi)(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot H_{\widehat{\widehat{f}\cdot\chi}}(x) = H_{\widetilde{g}_f}(x) = \widehat{\widetilde{g}}_f(-x) = \widehat{g}_f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$H_h(x) := \widehat{h}(-x) \qquad (h \in L^2,\ x \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen $g_f \in L^2_\pi$ és

$$\|f - g_f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot \left(\int_{\mathbf{R}\setminus[-\pi,\pi]} |\widehat{f}(x)|^2\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(x) - \widehat{g}_f(x)|^2\, dx \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbf{R}\setminus[-\pi,\pi]} |\widehat{f}(x)|^2\, dx.$$

Ez azt jelenti (a funkcionálanalízis terminológiájával élve), hogy létezik a

$$\rho(f, L^2_\pi) := \min\{\|f - g\|_2 : g \in L^2_\pi\} = \|f - g_f\|_2$$

minimum, az f és az L^2_π *távolsága.*

Az utóbbi egyenlőséghez a most említett funkcionálanalízis eszköztára révén is eljuthatunk. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra (ld. 5.5.), hogy a

$$\varphi_k(x) = \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{x - k} \qquad (k \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{R})$$

függvényekkel a $(\varphi_k/\pi, k \in \mathbf{Z})$ rendszer ortonormált bázis az L^2_π-ben (a $\|.\|_2$ norma értelmében), ahol a

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} e^{\imath kx} & (|x| \le \pi) \\ \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{R})$$

függvényrendszerrel

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2}\cdot \widehat{\Phi}_k(-x) \qquad (k \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{R}).$$

Ezért az ismert Bessel-azonosság alapján (ld. 3.2.4.)

$$\rho^2(f, L^2_\pi) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2,$$

ahol az

$$\widetilde{f}(x) := f(-x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

jelöléssel a szorzási szabályt alkalmazva (ld. 2.5. xv) megjegyzés) tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ mellett

$$2\pi \cdot c_k := 2 \cdot \langle f, \varphi_k \rangle = \int f(x)\overline{\widehat{\Phi}_k(-x)}\, dx = \langle \widetilde{f}, \widehat{\Phi}_k \rangle = \langle \widehat{\widehat{\widetilde{f}}}, \Phi_k \rangle =$$

$$\int \widehat{\widehat{\widetilde{f}}}(x)\overline{\Phi_k(x)}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(-x) e^{-\imath kx}\, dx.$$

Ez utóbbi egyenlőség alapján a c_k $(k \in \mathbf{Z})$ nem más, mint az $L^2[-\pi, \pi]$-beli

$$F(x) := \widehat{f}(-x) \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

függvény k-adik Fourier-együtthatója. Így a Parseval-egyenlőség (ld. 1.3. xxii) megjegyzés) szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(x)|^2\, dx$$

és a Plancherel-tételt (ld. 1.2.3.) is felhasználva

$$\rho^2(f, L^2_\pi) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|\widehat{f}\|_2^2 - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(x)|^2\, dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbf{R} \setminus [-\pi, \pi]} |\widehat{f}(x)|^2\, dx.$$

xii) A Nyquist–Shannon-tételhez (ld. 5.5.) mintegy „technikai” oldalról kapcsolódóan emlékeztetünk a iii) megjegyzésben idézett Benedicks-féle eredményre:

$$|\{f \neq 0\}| \cdot |\{\widehat{f} \neq 0\}| = +\infty \qquad (0 \neq f \in L^1).$$

Ha tehát $0 \neq f \in L^1 \cap L^2$ és az $\widehat{f}$ kompakt tartójú (és így $|\{\widehat{f} \neq 0\}| < +\infty$), akkor – bár az f-et egy alkalmasan megadott diszkrét pontrendszeren felvett értékei teljesen meghatározzák –, de azért ez az utóbbi pontrendszer az előbbiek szerint szükségszerű $|\{f \neq 0\}| = +\infty$ nem korlátosság miatt általában végtelen sok pontot jelent, ahol tehát „az f jelet mérni kell”. Ennek a problémának az áthidalására a jel- és képfeldolgozás területén számos eljárás ismert.

xiii) Részben az előző megjegyzéshez is kapcsolódva adott $\omega > 0$ és $\lambda > 1$ paraméter mellett tekintsük az alábbi

$$\Psi_{\lambda\omega}(x) := \begin{cases} 1 & (-\omega \le x \le \omega) \\ \dfrac{\lambda\omega - x}{(\lambda-1)\omega} & (\omega \le x \le \lambda\omega) \\ \dfrac{x + \lambda\omega}{(\lambda-1)\omega} & (-\lambda\omega \le x \le -\omega) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [-\lambda\omega, \lambda\omega]) \end{cases}$$

előírással definiált $\Psi_{\lambda\omega}$ függvényt.[64] Világos, hogy $\Psi_{\lambda\omega} \in L^1 \cap L^2$, ezért (ld. 1.2.3.) van olyan $\Phi_{\lambda\omega} \in L^2$ függvény, amelyre $\widehat{\Phi}_{\lambda\omega} = \Psi_{\lambda\omega}$, az inverziós formula (ld. 4.1.) szerint pedig

$$\Phi_{\lambda\omega}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \Psi_{\lambda\omega}(t) e^{-\imath xt}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\lambda\omega}^{-\omega} \frac{t + \lambda\omega}{(\lambda-1)\omega} \cdot e^{-\imath xt}\, dt + \int_{-\omega}^{\omega} e^{-\imath xt}\, dt + \int_{\omega}^{\lambda\omega} \frac{\lambda\omega - t}{(\lambda-1)\omega} \cdot e^{-\imath xt}\, dt \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{\omega}^{\lambda\omega} \frac{\lambda\omega - t}{(\lambda-1)\omega} \cdot \left(e^{-\imath xt} + e^{\imath xt}\right) dt + \int_{-\omega}^{\omega} e^{-\imath xt}\, dt \right) \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}).$$

Itt (parciális integrálással)

$$\int_{\omega}^{\lambda\omega} \frac{\lambda\omega - t}{(\lambda-1)\omega} \cdot \left(e^{-\imath xt} + e^{\imath xt}\right) dt = \frac{2}{(\lambda-1)\omega} \cdot \int_{\omega}^{\lambda\omega} (\lambda\omega - t) \cdot \cos(xt)\, dt =$$

$$\frac{2}{(\lambda-1)\omega} \cdot \left(-\frac{\lambda\omega - \omega}{x} \cdot \sin(\omega x) - \frac{1}{x^2} \cdot (\cos(\lambda\omega x) - \cos(\omega x)) \right) =$$

$$-\frac{2}{x} \cdot \sin(\omega x) - \frac{2(\cos(\lambda\omega x) - \cos(\omega x))}{(\lambda-1)\omega \cdot x^2},$$

továbbá

$$\int_{-\omega}^{\omega} e^{-\imath xt}\, dt = -\frac{1}{\imath x} \cdot \left(e^{-\imath\omega x} + e^{\imath\omega x}\right) = \frac{2}{x} \cdot \sin(\omega x) \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}).$$

[64] Geometriailag a $\Psi_{\lambda\omega}$ függvény grafikonja a $[-\lambda\omega, \lambda\omega]$ intervallumon egy szimmetrikus trapéz.

Mindezeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\Phi_{\lambda\omega}(x) = \frac{\cos(\omega x) - \cos(\lambda\omega x)}{\pi(\lambda - 1)\omega\cdot x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol (pl. a L'Hôpital[65]-szabály alkalmazásával)

$$\frac{\cos(\omega x) - \cos(\lambda\omega x)}{\pi(\lambda - 1)\omega\cdot x^2}\Big|_{x=0} := \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\omega z) - \cos(\lambda\omega z)}{\pi(\lambda - 1)\omega\cdot z^2} =$$

$$\frac{1}{2\pi(\lambda-1)\omega}\cdot \lim_{z\to 0} \frac{-\omega\cdot \sin(\omega z) + \lambda\omega\cdot \sin(\lambda\omega z)}{z} =$$

$$\frac{1}{2\pi(\lambda-1)\omega}\cdot \lim_{z\to 0} \left(-\omega^2\cdot \frac{\sin(\omega z)}{\omega z} + \lambda^2\omega^2\cdot \frac{\sin(\lambda\omega z)}{\lambda\omega z}\right) =$$

$$\frac{\omega^2\cdot (\lambda^2 - 1)}{2\pi(\lambda - 1)\omega} = \frac{(\lambda+1)\cdot\omega}{2\pi}.$$

A $\widehat{\Phi}_{\lambda\omega} = \Psi_{\lambda\omega}$ egyenlőség és az utóbbi függvény definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden olyan $f \in L^2 \cap C$ függvényre, amelyre

$$\widehat{f}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus [-\omega, \omega]),$$

egyúttal

$$\widehat{f} = \widehat{f}\cdot \widehat{\Phi}_{\lambda\omega}.$$

Vegyük most az $I := [-\lambda\omega, \lambda\omega]$ intervallumon ortogonális trigonometrikus rendszert, azaz az

$$I \ni x \mapsto e^{\imath k\pi x/(\lambda\omega)} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

függvényrendszert és az $\widehat{f}_I$ leszűkítésnek[66] a

$$b_k := \frac{1}{2\lambda\omega}\cdot \int_{-\lambda\omega}^{\lambda\omega} \widehat{f}(x) e^{-\imath k\pi x/(\lambda\omega)}\, dx =$$

$$\frac{\pi}{\lambda\omega}\cdot \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{f}(x) e^{-\imath k\pi x/(\lambda\omega)}\, dx = \frac{\pi}{\lambda\omega}\cdot f(k\pi/(\lambda\omega)) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

---

[65] Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (Párizs, 1661. – Párizs, 1704. II. 2.)

[66] Az inverzióra (ld. 4.1.) is hivatkozva.

Fourier-együtthatóit, ill. a $\sum(b_k e^{\imath k\pi x/(\lambda\omega)})$ Fourier-sorát. Az inverziós formula szerint (az előbbi Fourier-sor tagonkénti integrálásával)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{f}(t) e^{-\imath xt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\lambda\omega}^{\lambda\omega} \widehat{f}(t)\cdot \widehat{\Phi}_{\lambda\omega}(t) e^{-\imath xt}\, dt =$$

$$\frac{\pi}{\lambda\omega}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/(\lambda\omega))\cdot \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\lambda\omega}^{\lambda\omega} \widehat{\Phi}_{\lambda\omega}(t) e^{-\imath xt}\cdot e^{\imath k\pi t/(\lambda\omega)}\, dt =$$

$$\frac{\pi}{\lambda\omega}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/(\lambda\omega))\cdot \frac{1}{2\pi}\cdot \int \widehat{\Phi}_{\lambda\omega}(t) e^{-\imath(k\pi/(\lambda\omega)-x)t}\, dt =$$

$$\frac{\pi}{\lambda\omega}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/(\lambda\omega))\cdot \Phi_{\lambda\omega}(k\pi/(\lambda\omega) - x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

„Látszik”, hogy az utóbbi sor a $\Phi_{\lambda\omega}(x)$-ekben megjelenő $1/x^2$ tényező miatt gyorsabban konvergál, mint az „eredeti”

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi/\omega)\cdot \frac{\sin(\omega x - k\pi)}{\omega x - k\pi} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

Nyquist–Shannon-formula (ld. 5.5.) jobb oldala, ahol ez a tényező „csak” $1/x$. Ennek az „ára” az, hogy a $k\pi/\omega$ pontok helyett a sűrűbb $k\pi/(\lambda\omega)$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken kell az f-et mintavételezni (*oversampling*).

xiv) Oldjuk meg a

$$\partial_2 u(x,y) = q\cdot \partial_{11} u(x,y) + G(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

inhomogén hővezetési egyenletet a $q > 0$ paraméter és a kétváltozós $G \in L^1$ valós függvény esetén, ahol

$$u(x,0) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

az $f \in L^1 \cap C$ korlátos függvénnyel. Legyen ehhez (adott $s \geq 0$ mellett)

$$g_s(x) := G(x,s) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

az u_s függvény pedig a

$$\partial_2 u(x,y) = q\cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

(*homogén*) egyenlet megoldása az

$$u_s(x,0) = g_s(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

feltétellel (ld. 5.6.):

$$u_s(x,y) = g_s * H_y(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi q y}} \cdot \int G(t,s) e^{-(x-t)^2/(4qy)}\,dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Tekintsük ezek után az

$$u_*(x,y) := \int_0^y u_{y-s}(x,s)\,ds = \int_0^y g_{y-s} * H_s(x)\,dx =$$

$$\int_0^y \left(\int g_{y-s}(t) H_s(x-t)\,dt \right) ds = \int_0^y \left(\int g_z(t) H_{y-z}(x-t)\,dt \right) dz =$$

$$\int_0^y \left(\int G(t,z) H_{y-z}(x-t)\,dt \right) dz \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

függvényt, amire a *Duhamel*[67]*-elv* szerint

$$u_*(x,0) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és[68]

$$\partial_2 u_*(x,y) = q \cdot \partial_{11} u_*(x,y) + G(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0).$$

Ha most az u_o a

$$\partial_2 u(x,y) = q \cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R},\ y > 0)$$

homogén egyenlet megoldása és

$$u_o(x,0) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor az

$$u := u_o + u_*$$

[67] Jean-Marie Constant Duhamel (Saint-Malo, 1797. II. 5. – Párizs, 1872. IV. 29.)

[68] Emlékeztetünk a paraméteres integrálok deriválására vonatkozó ismert „szabályra", miszerint: $\mathcal{F}'(y) = F(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) + \int_0^{\psi(y)} \partial_2 F(x,y)\,dx$, ahol $\mathcal{F}(y) := \int_0^{\psi(y)} F(x,y)\,dx \quad (y > 0)$. Speciálisan, ha $\psi(y) := y \quad (y > 0)$, akkor $\mathcal{F}'(y) = \int_0^y \partial_2 F(x,y)\,dx + F(y,y) \quad (y > 0)$.

függvényre

$$\partial_2 u(x,y) = q\cdot \partial_{11} u(x,y) + G(x,y) \qquad (x\in \mathbf{R},\ y>0)$$

és

$$u(x,0) = f(x) \qquad (x\in \mathbf{R}).$$

xv) A (ld. 5.6. **1°** példa az ottani jelölésekkel)

$$\partial_2 u(x,y) = q\cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x\in \mathbf{R},\ y>0)$$

hővezetési egyenlet egy megoldásának a keresésekor a következőképpen is eljárhatunk. Keressük ui. az u megoldást az alábbi alakban:

$$u(x,y) = F(x)\cdot G(y) \qquad (x\in \mathbf{R},\ y\ge 0),$$

ahol az

$$F:\mathbf{R}\to\mathbf{C} \quad \text{és a} \quad G:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$$

függvény kétszer differenciálható. Világos, hogy ekkor az

$$F(x)\cdot G'(y) = q\cdot F''(x)\cdot G(y) \qquad (x\in \mathbf{R},\ y>0)$$

egyenlőségnek kell teljesülni. Az is nyilvánvaló, hogy van olyan $\alpha\in\mathbf{R}$ konstans, amellyel

$$G'(y) = \alpha\cdot G(y) \qquad (y>0)$$

és

$$F''(x) = \frac{\alpha}{q}\cdot F(x) \qquad (x\in \mathbf{R}).$$

Legyen itt $\alpha<0$ és $z:=\sqrt{-\alpha/q}$, ekkor

$$G'(y) = -qz^2\cdot G(y) \qquad (y>0)$$

és

$$F''(x) = -z^2\cdot F(x) \qquad (x\in \mathbf{R}).$$

Egyszerű behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy (pl.) a

$$G(y) := e^{-qz^2 y} \qquad (y\ge 0)$$

és az

$$F(x) := e^{-\imath z x} \qquad (x\in \mathbf{R})$$

függvény rendre eleget tesz az előbbi, a deriváltakra vonatkozó egyenlőségeknek. Más szóval az

$$(x,y) \mapsto e^{-\imath zx} \cdot e^{-qz^2 y}$$

leképezés (egy) megoldása a hővezetési egyenletnek. Sőt, alkalmas

$$c : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

integrálható függvénnyel az

$$u(x,y) := \int c(z) e^{-\imath zx} \cdot e^{-qz^2 y}\, dz \qquad (x \in \mathbf{R},\ y \geq 0)$$

is megoldás. Ha itt

$$u(x,0) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$u(x,0) = \int c(z) e^{-\imath zx}\, dz = \widehat{c}(-x) = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

vagyis

$$\widehat{c}(x) = f(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $f \in L^1$, így egyúttal az $\widehat{c} \in L^1$ tartalmazás is igaz, következésképpen (ld. inverzió (2.2.))

$$c(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \widehat{c}(t) e^{-\imath xt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int f(t) e^{\imath xt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \widehat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Összefoglalva az eddigieket azt írhatjuk, hogy (ld. 5.6.)

$$u(x,y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int \widehat{f}(z) e^{-\imath zx} \cdot e^{-qz^2 y}\, dz \qquad (x \in \mathbf{R},\ y \geq 0).$$

xvi) Ha a hullámegyenletben (ld. 5.6.) valamilyen $l > 0$ mellett a $[0,l] \times [0,+\infty)$ tartományra szorítkozunk:

$$\partial_{22} u(x,y) = c^2 \cdot \partial_{11} u(x,y) \qquad (x \in [0,l],\ y \geq 0),$$

továbbá az

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{és} \quad \partial_2 u(x,0) = g(x) \qquad (x \in [0,l])$$

kezdeti feltételek mellett az

$$u(0,y) = u(l,y) = 0 \qquad (y \geq 0)$$

peremfeltételek teljesülését is megköveteljük, akkor a *rezgő húr* matematikai modelljéhez jutunk: az u függvény a két végén rögzített (ld. kezdeti feltételek) kifeszített l hosszúságú homogén húrnak a rugalmas feszítő erő hatására történő mozgását írja le a húr 0 időpillanatbeli kezdő alakjától (ld. f) és a 0 pillanatbeli kezdősebességétől (ld. g) függően.[69]

A megoldást illetően sikerrel alkalmazhatjuk a xv) megjegyzés kiindulópontját képező ötletet (*Fourier-módszer*), ami Euler[70], Lagrange[71], D'Alembert, D. Bernoulli és Fourier munkássága nyomán kristályosodott ki (és más problémákra is alkalmazható) eljárás. Tehát keressük az u megoldást

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t) \qquad \big(x \in [0,l], t \in [0,+\infty)\big)$$

alakban, ahol az

$$F,\, G \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

mindegyike kétszer folytonosan differenciálható (alkalmas) függvény. Ekkor

$$\partial_{22}u(x,t) = G''(t)\cdot F(x) \qquad \big(x \in [0,l],\, t \in [0,+\infty)\big)$$

és

$$\partial_{11}u(x,t) = F''(x)\cdot G(t) \qquad \big(x \in [0,l], t \in [0,+\infty)\big),$$

így a

$$\partial_{22}u = c^2\cdot \partial_{11}u$$

egyenlőség miatt teljesülnie kell a

$$G''(t)\cdot F(x) = c^2\cdot F''(x)\cdot G(t) \qquad (x \in [0,l], t \in [0,+\infty))$$

[69] Feltételezzük, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez, az $u(x,y)$ jelentése: a húr $x \in [0,l]$ abszcisszájú pontjának a kitérése (ordinátája) az $y \geq 0$ időpillanatban. Megjegyezzük, hogy „pontosabb" analízissel a $\rho(x)\cdot \partial_{22}u(x,y) = \alpha\cdot \partial_{11}u(x,y)/(1+\partial_1 u(x,y)^2)^{3/2}$ $\quad (x \in [0,l],\, y \geq 0)$ matematikai modellhez (egyenlethez) jutunk, ahol a ρ függvény írja le a húr sűrűségét, az $\alpha > 0$ pedig a feszítő erővel kapcsolatos paraméter. Ha a ρ állandó és a $\partial_1 u(x,y) \approx 0$ $\quad (x \in [0,l],\, y \geq 0)$ közelítéssel élünk, akkor a fenti egyenletet kapjuk.

[70] Leonhard Euler (Bázel, 1707. IV. 15. – Bázel, 1783. IX. 18.)

[71] Joseph-Louis Lagrange (Torinó, 1736. I. 25. – Párizs, 1813. IV. 10.)

egyenlőségnek. Egyszerűen belátható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$G''(t) = \lambda G(t) \qquad (t \in [0, +\infty))$$

és

$$F''(x) = \frac{\lambda}{c^2} \cdot F(x) \qquad (x \in [0, l]).$$

Mindez nem más, mint (két) homogén lineáris állandó együtthatós másodrendű közönséges differenciálegyenlet.

Könnyen ellenőrizhető az is, hogy $\lambda \geq 0$ esetén (a peremfeltételek figyelembevételével) csak az $u = 0$ triviális megoldást kapjuk.

Vizsgáljuk (valamilyen $\gamma > 0$ mellett) a $\lambda = -\gamma^2 < 0$ esetet, amikor is a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek valós megoldásaira vonatkozó „klasszikus" ismeretek szerint

$$G(t) = a\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t) \qquad (t \geq 0)$$

és

$$F(x) = e\cos(\gamma x/c) + d\sin(\gamma x/c) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

megfelelő

$$a, b, d, e \in \mathbf{R}$$

együtthatókkal. Az

$$u(0, t) = e(a\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t)) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

feltételből (ismét csak a nem azonosan nulla u megoldást keresve) azt kapjuk, hogy

$$|a| + |b| > 0 \quad \text{és} \quad e = 0,$$

következésképpen

$$u(l, t) = d\sin(\gamma l/c) \cdot (a\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t)) = 0 \qquad (t \geq 0).$$

Innen (a $d = 0$, azaz az $u = 0$ esetet kizárva)

$$\sin(\gamma l/c) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség azonban azzal ekvivalens, hogy valamilyen pozitív $k \in \mathbf{N}$ számmal

$$\gamma = \frac{\pi ck}{l}.$$

Továbbá tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ és

$$a_k, b_k, d_k \in \mathbf{R}$$

paraméterekkel az

$$u_k(x,t) :=$$

$$d_k \sin(\pi kx/l) \cdot (a_k \cos(\pi ckt/l) + b_k \sin(\pi ckt/l)) \qquad (x \in [0,l],\ t \geq 0)$$

függvények megoldások.

A részletek mellőzésével csupán megjegyezzük, hogy alkalmas feltételek mellett létezik az

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \qquad (x \in [0,l],\ t \geq 0)$$

összegfüggvény, ami szintén megoldás, és a kezdeti feltételek a következő alakúak:

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k \sin(\pi kx/l) = f(x) \qquad (x \in [0,l]),$$

valamint

$$\partial_2 u(x,0) = \frac{\pi c}{l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot b_k d_k \sin(\pi kx/l) = g(x) \qquad (x \in [0,l]).$$[72]

xvii) Írjuk fel az $n = 3$ esetben a hullámegyenletet (ld. 5.6.) a „szokásos" koordinátázással:

$$\partial_{33} u(x,y,z,) = c^2 \cdot (\partial_{11} u(x,y,z) + \partial_{22} u(x,y,z)) \qquad ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3).$$

Ha itt az első két változóban (síkbeli) polárkoordináta-transzformációt alkalmazunk, akkor az

$$x = r\cos\phi \quad \text{és} \quad y = r\sin\phi \qquad (r \geq 0,\ \phi \in [0,2\pi])$$

[72] Ezek az egyenlőségek tehát az f, ill. a g függvény Fourier-sorba (speciálisan szinusz-sorba-) fejtését jelentik.

jelöléssel legyen

$$U(r,\phi,z) := u(r\cos\phi, r\sin\phi, z) \qquad (r \geq 0,\ \phi \in [0,2\pi],\ z \in \mathbf{R}).$$

Itt általában egy

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

kétszer differenciálható függvényre az

$$F(r,\phi) := f(r\cos\phi, r\sin\phi) \qquad (r \geq 0,\ \phi \in [0,2\pi])$$

transzformált függvénnyel a

$$\Delta f := \partial_{11} f + \partial_{22} f$$

Laplace-operátor hatása a következő. Először is (könnyen beláthatóan) az előbbi (r,ϕ) helyeken (a $* := r\cos\phi, r\sin\phi$ rövidítéssel)[73]

$$\partial_r F(r,\phi) = \partial_1 f(*)\cos\phi + \partial_2 f(*)\sin\phi,$$

$$\partial_{rr} F(r,\phi) = \partial_{11} f(*)\cos^2\phi + \partial_{12} f(*)\sin(2\phi) + \partial_{22} f(*)\sin^2\phi,$$

valamint

$$\partial_\phi F(r,\phi) = -\partial_1 f(*) r\sin\phi + \partial_2 f(*) r\cos\phi,$$

$$\partial_{\phi\phi} F(r,\phi) =$$

$$-\partial_1 f(*) r\cos\phi - \partial_2 f(*) r\sin\phi + \partial_{11} f(*) r^2 \cdot \sin^2\phi -$$

$$-\partial_{12} f(*) r^2 \cdot \sin(2\phi) + \partial_{22} f(*) r^2 \cdot \cos^2\phi.$$

A most kapott azonosságokból az adódik, hogy

$$\Delta f(r\cos\phi, r\sin\phi) =$$

$$\partial_{rr} F(r,\phi) + \frac{1}{r^2} \cdot \partial_{\phi\phi} F(r,\phi) + \frac{1}{r} \cdot \partial_r F(r,\phi) \qquad (r \geq 0,\ \phi \in [0,2\pi]).$$

Mindezt felhasználva a hullámegyenlet polárkoordinátás alakja a következő: a $z \in \mathbf{R}$, $\phi \in [0,2\pi]$, $r > 0$ helyeken

$$\partial_{zz} U(r,\phi,z) = c^2 \cdot \left(\partial_{rr} U(r,\phi,z) + \frac{1}{r^2} \cdot \partial_{\phi\phi} U(r,\phi,z) + \frac{1}{r} \cdot \partial_r U(r,\phi,z) \right).$$

[73] A ∂_r, ∂_{rr}, ∂_ϕ, ∂_{zz} szimbólumok az indexben szereplő változóra vonatkozó parciális deriválást jelentik.

Keressük a Fourier-módszernek (ld. xvi)) megfelelően az U függvényt (alkalmas egyváltozós R, Ψ, T függvényekkel) az

$$U(r,\phi,z) = R(r)\cdot \Psi(\phi)\cdot T(z)$$

alakban, ekkor

$$T''(z)\cdot R(r)\cdot \Psi(\phi) =$$
$$c^2\cdot T(z)\cdot \left(R''(r)\cdot \Psi(\phi) + \frac{1}{r^2}\cdot \Psi''(\phi) + \frac{1}{r}\cdot R'(r)\cdot \Psi(\phi) \right).$$

Ez azt jelenti, hogy (a „megengedett” helyeken)

$$\frac{T''(z)}{c^2\cdot T(z)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Psi''(\phi)}{r^2\cdot \Psi(\phi)}.$$

Ezért itt mindkét oldal egy $-\mu^2$ $(\mu > 0)$ konstanssal egyenlő:

$$(*) \qquad T''(z) + (c\mu)^2\cdot T(z) = 0$$

és

$$\frac{r^2\cdot R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} + (r\mu)^2 = -\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)}.$$

Így itt is egy alkalmas ν^2 állandóval

$$(**) \qquad \Psi''(\phi) + \nu^2\cdot \Psi(\phi) = 0$$

és

$$r^2\cdot R''(r) + rR'(r) + ((r\mu)^2 - \nu^2)R(r) = 0.$$

Ha az R argumentumában az r helyett $r\mu$-t írunk, azaz egy g függvénnyel

$$R(r) = g(r\mu) \qquad (r > 0),$$

akkor

$$(r\mu)^2\cdot g''(r\mu) + r\mu\cdot g'(r\mu) + ((r\mu)^2 - \nu^2)\cdot g(r\mu) = 0,$$

vagy a $t := r\mu$ helyettesítéssel

$$t^2\cdot g''(t) + t\cdot g'(t) + (t^2 - \nu^2)\cdot g(t) = 0 \qquad (t > 0).$$

Láttuk (ld. 1.2.2.3.), hogy pl. a Bessel-függvények eleget tesznek az utóbbi differenciálegyenletnek, a $(*)$, $(**)$ egyenletek pedig állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris közönséges differenciálegyenletek.

6. fejezet

Gábor-transzformáció

A címben jelzett transzformáció „ötletgazdája” a magyar Gábor Dénes[1] mérnök volt, akinek a kezdeti vizsgálatai nyomán lett mára a Gábor-analízis a Fourier-analízis egy új, önálló fejezetévé. Különösen az utóbbi egy-két évtizedben váltak az ezirányú kutatások igen intenzívvé. Ebben a fejezetben csupán arra törekszünk, hogy – bevezetve az alapfogalmakat – néhány, az alkalmazások szempontjából is fontos tulajdonságot megtárgyaljunk, gondolva itt elsősorban a Gábor-inverzióra.

6.1. A transzformált értelmezése

Legyen adott (a későbbiekben is) az $1 \leq n \in \mathbf{N}$ „kitevő” és a

$$0 \neq g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

ún. *ablakfüggvény,* továbbá legyen (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$\mathbf{D}_g := \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C} : f \cdot \mathcal{T}_x g \in L^1 \ \ (x \in \mathbf{R}^n)\}.$$

A Hölder-egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy pl. $g \in L^q$ esetén $L^p \subset \mathbf{D}_g$, hacsak

$$1 \leq p, q \leq +\infty \quad \text{és} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Így $L^2 \subset \mathbf{D}_g$ minden $g \in L^2$ mellett. Különösen fontos a $g \in L^1 \cap L^\infty$ eset, amikor könnyen láthatóan egyúttal minden $1 < p < +\infty$ kitevőre $g \in L^p$ is teljesül.[2] Ezért ekkor az előbb mondottak szerint bármely $1 \leq p \leq +\infty$ választással $L^p \subset \mathbf{D}_g$.

[1] Gábor Dénes (Budapest, 1900. VI. 5. – London, 1979. II. 19.)

[2] Valóban, $\|g\|_p^p = \int |g(x)|^p \, dx \leq \|g\|_\infty^{p-1} \cdot \int |g(x)| \, dx = \|g\|_\infty^{p-1} \cdot \|g\|_1 < +\infty$.

Ha a g ablakfüggvény, $f \in \mathbf{D}_g$ és az $x, y \in \mathbf{R}^n$ vektorok tetszőlegesek, akkor definiálhatjuk a $V_g f(x,y)$-t a következőképpen:

$$V_g f(x,y) := \int f(t)\overline{g(t+x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}dt,$$

amikor (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$V_g f(x,y) = \langle f, \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g\rangle = (f\cdot \mathcal{T}_x\overline{g})^{\wedge}(y).$$

Mivel

$$\int f(t)\overline{g(t+x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}dt = \int f(z-x)\overline{g(z)}e^{\imath\langle z-x,y\rangle}dz =$$

$$e^{-\imath\langle x,y\rangle}\cdot \int f(z-x)\overline{g(z)}e^{\imath\langle z,y\rangle}dz,$$

ezért azt is írhatjuk, hogy

$$V_g f(x,y) = e^{-\imath\langle x,y\rangle}\cdot (\overline{g}\cdot \mathcal{T}_{-x}f)^{\wedge}(y) \qquad (x,y \in \mathbf{R}^n).$$

Továbbá (egyszerű helyettesítés révén)

$$\overline{V_g f(x,y)} = \int \overline{f(t)}g(t+x)e^{-\imath\langle t,y\rangle}dt = \int g(z)\overline{f(z-x)}e^{-\imath\langle z-x,y\rangle}dz,$$

tehát

$$\overline{V_g f(x,y)} = e^{\imath\langle x,y\rangle}\cdot V_f g(-x,-y) \qquad (x,y \in \mathbf{R}^n).$$

Legyen

$$\mathcal{G}_x := \{g \neq 0\} - x = \{t - x \in \mathbf{R}^n : g(t) \neq 0\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ekkor nyilván

$$V_g f(x,y) = \int_{\mathcal{G}_x} f(t)\overline{g(t+x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}dt \qquad (x,y \in \mathbf{R}^n).$$

Más szóval az $x, y \in \mathbf{R}^n$ helyeken a $V_g f(x,y)$ kiszámításakor az f-nek csak a $\mathcal{G}_x$ halmazon való (úgymond lokális) viselkedése az érdekes, szemben az $\widehat{f}(y)$ Fourier-transzformált meghatározásakor, amibe a „teljes f beleszól”. A g függvény tehát (az $x \in \mathbf{R}^n$ megadásával) mintegy „kivágja” az f-ből a $V_g f(x,y)$-hoz szükséges $f_{|\mathcal{G}_x}$

részt. Ez az attitűd magyarázza a g-re az „ablak” kitételt. Speciálisan persze a $g = 1$ (konstans) függvényre

$$V_g h(x, y) = \widehat{h}(y) \qquad (h \in L^1,\ x, y \in \mathbf{R}^n),$$

azaz a teljes $\widehat{h}$ Fourier-transzformáltat is megkapjuk.

Minderre gondolva a

$$V_g f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{C}$$

leképezést az $f \in \mathbf{D}_g$ függvény *rövid idejű* (vagy *ablakos*) *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.[3] Gábor Dénes idevágó munkái nyomán használatos még a *Gábor-transzformált* elnevezés is. Legyen pl. $n = 1$ és $\delta > 0$, a g függvényről pedig tegyük fel, hogy

$$\operatorname{supp} g \subset [-\delta, \delta].$$

Ekkor tetszőleges $f \in \mathbf{D}_g$ mellett

$$V_g f(x, y) = \int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f(t)\overline{g(t+x)} e^{\imath\langle t,y\rangle}\, dt \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Így a $g := \chi_{[-\delta,\delta]}$ függvénnyel

$$\mathcal{G}_x = [-x-\delta, -x+\delta] \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

következésképpen

$$V_g f(x, y) = \int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f(t) e^{\imath\langle t,y\rangle}\, dt \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

és pl. (ld. 4.3. ii) megjegyzés)[4]

$$V_g f(0, y) = \widehat{f_\delta}(y) \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy a $\mathbf{D}_g$ halmaz (a „szokásos” függvényműveletekkel) vektortér, a V_g operátor pedig lineáris. Belátható, hogy ha $f, g \in L^2$, akkor a $V_g f$ egyenletesen korlátos, ui. a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$|V_g f(x, y)| \le \|f\|_2 \cdot \|\mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).^5$$

[3] Angolul STFT: *short-time Fourier transform.*

[4] $f_\delta = f \cdot \chi_{[-\delta,\delta]}$.

[5] Ha $g \in L^1 \cap L^\infty$, akkor bármely $1 \le p \le +\infty$ és $f \in L^p$ esetén a Hölder-egyenlőtlenség miatt $|V_g f(x, y)| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ $(x, y \in \mathbf{R}^n)$, ahol $1/p + 1/q = 1$.

Egyenletesen folytonos is, ti. az $x, y, u, v \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$|V_g f(x,y) - V_g f(u,v)| \leq \int |f(t)|\cdot \left|\overline{g(t+x)}e^{\imath\langle t,y\rangle} - \overline{g(t+u)}e^{\imath\langle t,v\rangle}\right| dt =$$

$$\int |f(t)|\cdot \left|g(t+x)e^{\imath\langle t,v-y\rangle} - g(t+u)\right| dt =$$

$$\int |f(t)|\cdot |g(t+x) - g(t+u)|\, dt + \int |f(t)|\cdot \left|e^{\imath\langle t,v-y\rangle} - 1\right| \cdot |g(t+u)|\, dt =:$$

$$A(x,u) + B(u,v,y).$$

Ismét csak a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, valamint a transzláció folytonossága szerint

$$A(x,u) \leq \|f\|_2\cdot \|\mathcal{T}_x g - \mathcal{T}_u g\|_2 \to 0 \qquad (x - u \to 0).$$

Továbbá minden $r > 0$ esetén[6]

$$B(u,v,y) \leq$$

$$2\cdot \int |f(t)|\cdot |g(t+u)|\cdot |\sin(\langle t, v-y\rangle/2)|\cdot \chi_{G_r}(t)\, dt +$$

$$2\cdot \int |f(t)|\cdot |g(t+u)|\cdot (1 - \chi_{G_r}(t))\, dt \leq$$

$$\int |f(t)|\cdot |g(t+u)|\cdot |\langle t, v-y\rangle|\cdot \chi_{G_r}(t)\, dt + 2\cdot \int |f(t)|\cdot |g(t+u)|\cdot (1 - \chi_{G_r}(t))\, dt \leq$$

$$r\cdot \|v-y\|\cdot \|f\|_2\cdot \|g\|_2 + 2\cdot \|g\|_2\cdot \|f(1-\chi_{G_r})\|_2.$$

Mivel (ld. 1.2.3.)

$$\|f(1-\chi_{G_r})\|_2 \to 0 \qquad (r \to +\infty),$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ megadásával van olyan $r > 0$, amellyel

$$2\cdot \|g\|_2\cdot \|f(1-\chi_{G_r})\|_2 < \varepsilon.$$

Ekkor viszont alkalmas $\delta > 0$ választással

$$r\cdot \|v-y\|\cdot \|f\|_2\cdot \|g\|_2 < \varepsilon$$

is igaz, hacsak $\|v-y\| < \delta$. Az előbbiekre tekintettel az is feltehető, hogy $\|x-u\| < \delta$ esetén $A(x,u) < \varepsilon$ is fennáll, így

$$|V_g f(x,y) - V_g f(u,v)| < 3\cdot \varepsilon \qquad (\|x-u\|,\ \|v-y\| < \delta).$$

[6] $G_r = \{z \in \mathbf{R}^n : \|z\| \leq r\}$.

6.2. A Gábor-transzformált tulajdonságai

Mutassuk meg, hogy ha $f, g \in L^2$ és $x, y \in \mathbf{R}^n$, akkor (ld. 6.1.) az $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ Fourier-transzformáltakkal

$$V_g f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot e^{-\imath\langle x,y\rangle} \cdot V_{\widehat{g}} \widehat{f}(-y,x),$$

más szóval

$$\int f(t)\overline{g(t+x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}dt = \frac{e^{-\imath\langle x,y\rangle}}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t-y)}e^{\imath\langle t,x\rangle}dt.$$

Valóban, a Plancherel-tételt (ld. 1.2.3.) felhasználva (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$V_g f(x,y) = \langle f, \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g\rangle =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \langle \widehat{f}, (\mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g)^\wedge \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \langle \widehat{f}, \mathcal{T}_{-y}\mathcal{M}_{-x}\widehat{g}\rangle =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t)\overline{\mathcal{T}_{-y}\mathcal{M}_{-x}\widehat{g}(t)}dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t-y)e^{-\imath\langle x,t-y\rangle}}dt =$$

$$\frac{e^{-\imath\langle x,y\rangle}}{(2\pi)^n} \cdot \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t-y)}e^{\imath\langle x,t\rangle}dt.$$

Jelöljük valamilyen $1 \le p \le +\infty$ mellett $\mathbf{L}^p$-vel az $\mathbf{R}^{2n}$-en értelmezett (valós vagy komplex értékű) függvények alkotta szokásos Lebesgue-tereket. Ekkor az előbbiekben (ld. 6.1.) értelmezett rövid idejű Fourier-transzformációról a következőt mondhatjuk:

$$V_g f \in \mathbf{L}^2 \qquad (f, g \in L^2).$$

Sőt, bármely

$$f_j,\, g_j \in L^2 \qquad (j = 1, 2)$$

függvényre fennáll a következő ún. *ortogonalitási reláció* (vagy más néven *Moyal*[7]-*formula*):

$$\int\int V_{g_1} f_1(x,y)\overline{V_{g_2} f_2(x,y)}\,dx\,dy = (2\pi)^n \cdot \langle f_1, f_2\rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2\rangle}.$$

[7] José Enrique Moyal (Jeruzsálem, 1910. X. 1. – Canberra, 1998. V. 22.)

Mivel az $L^1 \cap L^\infty$ metszettér sűrű az L^2-ben,[8] ezért a „szokásos” funkcionálanalízisbeli sűrűségi technikák alapján elegendő a most megfogalmazott egyenlőséget abban az esetben belátni, amikor

$$g_j \in L^1 \cap L^\infty \qquad (j = 1, 2).$$

Így ekkor

$$f_j \cdot \mathcal{T}_x \overline{g_j} \in L^2 \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ j = 1, 2),$$

tehát a már említett Plancherel-tétel miatt

$$\int \int V_{g_1} f_1(x,y) \overline{V_{g_2} f_2(x,y)}\, dx\, dy =$$

$$\int \left(\int (f_1 \cdot \mathcal{T}_x \overline{g}_1)^\wedge (y) \overline{(f_2 \cdot \mathcal{T}_x \overline{g}_2)^\wedge (y)}\, dy \right) dx =$$

$$(2\pi)^n \cdot \int \left(\int f_1(t) \overline{f_2(t) g_1(t+x)} g_2(t+x)\, dt \right) dx.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$f_1 \overline{f}_2,\ \overline{g}_1 g_2 \in L^1,$$

ezért a szukcesszív integrálásról szóló Fubini-tételt (és a Lebesgue-integrál eltolás-invarianciáját) alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\int \int V_{g_1} f_1(x,y) \overline{V_{g_2} f_2(x,y)}\, dx\, dy =$$

$$(2\pi)^n \cdot \int f_1(t) \overline{f_2(t)} \left(\int \overline{g_1(t+x)} g_2(t+x)\, dx \right) dt = (2\pi)^n \cdot \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.$$

Speciálisan[9]

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\int |V_g f(x,y)|^2\, dx\, dy} = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

[8] Tehát tetszőleges $f \in L^2$ és $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $g \in L^1 \cap L^\infty$ függvénnyel $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Mivel az $L^1 \cap L^2$ altér mindenütt sűrű az L^2-ben (ld. 1.2.3.), ezért itt feltehető, hogy $f \in L^1 \cap L^2$. Legyen ekkor $f_k := f \cdot \chi_{\{|f| \leq k\}}$ és $g_k := f \cdot \chi_{\{|f| > k\}}$ $(k \in \mathbf{N})$. Az f m.m. véges lévén világos, hogy $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 0$ (m.m. $x \in \mathbf{R}^n$). Továbbá $|g_k|^2 \leq |f|^2 \in L^1$ $(k \in \mathbf{N})$, ezért a Lebesgue-konvergenciatétel miatt $\lim_{k\to\infty} \int |g_k(x)|^2\, dx = \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2^2 = 0$, és nyilván $f_k \in L^1 \cap L^\infty$ $(k \in \mathbf{N})$.

[9] A $g := g_1 = g_2$ és $f := f_1 = f_2$ választással.

Ha itt $\|g\|_2 = (2\pi)^{-n/2}$, akkor

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^2} = \|f\|_2,$$

tehát ebben az esetben a

$$V_g : L^2 \to \mathbf{L}^2$$

rövid idejű Fourier-transzformáció normatartó leképezés.[10]

A most kapott $(L^2, \mathbf{L}^2)$-korlátosság lényegesen kiterjeszthető az alábbiak szerint (Lieb[11] (1990)): legyen ehhez $2 \le p < +\infty$. Ekkor megadható olyan $C_p > 0$ konstans, hogy tetszőleges $f, g \in L^2$ függvényekre

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^p} \le C_p \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Ugyanis a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt bármely $x \in \mathbf{R}^n$ helyen

$$f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} \in L^1.$$

Tudjuk (ld. fent), hogy $V_g f \in \mathbf{L}^2$, más szóval a Fubini-tétel szerint

$$\int \int |V_g f(x,y)|^2 \, dx \, dy = \int \left(\int \left| (f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge (y) \right|^2 dy \right) dx < +\infty.$$

Ebből következőleg

$$\left\| (f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge \right\|_2^2 = \int \left| (f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge (y) \right|^2 dy < +\infty \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

tehát

$$(f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge \in L^2$$

teljesül m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ vektorra. Ez (a Fourier-inverzióra gondolva) azt jelenti egyúttal (ld. 1.2.3.), hogy

$$f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} \in L^2$$

is igaz m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ mellett, amiből adódóan pedig a p-vel konjugált $1 < q \le 2$ kitevővel[12]

$$f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} \in L^q \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n).^{13}$$

[10]Valójában a $V_{g|_{L^2}}$ leszűkítésről van szó. Az egyszerűség kedvéért az utóbbi leszűkítésre (esetenként később is) a V_g szimbólumot használjuk.

[11]Elliott H. Lieb (Boston, 1932. VII. 31. –)

[12]$1/p + 1/q = 1$.

[13]Legyen $1 < r < 2$, ekkor $L^1 \cap L^2 \subset L^r$. Az $F \in L^1 \cap L^2$ függvényre ui. nyilván $\int |F(x)|^r \, dx = \int_{\{|F| \le 1\}} |F(x)|^r \, dx + \int_{\{|F| > 1\}} |F(x)|^r \, dx \le \|F\|_1 + \|F\|_2^2 < +\infty \Longrightarrow F \in L^r$.

Legyen az $x \in \mathbf{R}^n$ ilyen, ekkor a Hausdorff–Young-egyenlőtlenség (ld. 4.3. iii) megjegyzés) alapján (esetleg sorról-sorra változó, csak a p-től és az n-től függő $C_p > 0$ konstanssal)

$$\int |V_g f(x,y)|^p dy = \int |(f\cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge(y)|^p dy \leq$$

$$C_p \cdot \left(\int |f\cdot \mathcal{T}_x \overline{g}(y)|^q dy\right)^{p/q} = C_p \cdot \left(\int |f(y)|^q \cdot |g(x+y)|^q dy\right)^{p/q} =$$

$$C_p \cdot (|f|^q * |g_o|^q(-x))^{p/q},$$

ahol az előbbi konvolúcióban

$$g_o(t) := g(-t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Mindezekből következően

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int \left(\int |V_g f(x,y)|^p dy\right) dx\right)^{1/p} \leq$$

$$C_p \cdot \left(\int (|f|^q * |g_o|^q(x))^{p/q}\, dx\right)^{1/p} = C_p \cdot \||f|^q * |g_o|^q\|_{p/q}^{1/q}.$$

Világos, hogy itt

$$|f|^q,\ |g_o|^q \in L^{2/q}.$$

Ezért alkalmazható a konvolúcióval kapcsolatos Young-egyenlőtlenség (ld. 1.1.) (az ott szereplő p, q, r hármas helyébe rendre a $2/q$, $2/q$, p/q-t írva):

$$\||f|^q * \|g_o|^q\|_{p/q} \leq C_p \cdot \||f|^q\|_{2/q} \cdot \||g_o|^q\|_{2/q}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\||f|^q\|_{2/q} = \|f\|_2^q \quad \text{és} \quad \||g_o|^q\|_{2/q} = \|g\|_2^q,$$

ezért igaz a

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^p} \leq C_p \cdot (\|f\|_2^q \cdot \|g\|_2^q)^{1/q} = C_p \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

becslés.[14]

[14]Ha figyelembe vesszük a fent idézett Hausdorff–Young-egyenlőtlenséggel és a Young-egyenlőtlenséggel kapcsolatos (ottani) Babenko–Beckner-konstans jelentését, akkor belátható, hogy az előbbi C_p helyébe $(4\pi/p)^{n/p}$ írható.

Az is megmutatható , hogy

$$1 \le p < 2 \quad \text{és} \quad f, g \in L^2$$

esetén

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^p} \ge (2\pi)^{n/p} \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

Valóban, mivel (ld. 6.1.)

$$|V_g f(x,y)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n),$$

ezért egyúttal

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^\infty} \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

Ugyanakkor a fenti ortogonalitási relációból azt kaptuk, hogy

$$\|V_g f\|_{\mathbf{L}^2} = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 ,$$

ahol

$$\|V_g f\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int \int |V_g f(x,y)|^2 \, dx \, dy \le$$

$$\|V_g f\|^{2-p}_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \int \int |V_g f(x,y)|^p \, dx \, dy = \|V_g f\|^{2-p}_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \|V_g f\|^p_{\mathbf{L}^p} .$$

Egybevetve ezt az előbbiekkel az adódik, hogy

$$(2\pi)^n \cdot \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 \le (\|f\|_2 \cdot \|g\|_2)^{2-p} \cdot \|V_g f\|^p_{\mathbf{L}^p} .$$

Innen a fent jelzett alsó becslés már magától értetődő.

Adott $g \in L^2$ ablakfüggvénnyel a

$$V_g : L^2 \to \mathbf{L}^2$$

operátor injektivitása (a linearitása miatt) azzal ekvivalens, hogy a $(L^2 \ni) \, V_g f = 0$ egyenlőség pontosan az $(L^2 \ni) \, f = 0$ esetben áll fenn, azaz akkor, ha igaz az alábbi következtetés:

$$\langle f, \mathcal{M}_y \mathcal{T}_x g \rangle = 0 \quad (\text{m.m. } x, y \in \mathbf{R}^n) \Longrightarrow f(t) = 0 \quad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy az

$$\mathcal{L}\left[\{\mathcal{M}_y \mathcal{T}_x g : x, y \in \mathbf{R}^n\}\right]$$

altér[15] mindenütt sűrű az L^2-ben. Ugyanakkor

$$f\cdot \mathcal{T}_x\overline{g} \in L^1 \qquad (f \in L^2,\ x \in \mathbf{R}^n),$$

ezért a Fourier-transzformáció injektivitása alapján a

$$V_g f(x,y) = \langle f, \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g\rangle = (f\cdot \mathcal{T}_x\overline{g})^{\wedge}(y) = 0 \qquad (\text{m.m. } x, y \in \mathbf{R}^n)$$

feltételből

$$(f\cdot \mathcal{T}_x\overline{g})(t) = f(t)\overline{g(x+t)} = 0 \qquad (\text{m.m. } x, t \in \mathbf{R}^n)$$

következik. Mivel itt $(L^2 \ni) g \neq 0$, az

$$f(t) = 0 \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n)$$

egyenlőség már adódik.

Ha még $\|g\|_2 = (2\pi)^{-n/2}$ és $\mathcal{R}_{V_g} = \mathbf{L}^2$ is igaz, akkor azt mondhatjuk, hogy a

$$V_g : L^2 \to \mathbf{L}^2$$

bijekció izometria.

Mindez „benne van” a következő pontban tárgyalásra kerülő *inverziós formulában.*

6.3. Gábor-inverzió

Az előző pont jelöléseit megtartva legyen $F \in \mathbf{L}^2$, $h \in L^2$. Ekkor minden $x, y \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h \in L^2,$$

így (ld. 6.1.) van értelme az

$$\langle F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle = F(x,y)\overline{V_h\gamma(x,y)}$$

skaláris szorzatnak bármely $\gamma \in L^2$ függvényre. Mivel (ld. 6.2.) valamennyi most mondott γ-ra $V_h\gamma \in \mathbf{L}^2$, ezért $F\cdot V_h\gamma \in \mathbf{L}^1$ és létezik az

$$\int\int \langle F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle \, dx\, dy = \int\int F(x,y)\overline{V_h\gamma(x,y)} \, dx\, dy$$

[15] Tehát az $\{\mathcal{M}_y\mathcal{T}_x g : x, y \in \mathbf{R}^n\}$ halmaz lineáris burka, azaz a szóban forgó halmaz elemeinek az összes véges lineáris kombinációja alkotta halmaz. Emlékeztetünk arra, hogy ha egy Hilbert-térben egy Y zárt altérre csak a tér nulla eleme merőleges, akkor az Y a teljes térrel egyenlő. Speciálisan: $Y = \overline{\mathcal{L}[S]}$ (az $\mathcal{L}[S]$ lezártja), ahol az $S \neq \emptyset$ az illető tér részhalmaza. Ekkor egy elem pontosan akkor merőleges az Y-ra, ha merőleges az S-re.

kettős integrál. Ekkor a

$$L^2 \ni \gamma \mapsto l(\gamma) := \int \int \langle F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle \, dx\, dy$$

leképezés (konjugált) lineáris. Korlátos is, mivel (ld. 6.2.) a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt

$$\left| \int \int \langle F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle \, dx\, dy \right| \leq$$

$$\|F\|_{\mathbf{L}^2}\cdot \|V_h\gamma\|_{\mathbf{L}^2} = (2\pi)^{n/2}\cdot \|F\|_{\mathbf{L}^2}\cdot \|h\|_2\cdot \|\gamma\|_2 \qquad (\gamma \in L^2).$$

Tehát $l \in \left(L^2\right)^*$, ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel[16] szerint egyértelműen létezik olyan $f \in L^2$ függvény, amellyel

$$l(\gamma) = \langle f, \gamma\rangle \qquad (\gamma \in L^2).$$

Jelentse az

$$\int \int F(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h \, dx\, dy := f$$

„integrál" ezt az $f \in L^2$ függvényt.

Megjegyezzük, hogy a most mondottak mögött az alábbi általánosabb érvényű megfontolás húzódik meg. Tegyük fel ui., hogy adott az $(X, \|.\|_X)$ Banach-tér és a

$$G : \mathbf{R}^n \to X$$

leképezés. Ekkor az $\int G(x)\, dx$ *integrál* legyen az a

$$\Phi : X^* \to \mathbf{C}$$

(nyilván lineáris) funkcionál az X^* duális téren, amivel

$$\Phi(\psi) = \int \psi(G(x))\, dx \qquad (\psi \in X^*)$$

teljesül (feltételezve az itt szereplő utóbbi integrál(ok) létezését, röviden szólva tehát azt, hogy $\psi \circ G \in L^1$). Ha a Φ korlátos is, azaz valamilyen $0 \leq C$-vel

$$|\Phi(\psi)| \leq C\cdot \|\psi\|_{X^*} \qquad (\psi \in X^*),$$

[16] $\left(L^2\right)^* = \{l_f : f \in L^2\}$, ahol az $l_f \in \left(L^2\right)^*$ funkcionál a következőképpen van definiálva: $l_f(\gamma) := \langle f, \gamma\rangle$ $(\gamma \in L^2)$, továbbá $\|l_f\|_{\left(L^2\right)^*} = \|f\|_2$. Az $l_f \equiv f$ azonosítással tehát az L^2 elemei tekinthetők az L^2-n értelmezett korlátos lineáris funkcionáloknak.

akkor $\Phi \in X^{**}$. Ha még ráadásul az X tér reflexív[17], akkor az $\int G(x)\,dx$ integrál tekinthető X-beli elemnek.[18] Ez a helyzet pl. akkor, ha

$$(X, \|.\|_X) = (L^2, \|.\|_2).$$

Következésképpen az előbbi f „integrállal"

$$\langle f, \gamma\rangle = \int\int F(x,y)\cdot \langle \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle\,dx\,dy \qquad (\gamma \in L^2).$$

Minden készen áll ahhoz, hogy megfogalmazzunk egy, a rövid idejű Fourier-transzformációra vonatkozó *inverziós formulát.* Legyen ehhez $g, h \in L^2$ és $\langle g, h\rangle \neq 0$. Ekkor tetszőleges $f \in L^2$ függvényre (mint $L^2 \equiv (L^2)^{**}$-beli funkcionálra)

$$(*) \qquad f = \frac{1}{(2\pi)^n\cdot \langle h, g\rangle}\cdot \int\int V_g f(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h\,dx\,dy.$$ [19]

Valóban, mivel (ld. 6.2.) $V_g f \in \mathbf{L}^2$, ezért az előbbieknek megfelelően létezik a

$$\mathcal{H} := \frac{1}{(2\pi)^n\cdot \langle h, g\rangle}\cdot \int\int V_g f(x,y)\cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h\,dx\,dy$$

integrál. Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$\mathcal{H}(\gamma) = f(\gamma) = \langle f, \gamma\rangle \qquad (\gamma \in L^2).$$

Az ortogonalitási reláció (ld. 6.2.) alapján azonban

$$\mathcal{H}(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n\cdot \langle h, g\rangle}\cdot \int\int V_g f(x,y)\cdot \langle \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h, \gamma\rangle\,dx\,dy =$$

---

[17] Legyen $x \in X$ és $\Phi_x(g) := \overline{g(x)}$ $(g \in X^*)$. Ekkor a $\Phi_x : X^* \to \mathbf{C}$ leképezés korlátos lineáris funkcionál, azaz $\Phi_x \in X^{**}$ és $\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. A $\varphi(x) := \Phi_x$ $(x \in X)$ megfeleltetés egy izomorf-izometrikus beágyazása az X-nek az X^{**}-ba. Az $(X, \|.\|_X)$ tér *reflexív*, ha $\mathcal{R}_\varphi = X^{**}$. Az utóbbi esetben tehát tetszőleges $\Phi \in X^{**}$ tekinthető X-beli elemnek, nevezetesen az előbbiek szerint egyértelműen létező x-szel azonosítható, ahol $\Phi = \Phi_x$.

[18] Ha pl. a szóban forgó $(X, \|.\|_X)$ normált tér Hilbert-tér: $(X, \|.\|_X) \equiv (X, \langle,\rangle_X)$, amikor is $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x\rangle_X}$ $(x \in X)$, akkor $\Phi(h) = \int \langle u, G(x)\rangle\,dx$, ahol $u \in X$ és a $h \in X^*$ funkcionál a következő alakú: $h(z) = \langle u, z\rangle$ $(z \in X)$. Mondjuk az itt szereplő Hilbert-tér a valós számok halmaza a „közönséges" szorzással, mint skaláris szorzással, akkor $\Phi(h) = u\cdot \int G(x)\,dx$ $(u \in \mathbf{R})$. Ekkor tehát az $\int G(x)\,dx$ integrál lényegében a G „szokásos" integrálja, feltéve, hogy $G \in L^1$.

[19] A most bevezetett integrál értelmezésére gondolva az f-et mint funkcionált „kapjuk vissza" a $V_g f$ Gábor-transzformáltból, nem pontonkénti értelemben. Mindez szoros analógiát mutat az L^p terekbeli beli $(2 < p < +\infty)$ függvényekre vonatkozó inverzióval (ld. 4.2.2.).

$$= \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g \rangle} \cdot \int \int V_g f(x,y) \overline{V_h \gamma(x,y)} \, dx \, dy = \langle f, \gamma \rangle.$$

A fentiekben azt vizsgáltuk, hogy hogyan lehet a Gábor-transzformáltból előállítani a kiindulási függvényt. A továbbiakban is hasonló jellegű inverziós képlettel foglalkozunk. Tegyük fel ehhez, hogy a szóban forgó $(*)$ inverziós formulában (az ottani jelölésekkel) $V_g f \in \mathbf{L}^1$ is igaz.[20] Ekkor az alábbi, az f-et pontonként megadó egyenlőség is teljesül m.m. $t \in \mathbf{R}^n$ helyen:

$$(**) \qquad f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g \rangle} \cdot \int \int V_g f(x,y) e^{-\imath \langle y,t \rangle} \cdot h(t+x) \, dx \, dy.$$

Ti. legyen $\gamma \in L^2$ és

$$F(x,y,t) := V_g f(x,y) \cdot \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x h(t) \cdot \overline{\gamma(t)} =$$

$$V_g f(x,y) e^{-\imath \langle y,t \rangle} \cdot h(t+x) \overline{\gamma(t)} \qquad (x, y, t \in \mathbf{R}^n).$$

Ugyanakkor világos (ld. Tonelli[21]-tétel[22]), hogy – a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget is felhasználva –

$$\int \int \int |F(x,y,t)| \, dx \, dy \, dt = \int \int \int |V_g f(x,y)| \cdot |h(t+x) \gamma(t)| \, dx \, dy \, dt =$$

$$\int \int |V_g f(x,y)| \cdot \left(\int |h(t+x)| \cdot |\gamma(t)| \, dt \right) dx \, dy \le$$

$$\int \int |V_g f(x,y)| \cdot \|\mathcal{T}_x h\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \, dx \, dy = \|h\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \cdot \|V_g f\|_1 < +\infty,$$

tehát

$$F \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n).$$

Így a Fubini-tétel miatt

$$\langle f, \gamma \rangle = \int f(t) \overline{\gamma(t)} \, dt =$$

[20]Ez a helyzet, ha pl. $f \in L^2$, a g ablakfüggvény pedig eleme az ún. *Feichtinger-algebrának.*

[21]Leonida Tonelli (Gallipoli, 1885. IV. 19. – Pisa, 1946. III. 12.)

[22]Legyenek adottak a szigma-véges (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértékterek, és vegyük az általuk meghatározott $(X_1 \times X_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ szorzatteret, valamint az $F : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$ függvényt, ami az $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ szorzatalgebrára nézve mérhető. Ekkor $\int F(u,v) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(u,v) = \int \left(\int F(u,v) \, d\mu_1(u) \right) d\mu_2(v) = \int \left(\int F(u,v) \, d\mu_2(v) \right) d\mu_1(u)$.

$$= \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g\rangle} \cdot \int\int V_g f(x,y) \cdot \left(\int e^{-\imath\langle y,t\rangle} \cdot h(t+x)\overline{\gamma(t)}\, dt\right) dx\, dy =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g\rangle} \cdot \int \left(\int\int V_g f(x,y) e^{-\imath\langle y,t\rangle} \cdot h(t+x)\, dx\, dy\right) \cdot \overline{\gamma(t)}\, dt,$$

amiből a $(**)$ állítás már nyilván következik.

Megjegyezzük, hogy a most belátott $(**)$ formula így is írható (csak a $h = g$ esetre fogalmazva meg):

$$(***) \qquad f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \|g\|_2^2} \cdot \int (V_g f(x,\cdot))^\wedge (-t) \cdot g(t+x)\, dx \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$ [23]

Mutassuk meg ugyanezt a $V_g f \in \mathbf{L}^1$ feltétel nélkül a

$$0 \neq g \in L^2 \cap L^\infty,\ f \in L^2$$

esetben is. Ha ui. $x \in \mathbf{R}^n$ és

$$F_x(t) := V_g f(x,t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n),$$

akkor

$$F_x(t) = (f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})^\wedge (t) \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

és

$$f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} \in L^2$$

miatt (ld. Plancherel-tétel (ld. 1.2.3.)) $F_x \in L^2$. Ezért a Fourier-transzformáció L^2-beli inverziós formulája (ld. 2.2.) alapján

$$(f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g})(t) = f(t)\overline{g(x+t)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{F_x}(-t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$

Más szóval

$$f(t) = \frac{1}{\|g\|_2^2} \cdot \int f(t)\overline{g(x+t)} g(x+t)\, dx =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot \|g\|_2^2} \cdot \int \widehat{F_x}(-t) g(x+t)\, dx \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$

[23] Az integrandus első tényezője (minden egyes rögzített $x \in \mathbf{R}^n$ mellett) az $\mathbf{R}^n \ni y \mapsto V_g f(x,y)$ függvény Fourier-transzformáltja a $-t$ helyen.

Figyelembe véve az F_x jelentését is azt mondhatjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \|g\|_2^2} \cdot \int \left(V_g f(x,\cdot)\right)^\wedge (-t) g(x+t)\, dx \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$

Lássuk be, hogy az előző $(***)$ inverziós képlet akkor is érvényben marad, ha

$$0 \neq g \in L^1 \cap L^\infty \quad \text{és} \quad f,\, \widehat{f},\, \widehat{g} \in L^1.$$

Ekkor ui. (ld. 1.3. i) megjegyzés)

$$\mathcal{T}_x \overline{g},\ \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}} \in L^1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

amire tekintettel a Fourier-transzformáció L^1-inverziós formulája szerint (ld. 2.2.) az

$$\mathcal{F}(s) := \widehat{s}(-x) = \int s(t) e^{-\imath \langle t,x\rangle} dt \qquad (s \in L^1,\, x \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \mathcal{F}(\widehat{f})$$

és

$$\mathcal{T}_x \overline{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}}) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A konvolúció és a Fourier-transzformáció kapcsolatára vonatkozó szorzási szabályt (ld. 1.2.2.1.) is felhasználva azt írhatjuk tehát, hogy az $x \in \mathbf{R}^n$ helyeken

$$f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \mathcal{F}(\widehat{f}) \cdot \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}}),$$

ahol

$$\widehat{f},\, \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}} \in L^1$$

miatt (ld. 1.1.)

$$\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}} \in L^1$$

és

$$(\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}})^\wedge(t) = (\widehat{f})^\wedge(t) \cdot (\widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}})^\wedge(t) =$$
$$(2\pi)^{2n} \cdot f(-t) \cdot \mathcal{T}_x \overline{g}(-t) =: (2\pi)^{2n} \cdot H_x(t) \qquad (\text{m.m. } t \in \mathbf{R}^n).$$

Ugyanakkor $f \cdot \mathcal{T}_x \overline{g} \in L^1$, azaz $H_x \in L^1$, ezért

$$(\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x \overline{g}})^\wedge \in L^1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Így ismét az előbb említett inverziós előállítást alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x\overline{g}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \mathcal{F}((\widehat{f} * \widehat{\mathcal{T}_x\overline{g}})^\wedge) = (2\pi)^n \cdot \mathcal{F}(H_x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen $\mathcal{F}(H_x) \in L^1$, innen pedig nyilván az is igaz, hogy

$$\mathcal{F}(f \cdot \mathcal{T}_x\overline{g}) \in L^1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Tehát

$$(f \cdot \mathcal{T}_x\overline{g})^\wedge \in L^1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A már többször alkalmazott inverziós formula szerint így

$$f \cdot \mathcal{T}_x\overline{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \mathcal{F}((f \cdot \mathcal{T}_x\overline{g})^\wedge) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

más szóval m.m. $t \in \mathbf{R}^n$ esetén (ld. fentebb)

$$f(t)\overline{g(x+t)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int (f \cdot \mathcal{T}_x\overline{g})^\wedge (z) e^{-\imath\langle z,t\rangle} dz = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{F_x}(-t) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ez utóbbi egyenlőségből kaptuk a $(***)$ inverziós képletet.

6.4. Megjegyzések

i) Legyen (a további megjegyzésekben is) $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és a

$$K_N \subset \mathbf{R}^{2n} \qquad (N \in \mathbf{N})$$

kompakt halmazokból álló sorozat monoton növő, sőt:

$$K_N \subset \operatorname{int} K_{N+1} \qquad (N \in \mathbf{N}).[24]$$

Feltesszük, hogy a szóban forgó K_N-ek „kitöltik” az $\mathbf{R}^{2n}$-et, azaz

$$\mathbf{R}^{2n} = \bigcup_{N=0}^{\infty} K_N.$$

[24] Egy (X, ρ) metrikus tér és $A \subset X$ halmaz esetén $\operatorname{int} A$ az A *belseje*, azaz az összes olyan $B \subset X$ nyílt halmaz egyesítéseként előálló halmaz, ahol $B \subset A$. Az $\operatorname{int} A$ nyilván nyílt, $\operatorname{int} A \subset A$ és tetszőleges $B \subset A$ nyílt halmazra $B \subset \operatorname{int} A$.

Ekkor a 6.3. pontbeli szereplőkkel[25] definiált

$$f_N :=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g\rangle} \cdot \int\int \chi_{K_N}(x,y) \cdot V_g f(x,y) \cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h\, dx\, dy \qquad (N \in \mathbf{N})$$

funkcionálok sorozatára teljesül, hogy

$$\|f_N - f\|_2 \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Ugyanis bármely $\gamma \in L^2$ függvényre a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával a 6.2. pont alapján

$$|f_N(\gamma)| = |\langle f_N, \gamma\rangle| =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n |\langle h, g\rangle|} \cdot \left| \int\int \chi_{K_N}(x,y) V_g f(x,y) \overline{V_h\gamma(x,y)}\, dx\, dy \right| \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot |\langle h, g\rangle|} \cdot \|V_g f\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|V_h\gamma\|_{\mathbf{L}^2} = \frac{\|g\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|h\|_2 \cdot \|\gamma\|_2}{|\langle h, g\rangle|} \qquad (N \in \mathbf{N}).^{26}$$

Így minden $N \in \mathbf{N}$ indexre $f_N \in (L^2)^* \equiv L^2$ és

$$|\langle f_N, \gamma\rangle| \leq \frac{\|g\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|h\|_2 \cdot \|\gamma\|_2}{|\langle h, g\rangle|} \qquad (\gamma \in L^2).$$

Következésképpen $f - f_N \in L^2$ és az előbbiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$|\langle f - f_N, \gamma\rangle| =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot |\langle g, h\rangle|} \cdot \left| \int\int (1 - \chi_{K_N}(x,y)) V_g f(x,y) \overline{V_h\gamma(x,y)}\, dx\, dy \right| \leq$$

$$\frac{\|\gamma\|_2 \cdot \|h\|_2}{(2\pi)^{n/2} \cdot |\langle g, h\rangle|} \cdot \left(\int\int (1 - \chi_{K_N}(x,y)) \cdot |V_g f(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2} \qquad (\gamma \in L^2).$$

Innen

$$\|f - f_N\|_2 = \sup_{\|\gamma\|_2 \leq 1} |\langle f - f_N, \gamma\rangle| \leq$$

[25] Ld. $(*) :\ f, g, h \in L^2$ és $\langle g, h\rangle \neq 0$.

[26] $V_g f,\ V_h\gamma \in \mathbf{L}^2$ és $\chi_{K_N} \in \mathbf{L}^\infty$, ezért $\chi_{K_N} \cdot V_g f \cdot V_h\gamma \in \mathbf{L}^1$.

$$\leq \frac{\|h\|_2}{(2\pi)^{n/2}\cdot |\langle g,h\rangle|}\cdot \left(\int\int (1-\chi_{K_N}(x,y))\cdot |V_g f(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}.$$

Itt a $(K_N, N\in \mathbf{N})$ sorozatra vonatkozó feltétel és $V_g f\in \mathbf{L}^2$ miatt

$$\int\int (1-\chi_{K_N}(x,y))\cdot |V_g f(x,y)|^2\,dx\,dy \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

ii) (*Feichtinger–Weisz* (2006).) Legyen $Q := [0,1]^n$ és az $1\leq p,q\leq +\infty$ paraméterekkel definiáljuk az $\mathbf{R}^n$ feletti W_{pq} *Wiener-amalgam-tereket* mindazon

$$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$$

(Lebesgue-)mérhető függvények halmazaként, amelyekre $\|f\|_{pq}<+\infty$, ahol

$$\|f\|_{pq} := \begin{cases} \left(\int \|f\cdot \mathcal{T}_x\chi_Q\|_p^q\,dx\right)^{1/q} & (q<+\infty) \\ \\ \|F\|_\infty & (q=+\infty)\end{cases}$$

és

$$F(x) := \|f\cdot \mathcal{T}_x\chi_Q\|_p \qquad (x\in\mathbf{R}^n).$$

Megmutatható, hogy ha (az előbbi f-re)

$$\|f\|_* := \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \|f\cdot \mathcal{T}_k\chi_Q\|_p^q\right)^{1/q} & (q<+\infty) \\ \\ \sup_{k\in\mathbf{Z}} \|f\cdot \mathcal{T}_k\chi_Q\|_p & (q=+\infty),\end{cases}$$

akkor $\|.\|_* \sim \|.\|_{pq}$. Könnyen adódik az is, hogy (a normák ekvivalenciájára nézve) $W_{pp}=L^p$ és

$$W_{\infty 1}\subset L^p\subset W_{1\infty} \qquad (1\leq p\leq +\infty).$$

A $W_{p\infty}^{(0)}$ tér legyen azoknak az $f\in W_{p\infty}$ függvényeknek a halmaza, amelyekre

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0.$$

A $W_{\infty q}$ térnek a folytonos függvények által meghatározott zárt altere legyen $W_q^{(c)}$ $(1 \leq q \leq +\infty)$. Speciálisan, $W_1^{(c)}$ a már ismert (ld. 1.3. xvii) megjegyzés) Wiener-algebra.

Legyen most $f \in W_{1\infty}$, a $g, h \in W_{\infty 1}$ pedig olyanok, hogy $\langle g, h\rangle \neq 0$, továbbá az $s, r > 0$ paraméterekkel

$$\rho_{sr} f := \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g\rangle} \cdot \int\int \chi_{G_s \times G_r}(x, y) \cdot V_g f(x, y) \cdot \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x h \, dx \, dy.$$

Ekkor a következő állítás igaz: ha $1 < p < +\infty$ és $1 \leq q < +\infty$, akkor

$$\lim_{r,s \to +\infty} \|\rho_{sr} f - f\|_{W_{pq}} = 0 \qquad (f \in W_{pq}).$$

Speciálisan, ha $p = q$, akkor

$$\lim_{r,s \to +\infty} \|\rho_{sr} f - f\|_p = 0 \qquad (f \in L^p).$$

Megjegyezzük még, hogy $q = +\infty$ esetén a

$$\lim_{r,s \to +\infty} \rho_{sr} f = f$$

konvergencia a $(W_{p\infty})^*$ térnek az ún. gyenge* topológiájában[27] teljesül. Sőt, ha a g folytonos is és $f \in W_{p\infty}$, akkor a szóban forgó konvergencia a $W_{p\infty}$ tér normája szerint vehető.

[27] Egy $(X, \|.\|_X)$ normált tér, az $\emptyset \neq A \subset X^*$ véges halmaz és az $\varepsilon > 0$ szám esetén legyen $\mathcal{G}_\varepsilon^A(0) := \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon \ \ (f \in A)\}$, továbbá $\mathcal{G}_\varepsilon^A(z) := z + \mathcal{G}_\varepsilon^A(0)$ $(z \in X)$ (a z elem *gyenge környezete*). Jelöljük a gyenge környezetek halmazrendszerét $\mathcal{U}$-val és nevezzünk egy $Y \subset X$ halmazt *gyengén nyíltnak,* ha $Y = \emptyset$, vagy bármely $y \in Y$ esetén van olyan $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$, hogy $y \in \mathcal{G} \subset Y$. Legyen a $\mathcal{T}$ a gyengén nyílt halmazok által meghatározott halmazrendszer (az $(X, \|.\|_X)$ tér *gyenge topológiája*). A előbbieknek megfelelően az $(X, \|.\|_X)$ normált tér X^* duálisában is értelmezhetjük az X^* tér gyenge topológiáját. Ekkor tehát az $\emptyset \neq A \subset X^{**}$ véges halmaz és az $\varepsilon > 0$ szám esetén a $h \in X^*$ funkcionál gyenge környezete $\mathcal{K}_\varepsilon^A(h) := \{g \in X^* : |\Phi(h) - \Phi(g)| < \varepsilon \ \ (\Phi \in A)\}$. Ez utóbbiak (a fentiekkel analóg módon) vezetnek el az X^*-beli $\widetilde{\mathcal{T}}$ gyenge topológiához. Nevezzük ugyanakkor egy $g \in X^*$ funkcionál *gyenge* környezetének* az $\mathcal{F}_\varepsilon^A(g)$ halmazt, ahol $\varepsilon > 0$, az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz véges és $\mathcal{F}_\varepsilon^A(g) := \{f \in X^* : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \ (x \in A)\}$. Legyen továbbá a $\mathcal{T}^*$ a gyenge* környezetek által meghatározott topológia az X^*-ban (az X^* tér *gyenge* topológiája*): egy $F \subset X^*$ halmaz pontosan akkor eleme a $\mathcal{T}^*$-nak, ha $F = \emptyset$, vagy bármely $g \in F$ esetén $\mathcal{F}_\varepsilon^A(g) \subset F$ alkalmas $\varepsilon > 0$ és $\emptyset \neq A \subset X$ véges halmaz mellett. Megjegyezzük, hogy a $\Phi_x(f) := \overline{f(x)}$ $(f \in X^*, x \in X)$ jelöléssel $\Phi_x \in X^{**}$ és $\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ $(x \in X)$. Ebben az értelemben $X \subset X^{**}$, így a $\mathcal{T}^*$ topológia általában gyengébb, mint a $\widetilde{\mathcal{T}}$, azaz $\mathcal{T}^* \subset \widetilde{\mathcal{T}}$.

Legyen (ld. 1.2.2.1.)

$$\theta \in L^1 \cap C_0$$

és az előbbi jelölésekkel

$$\sigma_{sr}^{\theta} f := \frac{1}{(2\pi)^n \cdot \langle h, g\rangle} \cdot \int \int \chi_{G_s}(x)\theta(y/r) \cdot V_g f(x,y) \cdot \mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x h \, dx \, dy.$$

Ha itt $\widehat{\theta} \in L^1$ és $1 \leq p < +\infty$, valamint $1 \leq q < +\infty$, akkor

$$\lim_{r,s \to +\infty} \|\sigma_{sr}^{\theta} f - \theta(0) \cdot f\|_{W_{pq}} = 0 \qquad (f \in W_{pq})$$

és (a $p = q$ kitevőkkel)

$$\lim_{r,s \to +\infty} \|\sigma_{sr}^{\theta} f - \theta(0) \cdot f\|_p = 0 \qquad (f \in L^p).$$

A $q = +\infty$ esetben a

$$\lim_{r,s \to +\infty} \sigma_{sr}^{\theta} f = \theta(0) \cdot f$$

konvergencia az $(L^{\infty})^*$ tér gyenge* topológiájában áll fenn. Továbbá, ha itt $f \in W_{p\infty}^{(0)}$, akkor a $\|.\|_{\infty}$ normában vett konvergenciáról beszélhetünk. Ha még a h függvény folytonos is és $1 \leq q < +\infty$, akkor a konvergencia a $W_q^{(c)}$ térben (az $f \in W_q^{(c)}$ függvényekre), ha pedig $q = +\infty$, akkor a C_0 térben az $f \in C_0$ függvényekre igaz.

iii) Tekintsük az

$$\widehat{L}^1 := \{\widehat{f} : f \in L^1\}$$

halmazt és tegyük fel, hogy az

$$u_N \in L^1 \cap \widehat{L}^1 \qquad (N \in \mathbf{N})$$

függvények egységapproximációt alkotnak (ld. 2.5. ii) megjegyzés). Tehát

$$\sup_N \|u_N\|_1 < +\infty$$

és

$$\int u_N(x) \, dx = 1 \qquad (N \in \mathbf{N}),$$

továbbá bármely $r > 0$ esetén

$$\int (1 - \chi_{G_r}(t)) u_N(t)\, dt \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Vegyük adott

$$0 \neq g \in L^1 \cap L^2$$

függvény, valamint $f \in L^2$ esetén az alábbi függvénysorozatot:

$$f_N(t) :=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n \cdot \|g\|_2^2} \cdot \int \int V_g f(x,y) \widehat{u}_N(y) \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x g(t)\, dx\, dy \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ N \in \mathbf{N}).$$

Ekkor belátható (*Benedetto*[28], ill. *Heil*[29]–*Walnut*[30] (1989)), hogy

$$\|f_N - f\|_2 \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Ha itt

$$0 \neq g \in L^1 \cap L^\infty \text{ és } f \in L^1,$$

akkor

$$\|f_N - f\|_1 \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

is teljesül.

Az állítás első részét bizonyítandó vegyük észre, hogy a Tonelli-tétel és a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt bármely rögzített $t \in \mathbf{R}^n$ mellett

$$\int \int |V_g f(x,y) \widehat{u}_N(y) \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x g(t)|\, dx\, dy \leq$$

$$\int \int \int |f(z)| \cdot |g(z+x) g(x+t)| \cdot |\widehat{u}_N(y)|\, dz\, dx\, dy \leq$$

$$\|f\|_2 \cdot \int \sqrt{\int |g(z+x)|^2\, dz} \cdot |g(x+t)|\, dx \cdot \|\widehat{u}_N\|_1 =$$

$$\|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|g\|_1 \cdot \|\widehat{u}_N\|_1 < +\infty \qquad (N \in \mathbf{N}).$$

[28] John J. Benedetto (Boston, 1939. VII. 16. –)
[29] Christopher Edward Heil
[30] David Francis Walnut

Ezért létezik az f_N-et definiáló integrál és alkalmazható a Fubini-tétel, miszerint (ld. 2.2.)

$$(2\pi)^n\cdot \|g\|_2^2\cdot f_N(t) =$$

$$\int\int\left(\int f(z)\overline{g(z+x)}e^{\imath\langle z,y\rangle}dz\right)\cdot \widehat{u}_N(y)e^{-\imath\langle t,y\rangle}g(x+t)\,dx\,dy =$$

$$\int f(z)\cdot\left(\int \widehat{u}_N(y)e^{\imath\langle z-t,y\rangle}dy\right)\cdot\left(\int \overline{g(z+x)}g(x+t)\,dx\right)dz =$$

$$\int f(z)\widehat{\widehat{u}}_N(z-t)\cdot\left(\int \overline{g(z+x)}g(x+t)\,dx\right)dz =$$

$$(2\pi)^n\cdot\int f(z)u_N(t-z)\cdot\left(\int \overline{g(z+x)}g(x+t)\,dx\right)dz =$$

$$(2\pi)^n\cdot\int f(z)u_N(t-z)\cdot\left(\int \overline{g(z+x-t)}g(x)\,dx\right)dz =$$

$$(2\pi)^n\cdot\int f(z)u_N(t-z)F(t-z)\,dz \qquad (t\in\mathbf{R}^n,\ N\in\mathbf{N}),$$

ahol

$$F(s) := \int \overline{g(x-s)}g(x)\,dx \qquad (s\in\mathbf{R}^n).$$

Tehát (ld. 1.1.)

$$\|g\|_2^2\cdot f_N(t) = f*(u_N F)(t) \qquad (N\in\mathbf{N},\ t\in\mathbf{R}^n).$$

A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$|F(s)| \le \|g\|_2^2 \qquad (s\in\mathbf{R}^n)$$

és

$$|F(s)-F(0)| \le \int |g(x-s)-g(x)|\cdot|g(x)|\,dx \le$$

$$\|\mathcal{T}_{-s}g-g\|_2\cdot\|g\|_2 \to 0 \qquad (s\to 0)$$

miatt

$$\lim_{s\to 0} F(s) = F(0) = \|g\|_2^2.$$

Mindezt figyelembe véve azt mondhatjuk (ld. 1.1.), hogy $f_N \in L^2$ és

$$\|g\|_2^2\cdot(f_N(t)-f(t)) = f*(u_N F)(t) - F(0)f(t) \qquad (N\in\mathbf{N},\ t\in\mathbf{R}^n),$$

így
$$\|g\|_2^2\cdot \|f_N - f\|_2 = \|f * (u_N F) - F(0) f\|_2 \qquad (N \in \mathbf{N}).$$
Lássuk be, hogy
$$\|f * (u_N F) - F(0) f\|_2 \to 0 \qquad (N \to \infty).$$
Valóban,
$$\|f * (u_N F) - F(0) f\|_2 \leq$$
$$\|f * (u_N F) - f * (u_N F(0))\|_2 + \|f * (u_N F(0)) - F(0) f\|_2 =$$
$$\|f * (u_N H)\|_2 + |F(0)|\cdot \|f * u_N - f\|_2 \qquad (N \in \mathbf{N}).$$
Itt a
$$H := F - F(0)$$
függvény korlátos és folytonos a 0-ban:
$$\lim_{x\to 0} H(x) = H(0) = 0.$$
A 2.4. ii) megjegyzés szerint (lévén az $(u_N, N \in \mathbf{N})$ sorozat egységapproximáció) az előbbiekben
$$\|f * u_N - f\|_2 \to 0 \qquad (N \to \infty).$$
Továbbá a Minkowski-egyenlőtlenség alapján (ld. 1.1.) tetszőleges $N \in \mathbf{N}$ index és $r > 0$ mellett[31]
$$\|f * (u_N H)\|_2 = \sqrt{\int \left| \int f(x-t) u_N(t) H(t)\, dt \right|^2 dx} \leq$$
$$\int |u_N(t)|\cdot |H(t)|\cdot \sqrt{\int |f(x-t)|^2\, dx}\, dt =$$
$$\|f\|_2\cdot \left(\int_{G_r} |u_N(t)|\cdot |H(t)|\, dt + \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |u_N(t)|\cdot |H(t)|\, dt \right).$$
Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor van olyan $r > 0$, hogy
$$|H(t)| < \varepsilon \qquad (t \in G_r),$$

[31] $G_r = \{u \in \mathbf{R}^n : \|u\| \leq r\}$

továbbá (ehhez az r-hez) létezik olyan $N_0 \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |u_N(t)|\, dt < \varepsilon \qquad (N_0 < N \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a

$$q := \sup_N \|u_N\|_1 \ (< +\infty)$$

szorzóval

$$\|f * (u_N H)\|_2 \le \|f\|_2 \cdot \left(\varepsilon \cdot \|u_N\|_1 + \|H\|_\infty \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |u_N(t)|\, dt \right) \le$$

$$\|f\|_2 \cdot (q + \|H\|_\infty) \cdot \varepsilon \qquad (N_0 < N \in \mathbf{N}).$$

Ezzel beláttuk a $\|.\|_2$ normában való konvergenciát.

Ha

$$0 \ne g \in L^1 \cap L^\infty \text{ és } f \in L^1,$$

akkor csak némileg kell módosítani az előbbi gondolatmeneten. Nevezetesen, ekkor

$$\int \int |V_g f(x,y) \widehat{u}_N(y) \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x g(t)|\, dx\, dy \le$$

$$\int \int \int |f(z)| \cdot |g(z+x) g(x+t)| \cdot |\widehat{u}_N(y)|\, dz\, dx\, dy \le$$

$$\int \int \int |f(z)| \cdot \|g\|_\infty \cdot |g(x+t)| \cdot |\widehat{u}_N(y)|\, dz\, dx\, dy =$$

$$\|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \cdot \|g\|_1 \cdot \|\widehat{u}_N\|_1 < +\infty \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ N \in \mathbf{N}).$$

Tehát most is létezik az f_N-et megadó integrál és „működik” a Fubini-tétel, így

$$(2\pi)^n \cdot \|g\|_2^2 \cdot f_N(t) = f * (u_N F)(t) \qquad (N \in \mathbf{N},\ t \in \mathbf{R}^n)$$

és $f_N \in L^1$, valamint

$$\|g\|_2^2 \cdot \|f_N - f\|_1 = \|f * (u_N F) - F(0) f\|_1 \qquad (N \in \mathbf{N}).$$

Az

$$\|f * (u_N F) - F(0) f\|_1 \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

konvergenciához most azt kell megmutatni, hogy (a fenti szereplőkkel)

$$\|f*(u_N H)\|_1 \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

Ehhez vegyük figyelembe, hogy bármely $N\in\mathbf{N}$, $r>0$ esetén

$$\|f*(u_N H)\|_1 = \int\left|\int f(x-t)u_N(t)H(t)\,dt\right| dx \leq$$

$$\int |u_N(t)|\cdot|H(t)|\cdot\int |f(x-t)|\,dx\,dt =$$

$$\|f\|_1\cdot\left(\int_{G_r}|u_N(t)|\cdot|H(t)|\,dt+\int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r}|u_N(t)|\cdot|H(t)|\,dt\right).$$

Innen pedig ugyanúgy folytatódhat a bizonyítás, mint a $\|.\|_2$ norma esetén.

iv) A iii)-ban szereplő Benedetto–Heil–Walnut-féle eredményt illetően gondoljuk meg, hogy a $0\neq g\in L^1\cap L^2$ feltétel mellett minden $2\leq p<+\infty$ választással

$$\lim_{N\to\infty}\|f_N-f\|_p=0 \qquad (f\in L^p)$$

is igaz.

Ugyanis (ld. 6.2.) az

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{p}=1$$

egyenlőségnek eleget tevő $1\leq s\leq 2$ „konjugált” kitevővel $L^1\cap L^2\subset L^s$, következésképpen $g\in L^s$. Ezért (a Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva)

$$\int\int |V_g f(x,y)\widehat{u}_N(y)\mathcal{M}_{-y}\mathcal{T}_x g(t)|\,dx\,dy \leq$$

$$\int\int\int |f(z)|\cdot|g(z+x)g(x+t)|\cdot|\widehat{u}_N(y)|\,dz\,dx\,dy\leq$$

$$\|f\|_p\cdot\int\int\left(\int|g(z+x)|^s\,dz\right)^{1/s}\cdot|g(x+t)|\cdot|\widehat{u}_N(y)|\,dx\,dy=$$

$$\|f\|_p\cdot\|g\|_s\cdot\|g\|_1\cdot\|\widehat{u}_N\|_1<+\infty \qquad (t\in\mathbf{R}^n,\ N\in\mathbf{N}),$$

így továbbra is létezik az f_N-et meghatározó integrál és (ld. iii)):

$$\|g\|_2^2\cdot f_N(t)=f*(u_N F)(t) \qquad (t\in\mathbf{R}^n,\ N\in\mathbf{N}).$$

Ebből kifolyólag $f_N \in L^p$ és

$$\|g\|_2^2 \cdot \|f_N - f\|_p = \|f * (u_N F) - F(0)f\|_p \le$$

$$\|f * (u_N H)\|_p + |F(0)| \cdot \|f * u_N - f\|_p \qquad (N \in \mathbf{N}).$$

Itt (ld. 2.5. ii) megjegyzés)

$$\|f * u_N - f\|_p \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

továbbá a Minkowski-egyenlőtlenségből (ld. 1.1.)

$$\|f * (u_N H)\|_p = \left(\int \left| \int f(x-t) u_N(t) H(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\int |u_N(t) \cdot |H(t)| \cdot \left(\int |f(x-t)|^p \, dx \right)^{1/p} dt =$$

$$\|f\|_p \cdot \int |u_N(t) \cdot |H(t)|\, dt \qquad (N \in \mathbf{N}).$$

A bizonyítás folytatása már ugyanaz, mint a $p = 2$ esetben (ld. iii)).

v) A iv) megjegyzéshez hasonlóan, ha a ii)-ben a $g \in L^1 \cap L^\infty$ feltételezéssel élünk,[32] akkor (ld. 6.1.)

$$g \in L^s \qquad (1 \le s \le +\infty)$$

és bármely $1 \le p < +\infty$ mellett

$$\|f_N - f\|_p \to 0 \qquad (N \to \infty) \qquad (f \in L^p).$$

Ti. az $f_N \quad (N \in \mathbf{N})$ létezését illetően most azt mondhatjuk, hogy

$$\int \int |V_g f(x,y) \widehat{u}_N(y) \mathcal{M}_{-y} \mathcal{T}_x g(t)|\, dx\, dy \le$$

$$\int \int \int |f(z)| \cdot |g(z+x) g(x+t)| \cdot |\widehat{u}_N(y)|\, dz\, dx\, dy \le$$

$$\|f\|_p \cdot \|g\|_s \cdot \|g\|_1 \cdot \|\widehat{u}_N\|_1 < +\infty \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ N \in \mathbf{N}),$$

[32] Világos (ld. ii)), hogy $W_{\infty 1} \subset L^1 \cap L^\infty$, mert $f \in W_{\infty 1}$ esetén $\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f \cdot \mathcal{T}_k \chi_Q\|_\infty < +\infty$ és nyilván $\|f\|_\infty \le \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f \cdot \mathcal{T}_k \chi_Q\|_\infty$. Továbbá $\|f\|_1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \int |f \cdot \mathcal{T}_k \chi_Q| \le \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f \cdot \mathcal{T}_k \chi_Q\|_\infty$.

ahol $1 < s \leq +\infty$ és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1.$$

Innen az

$$\|f * (u_N H)\|_p \leq \|f\|_p \cdot \int |u_N(t)| \cdot |H(t)|\, dt \qquad (N \in \mathbf{N})$$

becsléshez (ld. iii)) ugyanúgy jutunk el, mint a iv) megjegyzésben.

vi) Könnyen kaphatunk egyfajta határozatlansági relációt (ld. 5.4.) a rövid idejű Fourier-transzformáltra (ld. 6.1.) is. Tegyük fel ehhez, hogy $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és $f, g \in L^2$, legyen

$$C_{f,g} := (\|f\|_2 \cdot \|g\|_2)^2 > 0,$$

továbbá az $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ (Lebesgue-mérhető) halmazra valamilyen $0 \leq \varepsilon \leq 1$ számmal teljesüljön az

$$\int\int |V_g f(x,y)|^2 \cdot \chi_U(x,y)\, dx\, dy \geq (2\pi)^n \cdot C_{f,g} \cdot \varepsilon$$

alsó becslés.[33] Ekkor

$$|U| \geq (2\pi)^n \cdot \varepsilon$$

(az $|U|$ szimbólum most az U halmaz $\mathbf{R}^{2n}$-beli Lebesgue-mértékét jelenti).

Valóban, a

$$|V_g f(x,y)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

egyenlőtlenség (ld. 6.2.) miatt

$$(2\pi)^n \cdot C_{f,g} \cdot \varepsilon \leq \int\int |V_g f(x,y)|^2 \cdot \chi_U(x,y)\, dx\, dy \leq$$

$$\|V_g f\|^2_{\mathbf{L}^\infty} \cdot |U| \leq C_{f,g} \cdot |U|.$$

vii) Az előbbiekben (ld. vi)) megfogalmazott határozatlansági reláció jelentősen kiterjeszthető: a vi)-beli szereplőkkel (és az ottani feltételek mellett) ui. minden $p > 2$ esetén igaz, hogy egy alkalmas, csak a p-től függő $C_p^* > 0$ konstanssal

$$|U| \geq C_p^* \cdot (2\pi)^{np/(p-2)} \cdot \varepsilon^{p/(p-2)}.$$

[33] Itt (ld. 6.2.) $\int\int |V_g f(x,y)|^2 \cdot \chi_U(x,y)\, dx\, dy \leq \|V_g f\|^2_{\mathbf{L}^2} = (2\pi)^n \cdot (\|f\|_2 \|g\|_2)^2 = (2\pi)^n \cdot C_{f,g}$.

Ekkor alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget a $q := p/2$ kitevővel (amikor a konjugált kitevő $p/(p-2)$) : azt írhatjuk (ld. 6.2. és iii)),[34] hogy

$$(2\pi)^n \cdot C_{f,g} \cdot \varepsilon \le \int\int |V_g f(x,y)|^2 \cdot \chi_U(x,y)\, dx\, dy \le$$

$$\left(\int\int |V_g f(x,y)|^p dx\, dy\right)^{2/p} \cdot \left(\int\int \chi_U(x,y) dx\, dy\right)^{(p-2)/p} \le$$

$$C_p^2 \cdot (\|f\|_2 \cdot \|g\|_2)^2 \cdot |U|^{(p-2)/p} = C_p^2 \cdot C_{f,g} \cdot |U|^{(p-2)/p}.$$

Innen bármely $p > 2$ kitevőre az állításunk már nyilván következik. Világos, hogy

$$|U| \ge C := \sup_{p>2} C_p^* \cdot (2\pi)^{np/(p-2)} \cdot \varepsilon^{p/(p-2)},$$

ahol (speciálisan a $p := 4$ esetben)

$$C \ge C_4^* \cdot (2\pi)^{2n} \cdot \varepsilon^2.$$

Tehát egyúttal azt mondhatjuk, hogy

$$|U| \ge C_4^* \cdot (2\pi)^{2n} \cdot \varepsilon^2.$$

viii) Ha a vii)-ben (ill. a vi)-ban)

$$U := \{V_g f \ne 0\} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^{2n} : V_g f(x,y) \ne 0\},$$

akkor (ld. 6.2.)

$$\int\int |V_g f(x,y)|^2 \cdot \chi_U(x,y)\, dx\, dy = \|V_g f\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (2\pi)^n \cdot C_{f,g},$$

más szóval teljesül a iii)-beli feltétel az $\varepsilon := 1$-re. Következésképpen a iv) szerint bármely $p > 2$ választásával

$$|\{V_g f \ne 0\}| \ge C_p^* \cdot (2\pi)^{np/(p-2)}.$$

Megjegyezzük, hogy (ld. 6.2.) a vi)-beli C_p helyébe $(4\pi/p)^{n/p}$ írható. Ezt figyelembe véve a vi)-ban

$$|\{V_g f \ne 0\}| \ge (2\pi)^n \cdot \varepsilon^{p/(p-2)} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{2n/(p-2)}$$

[34] Emlékeztetőül: $\|V_g f\|_{\mathbf{L}_p} \le C_p \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

is igaz, amiből (véve a $p := 4$-et)

$$|\{V_g f \neq 0\}| \geq (4\pi)^n \cdot \varepsilon^2$$

adódik. Hasonlóan kapjuk az előbbiekben a

$$|\{V_g f \neq 0\}| \geq (2\pi)^n \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{2n/(p-2)}$$

alsó becslést minden $p > 2$ mellett. Mivel itt

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{2/(p-2)} \to e \qquad (p \to 2+0),^{35}$$

ezért

$$|\{V_g f \neq 0\}| \geq (2\pi e)^n.$$

ix) Legyen $h \in L^2$, $u, v \in \mathbf{R}^n$ és

$$h_{u,v} := \mathcal{M}_v \mathcal{T}_u h,$$

azaz

$$h_{u,v}(t) := e^{\imath\langle t,v\rangle} \cdot h(t+u) \qquad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor tetszőleges $f, g \in L^2$ függvényekre

$$V_{f_{u,v}} g_{u,v}(x,y) = \int e^{\imath\langle t,v\rangle} g(t+u) \cdot e^{-\imath\langle x+t,v\rangle} \cdot \overline{f(t+x+u)} e^{\imath\langle t,y\rangle} dt =$$

$$e^{-\imath\langle x,v\rangle} \cdot \int g(t+u) \cdot \overline{f(t+x+u)} e^{\imath\langle t,y\rangle} dt =$$

$$e^{-\imath\langle x,v\rangle} \cdot \int g(z) \overline{f(z+x)} e^{\imath\langle z-u,y\rangle} dz =$$

$$e^{-\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} \cdot V_f g(x,y) =$$

$$e^{-\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} \cdot e^{\imath\langle x,y\rangle} \cdot \overline{V_g f(-x,-y)} \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen

$$\overline{V_{f_{u,v}} g_{u,v}(x,y)} = e^{\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} \cdot e^{-\imath\langle x,y\rangle} \cdot V_g f(-x,-y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

[35] $e := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k! = \lim_{m\to\infty} (1+1/m)^m = 2,71828182845904523536028747135...$

Ha itt a g helyett $g_{a,-b}$-t írunk valamilyen $a, b \in \mathbf{R}^n$ esetén, akkor

$$V_{g_{a,-b}} f(-x,-y) = \int f(t) \overline{g_{a,-b}(t-x)} e^{-\imath\langle t,y\rangle} dt =$$

$$\int f(t) e^{\imath\langle t-x,b\rangle} \cdot \overline{g(t-x+a)} e^{-\imath\langle t,y\rangle}\, dt = e^{-\imath\langle x,b\rangle} \cdot V_g f(a-x, b-y)$$

miatt

$$\overline{V_{f_{u,v}}(g_{a,-b})_{u,v}(x,y)} =$$

$$e^{\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} \cdot e^{-\imath\langle x,y+b\rangle} \cdot V_g f(a-x, b-y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

A Moyal-formula (ld. 6.2.) szerint így

$$\int\int e^{-\imath\langle x,y+b\rangle} \cdot V_g f(x,y) V_g f(a-x, b-y) \cdot e^{\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} dx\, dy =$$

$$\int\int V_g f(x,y) \overline{V_{f_{u,v}}(g_{a,-b})_{u,v}(x,y)}\, dx\, dy = (2\pi)^n \cdot \langle f, (g_{a,-b})_{u,v}\rangle \cdot \langle f_{u,v}, g\rangle.$$

Kiszámítva a jobb oldalt azt kapjuk, hogy

$$\langle f, g_{u,v}\rangle = \int f(t) e^{-\imath\langle t,v\rangle} \cdot \overline{g(t+u)}\, dt = V_g f(u, -v),$$

így

$$\langle f, (g_{a,-b})_{u,v}\rangle = V_{g_{a,-b}} f(u,-v) = \int f(t) \overline{g_{a,-b}(t+u)} e^{-\imath\langle t,v\rangle} dt =$$

$$\int f(t) e^{\imath\langle t+u,b\rangle} \cdot \overline{g(t+u+a)} \cdot e^{-\imath\langle t,v\rangle} dt = e^{\imath\langle u,b\rangle} \cdot V_g f(u+a, b-v),$$

továbbá

$$\langle f_{u,v}, g\rangle = \int f(t+u) e^{\imath\langle t,v\rangle} \cdot \overline{g(t)}\, dt =$$

$$\int f(z) e^{\imath\langle z-u,v\rangle} \cdot \overline{g(z-u)}\, dt = e^{-\imath\langle u,v\rangle} \cdot V_g f(-u, v).$$

A fentieket összefoglalva oda jutunk, hogy

$$\int\int e^{-\imath\langle x,y+b\rangle} \cdot V_g f(x,y) V_g f(a-x, b-y) \cdot e^{\imath(\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle)} dx\, dy =$$

$$(2\pi)^n \cdot e^{\imath\langle u,b-v\rangle} \cdot V_g f(u+a, b-v) V_g f(-u, v).$$

Az előbbi egyenlőség bal oldalán az

$$F(x,y) := e^{-\imath\langle x,y+b\rangle}\cdot V_g f(x,y)V_g f(a-x,b-y) \qquad (x,y\in\mathbf{R}^n)$$

definícióval értelmezett

$$F:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$$

függvény „kétváltozós” $\widehat{F}(v,u)$ Fourier-transzformáltja szerepel,[36] ezért

$$\widehat{F}(v,u) = (2\pi)^n\cdot e^{\imath\langle u,b-v\rangle}\cdot V_g f(u+a,b-v)V_g f(-u,v) \qquad (u,v\in\mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy ha

$$|\{V_g f\neq 0\}| < +\infty,$$

akkor

$$|\{F\neq 0\}| < +\infty$$

is fennáll, valamint a fenti, az $\widehat{F}$-ra vonatkozó egyenlőség szerint

$$|\{\widehat{F}\neq 0\}| < +\infty$$

is igaz. A Benedicks-féle eredmény (ld. 5.7. iii) megjegyzés) miatt ezért

$$F(x,y)=0 \qquad (\text{m.m. } (x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n),$$

azaz

$$V_g f(x,y)V_g f(a-x,b-y)=0 \qquad (\text{m.m. } (x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n).$$

Mivel ez az egyenlőség tetszőleges $a,b\in\mathbf{R}^n$ mellett igaz, ezért innen

$$V_g f(x,y) = (f\cdot\mathcal{T}_x\overline{g})^\wedge(y)=0 \qquad (\text{m.m. } (x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$$

következik. Így m.m. $x\in\mathbf{R}^n$ esetén

$$(f\cdot\mathcal{T}_x\overline{g})^\wedge(y)=0 \qquad (\text{m.m. } y\in\mathbf{R}^n),$$

tehát (a Fourier-transzformált injektivitására (ld. 1.2.3.) tekintettel) minden ilyen x-re

$$f(y)\overline{g(x+y)}=0 \qquad (\text{m.m. } y\in\mathbf{R}^n).$$

Ha $f\neq 0$ $(\in L^2)$, akkor valamilyen $y_0\in\mathbf{R}^n$ vektorra $f(y_0)\neq 0$ és egyúttal

$$\overline{g(x+y_0)}=0 \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}^n).$$

Mindez nyilván csak akkor lehetséges, ha $g=0$ $(\in L^2)$.

Ezzel beláttuk a következő állítást: ha $f,g\in L^2$ és a $\{V_g f\neq 0\}$ halmaz véges mértékű, akkor vagy $f=0$, vagy pedig $g=0$ (*Janssen*[37] (1998)).

[36] Általában egy $G\in\mathbf{L}^1$ függvényre $\widehat{G}(t,s) := \int\int G(x,y)e^{\imath\langle x,t\rangle}\cdot e^{\imath\langle y,s\rangle}dx\,dy \quad (t,s\in\mathbf{R}^n)$.

[37] Augustus J. E. M. Janssen (1953 –)

Irodalomjegyzék

- N. I. Ahijezer: *Előadások az approximáció elméletéről.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

- W. O. Amrein – A. M. Berthier: *On Support Properties of L^p-Functions and Their Fourier Transforms.* J. Functional Analysis 24 (1977), 258-267.

- M. Benedicks: *On Fourier Transforms of Functions Supported on Sets of Finite Lebesgue Measure.* J. Math. Anal. Appl. 106 (1985), 180-183.

- S. V. Bočkariev: *Divergent Fourier series on a set of a positive measure for any bounded orthonormal systems.* Mat. Sb. 98(140) (1975), 435-449.

- S. V. Bočkariev: *Logarithmic growth of $(C,1)$-means of Lebesgue functions of bounded orthonormal systems.* DAN SSSR, 223(1) (1975), 16-19.

- J. W. Cooley – J. W. Tukey: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.* Math. Comput. 19 (1965), 297-301.

- D. L. Donoho – P. S. Stark: *Uncertainty principles and signal recovery.* SIAM J. Appl. Math. 49(3) (1989), 906-931.

- J. Duoandikoetxea: *Fourier Analysis.* AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, 2000.

- C. L. Fefferman – E. M. Stein: *Some maximal inequalities.* Amer. J. Math. 93 (1971), 107-115.

- H. G. Feichtinger – F. Weisz: *The Segal algebra $\mathbf{S}_0(\mathbf{R}^d)$ and norm summability of Fourier series and Fourier transforms.* Monatsh. Math. 148 (2006), no. 4, 333-349.

- H. G. Feichtinger – F. Weisz: *Inversion formulas for the short-time Fourier transform.* The Journal Geometric Analysis, 16(3) (2006), 507-521.
- G. B. Folland: *Fourier Analysis and Its Applications.* AMS, Providence, Rhode Island, 2009.
- C. Gasquet – P. Witomski: *Fourier Analysis and Applications.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1999.
- L. Grafakos: *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2004.
- K. Gröchenig: *Foundations of Time-Frequency Analysis.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.
- B. S. Kasin – A. A. Saakian: *Orthogonal series.* Nauka, Moscow, 1984.
- T. Matolcsi – J. Szűcs: *Intersection des measures spectrales conjugèes,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 227 (1973), 841-843.
- A. M. Olevskii: *Fourier series with respect to general orthogonal systems.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.
- J. A. de Reyna: *Pointwise Convergence of Fourier Series.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, Lecture Notes 1785, 2002.
- W. Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York – Düsseldorf – Johannesburg, 1973.
- F. Schipp – W. R. Wade: *Transforms on normed fields.* Leaflets in Math. J. Pannonius University Pécs, 1995.
- F. Schipp – W. R. Wade – P. Simon – J. Pál: *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis.* Akadémiai Kiadó – Adam Hilger, Budapest, Bristol and New York, 1990.
- P. Simon: *On a theorem of Feichtinger–Weisz.* Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Computatorica, 39 (2013), 391-403.
- Simon Péter: *Mérték és integrál.* Egyetemi tankönyv. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

- Simon Péter: *A funkcionálanalízis alapjai.* Egyetemi tankönyv. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2017.
- Simon Péter: *Bázisok, framek, waveletek.* Egyetemi tankönyv. Europrinting, Budapest, 2018.
- Simon Péter: *Fejezetek a valós függvénytanból.* Egyetemi tankönyv. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2019.
- Simon Péter: *Válogatott fejezetek a matematikából.* Egyetemi tankönyv. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2019.
- E. M. Stein – G. Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, New Jersey, 1971.
- B. Szőkefalvi-Nagy: *Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier.* Hungarica Acta Math. 1 (1948), no. 3, 14-52.
- A. A. Teljakovskii: *Norms of trigonometrical polynomials and approximation of differentiable functions by averages of their Fourier series I.* Trudy Mat. Inst. Steklov. 62 (1961), 61-97.
- R. M. Trigub: *A connection between summability and absolute convergence of Fourier series and transforms.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 217 (1974), 34-37.
- R. M. Trigub: *Integrability of the Fourier transform of a function with compact support.* Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. 23 (1975), 124-131.
- F. Weisz: *Convergence and summability of Fourier transforms and Hardy spaces.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser, 2017.
- N. Wiener: *The Fourier integral and certain of its applications.* Cambridge Univ. Press, New York, 1933., reprint: Dover Publications, Inc., New York, 1959.
- A. Zygmund: *Trigonometric Series.* Cambridge, Univ. Press, 1959.
- V. V. Zsuk – G. I. Natanszon: *Trigonometric Fourier Series and Elements of the Theory of Approximation.* University Press, Leningrad, 1983.

Tárgymutató