EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Folytonos és diszkrét modellek

egyetemi jegyzet

A jegyzet a
TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0052
pályázat támogatásával készült

Lektorálta: Dr. Varga Zoltán egyetemi tanár

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Előszó **4**

1. Komplex függvények **6**
1.1. Komplex számok . . . 6
1.2. Komplex függvények . . . 12
1.3. Komplex vonalintegrál . . . 31
1.4. Cauchy-tétel és következményei . . . 37
1.5. Nyílt leképezések, invertálás . . . 76
1.6. Feladatok . . . 79

2. Differenciálegyenletek **83**
2.1. Szeparábilis differenciálegyenletek . . . 83
2.1.1. Feladatok . . . 93
2.2. Lineáris differenciálegyenletek . . . 95
2.2.1. Feladatok . . . 130
2.3. Másodrendű differenciálegyenletek . . . 134
2.3.1. Feladatok . . . 185

3. Laplace-transzformált **189**
3.1. A $\mathcal{D}_L$ függvényosztály . . . 189
3.2. Laplace-transzformált . . . 194
3.3. Speciális függvények Laplace-transzformáltja . . . 204
3.4. Mellin-transzformáció . . . 217
3.5. Alkalmazások . . . 232
3.5.1. Speciális kezdetiérték-problémák . . . 232
3.5.2. Lineáris differenciaegyenletek . . . 236
3.5.3. Általános kezdetiérték-problémák . . . 248
3.5.4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek . . . 253
3.5.5. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . . 255
3.5.6. Parciális differenciálegyenletek . . . 256

Tárgymutató **261**

Előszó

Ebben a jegyzetben egy rövid válogatást adunk néhány olyan témakörről, amelyek elsősorban a programtervező informatikus képzésben tanuló hallgatóknak lehetnek hasznosak. Alapvetően az MSc-s (a matematika bizonyos fejezeteire erősebben támaszkodó, szakirányú képzésekben részt vevő) hallgatóság számára íródott az anyag, de haszonnal forgathatják az érdeklődő BSc-s hallgatók (sőt, más szakosok) is. A jegyzet anyaga három fejezetre tagolódik: *komplex függvénytan, differenciál(és differencia)egyenletek, Laplace-transzformáció.* Ezek közül az első és a harmadik témakör teljesen hiányzik a szóban forgó képzésben. A differenciálegyenletekről az alapképzésben (főleg a későbbiekben a modellalkotó MSc-s szakirányt célba vevők) ugyan hallanak, de a második fejezet azok számára is segítséget kíván nyújtani, akik pl. a jel-és képfeldolgozás alapjaival akarnak megismerkedni úgy, hogy előzetesen esetleg nem hallottak a differenciálegyenletekről. Éppen ezért ebben a témakörben csupán néhány gyakorlati feladat kapcsán tárgyalunk egy-két alapvető egyenlettípust, mind a differenciálegyenleteket, mind pedig a differenciaegyenleteket illetően. Hasonló szellemben dolgozzuk fel a Laplace-transzformáció alapjait érintő kérdéseket is, számos gyakorlati alkalmazásra mutatva példát. A komplex függvénytani fejtegetések során a (többnyire egyszerű tartományokon, pl. körlemezen értelmezett) differenciálható komplex függvények, leképezések vizsgálata áll a középpontban. Így pl. törtlineáris függvények, félsíkok, körlemezek leképezései. Ennek kapcsán bevezetésre kerülnek a modern jel- és képfeldolgozás szempontjából olyan fontos függvények is, mint pl. a Malmquist–Takenaka-féle függvényrendszer elemei. Számos (részben idegen nyelvű) jegyzet, szakkönyv, monográfia áll az érdeklődők rendelkezésére. A teljesség igénye nélkül az alábbiakban ajánlunk néhány művet:

- B. Davis, *Integral Transforms and Their Applications,* Springer Verlag, Series: Texts in Applied Mathematics, Vol. 41., 3rd edition, 2002 (magyar fordítás: Műszaki Könyvkiadó, 1983.)

- G. Doetsch, *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

- J. Duncan, *Bevezetés a komplex függvénytanba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

- B. A. Fuksz - B. V. Sabat, *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

- Kósa András, *Differenciálegyenletek,* egyetemi jegyzet (több kiadásban), Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

- Pál Jenő - Schipp Ferenc - Simon Péter, *Analízis II*, egyetemi jegyzet (több kiadásban), Tankönyviadó, Budapest, 1978.

- Simon Péter, *Fejezetek az analízisből*, egyetemi jegyzet (több kiadásban), ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.

- Szőkefalvi-Nagy Béla, *Komplex függvénytan*, egyetemi jegyzet (több kiadásban),Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

Budapest, 2012. július.

1. fejezet

Komplex függvények

1.1. Komplex számok

Elöljáróban felelevenítjük a $\mathbf{C}$ komplex számtesttel kapcsolatos alapvető tudnivalókat. Vezessük be ehhez az $(a,b),(c,d)\in\mathbf{R}^2$ vektorok vonatkozásában az alábbi műveleteket (*összeadást, szorzást,* ill. *osztást*) (utóbbi esetében a $c^2+d^2>0$ feltételezéssel élve):

$$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d)\ \ ,\ \ (a,b)\cdot(c,d):=(ac-bd,ad+bc),$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}:=\frac{(a,b)\cdot(c,-d)}{c^2+d^2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

A most definiált összeadás, szorzás nyilvánvalóan kommutatív, asszociatív, ill. a szorzás az összeadásra nézve disztributív:

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)\ \ ,\ \ (a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b),$$

$$((a,b)+(c,d))\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)\quad((a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbf{R}^2).$$

Világos továbbá, hogy pl. tetszőleges $(a,b)\in\mathbf{R}^2, u,v\in\mathbf{R}$ esetén

$$(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)\ \ ,\ \ (u,0)\cdot(v,0)=(uv,0).$$

Ha az $u\equiv(u,0)$ azonosítással élünk, akkor a valós számok halmazát művelettartó módon „beágyaztuk” a komplex számok $\mathbf{C}:=\mathbf{R}^2$ halmazába:

$$u+v=(u,0)+(v,0)\ ,\ uv=(u,0)\cdot(v,0)\ ,\ \frac{s}{t}=\frac{(s,0)}{(t,0)}\quad(u,v,s,t\in\mathbf{R},t\neq 0).$$

Ezért az $\imath := (0,1)$ jelöléssel

$$(a,b) = a + \imath\cdot b.$$

(A későbbiekben - hacsak nem okozna félreértést - a szorzásra utaló pontot elhagyjuk, és pl. egyszerűen $\imath b$-t írunk.) A $z := (a,b) = a + \imath b$ *komplex szám* esetén a $\mathrm{Re}\, z := a$ valós számot a z *valós* (vagy *reális*) *részének,* az $\mathrm{Im}\, z := b$ valós számot pedig a z *képzetes* (vagy *imaginárius*) *részének* nevezzük. A $\overline{z} := a - \imath b$ komplex szám a z *konjugáltja,* a $|z| := \sqrt{z\cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ nemnegatív valós szám pedig a z *abszolút értéke.* Nyilvánvaló, hogy a $z \in \mathbf{C}$ szám pontosan akkor valós szám, ha $\mathrm{Im}\, z := 0$, továbbá

$$\overline{\overline{z}} = z \ \ , \ \ \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \ \ , \ \ \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2\imath} \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

Egyszerűen ellenőrizhetők az alábbiak:

$$\overline{\imath} = -\imath \ \ , \ \ \imath^2 = -1 \ \ , \ \ \frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} \qquad (z, w \in \mathbf{C}, w \neq 0).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \ \ , \ \ \overline{zw} = \overline{z}\cdot \overline{w} \ \ , \ \ \overline{\left(\frac{z}{v}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{v}} \ \ , \ \ |\imath| = 1 \ \ , \ \ |z| = |\overline{z}|,$$

$$|zw| = |z|\cdot |w| \ \ , \ \ \left|\frac{z}{v}\right| = \frac{|z|}{|v|} \qquad (z, w, v \in \mathbf{C}, v \neq 0).$$

Ha $z, w \in \mathbf{C}$, akkor a $z = w$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$ és $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$, ill. $|z| = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $z = 0$. Egyszerű számolással igazolhatók az ún. *háromszög-egyenlőtlenségek*:

$$|z+w| \leq |z| + |w| \ \ , \ \ ||z| - |w|| \leq |z - w| \qquad (z, w \in \mathbf{C}).$$

Legyen $0 \neq z = a + \imath b \in \mathbf{C}$, ekkor

$$z = |z| \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \imath \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Mivel

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

ezért egyértelműen létezik olyan $\theta \in (-\pi, \pi]$, amellyel

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta \ \ , \ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta.$$

Az $\arg z := \theta$ „szöget” a z *argumentumának* nevezzük. Tehát

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \ , \ \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Pl. $\arg\imath = \pi/2$, $\arg x = 0 \quad (0 < x \in \mathbf{R})$, $\arg t = \pi \quad (0 > t \in \mathbf{R})$. Következésképpen

$$z = |z|\cdot(\cos\theta + \imath\sin\theta)$$

(a z szám *trigonometrikus alakja*). Állapodjunk meg az alábbi tömör jelölésben: valamely $x \in \mathbf{R}$ valós szám esetén legyen

$$e^{\imath x} := \cos x + \imath \sin x.$$

Ekkor $e^{\imath x} = e^{\imath(x+2k\pi)}$ $(k \in \mathbf{Z})$, ill. $|e^{\imath x}| = 1$, és $z = |z|e^{\imath \arg z}$. Könnyen belátható továbbá, hogy ha $0 \neq z, w \in \mathbf{C}$ és $\theta := \arg z$, $\eta := \arg w$, akkor

$$zw = |z|\cdot|w|e^{\imath(\theta+\eta)} = |z|\cdot|w|\cdot(\cos(\theta+\eta) + \imath\sin(\theta+\eta)),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\cdot e^{\imath(\theta-\eta)} = \frac{|z|}{|w|}\cdot(\cos(\theta-\eta) + \imath\sin(\theta-\eta)).$$

Innen (pl. teljes indukcióval) adódik, hogy

$$z^n = |z|^n\cdot e^{\imath n\theta} = |z|^n\cdot(\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)) \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

(*Moivre-formula*). A most mondottak mintegy „megfordításaként” jutunk el a gyökvonáshoz a komplex számok körében. Ha ui. $z = |z|\cdot e^{\imath\theta}$ a $0 \neq z \in \mathbf{C}$ szám fenti trigonometrikus alakja és $2 \leq m \in \mathbf{N}$, akkor a

$$z_{mk} := \sqrt[m]{|z|}\cdot e^{\imath(\theta+2k\pi)/m} \qquad (k = 0, ..., m-1)$$

számokra a Moivre-formula és $|z_{mk}| = \sqrt[m]{|z|}$ alapján

$$z_{mk}^m = \left(\sqrt[m]{|z|}\cdot e^{\imath(\theta+2k\pi)/m}\right)^m = |z|\cdot e^{\imath(\theta+2k\pi)} = |z|\cdot e^{\imath\theta} = z$$

teljesül. Legyen ezek után

$$\sqrt[m]{z} := \begin{cases} 0 & z = 0 \\ & \\ z_{mk} & (0 \neq z) \end{cases} \qquad (z \in \mathbf{C})$$

($z \neq 0$ esetén bármelyik $k = 0, ..., m-1$ mellett) a z szám *m-edik gyöke.* Mivel

$$|\sqrt[m]{z}| = \sqrt[m]{|z|},$$

ezért (ha $z \neq 0$) a z_{mk} $(k = 0, ..., m-1)$ gyökök a komplex síkon egy origó középpontú és $\sqrt[m]{|z|}$ sugarú körön helyezkednek el egy szabályos m-szög csúcspontjaiként. Ha pl. $m = 2$, akkor

$$\sqrt{z} := \sqrt[2]{z} = \begin{cases} \sqrt{|z|} \cdot e^{\imath\theta/2} \\ \\ \sqrt{|z|} \cdot e^{\imath(\pi+\theta/2)}, \end{cases}$$

ahol a $w := \sqrt{|z|} \cdot e^{\imath\theta/2}$ jelöléssel $\sqrt{|z|} \cdot e^{\imath(\pi+\theta/2)} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\imath\theta/2} \cdot e^{\imath\pi} = -w$. Az előbb említett szabályos sokszög most egy, az origóra szimmetrikus szakasz, amelynek a végpontjai $-w$ és w. Ha $0 \neq z \in \mathbf{R}$, akkor a szóban forgó szabályos m-szög szimmetrikus a valós tengelyre. Ui. $z > 0$ esetén $\theta = 0$ és $z_{m0} = \sqrt[m]{z} \in \mathbf{R}$, ill. tetszőleges $k = 1, ..., m-1$ indexre

$$\overline{z_{mk}} = \sqrt[m]{z} \cdot e^{-2k\pi\imath/m} = \sqrt[m]{z} \cdot e^{2\pi\imath(m-k)/m} = z_{mm-k}.$$

Ha viszont $z < 0$, akkor $\theta = \pi$ és

$$\overline{z_{mk}} = \sqrt[m]{|z|} \cdot e^{-\imath(\pi+2k\pi)/m} = \sqrt[m]{|z|} \cdot e^{\imath(-\pi+2(m-k)\pi)/m} =$$

$$\sqrt[m]{|z|} \cdot e^{\imath(\pi+2(m-k-1)\pi)/m} = z_{mm-k-1}.$$

Az is könnyen látható továbbá, hogy ha az m „kitevő” még páros is (mondjuk $m = 2j$ valamilyen $0 < j \in \mathbf{N}$ számmal), akkor a sokszögünk a képzetes tengelyre is szimmetrikus. Ti. ebben az esetben $z > 0$ és $k = 0, ..., j-1$ mellett (a $z < 0$ eset hasonlóan kezelhető)

$$z_{mk} = \sqrt[m]{z} \cdot e^{2k\pi\imath/m} = \sqrt[m]{z} \cdot e^{k\pi\imath/j} = \sqrt[m]{z} \cdot (\cos(k\pi/j) + \imath \sin(k\pi/j)),$$

aminek a képzetes tengelyre való tükörképe

$$\sqrt[m]{z} \cdot (-\cos(k\pi/j) + \imath \sin(k\pi/j)) = \sqrt[m]{z} \cdot (\cos(\pi - k\pi/j) + \imath \sin(\pi - k\pi/j)) =$$

$$\sqrt[m]{z} \cdot (\cos((j-k)\pi/j) + \imath \sin((j-k)\pi/j)) = \sqrt[m]{z} \cdot e^{(j-k)\pi\imath/j} = z_{mj-k},$$

ha pedig $k = j, ..., 2j-1$, akkor

$$\sqrt[m]{z}\cdot(-\cos(k\pi/j)+\imath\sin(k\pi/j)) = \sqrt[m]{z}\cdot(\cos(k\pi/j-\pi)+\imath\sin(k\pi/j-\pi)) =$$

$$\sqrt[m]{z}\cdot(\cos((k-j)\pi/j)+\imath\sin((k-j)\pi/j)) = \sqrt[m]{z}\cdot e^{(k-j)\pi\imath/j} = z_{mk-j}.$$

Így páros m esetén (lévén a sokszög a valós tengelyre is meg a képzetes tengelyre is szimmetrikus) azt kapjuk, hogy az m-edik gyökök csúcspontjai által meghatározott szabályos m-szög szimmetrikus az origóra is. Ez utóbbin semmi „meglepő" sincs, hiszen páros oldalszámú szabályos sokszög centrálszimmetrikus. Következésképpen

$$\{z_{mk} : k = 0, ..., m-1\} = \{-z_{mk} : k = 0, ..., m-1\},$$

ami „algebrailag" is könnyen ellenőrizhető. Pl. $z > 0$ esetén

$$-z_{mk} = -\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath 2k\pi/m} = e^{\imath\pi}\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath 2k\pi/m} = \sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath(m+2k)\pi/m} =$$

$$\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath(j+k)2\pi/m} = z_{mj+k} \qquad (k = 0, ..., j-1),$$

míg $k = j, ..., m-1 = 2j-1$ mellett legyen $k = j+l \quad (l = 0, ..., j-1)$, amikor is

$$-z_{mk} = -\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath 2k\pi/m} = e^{\imath\pi}\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath(j+l)2\pi/m} = \sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath j2\pi/m}e^{\imath(j+l)2\pi/m} =$$

$$\sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath(2j+l)2\pi/m} = \sqrt[m]{z}\cdot e^{\imath 2l\pi/m} = z_{ml}.$$

Nyilvánvaló egyébként, hogy

$$(-z_{mk})^m = (-z_{mk})^{2j} = (-1)^{2j}\cdot z_{mk}^{2j} = z_{mk}^m = z \qquad (k = 0, ..., m-1).$$

Legyen $z := 1$, ekkor $|z| = 1$, $\theta = 0$, és az

$$e_{mk} := 1_{mk} = e^{2k\pi\imath/m} \qquad (k = 0, ..., m-1)$$

számok az ún. *m-edik egységgyökök*: $(e_{mk})^m = 1$. A fentiek szerint bármely $0 \neq z \in \mathbf{C}$ számra

$$z_{mk} = \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|}\cdot e^{\imath\theta/m}\cdot e_{mk} \qquad (k = 0, ..., m-1)$$

(ahol most $\theta := \arg z$). Világos, hogy $0 \leq z \in \mathbf{R}$ esetén $\sqrt[m]{0} = 0$, ill.

$z_{m0} = \sqrt[m]{z}$ a valós számok körében „megszokott” m-edik gyöke a z-nek. Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha $z \in \mathbf{R}$ egy negatív szám és m páratlan ($m = 2j+1$ valamilyen $1 \leq j \in \mathbf{N}$ esetén). Ekkor ui. $z = |z| \cdot e^{\imath\pi}$, és

$$z_{mj} = \sqrt[m]{|z|} \cdot e^{\imath(\pi+2j\pi)/(2j+1)} = \sqrt[m]{|z|} \cdot e^{\imath\pi} = -\sqrt[m]{-z}$$

a valós számkörben definiált m-edik gyöke a z-nek.

1.1. Megjegyzések

i) Képzeljük el, hogy a $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ síkon (*komplex számsíkon*) az origóban (azaz a $0 = (0,0)$ pontban) elhelyezünk egy (mondjuk egységnyi átmérőjű), a síkot érintő gömböt. A gömb „északi pólusát” (azaz a 0-nak a gömb középpontjára vonatkozó tükörképét) jelöljük Q-val. Ha $z := R \in \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, akkor a $\overline{QR}$ szakasz pontosan egy (a Q ponttól különböző) P pontban metszi a gömb $\mathcal{S}$ felületét. Világos, hogy az így definiált $\mathbf{C} \ni z \mapsto \varphi(z) := P \in \mathcal{S} \setminus \{Q\}$ *sztereografikus projekció* bijektív leképezés.

ii) Több szempontból is hasznos a $\mathbf{C}$ komplex számsíkot egy ∞ *végtelen távoli elemmel* bővíteni: $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, amikor is legyen $\varphi(\infty) := Q$. Az így kiterjesztett φ sztereografikus projekció bijektív módon képezi le a $\overline{\mathbf{C}}$ halmazt az $\mathcal{S}$ *komplex számgömbre* (vagy más szóval a *Riemann-gömbre*).

iii) Nem nehéz meggondolni pl., hogy ha az $\ell \subset \mathbf{C}$ halmaz *egyenes,* azaz valamilyen $w, v \in \mathbf{C}, v \neq 0$ paraméterekkel $\ell = \{w + tv \in \mathbf{C} : t \in \mathbf{R}\}$ (a ∞ elemet is ℓ-be értve), akkor az illető egyenesnek a sztereografikus projekció által létesített $\varphi[\ell]$ képe egy olyan gömbi kör, amely átmegy a Q ponton. (Ti. a Q-n és ℓ-en átmenő síknak a gömb felületével való metszete.)

iv) A $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ egyenest *valós tengelynek,* a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ egyenest pedig *képzetes tengelynek* szokás nevezni.

1.2. Komplex függvények

Egy $a \in \mathbf{C}$ komplex szám és $0 < r \in \mathbf{R}$ esetén legyen

$$K(a) := K_r(a) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$$

az a szám r *sugarú környezete.* Geometriailag ez nem más, mint a $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ komplex számsíkon az a középpontú és r sugarú nyílt (azaz a határoló körvonal nélküli) körlemez. Legyen

$$\overline{K(a)} := \overline{K_r(a)} := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| \leq r\}$$

az a középpontú és r sugarú „zárt” körlemez.

Ha $\emptyset \neq U \subset \mathbf{C}$, akkor az $a \in U$ pont *belső pontja* U-nak, ha alkalmas $K(a)$ környezetre $K(a) \subset U$. Az $U \subset \mathbf{C}$ halmazt *nyíltnak* nevezzük, ha $U = \emptyset$, vagy az U minden pontja belső pontja is egyúttal. A $V \subset \mathbf{C}$ halmaz *zárt,* ha $\mathbf{C} \setminus V$ nyílt.

Azt mondjuk, hogy a $z_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat *konvergens,* ha alkalmas $\alpha \in \mathbf{C}$ komplex számmal bármely $K(\alpha)$ esetén $z_n \in K(\alpha)$ teljesül majdnem minden (m.m.) $n \in \mathbf{N}$ indexre. Utóbbin azt értjük, hogy a szóban forgó $K(\alpha)$ környezethez megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ (*küszöb*-)index, amellyel $z_n \in K(\alpha) \quad (N < n \in \mathbf{N})$. Eléggé nyilvánvaló, hogy mindez ekvivalens a következővel: létezik olyan $\alpha \in \mathbf{C}$, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $|z_n - \alpha| < \varepsilon \quad (N < n \in \mathbf{N})$. Egyszerűen adódik az is, hogy ha van ilyen α, akkor egyetlen ilyen α létezik. Következésképpen van értelme az alábbi definíciónak: ha a $z_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, akkor az előbbi α-t az illető sorozat *határértékének* (vagy *limeszének*) nevezzük, és (pl.) az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} z_n := \lim(z_n) := \alpha.$$

Azt is mondjuk, hogy a szóban forgó sorozat a-hoz *konvergál.* Ha itt

$$x_n := \operatorname{Re} z_n\,,\; y_n := \operatorname{Im} z_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a definíció alapján rögtön adódik az alábbi ekvivalencia:

$$\lim(z_n) = \alpha \iff \lim(x_n) = \operatorname{Re}\alpha\,,\; \lim(y_n) = \operatorname{Im}\alpha.$$

Komplex függvényen olyan leképezést fogunk érteni, amely komplex számhoz komplex számot rendel: $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Komplex függvények pl. az alábbiak:

$$\mathbf{C} \ni z \mapsto \overline{z}\;,\;\; \mathbf{C} \ni z \mapsto |z|\;,\;\; (\mathbf{C} \setminus \{0\}) \ni z \mapsto \imath/z.$$

Különösen fontosak a *racionális* (vagy *lineáris*) *törtfüggvények,* nevezetesen: adott $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ együtthatókkal legyen

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\}).$$

(Természetes kikötésként hallgatólagosan feltételezzük, hogy $|c| + |d| > 0$, azaz c és d ne lehessen egyszerre nulla.) Ha $c = 0$, akkor az $\tilde{a} := a/d$, $\tilde{b} := b/d$ jelölésekkel

$$f(z) := \frac{az+b}{d} = \tilde{a}z + \tilde{b} \qquad (z \in \mathbf{C})$$

egy ún. *lineáris függvény.* Ha pedig $ad = bc$, akkor könnyen láthatóan f konstans függvény. Ti. ha még $b \neq 0$, $d \neq 0$ is teljesül, akkor $a/b = c/d$ és

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d} \cdot \frac{az/b+1}{cz/d+1} = \frac{b}{d} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\}).$$

Ha viszont $b = 0$, akkor $a = 0$, vagy $d = 0$ és

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ \\ \frac{a}{c} & (d = 0) \end{cases} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\}).$$

Hasonlóan, ha $d = 0$, akkor a $|c| + |d| > 0$ feltételezésünk miatt $c \neq 0$, azaz szükségszerűen $b = 0$ és

$$f(z) = \frac{a}{c} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}).$$

Következésképpen az „igazi" racionális törtfüggvények vizsgálatakor általában azt is fel szokták tenni, hogy $c \neq 0$ és $ad \neq bc$. Ekkor

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\}).$$

Ha tehát $\alpha \in \mathbf{C}$, $0 \neq \beta \in \mathbf{C}$ és

$$F_\alpha(z) := z + \alpha \;\;,\;\; G_\beta(z) := \beta z \quad (z \in \mathbf{C}) \;\;,\;\; H(z) := \frac{1}{z} \quad (0 \neq z \in \mathbf{C}),$$

akkor az előbbi f racionális törtfüggvény az F, G, H függvények megfelelő kompozíciójaként állítható elő. Nevezetesen, legyen

$$\alpha := \frac{a}{c} \;\;,\;\; \beta := \frac{bc - ad}{c^2} \;\;,\;\; \gamma := \frac{d}{c},$$

ekkor

$$f(z) = F_\alpha(G_\beta(H(F_\gamma(z)))) \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\}).$$

Az itt szereplő F_α függvény „hatása" (geometriailag) egy párhuzamos eltolás a komplex számsíkon. Ha a G_β függvényt „tovább bontjuk" az alábbiak szerint:

$$G_\beta(z) = \frac{\beta}{|\beta|} \cdot |\beta| z \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

akkor a G_β függvény a $\mathbf{C} \ni z \mapsto |\beta| z$ „nagyítás" (vagy „kicsinyítés) és a $\mathbf{C} \ni z \mapsto \beta z/|\beta|$ „forgatás" kompozíciója. Ugyanakkor a

$$H(z) = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{z}{|z|^2}\right)} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C})$$

előállítás alapján pedig a H függvény a valós tengelyre való $\mathbf{C} \ni z \mapsto \overline{z}$ „tükrözés" és az origó középpontú, egységsugarú körre való $\mathbf{C} \ni z \mapsto z/|z|^2$ „inverzió" kompozíciója. (Emlékeztetünk az inverzió fogalmára. Legyen ehhez adott valamely síkban egy O középpontú $r\,(> 0)$ sugarú kör. Ekkor a szóban forgó körre vonatkozó inverzió az említett sík egy $P \neq O$ pontjához az $\overline{OP}$ szakasznak azt az R pontját rendeli hozzá, amelyre $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OR}| = r^2$. Ha a síkot egy ∞ „végtelen távoli ponttal" kibővítjük, akkor az inverzió rendelje O-hoz ∞-t és viszont. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha pl. a P pont a körlemezen kívül van, akkor az R pont nem más, mint a P-ből a körhöz húzott (bármelyik) érintő érintési pontjának a merőleges vetülete az $\overline{OP}$ szakaszra.) Mivel az előbb említett geometriai transzformációk kört körbe vagy egyenesbe, egyenest körbe vagy egyenesbe visznek át, ezért ugyanez igaz a racionális törtfüggvényekre is: ha $U \subset \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ kör vagy egyenes, akkor az $f[U]$ képhalmaz is kör vagy egyenes (az $f(\infty) := a/c$ kiegészítéssel). Bármely $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvény esetén

$$f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + \imath \operatorname{Im}(f(z)) \qquad (z \in \mathcal{D}_f).$$

Legyen

$$f_1(z) := \operatorname{Re}(f(z)) \ , \ f_2(z) := \operatorname{Im}(f(z)) \qquad (z \in \mathcal{D}_f)$$

(az f függvény *valós,* ill. *képzetes része*). Ekkor $f_1, f_2 \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ és $f = f_1 + \imath f_2$. A komplex számok fenti $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ modelljére gondolva az itt szereplő f_1, f_2 függvények tekinthetők kétváltozós valós függvényeknek is: $f_1, f_2 \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Ha pl.

$$f(z) := \frac{1}{z} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}),$$

akkor

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \imath y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \imath \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad (0 \neq z = x + \imath y \in \mathbf{C})$$

alapján

$$f_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad f_2(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad ((0, 0) \neq (x, y) \in \mathbf{R}^2).$$

Az f komplex függvényt *folytonosnak* mondjuk valamely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$, hacsak $z \in \mathcal{D}_f$ és $|z - a| < \delta$. A most mondottakat a sorozatok nyelvén megfogalmazva ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim (f(z_n)) = f(a)$ teljesül minden olyan $z_n \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra, amelyre $\lim(z_n) = a$ (*átviteli elv*). Nem nehéz ellenőrizni, hogy mindez azzal ekvivalens, hogy az előbb értelmezett f_1, f_2 függvények (mint $\mathbf{C} \to \mathbf{R}$ függvények) folytonosak a-ban. Ha egy f komplex függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f *folytonos.*

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya nyílt halmaz, és $a \in \mathcal{D}_f$. Az f függvény *differenciálható* az a helyen, ha van olyan $w \in \mathbf{C}$ komplex szám, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = w$$

teljesül minden olyan $z_n \in \mathcal{D}_f \;\; (n \in \mathbf{N})$ sorozatra, amely a-hoz konvergál. Minderre az $f \in D\{a\}$ jelölést fogjuk használni. Könnyű belátni, hogy ekkor egyetlen ilyen w létezik, amelyet az f függvény a-beli *deriváltjának* (vagy *differenciálhányadosának*) nevezünk és az $f'(a)$ szimbólummal jelölünk: $f'(a) := w$. Ha

$$\mathcal{D}_{f'} := \{a \in \mathcal{D}_f : f \in D\{a\}\} \neq \emptyset,$$

akkor az

$$\mathcal{D}_{f'} \ni a \mapsto f'(a) \in \mathbf{C}$$

módon értelmezett (komplex) függvényt az f *deriváltfüggvényének* nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük. Ha $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$, azaz az f függvény minden $a \in \mathcal{D}_f$ pontban differenciálható, akkor azt mondjuk röviden, hogy az f *differenciálható.* Ha f' folytonos valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, akkor f-et a-ban *folytonosan differenciálhatónak* nevezzük. Ha ez minden $a \in \mathcal{D}_f$ mellett fennáll, akkor f *folytonosan differenciálható.* Megjegyezzük, hogy a differenciálható komplex függvények körében is igazak az egyváltozós valós függvényekre fennálló elemi „deriválási szabályok”: ha $f, g \in D\{a\}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, akkor $\alpha f + \beta g, fg \in D\{a\}$ és

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad , \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Ha még $g(a) \neq 0$ is igaz, akkor $f/g \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Legyen $a = u + \imath v$ $(u := \operatorname{Re} a, v := \operatorname{Im} a)$. Ekkor az $f = f_1 + \imath f_2 \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltétel azzal ekvivalens, hogy az f_1, f_2 (mint kétváltozós valós) függvények differenciálhatók (u, v)-ben, és fennállnak az ún. *Cauchy-Riemann-egyenlőségek*:

$$\partial_1 f_1(u, v) = \partial_2 f_2(u, v) \quad , \quad \partial_2 f_1(u, v) = -\partial_1 f_2(u, v).$$

Továbbá

$$f'(a) = \partial_1 f_1(u, v) + \imath \partial_1 f_2(u, v) = \partial_2 f_2(u, v) - \imath \partial_2 f_1(u, v).$$

Így a fenti $f(z) = 1/z$ $(0 \neq z \in \mathbf{C})$ függvény esetén

$$\partial_1 f_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \partial_2 f_1(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\partial_1 f_2(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \partial_2 f_2(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Következésképpen

$$f'(a) = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \imath \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2},$$

ill. az előbb idézett deriválási szabályokat alkalmazva (ellenőrzésül)

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2} = -\frac{\overline{a^2}}{|a|^4} = -\frac{\overline{u^2 - v^2 + 2\imath uv}}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \imath \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Ha viszont $f(z) := \overline{z}$ $(z \in \mathbf{C})$, akkor

$$f_1(x, y) = x \quad , \quad f_2(x, y) = -y \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

miatt

$$\partial_1 f_1(x, y) = 1 \neq -1 = \partial_2 f_2(x, y) \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2),$$

azaz ez az f függvény egyetlen $a \in \mathbf{C}$ helyen sem differenciálható.

Valamely f komplex függvény (adott pontbeli) többszöri (esetleg végtelen sokszori) differenciálhatóságát az egyváltozós valós függvényekkel analóg módon értelmezzük, és a valós analízisben megszokott jelöléseket használjuk. Így pl. $D^n\{a\}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ jelenti az a-ban n-szer differenciálható komplex függvények halmazát, $f^{(n)}(a)$ pedig az f függvény a-beli n-edik deriváltját. A differenciálható komplex függvények fontos osztályát alkotják a hatványsorok összegfüggvényei. Tegyük fel, hogy adottak az $a_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ komplex „együtthatók" és az $a \in \mathbf{C}$ „középpont". Az ismert *Cauchy-Hadamard-tétel* szerint van olyan $r \geq 0$ szám vagy $r = +\infty$, hogy

- tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $|z - a| < r$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ végtelen sor (*hatványsor*) abszolút konvergens, ill.

- bármely $z \in \mathbf{C}$, $|z - a| > r$ mellett az előbbi hatványsor divergens.

Ha itt $r > 0$, akkor belátható, hogy az

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n \qquad (z \in \mathbf{C}, |z - a| < r)$$

függvény végtelen sokszor differenciálható és

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Sőt, a komplex függvénytan alaptétele (ld. később) egyik fontos következményeként kapjuk az alábbi állítást: ha az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvény differenciálható, akkor végtelen sokszor is differenciálható, és tetszőleges $a \in \mathcal{D}_f$ esetén egy alkalmas $0 < r \leq +\infty$ mellett

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \qquad (z \in \mathbf{C}, |z - a| < r).$$

Speciálisan

$$e^z := \exp z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

$$\sin z := \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

$$\cos z := \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad (z \in \mathbf{C})$$

a (komplex) *exponenciális, szinusz, koszinusz* függvény. A hatványsorokkal kapcsolatos műveleti szabályok alapján adódik az ún. *Euler-összefüggés*:

$$e^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z \qquad (z \in \mathbf{C})$$

(ld. a komplex számok fenti trigonometrikus alakját), azaz

$$\cos z = \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2} \;,\; \sin z = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath} \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

Hasonlóan, a hatványsorok szorzására hivatkozva kapjuk, hogy

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \;,\; \sin(z \pm w) = \sin z \cdot \cos w \pm \cos z \cdot \sin w,$$

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cdot \cos w \mp \sin z \cdot \sin w \qquad (z, w \in \mathbf{C}).$$

1.2. Megjegyzések

i) Ha $f \in D^2$, akkor a fentiekben szereplő f_1, f_2 függvények kétszer differenciálhatóak és a jól ismert Young-tétel alapján

$$\partial_{12} f_i = \partial_{21} f_i \qquad (i = 1, 2).$$

A Cauchy-Riemann-egyenlőségek szerint viszont

$$\partial_{12} f_1 = \partial_{22} f_2 \;,\; \partial_{21} f_1 = -\partial_{11} f_2,$$

azaz $\partial_{22} f_2 = -\partial_{11} f_2$ (és ugyanígy) $\partial_{22} f_1 = -\partial_{11} f_1$. Következésképpen

$$\Delta f_i := \partial_{11} f_i + \partial_{22} f_i = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Más szóval az f_1, f_2 függvények eleget tesznek a $\Delta g = 0$ *Laplace-egyenletnek.*

ii) A Laplace-egyenletnek eleget tevő függvények az ún. *harmonikus függvények.* Következésképpen $f \in D^2$ esetén f_1, f_2 harmonikus függvények. Ha adott a $g \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ harmonikus függvény, akkor a $h \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvény a g *harmonikus társa,* ha az

$$f := g + \imath h \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

komplex függvény kétszer differenciálható. A fentiek szerint ennek szükséges feltétele, hogy a h függvény tegyen eleget a Laplace-egyenletnek.

iii) Értelmezzük a *komplex logaritmusfüggvényt* a következőképpen:

$$\log(z) := \log z := \ln(|z|) + \imath \arg z \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}).$$

Ekkor a $\log : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$ függvény a valós logaritmusfüggvény (ln) kiterjesztése, ui. $0 < z \in \mathbf{R}$ esetén $|z| = z$, és $\arg z = 0$, így $\log z = \ln z$. Ha pl. $z \in \mathbf{R}$, és $z < 0$, akkor $|z| = -z$, és $\arg z = \pi$, ezért $\log z = \ln(-z) + \imath\pi$. Világos továbbá, hogy pl. $\log \imath = \imath\pi/2$. A log előbbi definíciójából rögtön következik, hogy $z, w \in \mathbf{C}, w \neq 0$ esetén

$$e^z = w \iff z = \log w + 2n\pi\imath \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

iv) Belátható, hogy minden $z \in \mathbf{C}\setminus(-\infty, 0]$ helyen $\log \in D\{z\}$ és $\log' z = 1/z$. (Megjegyezzük, hogy könnyen láthatóan az $x \in (-\infty, 0)$ „negatív helyeken" a log függvény még csak nem is folytonos.)

v) Komplex függvények határértéke a valós függvényekével analóg módon értelmezhető. Legyen ehhez $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ és tegyük fel, hogy az $a \in \mathbf{C}$ hely *torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$-nek: bármely $K(a)$ esetén a $K(a) \cap \mathcal{D}_f$ halmaz végtelen számosságú. Azt mondjuk, hogy f-nek *van határértéke a-ban,* ha alkalmas $A \in \mathbf{C}$ esetén minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(z) - A| < \varepsilon \qquad (a \neq z \in \mathcal{D}_f, |z - a| < \delta)$$

teljesül. Megmutatható, hogy ekkor egyértelműen létezik ilyen A, amelyet az f függvény *a-beli határértékének* nevezünk, és a

$$\lim_a f := \lim_{z \to a} f(z) := A$$

szimbólumok valamelyikével jelölünk. Mindez ekvivalens azzal, hogy tetszőleges a-hoz konvergáló $a \neq z_n \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra $\lim(f(z_n)) = A$ (*átviteli elv*).

vi) Nyilvánvaló, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f$ egyúttal torlódási pontja is $\mathcal{D}_f$-nek, akkor az f függvény a-beli folytonossága azt jelenti, hogy létezik a $\lim_a f$ határérték és $\lim_a f = f(a)$. Pl. egy nyílt halmaznak minden pontja egyúttal torlódási pontja is a szóban forgó halmaznak. Az $f \in D\{a\}$ differenciálhatóság, ill. az $f'(a)$ derivált a határérték nyelvén megfogalmazva a következő:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Egyszerűen adódik továbbá, hogy ha $f \in D\{a\}$, akkor f folytonos is a-ban.

vii) A racionális törtfüggvények között különösen fontosak a következő alakúak:

$$f_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (1/\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C}),$$

ahol $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}, |\alpha| \neq 1$ (ún. *Blaschke-függvények*). Egyszerű számolással igazolható, hogy az f_α függvény injektív, és

$$\mathcal{R}_{f_\alpha} = \mathbf{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\} = \mathcal{D}_{f_\alpha}.$$

Ha ui. $u, z \in \mathcal{D}_\alpha f$, akkor

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(u) \iff (z-\alpha)(1-\overline{\alpha}u) = (1-\overline{\alpha}z)(u-\alpha) \iff$$

$$u - z = |\alpha|^2(u-z),$$

ami $|\alpha| \neq 1$ miatt azzal ekvivalens, hogy $z = u$. Hasonlóan, legyen $w \in \mathbf{C}$, és $-1/\overline{\alpha} \neq w$, akkor

$$\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} = w \iff z - \alpha = w - \overline{\alpha}wz \iff z = f_{-\alpha}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}.$$

Ugyanakkor $|\alpha| \neq 1$ miatt

$$|\alpha|^2 \neq 1 \implies |\alpha|^2 + w\overline{\alpha} \neq 1 + \overline{\alpha}w \implies \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w} \neq \frac{1}{\overline{\alpha}},$$

így $z \in \mathcal{D}_{f_\alpha}$ és $f_\alpha(z) = w$. Beláttuk tehát, hogy

$$f_\alpha : \mathbf{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\} \to \mathbf{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\}$$

bijekció, és $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$.

viii) Könnyű meggondolni továbbá, hogy ha $0 \neq \alpha \in K_1(0)$, akkor

$$z, v, w \in \mathbf{C}\ ,\ |z| < 1\ ,\ |v| = 1\ ,\ |w| > 1\ ,\ w \neq 1/\overline{\alpha}$$

esetén

$$|f_\alpha(z)| < 1\ \ ,\ |f_\alpha(v)| = 1\ \ ,\ \ |f_\alpha(w)| > 1.$$

Valóban, ha $u \in \mathcal{D}_{f_\alpha}$, akkor

$$\delta_u := |u-\alpha|^2 - |1-\overline{\alpha}u|^2 = (\alpha-u)(\overline{\alpha}-\overline{u}) - (1-\overline{\alpha}u)(1-\overline{u}\alpha) =$$

$$|\alpha|^2 + |u|^2 - 1 - |\alpha|^2|u|^2 = (1 - |\alpha|^2)(|u|^2 - 1).$$

Mivel $|\alpha| < 1$, azaz $1 - |\alpha|^2 > 0$, ezért

$$\begin{cases} \delta_u > 0 \\ \delta_u = 0 \\ \delta_u < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |u| > 1 \\ |u| = 1 \\ |u| < 1. \end{cases}$$

Ez pontosan azt jelenti, amit állítottunk. A geometriaia nyelvén tehát egy Blaschke-függvény a $K_1(0)$ (nyílt) *egységkörlemezt,* a $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ *egységkört* és a $\overline{K_1(0)}$ zárt egységkörlemez komplementerét („kilyukasztva” az $1/\overline{\alpha}$ pontban) rendre önmagára képezi le bijektív módon. Nyilvánvaló, hogy mindez igaz marad minden olyan f függvényre, amely valamilyen $q \in \mathbf{C}, |q| = 1$ számmal $f = qf_\alpha$ alakú.

ix) Legyen $u, v \in K_1(0)$ esetén

$$\rho(u, v) := |f_v(u)| = \frac{|u - v|}{|1 - u\overline{v}|},$$

ahol (a továbbiakban is) $f_0(z) := z \quad (z \in \mathbf{C})$. Ekkor a ρ függvény *metrika* (azaz $\rho(u, v)$ tekinthető az u, v pontok *távolságának*), és tetszőleges $0 \neq \alpha \in K_1(0)$ paraméterrel

$$(*) \qquad \rho(f_\alpha(u), f_\alpha(v)) = \rho(u, v) \qquad (u, v \in K_1(0)).$$

Valóban, a $\rho(u, v) \geq 0 \ (u, v \in K_1(0))$ egyenlőtlenség, ill. a

$$\rho(u, v) = 0 \iff u = v \qquad (u, v \in K_1(0))$$

ekvivalencia nyilvánvaló. Mivel $|u - v| = |v - u|$, ill.

$$|1 - u\overline{v}| = |\overline{1 - u\overline{v}}| = |1 - v\overline{u}|,$$

ezért $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad (u, v \in K_1(0))$ is azonnal következik. Az ún. *háromszög-egyenlőtlenséghez* azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $u, v, w \in K_1(0)$ esetén

$$\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v).$$

Speciálisan, a $w := 0$ választással

$$(**) \qquad \rho(u, v) = \frac{|u - v|}{|1 - u\overline{v}|} \leq \rho(u, 0) + \rho(0, v) = |u| + |v|.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy a $(*)$ egyenlőségből és a $(**)$ egyenlőtlenségből együttesen a háromszög-egyenlőtlenség már következik. Ekkor ui. $(*)$, $(**)$, és a triviális $f_w(w) = 0 \quad (w \in K_1(0))$ egyenlőség miatt

$$\rho(u,v) = \rho(f_w(u), f_w(v)) \le \rho(f_w(u), f_w(w)) + \rho(f_w(w), f_w(v)) =$$

$$\rho(u,w) + \rho(w,v) \qquad (u,v,w \in K_1(0)).$$

A $(**)$ becslés nyilván következik az alábbi („erősebb") állításból:

$$(***) \qquad \frac{|u-v|}{|1-u\overline{v}|} \le \frac{|u|+|v|}{1+|u|\cdot|v|} \qquad (u,v \in K_1(0)).$$

Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy

$$\left|\frac{u-v}{1-u\overline{v}}\right|^2 \le \left(\frac{|u|+|v|}{1+|u|\cdot|v|}\right)^2 \qquad (u,v \in K_1(0)).$$

Tehát kiszámítva az egyenlőtlenség mindkét oldalát, azt kell megmutatni, hogy

$$\frac{|u|^2 - 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2}{1 - 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |u|^2\cdot|v|^2} \le \frac{|u|^2 + 2|u|\cdot|v| + |v|^2}{1 + 2|u|\cdot|v| + |u|^2\cdot|v|^2},$$

azaz ekvivalens átalakítással

$$|u|^2 - 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2 + 2|u|^3\cdot|v| - 4|u|\cdot|v|\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + 2|u|\cdot|v|^3 +$$

$$+|u|^4\cdot|v|^2 - 2|u|^2\cdot|v|^2\cdot\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |u|^2\cdot|v|^4 \le$$

$$|u|^2 + 2|u|\cdot|v| + |v|^2 - 2|u|^2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) - 4|u|\cdot|v|\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) - 2|v|^2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) +$$

$$+|u|^4\cdot|v|^2 + 2|u|^3\cdot|v|^3 + |u|^2\cdot|v|^4.$$

Egyszerűsítések után azt kell már csak belátni, hogy

$$-2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + 2|u|^3\cdot|v| + 2|u|\cdot|v|^3 - 2|u|^2\cdot|v|^2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) \le$$

$$2|u|\cdot|v| - 2|u|^2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) - 2|v|^2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + 2|u|^3\cdot|v|^3.$$

Ez viszont azzal ekvivalens, hogy

$$(|u|^2+|v|^2-1-|u|^2\cdot|v|^2)\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) \le (-|u|^2-|v|^2+1+|u|^2\cdot|v|^2)\cdot|u|\cdot|v|,$$

azaz azzal, hogy

$$(1-|u|^2)(1-|v|^2)(|u|\cdot|v|+\mathrm{Re}\,(u\overline{v})) \ge 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség azonban tetszőleges $u, v \in K_1(0)$ választással triviálisan igaz, hiszen $|u|, |v| < 1$ miatt $(1-|u|^2)(1-|v|^2) > 0$, és $|\mathrm{Re}\,(u\overline{v})| \le |u\overline{v}| = |u|\cdot|v|$, így $|u|\cdot|v| + \mathrm{Re}\,(u\overline{v}) \ge 0$.

(Megjegyezzük, hogy ha az

$$u = re^{\imath\gamma}, v = \rho e^{\imath\delta} \quad (0 \le r,\ \rho < 1,\ -\pi < \gamma,\ \delta \le \pi)$$

alakot használjuk, akkor $(***)$ (négyzetreemelés után) a következő alakú

$$\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\gamma-\delta)}{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\gamma-\delta)} \le \frac{(r+\rho)^2}{(1+r\rho)^2}.$$

Legyen

$$h(t) := \frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos t}{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos t} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor $h(t) = h(-t)$ $(t \in \mathbf{R})$, h differenciálható, és

$$h'(t) = \frac{2r\rho(1-r^2)(1-\rho^2)\sin t}{(1+r^2\rho^2-2r\rho\cos t)^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

„Látszik”, hogy $t \in [0,\pi]$ esetén $h'(t) \ge 0$, azaz a $[0,\pi]$ intervallumon a h függvény monoton növekedő. Következésképpen

$$h(t) \le h(\pi) = \frac{r^2+\rho^2+2r\rho}{1+r^2\rho^2+2r\rho} = \frac{(r+\rho)^2}{(1+r\rho)^2} \qquad (t \in [0,\pi]),$$

amiből a kívánt egyenlőtlenség már nyilván következik.

A $(*)$ egyenlőség közvetlen számolással ellenőrizhető. Ti.

$$|f_\alpha(u) - f_\alpha(v)| = \left|\frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u} - \frac{v-\alpha}{1-\overline{\alpha}v}\right| =$$

$$\frac{|u-\alpha+|\alpha|^2v-\overline{\alpha}uv+\alpha-v-|\alpha|^2u+\overline{\alpha}uv|}{|(1-\overline{\alpha}u)(1-\overline{\alpha}v)|} = \frac{|u-v|(1-|\alpha|^2)}{|1-\overline{\alpha}u|\cdot|1-\overline{\alpha}v|},$$

ill.

$$|1-f_\alpha(u)\overline{f_\alpha(v)}| = \left|1 - \frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u}\cdot\frac{\overline{v}-\overline{\alpha}}{1-\alpha\overline{v}}\right| =$$

$$\frac{|1-\overline{\alpha}u-\alpha\overline{v}+|\alpha|^2u\overline{v}-|\alpha|^2-u\overline{v}+u\overline{\alpha}+\alpha\overline{v}|}{|1-\overline{\alpha}u|\cdot|1-\alpha\overline{v}|} =$$

$$\frac{|1-|\alpha|^2+u\overline{v}(|\alpha|^2-1)|}{|1-\overline{\alpha}u|\cdot|1-\alpha\overline{v}|} = \frac{(1-|\alpha|^2)|1-u\overline{v}|}{|1-\overline{\alpha}u|\cdot|1-\alpha\overline{v}|} = \frac{(1-|\alpha|^2)|1-u\overline{v}|}{|1-\overline{\alpha}u|\cdot|1-\overline{\alpha}v|}.$$

Következésképpen

$$\rho(f_\alpha(u), f_\alpha(v)) = \frac{|f_\alpha(u)-f_\alpha(v)|}{|1-f_\alpha(u)\overline{f_\alpha(v)}|} = \frac{|u-v|}{|1-u\overline{v}|} = \rho(u,v).$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy a tett feltételek mellett a

$$K_1(0) \ni z \mapsto f_\alpha(z) \in K_1(0)$$

leképezés (a ρ metrikára nézve) izometria.

x) Nem nehéz azt sem belátni, hogy a Blaschke-függvényeken kívül „lényegében” nincs más racionális törtfüggvény, amely rendelkezne a viii) megjegyzésben mondott tulajdonságokkal. Ha ui. (ld. a szóban forgó függvények fenti definícióját) az

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw+d \neq 0\})$$

függvény ilyen (ahol tehát $ad-bc \neq 0$), akkor $a \neq 0$ és $d \neq 0$. Ti. az $a=0$ esetben $c \neq 0$ és

$$f(z) := \frac{b}{cz+d} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw+d \neq 0\}).$$

Következésképpen $|f(z)| \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$, azaz alkalmas $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$ helyen $|f(z)| < 1$ teljesül, ami ellentmond a viii)-beli tulajdonságoknak. Ha viszont $d = 0$, akkor $b \neq 0$ és $c \neq 0$, ill.

$$f(z) := \frac{az+b}{cz} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cz} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw \neq 0\}).$$

Világos, hogy (a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva)

$$|f(z)| \geq \frac{|b|}{|c| \cdot |z|} - \frac{|a|}{|c|} \to +\infty \qquad (|z| \to 0),$$

azaz egy megfelelő $0 \neq z \in K_1(0)$ választással $|f(z)| > 1$, ami megint csak ellentmond viii)-nak. Az eddigiek alapján azt mondhatjuk tehát, hogy a

$$q := \frac{a}{d}\ ,\ \alpha := -\frac{b}{a}\ ,\ \beta := -\frac{c}{d}$$

jelölésekkel

$$f(z) = \frac{a}{d} \cdot \frac{z + b/a}{cz/d + 1} = q \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \beta z} \qquad (1/\beta \neq z \in \mathbf{C}).$$

Mivel $f(\alpha) = 0 \in K_1(0)$, ezért a viii)-beli követelmények miatt $|\alpha| < 1$. Ugyanakkor $|f(z)| \to +\infty$ $(z \to 1/\beta)$, amiből a viii)-beli $|f(w)| > 1$ $(|w| > 1)$ kikötést figyelembe véve már egyszerűen következik, hogy $|1/\beta| > 1$, azaz $|\beta| < 1$. Ha viszont $z \in \mathbf{C}, |z| = 1$, akkor az $|f(z)| = 1$ „elvárást” figyelembe véve

$$1 = \left| q \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \beta z} \right| = |q| \cdot \frac{|z - \alpha|}{|1 - \beta z|},$$

ahol $|\overline{z}| = |z| = 1$ alapján

$$|1 - \beta z| = |\overline{z}| \cdot |1 - \beta z| = |\overline{z} - \beta |z|^2| = |\overline{z} - \beta| = |z - \overline{\beta}|.$$

Tehát

$$(*) \qquad 1 = |q| \cdot \frac{|z - \alpha|}{|z - \overline{\beta}|} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z| = 1).$$

Ha itt $\alpha \neq \overline{\beta}$ lenne, akkor az egységkörnek véve azokat a z_1, z_2 pontjait, amelyeken átmenő egyenesen fekszenek az $\alpha, \overline{\beta} \in K_1(0)$ pontok, az következne, hogy a

$$\frac{|z_1 - \alpha|}{|z_1 - \overline{\beta} z_1|}\ ,\ \frac{|z_2 - \alpha|}{|z_2 - \overline{\beta} z_1|}$$

hányadosok közül az egyik nagyobb, a másik kisebb 1-nél. Ez ellentmondana a $(*)$ egyenlőségnek, így $\alpha = \overline{\beta}$, azaz $f = q f_\alpha$. Végül $(*)$-ból $\alpha = \overline{\beta}$ miatt $|q| = 1$ következik. Így

$$f(z) = q \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (1/\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C}),$$

ahol $\alpha \in K_1(0)$, $q \in \mathbf{C}$, és $|q| = 1$. Ha itt $w \in \mathcal{R}_f$, akkor valamilyen $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1/\overline{\alpha}$ helyen

$$q \cdot \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} = w \iff qz - q\alpha = w - \overline{\alpha}wz \iff (q + \overline{\alpha}w)z = q\alpha + w,$$

azaz $w \neq -q/\overline{\alpha}$ esetén

$$z = \frac{q\alpha + w}{q + \overline{\alpha}w}.$$

Azt kaptuk, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbf{C} \setminus \{-q/\overline{\alpha}\}$, és

$$f^{-1}(w) = \frac{q\alpha + w}{q + \overline{\alpha}w} \qquad (-q/\overline{\alpha} \neq w \in \mathbf{C}).$$

xi) Hasonlóan határozhatók meg azok az f racionális törtfüggvények, amelyekre az $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} v = 0$, $\operatorname{Im} w < 0$ tulajdonságú $z, v, w \in \mathcal{D}_f$ helyeken rendre $|f(z)| > 1$, $|f(v)| = 1$, $|f(w)| < 1$ teljesül. (Geometriailag tehát az f függvény (esetleg 1-1 pont kivételével) a komplex számsík „felső" félsíkját a nyílt egységkörlemezre, a valós tengelyt az egységkörre, az „alsó félsíkot" pedig a zárt egységkörlemez „külsejébe" képezi le bijektív módon. Ezek ti. pontosan azok a racionális törtfüggvények, amelyek a következő alakúak:

$$f(z) = q \cdot \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \qquad (\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C}),$$

ahol $q, \alpha \in \mathbf{C}$ és $|q| = 1$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$. Ha ui. $ad \neq bc$ és

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \{w \in \mathbf{C} : cw + d \neq 0\})$$

ilyen tulajdonságú, akkor $c \neq 0$. Különben $d \neq 0$ és

$$f(x) = \frac{a}{d}x + b \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz az $(x, f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ pontok egy egyenest határoznának meg, nem pedig az egységkört. Következésképpen

$$f(x) := \frac{ax+b}{cx+d} \to \frac{a}{c} \qquad (\mathbf{R} \ni x \to +\infty),$$

amiből $|f(x)| = 1$ $(x \in \mathbf{R})$ (és így az f függvény folytonossága miatt) $|a/c| = 1$ következik. Tehát $a \neq 0$, azaz

$$f(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + b/a}{z + d/c} =: q \cdot \frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (\beta \neq z \in \mathbf{C}),$$

ahol $q := a/c$, $\alpha := -b/a$ és $\beta := -d/c$. Következésképpen $|q| = 1$, és $ad \neq bc$ miatt $\alpha \neq \beta$. Továbbá $f(\alpha) = 0 \in K_1(0)$, ezért α-nak a „felső” félsíkba kell esnie: $\operatorname{Im}\alpha > 0$. Ha $x \in \mathbf{R}$, akkor

$$1 = |f(x)| = |q| \cdot \frac{|x-\alpha|}{|x-\beta|} = \frac{|x-\alpha|}{|x-\beta|},$$

más szóval $|x-\alpha| = |x-\beta|$. Ez azt jelenti, hogy α és β egyenlő távolságra van a valós tengelytől, azaz $\beta = \overline{\alpha}$.

Fordítva, ha

$$f(z) = q \cdot \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \qquad (\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{Z})$$

valamilyen $q, \alpha \in \mathbf{C}$, $|q| = 1$, $\operatorname{Im}\alpha > 0$ együtthatókkal, akkor az

$$\overline{\alpha} \neq z = x + \imath y \ , \ \alpha = \xi + \imath\eta$$

$(x, y, \xi, \eta \in \mathbf{R}$, $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 > 0$, $\eta > 0)$ jelölésekkel

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-\alpha|^2}{|z-\overline{\alpha}|^2} = \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} = \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2 - 4y\eta}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

Innen már $\eta > 0$ alapján világos, hogy

$$\begin{cases} |f(z)| < 1 \\ |f(z)| = 1 \\ |f(z)| > 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0. \end{cases}$$

A x)-ben mondottakkal analóg módon következik, hogy

$$f^{-1}(w) = \frac{q\alpha - \overline{\alpha}w}{q-w} \qquad (q \neq w \in \mathbf{C}).$$

Speciálisan legyen

$$f_0(z) := \frac{z-\imath}{z+\imath} \qquad (-\imath \neq z \in \mathbf{C}).$$

Ekkor a q, $\alpha \in \mathbf{C}$, $|q| = 1$, $\alpha = u + \imath v$, $v > 0$ paraméterekkel meghatározott fenti f függvényről a következőket mondhatjuk:

$$f(z) = q \cdot \frac{z-u-\imath v}{z-u+\imath v} = q \cdot \frac{(z-u)/v - \imath}{(z-u)/v + \imath} =$$

$$q \cdot f_0\left(\frac{z-u}{v}\right) \qquad (u - \imath v \neq z \in \mathbf{C}).$$

xii) Tegyük fel, hogy adottak a $0 \neq \alpha_n \in K_1(0)$ $(n \in \mathbf{N})$ számok és

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < +\infty.$$

Legyen továbbá

$$F_n(z) := -\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot f_{\alpha_n}(z) - 1 = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z} - 1 \qquad (z \in K_1(0)).$$

Ekkor bármely $0 < \rho < 1$ és $z \in \overline{K_\rho(0)}$ esetén

$$|F_n(z)| = \frac{|\alpha_n|\alpha_n| - z|\alpha_n| - \alpha_n + |\alpha_n|^2 z|}{|\alpha_n| \cdot |1-\overline{\alpha}_n z|} =$$

$$\frac{(1-|\alpha_n|)\,|\alpha_n + z|\alpha_n||}{|\alpha_n| \cdot |1-\overline{\alpha}_n z|} \leq (1-|\alpha_n|) \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}|F_n(z)| \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < +\infty \qquad (z \in \overline{K_\rho(0)})$$

(z-ben egyenletesen). Belátható, hogy ekkor létezik a

$$B(z) := \prod_{n=0}^{\infty}(1+F_n(z)) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z} \qquad (z \in K_1(0))$$

végtelen szorzat (*Blaschke-szorzat*), B differenciálható és korlátos függvény. (Ezek a „szorzatok” igen fontos szerepet játszanak mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból.)

xiii) Láttuk (ld. viii)), hogy bármely $0 \neq \alpha \in K_1(0)$ paraméterrel az f_α Blaschke-függvény az egységkört önmagára képezi le bijektív módon. Az egységkör pontjai az $e^{\imath t}$ $(t \in \mathbf{R})$ pontok, következésképpen van olyan $\varphi_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amellyel

$$(*) \qquad f_\alpha\left(e^{\imath t}\right) = e^{\imath \varphi_\alpha(t)} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha $\alpha = re^{\imath\gamma}$ $(0 < r < 1,\ \gamma \in (-\pi, \pi])$, akkor

$$f_\alpha(e^{\imath t}) = \frac{e^{\imath t} - re^{\imath\gamma}}{1-re^{\imath(t-\gamma)}} = e^{\imath\gamma} \cdot \frac{e^{\imath(t-\gamma)} - r}{1-re^{\imath(t-\gamma)}} = e^{\imath\gamma} \cdot f_r(e^{\imath(t-\gamma)}) = e^{\imath\gamma} \cdot e^{\imath\varphi_r(t-\gamma)},$$

azaz

$$e^{\imath\varphi_r(t-\gamma)} = e^{\imath(\varphi_\alpha(t)-\gamma)} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha tehát a φ_r $(0 < r < 1)$ függvényeket ismerjük, akkor (az előbbi jelölésekkel) pl. a $\varphi_\alpha(t) = \gamma + \varphi_r(t-\gamma)$ $(t \in \mathbf{R})$ függvény megfelel $(*)$-nak. Legyen $0 < r < 1$, és

$$F(t) := f_r(e^{\imath t}) = \frac{e^{\imath t} - r}{1 - re^{\imath t}} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor F differenciálható, és

$$F'(t) = \frac{\imath e^{\imath t}(1 - re^{\imath t}) + \imath re^{\imath t}(e^{\imath t} - r)}{(1 - re^{\imath t})^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen az adódik, hogy (a $z := e^{\imath t}$ jelöléssel)

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\imath e^{\imath t}(1 - re^{\imath t}) + \imath re^{\imath t}(e^{\imath t} - r)}{(e^{\imath t} - r)(1 - re^{\imath t})} =$$

$$\imath z\frac{1 - rz + r(z-r)}{(z-r)(1-rz)} = \imath\frac{1-r^2}{1 - r\overline{z} - rz + r^2} = \imath\frac{1-r^2}{1 - 2r\,\mathrm{Re}\,z + r^2} =$$

$$\imath\cdot\frac{1-r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} =: \imath P_r(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol P_r a számos egyéb területen is fontos szerepet játszó ún. *Poisson-féle magfüggvény.* Feltételezve, hogy a $\psi_r \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény a $(-\pi, \pi)$ intervallum minden pontjában differenciálható, ez utóbbi igaz marad a

$$G(t) := e^{\imath\psi_r(t)} \qquad (t \in (-\pi, \pi))$$

függvényre is, és $G'(t) = \imath G(t)\psi_r'(t) \qquad (t \in (-\pi, \pi))$. Tehát

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \imath\psi_r'(t) \qquad (t \in (-\pi, \pi)).$$

Tegyük fel, hogy $\psi_r(0) = 1$ és $\psi_r'(t) = P_r(t)$ $(t \in (-\pi, \pi))$, ekkor

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G'(t)}{G(t)} \qquad (t \in (-\pi, \pi)),$$

amiből

$$\left(\frac{F}{G}\right)'(t) = \frac{F'(t)G(t) - G'(t)F(t)}{G^2(t)} =$$

$$\frac{G'(t)F(t) - G'(t)F(t)}{G^2(t)} = 0 \qquad (t \in (-\pi, \pi))$$

következik. Más szóval az F/G függvény a $(-\pi, \pi)$ intervallumon állandó. Mivel $F(0) = G(0) = 1$, ezért $F(t) = G(t) \quad (t \in (-\pi, \pi))$.

Legyen végül $p := (1+r)/(1-r)$, ill.

$$\psi_r(t) := \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,(p \cdot \mathrm{tg}\,(t/2)) & (t \in (-\pi, \pi)) \\ \\ \pi & (t = \pi) \end{cases}$$

és $\psi_r(t + 2\pi) = \psi_r(t) + 2\pi \quad (t \in \mathbf{R})$ (azaz ψ_r periodikus 2π-szerint). Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy minden $t \in (-\pi, \pi)$ helyen $\psi_r'(t) = P_r(t)$. Valóban,

$$\psi_r'(t) = \frac{p}{1 + p^2\,\mathrm{tg}^2(t/2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(t/2)} =$$

$$\frac{p}{\cos^2(t/2) + p^2 \sin^2(t/2)} = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 \cos^2(t/2) + (1+r)^2 \sin^2(t/2)} =$$

$$\frac{1 - r^2}{(1 + r^2)(\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)) - 2r(\cos^2(t/2) - \sin^2(t/2))} =$$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = P_r(t) \qquad (t \in (-\pi, \pi)).$$

Így

$$f_r(e^{\imath t}) = F(t) = G(t) = e^{\imath \psi_r(t)} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz $\varphi_r(t) = \psi_r(t) \quad (t \in \mathbf{R})$.

xiv) Megjegyezzük, hogy ha $\alpha = re^{\imath\gamma} \in K_1(0) \quad (0 \le r < 1, \gamma \in (-\pi, \pi])$, és

$$e_\alpha(z) := \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \overline{K_1(0)}),$$

akkor (az előbbi megjegyzést szem előtt tartva) egyszerű számolás után

$$e_\alpha(e^{\imath t}) = e_r(e^{\imath(t-\gamma)}) \ , \ \ e_r(e^{\imath t}) = \sqrt{P_r(t)}\, e^{\imath(\varphi_r(t) - t)/2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $e_0(z) = 1 \quad (z \in \overline{K_1(0)})$.

1.3. Komplex vonalintegrál

Egy $[a,b]$ kompakt (azaz korlátos és zárt) intervallum esetén a folytonosan differenciálható $\varphi : [a,b] \to \mathbf{C}$ függvényt (komplex) *sima útnak* (esetenként röviden *útnak*) fogjuk nevezni. Geometriai szóhasználattal élve az $\mathcal{R}_\varphi \subset \mathbf{C}$ értékkészlet egy (komplex) *sima görbe.* (Gyakran az *út* kifejezés helyett is a *görbe* szót használják.) Ilyen út pl. a „kör”:

$$\varphi(t) := \varphi_{ar}(t) := a + re^{\imath t} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

(ahol $a \in \mathbf{C}, 0 < r \in \mathbf{R}$) vagy a „szakasz”:

$$\varphi(t) := u + t(v-u) \qquad (t \in [0,1])$$

(adott $u, v \in \mathbf{C}$ esetén). Az első esetben ti.

$$\mathcal{R}_\varphi = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| = r\},$$

ami a $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ komplex síkon egy a középpontú és r sugarú kör. Ugyanígy adódik a második esetben, hogy $\mathcal{R}_\varphi$ a komplex síkon az u, v végpontok által meghatározott szakasz.

Ha a $\varphi : [a,b] \to \mathbf{C}$ függvény folytonos, és megadható az $[a,b]$ intervallumnak olyan $x_0 := a < x_1 < ... < x_n := b$ felosztása (valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén), amelyre nézve a φ függvénynek valamennyi $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ osztásintervallumra való leszűkítése sima út, akkor azt mondjuk, hogy φ *szakaszonként sima út.* Nyilván minden sima út egyben szakaszonként sima út is. Ha pl. $u, v, w \in \mathbf{C}$, $[a,b] := [0,3]$ és

$$\varphi(t) := \begin{cases} u + t(v-u) & (0 \le t \le 1) \\ \\ v + (t-1)(w-v) & (1 \le t \le 2) \\ \\ w + (t-2)(u-w) & (2 \le t \le 3), \end{cases}$$

akkor φ szakaszonként sima út: az $x_0 := 0 < x_1 := 1 < x_2 := 2 < x_3 := 3$ felosztást véve ui. a φ leszűkítései a $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ osztásintervallumokra (a fenti értelemben) szakaszok. A $\varphi : [a,b] \to \mathbf{C}$ szakaszonként sima út esetén $\varphi(a)$ az út *kezdőpontja,* $\varphi(b)$ pedig a *végpontja.* Ezzel hallgatólagosan (és főleg szemléletesen) egy *irányítást* is deklaráltunk a φ utat illetően: „$\varphi(a)$-ból kiindulva $\varphi(b)$-felé” járjuk be a φ utat (az $\mathcal{R}_\varphi$ görbét). Az irányítás pontos értelmezésével itt nem foglalkozunk, de definiáljuk a φ út esetén a φ úttal *ellentétes irányítású* $\tilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbf{C}$ utat a következőképpen:

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi(b + a - t) \qquad (a \le t \le b).$$

Világos, hogy $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(b)$ és $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(a)$, azaz „az irányítás ellentétesre változtatásával” a kezdő- és végpontok felcserélődtek.

A szóban forgó út *zárt,* ha $\varphi(a) = \varphi(b)$. Pl. a fenti kör egy zárt (sima) út, ugyanígy zárt az előbbi példában szereplő, az u, v, w pontok által meghatározott φ út is. (Ha ez utóbbiban az $u, v, w \in \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ komplex számok nem esnek egy egyenesre, akkor $\mathcal{R}_\varphi$ egy háromszög.)

Az előbbi háromszöget meghatározó szakaszonként sima út speciális esete utak egyesítésének. Legyenek ti. a $\varphi : [a, b] \to \mathbf{C}$, $\psi : [c, d] \to \mathbf{C}$ szakaszonként sima utak olyanok, hogy a φ végpontja egybeesik a ψ kezdőpontjával: $\varphi(b) = \psi(c)$. Ekkor a

$$\varphi \vee \psi(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (a \leq t \leq b) \\ \\ \psi(t - b + c) & (b \leq t \leq b + d - c) \end{cases}$$

hozzárendeléssel értelmezett $\varphi \vee \psi : [a, b+d-c] \to \mathbf{C}$ (nyilván szakaszonként sima) út a φ, ψ utak *egyesítése.* Nyilvánvaló, hogy $\varphi \vee \tilde{\varphi}$ zárt út.

Legyen az f komplex függvény folytonos, és tegyük fel, hogy a φ szakaszonként sima út $\mathcal{D}_f$-beli, azaz $\mathcal{R}_\varphi \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor a

$$g := (f \circ \varphi) \cdot \varphi' : [a, b] \to \mathbf{C}$$

függvény szakaszonként folytonos és ugyanígy szakaszonként folytonosak a

$$g_1 := \operatorname{Re} g : [a, b] \to \mathbf{R}\ ,\ g_2 := \operatorname{Im} g : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvények is. Ezért Riemann-integrálhatóak is, így van értelme az alábbi definíciónak:

$$\int_\varphi f := \int_\varphi f(z)\, dz := \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' := \int_a^b g_1 + \imath \int_a^b g_2$$

(az f függvény (komplex) *vonalintegrálja* a φ úton). Ha tehát $f = f_1 + \imath f_2$, $\varphi = \varphi_1 + \imath\varphi_2$, akkor

$$g = (f_1 \circ \varphi + \imath f_2 \circ \varphi)(\varphi_1' + \imath\varphi_2') =$$

$$(f_1 \circ \varphi)\varphi_1' - (f_2 \circ \varphi)\varphi_2' + \imath\left((f_1 \circ \varphi)\varphi_2' + (f_2 \circ \varphi)\varphi_1'\right),$$

azaz $g_1 = (f_1 \circ \varphi)\varphi_1' - (f_2 \circ \varphi)\varphi_2'$ és $g_2 = (f_1 \circ \varphi)\varphi_2' + (f_2 \circ \varphi)\varphi_1'$. Következésképpen

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b (f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) - f_2(\varphi(t))\varphi_2'(t))\,dt + \imath\int_a^b (f_1(\varphi(t))\varphi_2'(t) + f_2(\varphi(t))\varphi_1'(t))\,dt.$$

A definícióból rögtön következnek az alábbi összefüggések (a ψ szakaszonként sima útról is feltételezve, hogy $\mathcal{D}_f$-beli és a kezdőpontja egybeesik a φ végpontjával):

$$\int_{\tilde{\varphi}} f = -\int_{\varphi} f \quad , \quad \int_{\varphi\vee\psi} f = \int_{\varphi} + \int_{\psi} f.$$

Speciálisan $\int_{\varphi\vee\tilde{\varphi}} f = 0$.

Ha pl.

$$f(z) := \frac{1}{z} \quad (0 \neq z \in \mathbf{C}) \quad , \quad \varphi(t) := \varphi_{0r}(t) = re^{\imath t} \quad (r > 0, t \in [0, 2\pi]),$$

akkor $\varphi'(t) = r\imath e^{\imath t}$ $(t \in [0, 2\pi])$, azaz

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\imath t}} r\imath e^{\imath t}\,dt = \int_0^{2\pi} \imath\,dt = 2\pi\imath.$$

(Vegyük észre, hogy a szóban forgó vonalintegrál független r-től.) Vonalintegrálok kiszámítására gyakran alkalmazható a *Newton-Leibniz-formula*. Tegyük fel ehhez, hogy az f komplex függvénynek van *primitív függvénye,* azaz olyan Ψ komplex függvény, amely differenciálható és $\Psi' = f$. Ekkor tetszőleges $\mathcal{D}_f$-beli szakaszonként sima $\varphi : [a, b] \to \mathbf{C}$ útra

$$\int_{\varphi} f = \Psi(\varphi(b)) - \Psi(\varphi(a)).$$

Világos, hogy ha itt a φ út zárt, akkor $\int_{\varphi} f = 0$.

1.3. Megjegyzések

i) Emlékeztetünk az $F \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ függvényekkel kapcsolatos (valós) vonalintegrál fogalmára. Azt mondjuk, hogy a kompakt $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható $\Phi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ vektorfüggvény egy ($\mathbf{R}^2$-beli) *sima út.* A *szakaszonként sima út* fogalmát a komplex utakkal analóg módon definiáljuk. Ha az $F \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ függvény folytonos és $\Phi : [a, b] \to \mathcal{D}_F$ szakaszonként sima ($\mathcal{D}_F$-beli) út, akkor van értelme az

$$\int_{\Phi} F := \int_{\Phi} F(\xi)\,d\xi := \int_a^b \langle F \circ \Phi, \Phi' \rangle$$

integrálnak (az F függvény (valós) *vonalintegrálja* a Φ úton.) Az itt szereplő $\langle , \rangle$ skaláris szorzás a „szokásos”:

$$\langle (x,y),(u,v)\rangle := xu + yv \qquad ((x,y),(u,v) \in \mathbf{R}^2).$$

Ha tehát az F, ill. a Φ függvény koordináta-függvényeit rendre F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 jelölik, akkor

$$\int_\Phi F = \int_a^b (F_1(\Phi(t))\Phi_1'(t) + F_2(\Phi(t))\Phi_2'(t))\,dt.$$

ii) Világos, hogy ha $\varphi = \varphi_1 + \imath\varphi_2 : [a,b] \to \mathbf{C}$ szakaszonként sima út $\mathbf{C}$-ben, akkor (a $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ azonosítást figyelembe véve)

$$\Phi_\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

szakaszonként sima út $\mathbf{R}^2$-ben. Hasonlóan, ha $f = f_1 + \imath f_2$ egy folytonos komplex függvény, akkor az

$$F := (f_1, -f_2) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \ \ , \ \ G := (f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

függvények is folytonos vektor-vektor-függvények. Ha tehát $\mathcal{R}_\varphi \subset \mathcal{D}_f$, akkor

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b (f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) - f_2(\varphi(t))\varphi_2'(t))\,dt +$$

$$+\imath \int_a^b (f_1(\varphi(t))\varphi_2'(t) + f_2(\varphi(t))\varphi_1'(t))\,dt =$$

$$\int_a^b \langle F(\Phi_\varphi(t)), \Phi_\varphi'(t)\rangle\,dt + \imath \int_a^b \langle G(\Phi_\varphi(t)), \Phi_\varphi'(t)\rangle\,dt =$$

$$\int_{(\varphi_1,\varphi_2)} (f_1, -f_2) + \imath \int_{(\varphi_1,\varphi_2)} (f_2, f_1).$$

Ha $\Psi = \Psi_1 + \imath\Psi_2$ primitív függvénye az $f = f_1 + \imath f_2$ függvénynek, azaz $\Psi \in D$, és (ld. Cauchy-Riemann-egyenlőségek)

$$\Psi' = \partial_1\Psi_1 + \imath\partial_1\Psi_2 = \partial_2\Psi_2 - \imath\partial_2\Psi_1 = f_1 + \imath f_2,$$

akkor
$$\partial_1\Psi_1 = f_1 = \partial_2\Psi_2 \ , \ \partial_1\Psi_2 = f_2 = -\partial_2\Psi_1.$$
Következésképpen $\Psi_1' = \operatorname{grad}\Psi_1 = (f_1, -f_2), \Psi_2' = \operatorname{grad}\Psi_2 = (f_2, f_1)$, más szóval az $(f_1, -f_2)$, (f_2, f_1) (vektor)függvények mindegyikének van primitív függvénye és ezek rendre Ψ_1, Ψ_2. Alkalmazható ezért a valós vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz-formula, miszerint
$$\int_{(\varphi_1,\varphi_2)}(f_1, -f_2) = \Psi_1(\varphi_1(b), \varphi_2(b)) - \Psi_1(\varphi_1(a), \varphi_2(a)),$$
$$\int_{(\varphi_1,\varphi_2)}(f_2, f_1) = \Psi_2(\varphi_1(b), \varphi_2(b)) - \Psi_2(\varphi_1(a), \varphi_2(a)).$$
Így
$$\int_\varphi f = \Psi_1(\Phi_\varphi(b)) - \Psi_1(\Phi_\varphi(a)) + \imath(\Psi_2(\Phi_\varphi(b)) - \Psi_2(\Phi_\varphi(a))) =$$
$$\Psi_1(\Phi_\varphi(b)) + \imath\Psi_2(\Phi_\varphi(b)) - (\Psi_1(\Phi_\varphi(a)) + \imath\Psi_2(\Phi_\varphi(a))) = \Psi(b) - \Psi(a),$$
ami nem más, mint a Newton-Leibniz-formula a komplex vonalintegrálokra.

iii) A Cauchy-Riemann-egyenlőségeket figyelembe véve könnyen adódik, hogy ha az előbbi megjegyzésben f differenciálható komplex függvény, akkor az
$$(f_1, -f_2) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \ , \ (f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
függvények is differenciálhatóak, és az $(f_1, -f_2)'$, $(f_2, f_1)'$ Jacobi-(derivált) mátrixok szimmetrikusak:
$$(f_1, -f_2)' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_2 & -\partial_2 f_2 \end{pmatrix} \ , \ (f_2, f_1)' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$
Ha még az f' deriváltfüggvény folytonos is, azaz az f függvény folytonosan differenciálható, akkor ugyanez igaz az $(f_1, -f_2)$, (f_2, f_1) függvényekre is. Sőt, ha $\mathcal{D}_f$ csillagtartomány, akkor az $(f_1, -f_2)$, $(f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vektor-vektor-függvények csillagtartományon értelmezett, folytonosan differenciálható függvények. Alkalmazható ezért a valós vonalintegrálok egyik nevezetes tétele, miszerint: ha a $\mathcal{D}_f$-beli φ út zárt, akkor
$$\int_{(\varphi_1,\varphi_2)}(f_1, -f_2) = \int_{(\varphi_1,\varphi_2)}(f_2, f_1) = 0.$$
Az $\int_\varphi f$ komplex vonalintegrál ii)-beli előállítását figyelembe véve ezért $\int_\varphi f = 0$ is igaz.

iv) Az $\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ vonalintegrálban az f függvény helyettesítési értékei a $\varphi(t) \in \mathcal{R}_\varphi \quad (t \in [a,b])$ pontokban jelennek meg. Mivel φ folytonos függvény, ezért $\mathcal{R}_\varphi$ kompakt (tehát korlátos és zárt) halmaz. Ugyanakkor az $|f|$ függvény is folytonos, így az ismert Weierstrass-tétel szerint létezik az

$$M := \max\{|f(\varphi(t))| : t \in [a,b]\} = \max\{|f(z)| : z \in \mathcal{R}_\varphi\}$$

maximum. Következésképpen

$$\left|\int_\varphi f\right| \leq \int_a^b |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\,dt \leq M \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

Az $\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$ integrál a φ út *hossza.* Mindennek a geometriai háttere a következő: legyen valamely $n \in \mathbf{N}$ esetén $t_0 := a < t_1 < ... < t_n := b$ egy felosztása az $[a,b]$ intervallumnak és

$$\ell_n := \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|$$

(azaz az $\mathcal{R}_\varphi$ „görbébe írt”, a $\varphi(t_k) \quad (k = 0,...,n)$ csúcspontok által meghatározott töröttvonal (poligon) hossza). Belátható, hogy

$$\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \sup\{\ell_n : t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b \quad (n \in \mathbf{N})\}$$

(ahol tehát a szuprémum a szóban forgó felosztásokra vonatkozik). Speciálisan, ha φ „kör”, azaz valamilyen $u \in \mathbf{C}, r > 0$ mellett $\varphi(t) = u + re^{\imath t} \quad (t \in [0, 2\pi])$, akkor

$$\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \left|r\imath e^{\imath t}\right|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$$

(az $\mathcal{R}_\varphi$ körvonal hossza). Hasonlóan, legyen most φ „szakasz”: adott $u, v \in \mathbf{C}$ esetén $\varphi(t) = u + t(v-u) \quad (t \in [0,1])$. Ekkor

$$\int_0^1 |\varphi'(t)|\,dt = \int_0^1 |v-u|\,dt = |v-u|$$

(az $\mathcal{R}_\varphi$ szakasz hossza).

v) Tegyük fel, hogy a differenciálható $\Psi \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény értelmezési tartománya rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármely $u, v \in \mathcal{D}_\Psi$ esetén van olyan $\mathcal{D}_\Psi$-beli töröttvonal, amelynek a kezdőpontja u, a végpontja v, és az illető töröttvonalat alkotó minden szakasz vagy a valós tengellyel vagy a képzetes tengellyel párhuzamos („vízszintes” vagy „függőleges”). Ekkor a $\Psi'(z) = 0 \quad (z \in \mathcal{D}_\Psi)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy a Ψ függvény konstans. (Következésképpen igaz a valós analízisből jól ismert tétel analogonja: egy (nyílt) intervallumon értelmezett differenciálható $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor állandó, ha a deriváltja mindenütt nulla.) Világos, hogy csak a

$$\Psi'(z) = 0 \;\; (z \in \mathcal{D}_\Psi) \implies f \text{ konstans}$$

következtetés igényel magyarázatot. Ehhez emlékeztetünk a

$$\Psi' = \partial_1\Psi_1 + \imath\partial_1\Psi_2 = \partial_2\Psi_2 - \imath\partial_2\Psi_1$$

egyenlőségekre, amelyekből a feltételünket figyelembe véve

$$\partial_1\Psi_1 \equiv \partial_1\Psi_2 \equiv \partial_2\Psi_2 \equiv \partial_2\Psi_1 \equiv 0$$

következik. A parciális deriváltak definícióját, ill. a valós analízisből az előbb idézett állítást figyelembe véve azt kapjuk, hogy a Ψ_1, Ψ_2 (és így a Ψ) függvények mindegyike bármely $\mathcal{D}_\Psi$-beli vízszintes vagy függőleges szakaszon állandó. Ebből és a $\mathcal{D}_\Psi$-re tett „elérhetőségi” feltételből már nyilván következik, hogy a Ψ függvény állandó. Innen az is világos, hogy ha egy $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény értelmezési tartománya is rendelkezik a $\mathcal{D}_\Psi$-re tett tulajdonsággal, akkor az f bármely két (esetleg létező) Ψ, Φ primitív függvénye csak „konstansban különbözhet egymástól”: alkalmas $c \in \mathbf{C}$ mellett $\Psi - \Phi \equiv c$.

1.4. Cauchy-tétel és következményei

Az 1.3. iii) megjegyzésben (a valós vonalintegrálokra vonatkozó tétel folyományaként) kapott állítás messzemenően általánosítható. Ez az általánosítás az ún. *Cauchy-féle alaptétel,* amely valóban tekinthető a komplex függvényekkel kapcsolatos vizsgálódások alapjának. Az említett megjegyzéshez képest az általánosítás két dolgot jelent:

- az állításban elhagyható a derivált folytonosságára vonatkozó feltétel,
- a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány alakját illetően a csillagtartománynál jóval általánosabb szerkezetű halmazok is megengedhetők (ún. *egyszeresen összefüggő tartományok*).

Az egyszeresen összefűggő tartomány definíciója feltételezi a zárt út *belsejének* az ismeretét. A zárt φ út $\operatorname{int}\varphi$ belseje „egyszerű” utak esetén meglehetősen könnyen értelmezhető. Így pl. a

$$\varphi_{ar}(t) = a + re^{\imath t} \qquad (a \in \mathbf{C}, r > 0, t \in [0, 2\pi])$$

„kör” belseje az $\operatorname{int}\varphi_{ar} := K_r(a)$ nyílt körlemez. Hasonlóan nem okoz gondot egy „háromszög” belsejének a definiálása: a háromszög(vonal) által meghatározott nyílt (azaz a háromszög pontjait nem tartalmazó) háromszöglemez. Általában a zárt utak belsejének az értelmezése (Jordan egy tételére hivatkozva) már lényegesen bonyolultabb. Éppen ezért „megelégszünk” az előbb említett egyszerű utakkal, ill. a Cauchy-tételnek az ezekre megfogalmazott változatával.

1.4.1. Cauchy-tétel. Tegyük fel tehát, hogy az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvény differenciálható és valamely $a \in \mathbf{C}$, $0 < r \in \mathbf{R}$ esetén

$$(*) \qquad \overline{K_r(a)} = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \le r\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Ekkor a *Cauchy-féle alaptétel* szerint $\int_{\varphi_{ar}} f = 0$.

1.4.2. Háromszögek, Goursat-lemma. Ha $u, v, w \in \mathbf{C}$ nem egy egyenesre eső pontok a komplex számsíkon, akkor (ld. fentebb)

$$\triangle(t) := \begin{cases} u + t(v - u) & (0 \le t \le 1) \\ v + (t-1)(w - v) & (1 \le t \le 2) \\ w + (t-2)(u - w) & (2 \le t \le 3) \end{cases}$$

(geometriailag $\mathcal{R}_\triangle$) egy háromszög. Ha $\mathcal{R}_\triangle \subset \mathcal{D}_f$ és az $\mathcal{R}_\triangle$ által határolt háromszög-lemez (azaz $\operatorname{int}\triangle$) is részhalmaza $\mathcal{D}_f$-nek, akkor a Cauchy-tételben φ_{ar} kicserélhető $\triangle$-re: $\int_\triangle f = 0$. Ugyanez mondható akkor is, ha az előbbi $\triangle$ egy „sokszög”.

A Cauchy-tételnek a „háromszögekre” vonatkozó előbbi speciális esete az ún. *Goursat-lemma.* Ez utóbbinak a bizonyítása pl. a következőképpen történhet. Legyen $\triangle_0 := \triangle$, ill. tekintsük az $\mathcal{R}_{\triangle_0}$ háromszög oldalfelező pontjait. Az utóbbiak és az $\mathcal{R}_{\triangle_0}$ háromszög csúcspontjai négy „kis” háromszöget határoznak meg: $\mathcal{R}_{\triangle_{0j}}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, ahol utóbbiakat (a fenti $\triangle$ mintájára) a $\triangle_{0j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ utak írják le. Vegyük észre, hogy

$$\int_{\triangle_0} f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\triangle_{0j}} f.$$

Ui. az $\int_{\triangle_{0j}} f \quad (j = 1, 2, 3, 4)$ integrálok kiszámolásakor az előbb említett felezőpontok által meghatározott háromszög minden oldalával együtt az ellentett irányítású oldalakon is integrálunk. Így ezek az integrálok „kiejtik” egymást, a „maradék” oldalak együtt pedig az $\mathcal{R}_{\triangle_0}$ háromszöget alkotják. Világos, hogy

$$\left|\int_{\triangle_0} f\right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\triangle_{0j}} f\right| \leq 4\cdot \max\left\{\left|\int_{\triangle_{0j}} f\right| : j = 1, 2, 3, 4\right\} =: 4\cdot \left|\int_{\triangle_1} f\right|$$

(ahol tehát valamilyen $j = 1, 2, 3, 4$ mellett $\triangle_1$ azzal a $\triangle_{0j}$ háromszöggel egyenlő, amelyre a fenti maximum éppen $\left|\int_{\triangle_{0j}} f\right|$.) A $\triangle_1$ háromszögre ismételjük meg az előbbi eljárást, azaz az oldalfelező pontjaival „osszuk fel” négy háromszögre, legyenek az ezeket leíró utak $\triangle_{1j}$-k $\quad (j = 1, 2, 3, 4)$. Az előbbiekkel analóg módon kapjuk ezek közül azt a $\triangle_2$-vel jelöltet, amelyre

$$\max\left\{\left|\int_{\triangle_{1j}} f\right| : j = 1, 2, 3, 4\right\} = \left|\int_{\triangle_2} f\right|.$$

Következésképpen $\left|\int_{\triangle_1} f\right| \leq 4\cdot \left|\int_{\triangle_2} f\right|$, tehát

$$\left|\int_{\triangle_0} f\right| \leq 4^2\cdot \left|\int_{\triangle_2} f\right|.$$

Az eljárást folytatva (ld. teljes indukció) kapjuk $\mathcal{R}_{\triangle_n} \quad (n \in \mathbf{N})$ háromszögeknek a sorozatát úgy, hogy

$$\left|\int_{\triangle_0} f\right| \leq 4^n\cdot \left|\int_{\triangle_n} f\right| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az $\mathcal{R}_{\triangle_n}$ háromszögek által meghatározott zárt háromszöglemezek (legyenek ezek $\mathcal{R}^*_{\triangle_n}$-ok $\quad (n \in \mathbf{N})$) „egymásbaskatulyázottak” (azaz $\mathcal{R}^*_{\triangle_{n+1}} \subset \mathcal{R}^*_{\triangle_n}$ $(n \in \mathbf{N})$) és korlátosak (röviden: kompakt halmazok), ezért $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^*_{\triangle_n} \neq \emptyset$. A konstrukció miatt nyilvánvaló, hogy az utóbbi metszethalmaz 1-elemű: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^*_{\triangle_n} = \{a\}$, ahol $a \in \mathcal{D}_f$. Ugyanakkor a $\mathcal{D}_f$ nyíltsága miatt egy alkalmas $r > 0$ sugárral $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$. Vegyük figyelembe, hogy $f \in D\{a\}$, azaz

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \delta(z)(z - a) \qquad (z \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim_{z\to a}\delta(z)=\delta(a)=0$. Legyen továbbá $n\in\mathbf{N}$ olyan, hogy

$$\mathcal{R}^*_{\triangle_n}\subset K_r(a),$$

ekkor

$$\int_{\triangle_n} f=\int_{\triangle_n}(f(a)+f'(a)(z-a)+\delta(z)(z-a))\,dz,$$

ahol

$$\int_{\triangle_n}(f(a)+f'(a)(z-a))\,dz=0.$$

(Ti. a $K_r(a)\ni z\mapsto f(a)+f'(a)(z-a)$ függvénynek nyilván van primitív függvénye, a $\triangle_n$ pedig zárt út.) Az adódott tehát, hogy ($|\triangle_n|$-nel jelölve az $\mathcal{R}_{\triangle_n}$ háromszög kerületét)

$$\left|\int_{\triangle_n} f\right|=\left|\int_{\triangle_n}\delta(z)(z-a)\,dz\right|\leq\max\{|\delta(z)|\cdot|z-a|:z\in\mathcal{R}_{\triangle_n}\}\cdot|\triangle_n|.$$

Elemi geometriai megfontolásokból

$$|z-a|\leq|\triangle_n|\leq\frac{|\triangle_0|}{2^n}\qquad(z\in\mathcal{R}_{\triangle_n}),$$

következésképpen

$$\left|\int_{\triangle_n} f\right|\leq\max\{|\delta(z)|:z\in\mathcal{R}_{\triangle_n}\}\cdot\frac{|\triangle_0|^2}{4^n}.$$

Mivel $\lim_{z\to a}\delta(z)=0$, ezért tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén a fenti $r>0$ megválasztható úgy, hogy $|\delta(z)|<\varepsilon\quad(z\in K_r(a))$, amiből

$$\left|\int_{\triangle_n} f\right|\leq\varepsilon\cdot\frac{|\triangle_0|^2}{4^n}.$$

Egybevetve mindezt az „indulással” azt kapjuk, hogy

$$\left|\int_{\triangle} f\right|=\left|\int_{\triangle_0} f\right|\leq\varepsilon\cdot|\triangle_0|^2,$$

ami - lévén $\varepsilon>0$ tetszőleges - csak úgy lehetséges, ha $\int_\triangle f=0$.

Ezzel a Cauchy-tételt „háromszögekre” beláttuk. Innen sokszögekre is következik a tétel állítása, ui. a szóban forgó sokszöget (ha kell, akkor először véges sok „nem hurkolt” sokszögre osztva) a valamelyik csúcsából kiinduló átlóival háromszögekre bonthatjuk. Az így kapott háromszögeken integrálva minden átlón ellentétes irányítással is integrálunk, ezért a most mondott integrálokat (amelyek a Goursat-lemma miatt mind nullával egyenlők) összeadva a sokszögön vett integrált kapjuk.

1.4.3. Cauchy-tétel körökön. Tekintsük most a φ_{ar} kört, azaz geometriailag a komplex síkon az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$ körvonalat. Legyen $3 \leq n \in \mathbf{N}$ és $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$-be írjunk n-oldalú szabályos sokszöget, amelynek a csúcspontjai a következők:

$$\xi_{nk} := a + re^{2k\pi\imath/n} \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

Ha $\sigma_{nk}(t) := \xi_{nk} + t(\xi_{nk+1} - \xi_{nk}) \quad (t \in [0,1],\, k = 0, ..., n-1))$, és $\sigma_n := \vee_{k=0}^{n-1}\sigma_{nk}$ a σ_{nk}-k („szakaszok") egyesítése, akkor a szóban forgó sokszög nem más, mint az $\mathcal{R}_{\sigma_n}$ képhalmaz. Jelöljük θ_{nk}-val $(k = 0, ..., n-1)$ az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$ körnek azt az ívét (pontosabban az azt leíró sima utat), amely a ξ_{nk}, ξ_{nk+1} pontokat köti össze:

$$\theta_{nk}(t) := a + re^{\imath t} \qquad (2k\pi/n \leq t \leq 2(k+1)\pi/n).$$

Nyilván $\varphi_{ar} = \theta_{n0} \vee ... \vee \theta_{nn-1}$. Legyen $\tilde{\theta}_{nk}$ $(k = 0, ..., n-1)$ a θ_{nk}-val ellentett irányítású körív, és $\zeta_{nk} := \sigma_{nk} \vee \tilde{\theta}_{nk}$. Ekkor

$$\int_{\sigma_n} f - \int_{\varphi_{ar}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sigma_{nk}} f - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\theta_{nk}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\zeta_{nk}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\zeta_{nk}} (f(z) - f(\xi_{nk}))\, dz$$

(ui. ζ_{nk} zárt út, a $\mathbf{C} \ni z \mapsto f(\xi_{nk})$ (konstans) függvénynek pedig van primitív függvénye, így $\int_{\zeta_{nk}} f(\xi_{nk})\, dz = 0 \ \ (k = 0, ..., n-1))$.

A $\overline{K_r(a)}$ körlemez kompakt lévén, rajta az f függvény egyenletesen folytonos. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(z) - f(y)| < \varepsilon \qquad (z, y \in \overline{K_r(a)}, |z - y| < \delta).$$

Válasszuk a $3 \leq N \in \mathbf{N}$ természetes számot úgy, hogy bármely $N \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|\xi_{nk+1} - \xi_{nk}| < \delta \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

(Ilyen N a ξ_{nk}-k szerkesztése miatt könnyen átláthatóan létezik.) Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ és $k = 0, ..., n-1$ mellett $|z - \xi_{nk}| < \delta \quad (z \in \mathcal{R}_{\zeta_{nk}})$, tehát

$$|f(z) - f(\xi_{nk})| < \varepsilon \qquad (z \in \mathcal{R}_{\zeta_{nk}}).$$

Következésképpen

$$\left| \int_{\zeta_{nk}} (f(z) - f(\xi_{nk}))\, dz \right| \leq$$

$$\max\{|f(z) - f(\xi_{nk})| : z \in \mathcal{R}_{\zeta_{nk}}\} \cdot |\zeta_{nk}| \leq \varepsilon \cdot |\zeta_{nk}| \qquad (k = 0, ..., n-1),$$

ahol (egy φ út hosszát $|\varphi|$-vel jelölve)

$$|\zeta_{nk}| = |\xi_{nk+1} - \xi_{nk}| + |\theta_{nk}| \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

Tehát

$$\left|\int_{\varphi_{ar}} f\right| = \left|\int_{\sigma_n} f - \int_{\varphi_{ar}} f\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{\zeta_{nk}} (f(z) - f(\xi_{nk}))\, dz\right| \leq$$

$$\varepsilon\cdot \sum_{k=0}^{n-1} (|\xi_{nk+1} - \xi_{nk}| + |\theta_{nk}|) = \varepsilon\cdot (|\sigma_n| + |\varphi_{ar}|) \leq 2\varepsilon\cdot |\varphi_{ar}| = 4r\pi\varepsilon.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $\int_{\varphi_{ar}} f = 0$, azaz a Cauchy-tétel „körökre” már következik.

1.4.4. Az alaptétel következményei. Vegyük észre, hogy az előbbiekben egyúttal a következőt is beláttuk:

$$\int_{\varphi_{ar}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_n} f.$$

Ezt szem előtt tartva már nem lesz nehéz megmutatni az alábbiakat: legyen a differenciálható $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény olyan, hogy valamilyen $a \in \mathbf{C}$, ill. $0 \leq r < R < +\infty$ paraméterekkel

$$\{z \in \mathbf{C} : r < |z - a| < R\} \subset \mathcal{D}_f.$$

(Geometriailag szólva tehát az f függvény legalább egy a középpontú (nyílt) körgyűrűn ($r = 0$ esetén a középpontjában „kilyukasztott” körlemezen) van értelmezve.) Ekkor tetszőleges $r < \delta < \rho < R$ esetén

$$\int_{\varphi_{a\delta}} f = \int_{\varphi_{a\rho}} f.$$

Legyenek ui. (ld. fent) $3 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett a ξ_{nk}, η_{nk}-k a következőképpen definiálva:

$$\xi_{nk} := a + \delta e^{2k\pi\imath/n} \ \ , \ \ \eta_{nk} := a + \rho e^{2k\pi\imath/n} \qquad (k = 0, ..., n),$$

és tekintsük a fentiek szerint megkonstruált ξ_{nk}, ill. η_{nk} $(k = 0, ..., n)$ csúcspontú σ_n, ill. ω_n sokszöget. Könnyen meggondolható, hogy ha már az n index „elég nagy”, akkor a σ_n sokszög is benne marad a körgyűrűben. Következésképpen

$$\int_{\varphi_{a\delta}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_n} f \ \ , \ \ \int_{\varphi_{a\rho}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\omega_n} f.$$

Jelöljük τ_{nk}-val $(k = 0, ..., n-1)$ a $\xi_{nk}, \eta_{nk}, \eta_{nk+1}, \xi_{nk+1}$ pontok által meghatározott négyszöget (egyenlőszárú trapézt) a felsorolás szerinti (azaz az óramutató járásával ellentétes) körüljárással. Az előbb említett „elég nagy” n-ekre ez a négyszög részhalmaza a körgyűrűnek, így a Cauchy-tétel sokszögekre vonatkozó változata alapján

$$\int_{\tau_{nk}} f = 0 \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

Ugyanakkor

$$\int_{\omega_n} f - \int_{\sigma_n} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_{nk}} f,$$

hiszen az előbbi összegzés során a fenti négyszögeken való integráláskor a ξ_{nk}-t η_{nk}-val összekötő szakaszon („küllőn”) vett integrállal együtt az ellentétes irányítású szakaszra vonatkozó integrált is számolni kell. Ezért a „küllőkön” vett integrálok az összeadáskor kiejtik egymást, és „marad” az ω_n-re, ill. a σ_n-nel ellentétes irányítású sokszögre vonatkozó integrál.

A Goursat-lemma segítségével egy $K_r(a)$ körlemezen értelmezett $(a \in \mathbf{C},\, r > 0)$ differenciálható $f : K_r(a) \to \mathbf{C}$ függvény esetén tetszőleges, a $K_r(a)$-ban haladó szakaszonként sima zárt $\varphi : [a, b] \to K_r(a)$ útra is megkapjuk a Cauchy-tétel állítását. Ez ui. nyilván következni fog abból, hogy a tett feltételek mellett f-nek van primitív függvénye. Ez utóbbihoz legyen

$$F(z) := \int_a^z f(\xi)\, d\xi \qquad (z \in K_r(a)),$$

ahol az $\int_a^z f(\xi)\, d\xi$ szimbólum most az f függvénynek a

$$\varphi(t) := a + t(z - a) \qquad (t \in [0, 1])$$

szakaszon vett vonalintegrálját jelöli. Ekkor tetszőleges $w, z \in K_r(a)$, $w \neq z$ helyeken az a, z, w által meghatározott Δ háromszögre (amely lehet akár elfajuló is, ha pl. $z = a$) alkalmazva a Goursat-lemmát

$$0 = \int_{\Delta} f(\xi)\, d\xi = F(z) - F(w) + \int_z^w f(\xi)\, d\xi,$$

következésképpen

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{w - z} \int_z^w f(\xi)\, d\xi - f(z) \right| =$$

$$\frac{1}{|w - z|} \left| \int_z^w (f(\xi) - f(z))\, d\xi \right| \leq$$

$$\max\{|f(\xi) - f(z)| : \xi = z + t(w - z) \ \ (t \in [0, 1])\}.$$

Mivel az f (többek között) folytonos is, ezért az $\varepsilon > 0$ számot tetszőlegesen választva van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon \qquad (|\xi - z| = t|w - z| \le |w - z| < \delta \ \ (t \in [0, 1])).$$

Ezért $w \in K_r(a)$, $|w - z| < \delta$ esetén

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \le \varepsilon,$$

ami éppen azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

határérték. Más szóval $F \in D\{z\}$ és $F'(z) = f(z)$.

Jegyezzük meg, hogy valójában az előző bizonyításban nem volt lényeges az, hogy a szóban forgó f függvény egy körlemezen van értelmezve. Ti. a bizonyítás szóról-szóra megismételhető akkor is, ha a (nyílt) $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány az a pontra nézve *csillagszerű,* azaz bármely $z \in \mathcal{D}_f$ ponttal együtt az a-t z-vel összekötő szakasz is $\mathcal{D}_f$-ben van. Következésképpen bármely $\mathcal{D}_f$-beli szakaszonként sima zárt útra is adódik a Cauchy-tétel. Nyilván minden nyílt körlemez a középpontjára nézve csillagszerű.

1.4.5. Taylor-sorok, Cauchy-formula. Az alaptétel egyik legfontosabb következménye, hogy ha $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható, és teljesül a korábbi $(*)$ tartalmazás, azaz $\overline{K_r(a)} = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \le r\} \subset \mathcal{D}_f$, akkor

- az f függvény a $K_r(a)$ körlemez minden pontjában végtelen sokszor differenciálható;
- $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \quad (z \in K_r(a))$;
- bármely $w \in K_r(a)$ helyen

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}}\, dz \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Röviden szólva tehát az f függvény a $K_r(a)$ környezetben (a körül) *Taylor-sorba fejthető.* A deriváltakra vonatkozó fenti formulában $n = 0$-t írva kapjuk az ún. *Cauchy-formulát*:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \qquad (w \in K_r(a)).$$

Ha itt $w = a$, akkor

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi_{ar}(t))}{(\varphi_{ar}(t)-a)^{n+1}} \varphi'_{ar}(t)\, dt =$$

$$\frac{n!}{2\pi\imath} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{\imath t})}{(a+re^{\imath t}-a)^{n+1}} r\imath e^{\imath t} dt = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{\imath t}) r^{-n} e^{-\imath nt}\, dt.$$

Speciálisan az $n = 0$, esetben

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{\imath t})\, dt.$$

Világos, hogy a Cauchy-formulában az f függvénynek csak a $\varphi_{ar}(t)$ ($t \in [0, 2\pi]$) körvonalpontokban felvett értékei játszanak szerepet. Ezek tehát a formula szerint meghatározzák az f értékeit a $K_r(a)$ körlemez valamennyi pontjában. Így pl. (ld. fent) $f(a)$ a körvonalon felvett függvényértékek „átlaga” (integrálközepe). Továbbá

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(*Cauchy-egyenlőtlenség*), ahol $M := \max\{|f(z)| : z \in \mathbf{C},\ |z-a| = r\}$.

Ha itt $\mathcal{D}_f = \mathbf{C}$ és az f (differenciálható) függvény korlátos, akkor egyrészt a fentiekben $a := 0$ és tetszőleges $r > 0$ írható, másrészt minden $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{\sup\{|f(z)| : z \in \mathbf{C}\} \cdot n!}{r^n} \to 0 \qquad (r \to +\infty),$$

tehát $f^{(n)}(0) = 0$. Következésképpen (ld. Taylor-sorfejtés) $f(z) = f(0)$ ($z \in \mathbf{C}$), tehát az f függvény konstans (*Liouville-tétel*). (Felhívjuk a figyelmet arra az éles különbségre, ami a (differenciálható) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények és az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvények között ebben a vonatkozásban (is) fennáll. Ti. az előbbiek esetében szó sincs a Liouville-tétel „valós megfelelőjéről”!) A most kapott Liouville-tétel segítségével könnyűszerrel beláthatjuk az *algebra alaptételét*: ha $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbf{C}$ és

$$P(z) := z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \qquad (z \in \mathbf{C})$$

(tehát P egy n-ed fokú polinom), akkor van olyan $\xi \in \mathbf{C}$, amelyre $P(\xi) = 0$ (azaz P-nek van gyöke). Valóban, pl. indirekt úton gondolkodva tegyük fel, hogy bármely $z \in \mathbf{C}$ esetén $P(z) \neq 0$. Ekkor az $1/P$ (reciprok)függvény az egész $\mathbf{C}$ komplex síkon van értelmezve és $P \in D$ miatt differenciálható. Lássuk be, hogy az indirekt feltétel mellett $1/P$ korlátos (lenne). Ti. a $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$ helyeken

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot |z|^{k-n}\right)$$

és itt minden $k = 0, ..., n-1$ indexre $\lim_{|z| \to +\infty} |z|^{k-n} = 0$. Van tehát olyan $r > 1$, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot |z|^{k-n} < \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbf{C}\, |z| > r).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy

$$|P(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbf{C}\, |z| > r),$$

azaz $1/|P(z)| \leq 2 \quad (z \in \mathbf{C},\, |z| > r)$. Ugyanakkor a $\overline{K_r(0)}$ halmaz kompakt, ezért az ismert Weierstrass-tétel alapján egy alkalmas $\eta \in \overline{K_r(0)}$ helyen

$$0 < |P(\eta)| = \max\{|P(z)| : z \in \overline{K_r(0)}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq \max\{2, 1/P(\eta)|\} \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

A Liouville-tétel szerint tehát az $1/P$ függvény konstans (lenne), ami nyilván nem igaz.

Meg fogjuk mutatni, hogy a Cauchy-formulában φ_{ar} helyett minden olyan $\varphi_{w\rho}$ kör is írható, ahol a $\rho > 0$ paraméterrel $K_\rho(w) \subset K_r(a)$. Sőt, a következő általánosabb tételt látjuk be: ha $a \in \mathbf{C}, r > 0, w \in K_r(a)$ és a differenciálható $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre $\overline{K_r(a)} \setminus \{w\} \subset \mathcal{D}_g$ igaz, akkor

$$\int_{\varphi_{ar}} g = \int_{\varphi_{w\rho}} g$$

teljesül minden olyan $\rho > 0$ esetén, amikor $\overline{K_\rho(w)} \subset \overline{K_r(a)}$.

A részletek mellőzésével csupán vázoljuk a bizonyítás fő gondolatmenetét. Tekintsük az a-t w-vel összekötő ℓ egyenest. Legyenek a w felőli félegyenesnek és az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$, ill. az $\mathcal{R}_{\varphi_{w\rho}}$ körnek az a-tól távolabbi metszéspontjai rendre A és B. Az ℓ egyenesre merőleges, w-n átmenő egyenesnek és az előbbi köröknek a metszéspontja pedig legyenek rendre C és D. Ekkor az $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ szakaszok és az (AC), (BD) körívek által alkotott φ zárt út könnyen láthatóan egy $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_g$ csillagszerű tartományban halad. Ezért $\int_\varphi g = 0$. Ugyanez mondható a φ-nek az ℓ-re vett tükörképéről is. Ha vesszük az ℓ egyenesnek az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$, $\mathcal{R}_{\varphi_{w\rho}}$ körökkel a további metszéspontjait, akkor az előbbiekhez hasonló csillagszerű tartományokban haladó zárt utakat jelölhetünk ki. Így összesen négy φ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ utat kapunk, amelyeken rendre a g integrálja nulla. Ugyanakkor a konstrukció miatt (az $\overline{AB}$, $\overline{CD}, \ldots$ szakaszokon kétszer is kell integrálnunk, másodszor ellentétes irányítás mellett, stb.)

$$0 = \sum_{k=1}^{4} \int_{\varphi_k} g = \int_{\varphi_{ar}} g - \int_{\varphi_{w\rho}} g.$$

Ha pl. $w = a$, akkor (ld. fentebb) már tudjuk, hogy

$$\int_{\varphi_{ar}} g = \int_{\varphi_{a\rho}} g \qquad (0 < \rho \le r).$$

Most tehát a középpontjában „kilyukasztott” zárt körlemez $(\overline{K_r(a)} \setminus \{a\})$ pontjaiban van (legalább) értelmezve a g függvény. Ezt illusztrálandó idézzük fel egy korábbi példánkat: $g(z) := 1/z \quad (0 \ne z \in \mathbf{C})$, amikor is $a = w = 0$, és (amint azt korábban kiszámoltuk) az

$$\int_{\varphi_{0r}} g = \int_{\varphi_{0r}} \frac{dz}{z} = 2\pi\imath$$

vonalintegrál független r-től. Érdemes megjegyezni, hogy ha (a fenti jelölésekkel) $\overline{K_r(a)} \setminus \{w\} \subset \mathcal{D}_g$, és

$$M := \sup\left\{|g(z)| : z \in \overline{K_r(a)} \setminus \{w\}\right\} < +\infty,$$

akkor (ld. 1.3. iv) megjegyzés)

$$\left|\int_{\varphi_{ar}} g\right| = \left|\int_{\varphi_{w\rho}} g\right| \le M 2\pi\rho \qquad (0 < \rho \le r),$$

és $M2\pi\rho \to 0$ $(\rho \to 0)$ miatt $\int_{\varphi_{ar}} g = 0$ (*Riemann-féle észrevétel*). Ez a helyzet pl. egy differenciálható $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény esetén, ha $\overline{K_r(a)} \subset \mathcal{D}_f$, $w \in K_r(a)$, és

$$g(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \qquad (w \neq z \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor ui. $f'(w) = \lim_{z \to w} g(z)$ miatt a g függvény szükségképpen korlátos a $\overline{K_r(a)} \setminus \{w\}$ halmazon. Így

$$0 = \int_{\varphi_{ar}} g = \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\, dz = \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - w}\, dz - f(w) \int_{\varphi_{ar}} \frac{dz}{z - w},$$

ahol

$$\int_{\varphi_{ar}} \frac{dz}{z - w}\, dz = \int_{\varphi_{w\rho}} \frac{dz}{z - w}\, dz = 2\pi\imath \qquad (\rho > 0, \overline{K_\rho(w)} \subset K_r(a)).$$

Innen

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - w}\, dz,$$

amivel igazoltuk a Cauchy-formulát.

Írjuk az utóbbi integrált a következőképpen:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - w}\, dz = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{(z - a) - (w - a)}\, dz =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}}\, dz = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - a}{z - a} \right)^n dz$$

(ahol az integrálban szereplő $z \in \mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$ helyeken $|z - a| = r > |z - w|$, következésképpen $|w - a|/|z - a| < 1$ miatt „érvényes” az előbbi végtelen (mértani) sor összegeként való felírás). Belátható, hogy az itt szereplő integrálás és a (végtelen sor) összegzés felcserélhető:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - a}{z - a} \right)^n dz =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz \right) (w - a)^n =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - a)^n,$$

azaz a tett feltételek mellett az f függvény az a pont körül hatványsorba fejthető. Következésképpen $f \in D^\infty$, és a szóban forgó hatványsor az f függvény a-körüli Taylor-sora. Ezért (ld. fent)

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tudjuk, hogy az utóbbi integrálban r helyett tetszőleges $0 < \rho \leq r$ is írható. Az előbbi $f \in D^{\infty}\{w\}$ $(w \in K_r(a))$ differenciálhatósági eredményt a Taylor-sorfejtéstől függetlenül is megkaphatjuk. Ehhez az alábbi észrevételt fogjuk felhasználni: ha a $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény folytonos az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$ körön, és

$$F_n(z) := \int_{\varphi_{ar}} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, z \in K_r(a)),$$

akkor az így definiált F_n függvény differenciálható, és

$$F_n'(z) = \int_{\varphi_{ar}} \frac{ng(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, z \in K_r(a)).$$

Valóban, legyen $z,\, w \in K_r(a)$, ekkor elemi azonosságot alkalmazva

$$F_n(w) - F_n(z) = \int_{\varphi_{ar}} g(\xi) \cdot \left(\frac{1}{(\xi - w)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right) d\xi =$$

$$\int_{\varphi_{ar}} g(\xi) \cdot \frac{(\xi - z)^n - (\xi - w)^n}{(\xi - w)^n (\xi - z)^n}\, d\xi =$$

$$(w - z) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} g(\xi) \cdot \frac{(\xi - z)^{n-k-1} \cdot (\xi - w)^k}{(\xi - w)^n (\xi - z)^n}\, d\xi =$$

$$(w - z) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} \frac{g(\xi)}{(\xi - w)^{n-k} (\xi - z)^{k+1}}\, d\xi.$$

Ha $\xi \in \mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$, azaz $|\xi - a| = r$, akkor

$$|\xi - z| \geq |\xi - a| - |a - z| = r - |a - z| =: q.$$

Tegyük fel, hogy a $\delta > 0$ számra $\delta < (r - |a - z|)/2$ teljesül. Ekkor

$$|\xi - w| \geq r - |a - w| > r - |a - z| - \delta >$$

$$\frac{r - |a - z|}{2} =: p \qquad (w \in K_r(a) \cap K_\delta(z)).$$

Ezért az $M := \max\{|g(\xi)| : \xi \in \mathcal{R}_{\varphi_{ar}}\}$ jelöléssel

$$|F_n(w) - F_n(z)| \leq |w - z| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi M r}{q^{k+1} \cdot p^{n-k}} =: C \cdot |w - z|.$$

Mindez azt jelenti, hogy az F_n függvény folytonos. Továbbá az is kiderült, hogy tetszőleges $z \neq w \in K_r(a)$ esetén

$$\frac{F_n(w) - F_n(z)}{w - z} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} \frac{g_{nk}(\xi)}{(\xi - w)^{n-k}}\, d\xi,$$

ahol a

$$g_{nk}(\xi) := \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \qquad (\xi \in \mathcal{D}_g \setminus \{z\},\ k = 0, ..., n-1)$$

függvények a g-re tett feltétel miatt nyilván folytonosak az $\mathcal{R}_{\varphi_{ar}}$ körön. Az előbbiek szerint tehát a

$$G_n(s) := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} \frac{g_{nk}(\xi)}{(\xi - s)^{n-k}}\, d\xi \qquad (s \in K_r(a))$$

függvény folytonos, következésképpen létezik a

$$\lim_{w\to z} G_n(w) = \lim_{w\to z} \frac{F_n(w) - F_n(z)}{w - z} = G_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} \frac{g_{nk}(\xi)}{(\xi - z)^{n-k}}\, d\xi =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_{ar}} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(\xi - z)^{n-k}}\, d\xi = \int_{\varphi_{ar}} \frac{ng(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

Tehát az F_n függvény valóban differenciálható, és

$$F_n'(z) = \lim_{w\to z} \frac{F_n(w) - F_n(z)}{w - z} =$$

$$\int_{\varphi_{ar}} \frac{ng(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\ z \in K_r(a)).$$

Ha az F_n definíciójában $n = 1$ és valamely differenciálható $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénnyel teljesül a $\overline{K_r(a)} \subset \mathcal{D}_f$ feltétel, akkor a $g := f$ választással a Cauchy-formula alapján

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi\imath} F_1(z) \qquad (z \in K_r(a)),$$

tehát

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\imath} F_1'(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi \qquad (z \in K_r(a)).$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett már tudjuk, hogy $f \in D^n$ és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi = \frac{n!}{2\pi\imath} F_{n+1}(z) \qquad (z \in K_r(a)).$$

A fentiek szerint $F_{n+1} \in D$, így $f^{(n)} \in D$, tehát $f \in D^{n+1}$, és

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} F'_{n+1}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{(n+1)f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} \, d\xi =$$

$$\frac{(n+1)!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} \, d\xi \qquad (z \in K_r(a)).$$

A teljes indukcióra hivatkozva innen már következik, hogy $f \in D^\infty$, és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{ar}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, z \in K_r(a)).$$

1.4.6. Laurent-sorok. A $w = a$ esetben az előbbi fejtegetések kiindulópontjául szolgáló $\overline{K_r(a)} \setminus \{w\} \subset \mathcal{D}_g$ feltétel a következőképpen is írható:

$$\{\xi \in \mathbf{C} : 0 < |\xi - a| \leq r\} \subset \mathcal{D}_g.$$

Ezt általánosítva legyen a $0 \leq r < R$ választással

$$K_{rR}(a) := \{\xi \in \mathbf{C} : r < |\xi - a| < R\}$$

(azaz geometriailag $K_{rR}(a)$ a komplex síkon egy a középpontú körgyűrű), és tegyük fel, hogy a $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvényre valamilyen $z \in K_{rR}(a)$ esetén

$$K_{rR}(a) \setminus \{z\} \subset \mathcal{D}_g.$$

Válasszuk az $r < \rho < \sigma < R$, ill. a $\delta > 0$ számokat úgy, hogy $\rho < |z - a| < \sigma$ (azaz $z \in K_{\rho\sigma}(a)$), és $\overline{K_\delta(z)} \subset K_{\rho\sigma}(a)$. Ekkor igaz az alábbi egyenlőség:

$$(**) \qquad \int_{\varphi_{z\delta}} g = \int_{\varphi_{a\sigma}} g - \int_{\varphi_{a\rho}} g,$$

ami a fenti (a Liouville-tétel alkalmazása után említett) $\int_{\varphi_{ar}} g = \int_{\varphi_{w\rho}} g$ egyenlőség bizonyításával analóg módon látható be.

Legyen most $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható és $K_{rR}(a) \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor az f függvényre igaz a következő *Laurent-féle sorfejtés*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \qquad (z \in K_{rR}(a)),$$

ahol
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n :=$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{-1} c_n(z-a)^n + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n,$$
és bármely $r<\gamma<R$ mellett
$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\gamma}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \qquad (n\in\mathbf{Z})$$
(az f függvény n-edik *Laurent-együtthatója*). Valóban, legyen $z\in K_{rR}(a)$, és tekintsük a fentiek szerinti ρ, σ, δ paramétereket. Ekkor a Cauchy-formula és a $(**)$ egyenlőség alapján (azt a
$$g(\xi) := \frac{f(\xi)}{\xi-z} \qquad (\xi\in K_{rR}(a)\setminus\{z\})$$
függvényre alkalmazva)
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{z\delta}} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\sigma}} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi =: I+J.$$
Az I integrálra a Taylor-sorfejtéssel analóg módon kapjuk, hogy a
$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\sigma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n\in\mathbf{N})$$
együtthatókkal
$$I = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

A J integrált illetően is hasonlóan járhatunk el:
$$J = -\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{z-a-(\xi-a)}\,d\xi =$$
$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}\,d\xi = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{z-a}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^k d\xi,$$
hiszen a $\varphi_{a\rho}$ körön integrálva
$$|\xi-a| = \rho < |z-a|, \ \text{ azaz } \ \frac{|\xi-a|}{|z-a|}<1 \qquad (\xi\in\mathcal{R}_{\varphi_{a\rho}})$$

miatt igaz az előbbi végtelen (mértani) sor alakjában való összegzés. Itt sem nehéz meggondolni, hogy az integrálás és az összegzés felcserélhető, következésképpen

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{a\rho}} f(\xi)(\xi - a)^k \, d\xi \right) \cdot \frac{1}{(z-a)^{k+1}} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} \, d\xi \right) \cdot (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^k,$$

ahol

$$c_k := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} \, d\xi \qquad (\mathbf{Z} \ni k < 0).$$

Befejezésül annyit kell már csupán megjegyeznünk, hogy minden $r < \gamma < R$ esetén (ld. fentebb)

$$\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta = \int_{\varphi_{a\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} \, d\xi = \int_{\varphi_{a\gamma}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} \, d\xi \qquad (\mathbf{Z} \ni k < 0).$$

1.4. Megjegyzések

i) Belátható, hogyha valamilyen $d_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{Z})$ együtthatókkal

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \qquad (z \in \mathbf{C}, r < |z - a| < R),$$

akkor $d_n = c_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ (*egyértelműség*).

ii) Világos, hogyha $\overline{K_R(a)} \subset \mathcal{D}_f$, akkor minden $0 \le r < R$ esetén teljesül a $K_{rR}(a) \subset \mathcal{D}_f$ feltétel. Ebben az esetben a fenti „negatív indexű" Laurent-együtthatókra $c_n = 0$ $(n \in \mathbf{Z}, n < 0)$ igaz. Ui.

$$\frac{1}{(\xi - a)^{n+1}} = (\xi - a)^{-n-1} \qquad (n \in \mathbf{Z}, n < 0),$$

ahol $-n - 1 \in \mathbf{N}$, azaz a $\mathbf{C} \ni \xi \mapsto (\xi - a)^{-n-1}$ függvény polinom. Ezért a $K_r(a) \ni \xi \mapsto f(\xi)(\xi - a)^{-n-1}$ függvény differenciálható, így a Cauchy-alaptétel miatt

$$\int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi = 0.$$

Ekkor tehát az f Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in K_R(a))$$

nem más, mint (az a körüli) Taylor-sora.

iii) Különösen fontos az $r = 0$ eset, amikor tehát f differenciálható, és

$$\overline{K_R(a)} \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek *szingularitása* van a-ban. Ez

- *megszüntethető szingularitás,* ha (a Laurent-együtthatókra) $c_n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}, n < 0)$;
- *N-ed rendű pólus,* ha van olyan $0 < N \in \mathbf{N}$, amellyel $c_{-N} \neq 0$ és $c_n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}, n < -N)$;
- *lényeges szingularitás,* ha végtelen sok $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ esetén $c_n \neq 0$.

Ha pl. az f függvény korlátos a $\overline{K_R(a)} \setminus \{a\}$ halmazon, akkor minden $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ esetén a

$$\overline{K_R(a)} \setminus \{a\} \ni z \mapsto f(z)(z-a)^{-n-1}$$

függvény is korlátos:

$$M := \sup \left\{ \left| f(z)(z-a)^{-n-1} \right| : z \in \overline{K_R(a)} \setminus \{a\} \right\} < +\infty.$$

Ezért

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \right| \leq \frac{M}{2\pi} 2\pi\rho = M\rho \to 0 \qquad (\rho \to 0)$$

miatt $c_n = 0$, azaz f-nek a-ban megszüntethető szingularitása van. (Nem nehéz belátni, hogy az f függvény fenti korlátossága szükséges is ahhoz, hogy a-ban megszüntethető szingularitása legyen f-nek.) Ekkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (a \neq z \in K_R(a)),$$

ami a Taylor-sorra „emlékeztet”, azzal a lényeges különbséggel, hogy ez a sorfejtés csak az a-ban „kilyukasztott” $K_R(a) \setminus \{a\}$ körlemezen érvényes.

Itt jegyezzük meg a következőket: legyen adott az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény, amelyről azt tudjuk, hogy az $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$ paraméterekkel $\overline{K_r(a)} \subset \mathcal{D}_f$, f folytonos a $\overline{K_r(a)}$ zárt környezet minden pontjában, továbbá bármely $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ helyen differenciálható. Ekkor f az a helyen is differenciálható. Ui. a folytonossági feltétel miatt az f függvény korlátos a $\overline{K_r(a)}$ halmazon, így a fentiek szerint az a körüli Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = g(z) \qquad (a \neq z \in K_r(a))$$

alakú, ahol

$$g(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - a)^n \qquad (\xi \in K_r(a)).$$

A g függvény - differenciálható lévén - folytonos is, következésképpen (az f a-beli folytonosságát is kihasználva)

$$g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $f(z) = g(z) \quad (z \in K_r(a))$, ezért $g \in D\{a\}$ miatt $f \in D\{a\}$ is igaz. (Itt is felhívjuk a figyelmet arra a különbségre, ami a differenciálható $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények és a $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvények között fennáll. Ti. a $h(x) := |x| \quad (x \in \mathbf{R})$ függvény folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon, minden $0 \neq x \in (-1, 1)$ helyen differenciálható, de $h \notin D\{0\}$.)

iv) Ha az a hely N-ed rendű pólus, akkor az f függvény Laurent-sora a következő:

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (a \neq z \in K_R(a)).$$

Innen

$$(z-a)^N f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k (z-a)^{k+N} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k-N} (z-a)^k = h(z) \qquad (a \neq z \in K_R(a)),$$

ahol

$$h(\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-N} (\xi - a)^k \qquad (\xi \in K_R(a))$$

és $h(a) = c_{-N} \neq 0$. Tehát a $K_R(a)$ környezetben differenciálható h függvénnyel $h(a) \neq 0$ és

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^N} \qquad (a \neq z \in K_R(a)).$$

Fordítva, ha f ilyen alakú, és $n \in \mathbf{Z}$, $n < -N$, akkor

$$2\pi\imath c_n = \int_{\varphi_{a\rho}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz =$$

$$\int_{\varphi_{a\rho}} h(z)(z-a)^{-(N+n+1)}\, dz \qquad (0 < \rho < R).$$

A $\mathbf{C} \ni z \mapsto (z-a)^{-(N+n+1)}$ függvény $-(N+n+1) \in \mathbf{N}$ miatt polinom, ezért az előbbi integrálban szereplő

$$K_R(a) \ni z \mapsto h(z)(z-a)^{-(N+n+1)}$$

függvény differenciálható. Következésképpen az alaptétel miatt $\int_{\varphi_{a\rho}} h(z)(z-a)^{-(N+n+1)}\, dz = 0$, azaz egyúttal $c_n = 0$ is igaz minden $n \in \mathbf{Z}$, $n < -N$ indexre. Ez azt jelenti, hogy a-ban a g függvénynek N-ed rendű pólusa van.

v) A komplex függvénytan egyik mély tétele a *Picard-tétel*: ha a g függvény a-beli szingularitása lényeges, akkor bármely $0 < \rho \leq R$ esetén a

$$\mathbf{C} \setminus \{g(z) \in \mathbf{C} : a \neq z \in K_\rho(a)\}$$

halmaz legfeljebb 1-elemű. Pl. a $g(z) := e^{1/z}$ $(0 \neq z \in \mathbf{C})$ függvénynek lényeges szingularitása van a 0-ban, és könnyen ellenőrizhetően tetszőleges $\rho > 0$ mellett

$$\left\{e^{1/z} \in \mathbf{C} : 0 \neq z \in K_\rho(0)\right\} = \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Tekintsük pl. adott $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$ paraméterek mellett az

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad (-d/c \neq z \in \mathbf{C})$$

racionális törtfüggvényt. A deriválással kapcsolatos elemi „műveleti” szabályok alapján világos, hogy az f függvény differenciálható, és

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \qquad (-d/c \neq z \in \mathbf{C}).$$

Könnyű meggondolni, hogy f-nek egyetlen szingularitása van, mégpedig a $-d/c$ pontban és ez 1-ed rendű pólus. Valóban,

$$f(z) = \frac{az+b}{c} \cdot \frac{1}{z+d/c} = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c^2}\right) \frac{1}{z+d/c} \qquad (-d/c \neq z \in \mathbf{C}),$$

ami nem más, mint az f függvény $-d/c$-körüli Laurent-sora. Ha $a = 0$, akkor $b \neq 0$ és f-nek nincs gyöke, ha $a \neq 0$, akkor $-b/a$ az egyetlen gyöke. Ez utóbbi esetben a fentiek szerint

$$f'(-b/a) = \frac{a(d-bc/a)}{(d-bc/a)^2} = \frac{a^2}{ad-bc} \neq 0,$$

tehát a gyök multiplicitása 1 (ld. vi)). Speciálisan, ha $0 \neq \alpha \in K_1(0)$, és f az α-paraméterű Blaschke-függvény:

$$f(z) := f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (1/\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C}),$$

akkor $a = 1$, $b = -\alpha$, $c = -\overline{\alpha}$, $d = 1$. Az f_α függvénynek tehát egyetlen gyöke (α) és egyetlen szingularitása $(1/\overline{\alpha})$ van, a szingularitás pedig elsőrendű pólus. Érdemes megjegyezni, hogy

$$\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{\alpha}{|\alpha|^2} \quad , \quad |\alpha| \cdot \left|\frac{1}{\overline{\alpha}}\right| = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1,$$

azaz (geometriailag) a szingularitás a gyököt az origóval összekötő egyenesen van, és a gyök, ill. a szingularitás origótól vett távolságainak a szorzata 1. Röviden: a szingularitás a gyökből az egységkörre való inverzió révén kapható.

vi) Az előbbi iii) megjegyzésre utalva legyen

$$\mathrm{res}_a f := c_{-1}$$

az f függvény a-beli *reziduuma.* Ha például a iii)-beli f racionális törtfüggvényt tekintjük (az ott tett feltételek mellett), akkor

$$\mathrm{res}_{-d/c} f := b - \frac{ad}{c^2}.$$

A most mondott definíciónk szerint tehát

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{a\rho}} f \qquad (0 < \rho < R),$$

azaz $\int_{\varphi_{a\rho}} f = 2\pi\imath\,\mathrm{res}_a f$. Sőt, ha $b \in \mathbf{C}, r > 0$, és valamilyen véges $\emptyset \neq S \subset K_r(b)$ S halmazzal $\overline{K_r(b)} \setminus S \subset \mathcal{D}_f$, akkor

$$\int_{\varphi_{b\rho}} f = 2\pi\imath \sum_{w\in S} \mathrm{res}_w f$$

teljesül minden olyan $0 < \rho < r$ „sugárral”, amelyre $S \subset K_\rho(b)$ (*reziduum-tétel*).

A reziduum-tétel jelentősége abban áll, hogy néha a $\mathrm{res}_w f \quad (w \in S)$ reziduumok könnyen kiszámíthatók, míg esetleg az $\int_{\varphi_{b\rho}} f$ vonalintegrál (pl. a definíciója alapján) nehezen. Tekintsük pl. a

$$f(z) := \frac{z+2}{z^2-1} \qquad (\pm 1 \neq z \in \mathbf{C})$$

függvényt, és számítsuk ki az $\int_{\varphi_{02}} f$ vonalintegrált. Mivel

$$f(z) = \frac{z+2}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} \qquad (\pm 1 \neq z \in \mathbf{Z}),$$

ezért $\mathrm{res}_{-1} f = -1/2$, $\mathrm{res}_1 f = 3/2$. Valóban, a

$$K_1(1) \ni z \mapsto -1/(2(z+1)) \in \mathbf{C}$$

függvény differenciálható, így 1 körül Taylor-sorba fejthető: alkalmas $c_n \in \mathbf{C} \quad (n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \qquad (z \in K_1(1)).$$

Tehát

$$f(z) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \qquad (1 \neq z \in K_1(1))$$

az f függvény Laurent-sorfejtése, amiből már „leolvasható”, hogy $\mathrm{res}_1 f = 3/2$. (Hasonlóan indokolható meg a $\mathrm{res}_{-1} f = -1/2$ egyenlőség.) Következésképpen

$$\int_{\varphi_{02}} f = 2\pi\imath(\mathrm{res}_{-1} f + \mathrm{res}_1 f) = 2\pi\imath.$$

vii) Tegyük fel, hogy a differenciálható $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénynek valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *N-szeres gyöke van* $(0 < N \in \mathbf{N})$. Ez azt jelenti, hogy

$$f(a) = f'(a) = ... = f^{(N-1)}(a) = 0 \ , \ f^{(N)}(a) \neq 0$$

(más szóval N az a gyök *multiplicitása*). Ekkor az f Taylor-sora a körül (alkalmas $r > 0$ mellett) a következő:

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^N \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z-a)^{n-N} =$$

$$(z-a)^N \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+N}(z-a)^n =: (z-a)^N F(z) \qquad (z \in K_r(a))$$

(ahol $c_n = f^{(n)}(a)/(n!)$ $(N \leq n \in \mathbf{N})$). Mivel $F(a) = c_N \neq 0$ (és F differenciálható függvény), ezért egy alkalmas $0 < \rho \leq r$ esetén $F(z) \neq 0$ $(z \in K_\rho(a))$, azaz egyúttal $f(z) \neq 0$ $(a \neq z \in K_\rho(a))$. Továbbá

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^N F'(z) + N(z-a)^{N-1}F(z)}{(z-a)^N F(z)} =$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{N}{z-a} \qquad (a \neq z \in K_\rho(a)).$$

Az F'/F függvény differenciálható a $K_\rho(a)$ körlemez minden pontjában, így az a pont körül Taylor-sorba fejthető: alkalmas $d_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n \qquad (z \in K_\rho(a)).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n \qquad (a \neq z \in K_\rho(a)).$$

Ez nem más, mint az f'/f függvény a körüli Laurent-sora. Ismét csak „leolvasható”, hogy $\mathrm{res}_a(f'/f) = N$. Ha tehát $0 < \sigma < \rho$, akkor

$$2\pi\imath N = \int_{\varphi_{a\sigma}} \frac{f'}{f}.$$

Megjegyezzük, hogy analóg módon járhatunk el akkor is, ha az f függvénynek a-ban M-ed rendű pólusa van (ahol $0 < M \in \mathbf{N}$). Ekkor ui. (ld. iii))

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^M} \qquad (z \in K_r(a)),$$

ahol a h függvény differenciálható a $K_r(a)$ körlemezen, és $h(a)$ nem nulla. Ez utóbbi miatt egy alkalmas $0 < \delta \le r$ mellett már $h(z) \neq 0$ $(z \in K_\delta(a))$. Így

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)(z-a)^M - Mh(z)(z-a)^{M-1}}{(z-a)^{2M}} \cdot \frac{(z-a)^M}{h(z)} =$$

$$\frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{M}{z-a} \qquad (z \in K_\delta(a)).$$

Innen megint csak „leolvasható”, hogy $\mathrm{res}_a\,(f'/f) = -M$, azaz

$$-2\pi\imath M = \int_{\varphi_{a\sigma}} \frac{f'}{f} \qquad (0 < \sigma < \delta).$$

viii) Az előző megjegyzés alapján a következőket mondhatjuk. Legyen $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvény, amelynek valamely $b \in \mathbf{C}, r > 0$ esetén $K_r(b)$-ben véges sok gyöke van: $a_0, ..., a_s$ (ahol $s \in \mathbf{N}$), és $K_r(b) \subset \mathcal{D}_f$. Ha $0 < N_j \in \mathbf{N}$ $(j = 0, ..., s)$ jelenti az a_j gyök multiplicitását, akkor a reziduum-tétel és a vii) megjegyzés szerint

$$\sum_{j=0}^{s} N_j = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{b\rho}} \frac{f'}{f}$$

minden olyan $0 < \rho < r$ mellett, amelyre $a_0, ..., a_s \in K_\rho(b)$. Sőt, ha azt tudjuk, hogy f-nek a $K_r(b)$ környezetben (az esetleges gyökei mellett) legfeljebb pólus szingularitásai lehetnek (és az utóbbiaktól eltekintve a $K_r(b)$ környezet minden pontja $\mathcal{D}_f$-beli) (az f egy ún. *meromorf függvény*), azaz az előbbi a_j-k mindegyike gyök vagy pólus, akkor

$$\sum_j N_j - \sum_k M_k = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_{b\rho}} \frac{f'}{f},$$

ahol N_j-k a gyökök multiplicitását, M_k-k pedig a pólusok rendjét jelölik. Ha tehát $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvény, $\overline{K_\rho(b)} \subset \mathcal{D}_f$, és a $\varphi_{b\rho}$ kör „nem megy át” az f egyetlen gyökén sem (azaz $f(z) \neq 0$

($z \in \mathbf{C}$, $|z-b| < \rho$), akkor $\dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\int_{\varphi_{b\rho}} \dfrac{f'}{f}$ az f függvény $K_\rho(b)$-be eső gyökeinek a számával egyenlő. (Ha speciálisan ilyen gyök nincs, akkor az alaptétel miatt az utóbbi integrál nulla.) A meromorf függvények most kapott alaptételének az alkalmazásaként (is) lássuk be, hogy bármely

$$P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \qquad (z \in \mathbf{C})$$

legalább elsőfokú polinomnak van gyöke (ahol tehát $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $c_0, ..., c_{n-1}$ tetszőleges komplex számok). Mivel $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ és $P \in D$, ezért P-nek akármilyen $r > 0$ mellett sincs szingularitása a $K_r(0)$ környezetben. Ha $r > 1$, és $z \in \mathbf{C}$, $|z| \ge r$, akkor

$$|P(z)| \ge |z|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot |z|^{k-n}\right),$$

ahol minden $k = 0, ..., n-1$ esetén $|z|^{k-n} \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$. Tehát

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot |z|^{k-n}\right) = 1,$$

ezért egy alkalmas $r > 1$ „sugárral"

$$|P(z)| \ge |z|^n/2 > 0 \qquad (z \in \mathbf{C},\ |z| \ge r).$$

Ez azt jelenti, hogy P valamennyi (esetleges) gyöke $K_r(0)$-ban van. (Világos, hogy P nem az azonosan nulla függvény, ezért (ld. később x) megjegyzés) legfeljebb véges sok gyöke lehet.) Legyen $z \in \mathbf{C}$, $|z| = r$, ekkor $P(z) \ne 0$ és

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{nz^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} kc_k z^{k-1}}{z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k} = \frac{n}{z} \cdot \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-1} kn^{-1} c_k z^{k-n}}{1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{k-n}}.$$

Mivel $\lim_{|z| \to +\infty} z^{k-n} = 0 \quad (k = 0, ..., n-1)$, ezért

$$\lim_{|z| \to +\infty} \Delta(z) := \lim_{|z| \to +\infty} \left(\frac{1 + \sum_{k=0}^{n-1} kn^{-1} c_k z^{k-n}}{1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{k-n}} - 1 \right) = 0.$$

A most bevezetett jelöléssel

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n}{z} + \frac{n}{z} \cdot \Delta(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ |z| = r).$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor valamilyen $R \geq r$ számmal $|\Delta(z)| < \varepsilon$ teljesül minden $z \in \mathbf{C}$, $|z| = R$ helyen. Így

$$\left|\int_{\varphi_{0R}} \frac{n}{z} \cdot \Delta(z)\, dz\right| \leq$$

$$\max\left\{\frac{n}{|z|} \cdot |\Delta(z)| : z \in \mathbf{C},\ |z| = R\right\} \cdot |\varphi_{0R}| = \frac{n}{R}\varepsilon 2\pi R = 2n\pi\varepsilon.$$

Tudjuk (ld. 1.3.), hogy

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{n}{z}\, dz = n,$$

azaz

$$\left|\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{n}{z}\, dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz - n\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{n}{z} \cdot \Delta(z)\, dz\right| \leq n\varepsilon < 1,$$

ha $\varepsilon < 1/n$. Ugyanakkor a fentiek szerint az

$$m := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{0R}} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

integrál (tehát a P polinom $K_R(0)$-ba eső gyökeinek (a multiplicitás szerinti) száma) természetes szám, ezért $|m - n| < 1$ csak úgy lehetséges, hogy $m = n$. Ezzel beláttuk, hogy P-nek $K_R(0)$-ban (az előbbi értelemben) n darab gyöke van.

ix) A viii) megjegyzés egy differenciálható f függvény gyökeinek a (multiplicitás szerinti) számáról ad felvilágosítást körlemezeken. Tegyük fel, hogy a differenciálható $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényről a következőket tudjuk:

- valamely $b \in \mathbf{C}, \rho > 0$ mellett $\overline{K_\rho(b)} \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$;
- minden $z \in \mathbf{C}, |z - b| = \rho$ esetén $f(z) \neq 0$, és $|g(z)| < |f(z)|$.

Ekkor
$$\int_{\varphi_{b\rho}} \frac{f'}{f} = \int_{\varphi_{b\rho}} \frac{(f+g)'}{f+g},$$
azaz vii) alapján f-nek és $(f+g)$-nek $K_\rho(b)$-ben ugyanannyi gyöke van (multiplicitással számolva) (*Rouché-tétel*). Az állítás jelentősége az alkalmazások szempontjából abban van, hogy a tett feltételek mellett a g „perturbáció" („mérési hiba") nem változtat a $K_\rho(b)$-beli gyökök számán. Speciálisan, ha valamilyen differenciálható $h \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénnyel $g = hf$, akkor a Rouché-tételbeli feltétel miatt $|h(z)| < 1$ $(z \in \mathbf{C}, |z-b| = \rho)$. Ekkor $K_\rho(b)$-ben $(1+h)f$-nek és f-nek ugyanannyi gyöke van. Mivel az $(1+h)f$ függvénynek az f minden gyöke triviális módon (legalább ugyanannyiszoros) gyöke, ezért $K_\rho(b)$-ben $(1+h)$-nak nem lehet gyöke, azaz $h(z) \neq -1 \quad (z \in K_\rho(b))$. Sőt, az ún. *maximum-tétel* (ld. x)) szerint: ha h nem konstans függvény, akkor bármely $z \in K_\rho(b)$ esetén
$$|h(z)| < M := \max\left\{|h(\xi)| : \xi \in \overline{K_\rho(b)}\right\}.$$
Mivel a $\overline{K_\rho(b)}$ halmaz kompakt, ezért az ismert Weierstrass-tétel miatt van olyan $w \in \overline{K_\rho(b)}$, amelyre $|h(w)| = M$. Következésképpen $|w-b| = \rho$, azaz $M < 1$. Emeljük ki külön is, amit kaptunk: ha a differenciáható $h \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre valamilyen $b \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$ esetén $\overline{K_\rho(b)} \subset \mathcal{D}_h$, $|h(z)| < 1 \quad (z \in \mathbf{C}, |z-b| = \rho)$, akkor tetszőleges $z \in \overline{K_\rho(b)}$ helyen $|h(z)| < 1$.

A Rouché-tétel egyik érdekes alkalmazásaként mutassuk be az algebra alaptételének egy újabb bizonyítását. Legyen ehhez
$$P(z) := z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \qquad (z \in \mathbf{C})$$
n-ed fokú polinom (ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbf{C}$). Ekkor az
$$f(z) := z^n \;\; , \;\; g(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \qquad (z \in \mathbf{C})$$
jelölésekkel
$$P(z) = f(z) + g(z) \qquad (z \in \mathbf{C}),$$
ahol $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvények. Mivel
$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^{k-n} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}),$$

és minden $k = 0, ..., n-1$ esetén $|z|^{k-n} \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$, ezért

$$|g(z)|/|f(z)| \to 0 \qquad (|z| \to +\infty).$$

Következésképpen van olyan $\rho > 0$, hogy $|g(z)| < |f(z)| \quad (z \in \mathbf{C}, |z| = \rho)$. Ugyanakkor világos, hogy f-nek $K_\rho(0)$-ban n darab gyöke van, ui. a 0 n-szeres gyöke f-nek. Ezért $P = (f+g)$-nek is n darab gyöke van $K_\rho(0)$-ban.

x) Ha az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvényre valamely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén minden $n \in \mathbf{N}$ „kitevőre” $f^{(n)}(a) = 0$ teljesül, akkor (egy alkalmas $r > 0$ mellett) a Taylor-sorfejtésből

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0 \qquad (z \in K_r(a))$$

adódik. Világos, hogyha $b \in K_r(a)$, és valamely $\rho > 0$ esetén $K_\rho(b) \subset \mathcal{D}_f$, akkor $f^{(n)}(b) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt $f(z) = 0$ $(z \in K_\rho(b))$. Nevezzük a $c \in \mathcal{D}_f$ pontot *a-ból elérhetőnek,* ha megadhatók a $K_{r_j}(a_j) \subset \mathcal{D}_f \quad (j = 0, ..., s)$ körlemezek $(s \in \mathbf{N})$ úgy, hogy

$$a_0 := a,\ r_0 := r,\ a_j \in K_{r_{j-1}}(a_{j-1}) \qquad (j = 1, ..., s),$$

és $c \in K_{r_s}(a_s)$. Ekkor az előbb mondottakat rekurzíve alkalmazva azt kapjuk, hogy $f^{(n)}(a_j) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz $f(z) = 0 \quad (z \in K_{r_j}(a_j)$ $(j = 0, ..., s)$. Speciálisan: $f(c) = 0$. Ha tehát a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány bármely c pontja tetszőleges $a \in \mathcal{D}_f$ pontból elérhető, akkor három eset lehetséges:

- az f függvény vagy az azonosan nulla függvény,
- vagy nincs gyöke f-nek,
- vagy az f tetszőleges $\xi \in \mathcal{D}_f$ gyökére van olyan $0 < N \in \mathbf{N}$, hogy $f^{(N)}(\xi) \neq 0$.

A vii) megjegyzésben láttuk, hogy a harmadik esetben egy alkalmas $\rho > 0$ esetén $K_\rho(\xi)$-ben a ξ az egyetlen gyök. Röviden: az f gyökei diszkréten helyezkednek el. Innen az is következik, hogyha az f függvény nem azonosan nulla és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományra igaz a fenti „elérhetőségi” tulajdonság, akkor az f (esetleges) gyökei a $\mathcal{D}_f$ egyetlen pontjában sem „torlódhatnak”. Más szóval, ha $z_n \in \mathcal{D}_f$,

$f(z_n) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ és létezik a $\xi := \lim_{n\to\infty} z_n$ határérték, akkor $\xi \notin \mathcal{D}_f$. Különben az átviteli elv miatt $f(\xi) = 0$, azaz ξ is gyök lenne, amire $\xi := \lim_{n\to\infty} z_n$ miatt nyilván nem lenne igaz a fenti „diszkretizációs" tulajdonság. Mindezt úgy is fogalmazhatjuk, hogyha $\xi \in \mathcal{D}_f$, akkor $f \equiv 0$. Ugyanennek a ténynek egy érdekes átfogalmazása az alábbi: ha a differenciálható $g : \mathcal{D}_f \to \mathbf{C}$ függvény olyan, hogy bizonyos $w_n \in \mathcal{D}_f$ pontokban

$$g(w_n) = f(w_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és létezik a $\lim_{n\to\infty} w_n \in \mathcal{D}_f$ határérték, akkor $f = g$. A részletek mellőzésével jegyezzük meg csupán, hogy mindebből belátható a ix) megjegyzésben már említett *maximum-tétel*: ha létezik a

$$\max\{|f(z)| : z \in \mathcal{D}_f\}$$

maximum, akkor az f függvény konstans függvény.

xi) A reziduum-tétel segítségével esetenként könnyen ki tudunk számítani „valós" integrálokat is. Legyen pl. $0 < p < 1$ és határozzuk meg az

$$I_p := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p\cos t + p^2}$$

integrált. Az Euler-összefüggés (ld. 1.2.) szerint

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - p(e^{\imath t} + e^{-\imath t}) + p^2}\, dt = -\int_0^{2\pi} \frac{e^{\imath t}}{pe^{2\imath t} - (1+p^2)e^{\imath t} + p}\, dt =$$

$$\imath \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \imath \int_\varphi f,$$

ahol

$$f(z) := \frac{1}{pz^2 - (1+p^2)z + p} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{p, 1/p\}),$$

és $\varphi(t) := \varphi_{01}(t) = e^{\imath t}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Mivel $\overline{K_1(0)} \setminus \{p\} \subset \mathcal{D}_f$, ezért a reziduum-tétel miatt

$$I_p = \imath 2\pi\imath\, \mathrm{res}_p f = -2\pi\, \mathrm{res}_p f.$$

Ugyanakkor

$$f(z) = \frac{1}{p(z-p)(z-1/p)} =$$

$$\frac{1}{p^2-1} \cdot \left(\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-1/p}\right) \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{p, 1/p\}),$$

azaz (a korábbi analóg esetekben részletezett meggondolások megismétlésével) $\mathrm{res}_p f = \dfrac{1}{p^2-1}$. Következésképpen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p\cos t + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

xii) Az előbbi megjegyzésben bemutatott „technikát” alkalmazhatjuk pl. a következő improprius integrál meghatározásakor is:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy az ismert $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ egyenlőség miatt minden $R > 0$ esetén az

$$[0,R] \ni x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény folytonos, így van értelme az

$$I_R := \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

integrálnak. Azt kell meggondolni, hogy $\lim_{R\to+\infty} I_R = \pi/2$. Az előbbiekhez hasonlóan az Euler-összefüggéseket alkalmazva azt írhatjuk, hogy

$$I_R = \frac{1}{2\imath}\int_0^R \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{x}\, dx = \frac{1}{2\imath}\left(\int_0^R \frac{e^{\imath x}-1}{x}\, dx + \int_0^R \frac{1-e^{-\imath x}}{x}\, dx\right) =$$

$$\frac{1}{2\imath}\int_{-R}^R \frac{e^{\imath x}-1}{x}\, dx.$$

Legyen

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{e^{\imath z}-1}{z} & (0 \neq z \in \mathbf{C}) \\ \imath & (z = 0), \end{cases}$$

ekkor könnyen láthatóan az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény differenciálható. Továbbá világos, hogy a $\varphi_R(t) := Re^{\imath t} \quad (t \in [0,\pi])$ komplex úttal $2\imath I_R = -\int_{\varphi_R} f$. Ezért

$$-2\imath I_R = \int_0^\pi f(Re^{\imath t}) R\imath e^{\imath t}\, dt = \imath R \int_0^\pi \frac{e^{\imath R e^{\imath t}} - 1}{Re^{\imath t}} e^{\imath t}\, dt,$$

azaz

$$I_R = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{\imath R(\cos t + \imath \sin t)}\,dt =: \frac{\pi}{2} - \delta_R.$$

Mivel

$$|\delta_R| \le \frac{1}{2}\int_0^\pi \left|e^{\imath R(\cos t+\imath \sin t)}\right|\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \le$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\,dt = \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) \to 0 \qquad (R\to+\infty),$$

ezért a fentiek alapján valóban $I_R \to \pi/2$ $(R\to+\infty)$.

xiii) Legyen most

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} & (0 \ne x \in \mathbf{R}) \\ 1 & (x=0). \end{cases}$$

Ekkor a g függvény folytonos, így bármely $R > 0$ mellett kiszámíthatjuk a

$$J_R := \int_{-R}^R g(x)\,dx = \int_{-R}^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

integrált. A g páros függvény, ezért $J_R = 2\int_0^R g(x)\,dx$, ahol parciális integrálással

$$\int_0^R g(x)\,dx = -\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^R \frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx =$$

$$-\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^R \frac{\sin(2x)}{x}\,dx = -\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^{2R}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Innen a xii) megjegyzést is figyelembe véve $\frac{\sin^2 R}{R} \to 0$ $(R\to+\infty)$ miatt $\int_0^R g(x)\,dx \to \pi/2$ $(R\to+\infty)$, azaz $J_R \to \pi$ $(R\to+\infty)$ következik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi.$$

xiv) Röviden emlékeztetünk a *Fourier-transzformált* definíciójára. Legyen ehhez az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvény *abszolút integrálható* (azaz $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$), ekkor minden $y \in \mathbf{R}$ esetén a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto f(t)e^{-\imath yt}$$

függvény is nyilván abszolút integrálható, ezért létezik (és véges) az

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\imath xy}\, dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

integrál is. Az előbbi definíció alapján nem meglepő, hogy az $\hat{f}(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ Fourier-transzformált kiszámítása során komplex függvénytani eszközök is szerepet kaphatnak.

a) Legyen pl.

$$f(x) := e^{-x^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és mutassuk meg, hogy

$$\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi} \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Valóban,

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} \cdot f(0).$$

Ha $0 < x \in \mathbf{R}$, akkor

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cdot e^{-\imath xy}\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\imath x)^2/2 - x^2/2}\, dy = e^{-x^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\imath x)^2/2}\, dy.$$

Az utóbbi integrál kiszámításához legyen valamilyen $0 < a, b \in \mathbf{R}$ esetén T az a téglalap a komplex síkon, amelynek a csúcspontjai: $\pm a$, $\pm a + \imath b$, ill. legyen $\varphi^{(a)}$ a T kerülete (az óramutató járásával ellenkező körüljárással). Ekkor a Cauchy-féle alaptétel szerint

$$\int_{\varphi^{(a)}} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

A T téglalap függőleges ($\varphi_1^{(a)}$, $\varphi_2^{(a)}$) oldalainak a $z = \pm a + \imath t$ $(0 \le t \le b)$ pontjaiban

$$\left| e^{-z^2/2} \right| = e^{-a^2/2} e^{t^2/2} \le e^{b^2/2} \cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty).$$

Így

$$\left|\int_{\varphi_j^{(a)}} e^{-z^2/2}dz\right| \le |b|e^{b^2/2}\cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty,\ j = 1, 2),$$

ezért

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\varphi_j^{(a)}} e^{-z^2/2}dz = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

A T vízszintes oldalain ($\varphi_3^{(a)}$, $\varphi_4^{(a)}$) az integrálok:

$$\int_{\varphi_3^{(a)}} e^{-z^2/2}dz = \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt \ , \ \int_{\varphi_4^{(a)}} e^{-z^2/2}dz = \int_{-a}^{a} e^{-(t+\imath b)^2/2}dt.$$

Következésképpen (a $\varphi^{(a)}$ irányítását is figyelembe véve)

$$0 = \int_{\varphi^{(a)}} e^{-z^2/2}dz =$$

$$\int_{\varphi_1^{(a)}} e^{-z^2/2}dz - \int_{\varphi_2^{(a)}} e^{-z^2/2}dz + \int_{\varphi_3^{(a)}} e^{-z^2/2}dz - \int_{\varphi_4^{(a)}} e^{-z^2/2}dz,$$

azaz

$$0 = \lim_{a\to+\infty}\int_{\varphi^{(a)}} e^{-z^2/2}dz = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt - \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-(t+\imath b)^2/2}dt,$$

amiből

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+\imath b)^2/2}\, dt = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-(t+\imath b)^2/2}\, dt =$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2}\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

következik. Ha $x \in \mathbf{R}$, és $x < 0$, akkor legyen a fentiekben $b < 0$, és (értelemszerű módosítás során) analóg számolással jutunk ugyanerre az eredményre. Tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\imath x)^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért $\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\cdot e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}\cdot f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$, amit bizonyítani kellett.

b) A reziduum-tétel alkalmazására tekintsük az

$$f(t) := \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényt. Legyen $x > 0$ és

$$F(z) := \frac{e^{\imath zx}}{1+z^2} \qquad (\pm\imath \neq z \in \mathbf{C}),$$

ill. $r > 1$ esetén φ_r jelölje azt a zárt komplex görbét (szintén pozitív körüljárással), amelyet a $[-r, r]$ szakasz ($\varphi_{r,1}$) és az origó középpontú, r sugarú, az $\operatorname{Im} z \geq 0 \quad (z \in \mathbf{C})$ félsíkban lévő félkör ($\varphi_{r,2}$) egyesítésével kapunk. Tehát

$$\varphi_{r,1}(t) := t \quad (-r \leq t \leq r) \ \ , \ \ \varphi_{r,2}(t) := re^{\imath t} \ \ (0 \leq t \leq \pi).$$

Ekkor a reziduum-tétel alapján

$$\int_{\varphi_r} F(z)\, dz = \int_{\varphi_{r,1}} F(z)\, dz + \int_{\varphi_{r,2}} F(z)\, dz = 2\pi\imath \operatorname{res}_\imath F,$$

ahol az F függvény $\imath$-beli reziduuma: $\operatorname{res}_\imath F = e^{-x}/(2\imath)$. Így

$$\int_{\varphi_r} F(z)\, dz = \pi e^{-x}.$$

Itt

$$\left|\int_{\varphi_{r,2}} F(z)\, dz\right| \leq \pi r \cdot \max\left\{|F(re^{\imath t}| : 0 \leq t \leq \pi\right\} =$$

$$\pi r \cdot \max\left\{\frac{\left|e^{\imath x re^{\imath t}}\right|}{|1+r^2e^{2\imath t}|} : 0 \leq t \leq \pi\right\},$$

ahol a $0 \leq t \leq \pi$ helyeken

$$\left|e^{\imath x re^{\imath t}}\right| = \left|e^{\imath x r(\cos\, t + \imath \sin\, t)}\right| = e^{-xr \sin\, t} \leq 1,$$

ill.

$$\left|1 + r^2e^{2\imath t}\right| \geq r^2 - 1.$$

Ezért

$$\pi r \cdot \max\left\{\frac{\left|e^{\imath x re^{\imath t}}\right|}{|1+r^2e^{2\imath t}|} : 0 \leq t \leq \pi\right\} \leq \frac{\pi r}{r^2-1} \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_{r,2}} F(z)\, dz = 0$, azaz

$$\pi e^{-x} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_r} F(z)\, dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_{r,1}} F(z)\, dz =$$

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{e^{\imath tx}}{1+t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\imath tx}}{1+t^2}\,dt=\hat{f}(-x).$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\hat{f}(y)=\pi e^{y}=\pi e^{-|y|}$ $(y<0)$. Az f függvény párossága miatt az $\hat{f}$ függvény is páros, ill. $\hat{f}$ folytonossága alapján $\hat{f}(0)=\pi$, következésképpen

$$\hat{f}(x)=\pi e^{-|x|}\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

xv) Az 1.2. vii) megjegyzésben bevezetett Blaschke-függvényekre utalva (ld. még 1.2. xiv) megjegyzés) adott $\alpha_n\in K_1(0)$ $(n\in\mathbf{N})$ paraméterek mellett tekintsük a

$$\Phi_n(z):=e_{\alpha_n}(z)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}f_{\alpha_n}(z)=$$

$$\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha}_n z}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\qquad (z\in\overline{K_1(0)},n\in\mathbf{N})$$

függvénysorozatot, az ún. *Malmquist–Takenaka-rendszert.* Nyilvánvaló, hogy a Φ_n $(n\in\mathbf{N})$ függvény *racionális függvény,* azaz két polinom hányadosa a $\overline{K_1(0)}$ zárt körlemezen:

$$\Phi_n(z)=\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}\qquad (z\in\overline{K_1(0)}),$$

ahol a

$$Q_n(z):=\sqrt{1-|\alpha_n|^2}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(z-\alpha_k)\qquad (z\in\mathbf{C})$$

utasítással definiált Q_n polinom n-ed fokú, az

$$R_n(z):=\prod_{k=0}^{n}(1-\overline{\alpha}_k z)\qquad (z\in\mathbf{C})$$

hozzárendeléssel megadott R_n polinom pedig legfeljebb $(n{+}1)$-ed fokú. Az α_n $(n\in\mathbf{N})$ sorozatot illetően vezessük be az alábbi fogalmat, ill. jelölést:

$$m_n:=\sum_{j=0,\alpha_j=\alpha_n}^{n}1\qquad (n\in\mathbf{N})$$

(az α_n *multiplicitása*). Következésképpen az $\alpha_0,...,\alpha_n$ $(n\in\mathbf{N})$ számok között az α_n szám m_n-szer fordul elő. Világos, hogy ha pl. az

α_n-ek páronként különbözőek, akkor $m_n = 1$, ill., ha az α_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konstans sorozat, akkor $m_n = n+1$ $(n \in \mathbf{N})$. Az R_n polinom gyöktényezős alakja ezért (valamilyen $l \in \mathbf{N}$ mellett) a következő:

$$R_n(z) := \prod_{j=0}^{l}(1-\overline{\alpha}_{s_j} z)^{m_{s_j}} \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

ahol $\alpha_{s_0}, ..., \alpha_{s_l}$ az $\alpha_0, ..., \alpha_n$ számok közül a páronként különbözőket jelöli a maximális előfordulási $0 \le s_0, ..., s_l \le n$ indexekkel (ha pedig $\alpha_k = 0$ minden $k = 0, ..., n$ esetén, akkor $R_n(z) = 1$ $(z \in \mathbf{C})$. A parciális törtekre bontás módszerével ezért alkalmasan választott $b_{pk} \in \mathbf{C}$ $(p = 0, ..., l,$ ill. $k = 1, ..., m_{s_p})$ számokkal

$$\Phi_n(z) = \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \sum_{p=0}^{l}\sum_{k=1}^{m_{s_p}} \frac{b_{pk}}{(1-\overline{\alpha}_{s_p} z)^k} \qquad (z \in \overline{K_1(0)}),$$

ill. az $\alpha_k = 0$ $(k = 0, ..., n)$ esetben $\Phi_n(z) = z^n$ $(z \in \mathbf{C})$. Megjegyezzük, hogy ugyancsak parciális törtekre bontással kapjuk a

$$\psi_s(z) := \begin{cases} z^{m_s-1} & (\alpha_s = 0) \\ \\ \dfrac{z^{m_s-1}}{(1-\overline{\alpha}_s z)^{m_s}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m_s} \frac{c_{sk}}{(1-\overline{\alpha}_s z)^k} & (\alpha_s \neq 0) \end{cases} \qquad (z \in \overline{K_1(0)})$$

előállítást $c_{sk} \in \mathbf{C}$ $(s \in \mathbf{N}, k = 1, ..., m_s)$ együtthatókkal. Mindezt egybevetve a fentiekkel azt mondhatjuk tehát, hogy

$$\Phi_n(z) = \sum_{s=0}^{r} \gamma_s \psi_s(z) \qquad (z \in \overline{K_1(0)}),$$

ahol $\mathbf{N} \ni r \le n$ és $\gamma_0, ..., \gamma_r \in \mathbf{C}$ alkalmas paraméterek. Nyilvánvaló továbbá, hogy ha $n, s \in \mathbf{N}$ és $n < s$, akkor az α_j $(j = 0, ..., n)$ számok a Φ_s függvénynek legalább m_j-szeres gyökei, így

$$\Phi_s^{(m_j-1)}(\alpha_j) = 0 \qquad (j = 0, ..., n).$$

Ezért a deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula alapján egyúttal

$$0 = \frac{\Phi_s^{(m_j-1)}(\alpha_j)}{(m_j-1)!} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{01}} \frac{\Phi_s(z)}{(z-\alpha_j)^{m_j}}\,dz =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi_s(e^{\imath t})e^{\imath t}}{(e^{\imath t}-\alpha_j)^{m_j}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi_s(e^{\imath t})e^{-\imath(m_j-1)t}}{(1-\alpha_j e^{-\imath t})^{m_j}}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_s(e^{\imath t})\cdot\overline{\left(\frac{e^{\imath(m_j-1)t}}{(1-\overline{\alpha}_j e^{\imath t})^{m_j}}\right)}\,dt=\langle\Phi_s,\Psi_j\rangle,$$

ahol az $F,G:\overline{K_1(0)}\to\mathbf{C}$ folytonos és minden $z\in K_1(0)$ helyen differenciálható függvényekre

$$\langle F,G\rangle:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{\imath t})\overline{G(e^{\imath t})}\,dt.$$

Vegyük észre, hogy az előbbiekben (a $\Phi_s\longleftrightarrow F$ cserére gondolva) egyúttal a következőt is beláttuk:

$$\langle F,\psi_j\rangle=\frac{F^{(m_j-1)}(\alpha_j)}{(m_j-1)!}\qquad(j\in\mathbf{N}).$$

xvi) Megmutatható, hogy

$$\langle\Phi_n,\Phi_s\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_n(e^{\imath t})\overline{\Phi_s(e^{\imath t})}\,dt=\begin{cases}1 & (n=s)\\ \\ 0 & (n\neq s)\end{cases}\qquad(n,s\in\mathbf{N}),$$

azaz a $\langle\Phi_n,\Phi_s\rangle$ *skaláris szorzás* értelmében a Φ_k $(k\in\mathbf{N})$ rendszer *ortonormált.* Ez ui. $n\neq s$ (legyen pl. $n<s$) esetén az előző $\langle\Phi_s,\Psi_j\rangle=0$ $(j=0,...,n)$ megjegyzésből és abból a tényből következik, hogy a Φ_n függvény a $\psi_0,...,\psi_n$ függvények lineáris kombinációja: $\Phi_n=\sum_{k=0}^n\gamma_k\psi_k$, ezért

$$\langle\Phi_n,\Phi_s\rangle=\sum_{k=0}^n\gamma_k\cdot\langle\psi_k,\Phi_s\rangle=0.$$

Ha viszont $n=s$, akkor – lévén az $e^{\imath t}$ $(t\in[0,2\pi])$ pontok az egységkör pontjai – $|f_{\alpha_n}(e^{\imath t})|=1$ $(t\in[0,2\pi])$, tehát

$$\langle\Phi_n,\Phi_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e_{\alpha_n}(e^{\imath t})\right|^2dt=\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-\overline{\alpha}_n e^{\imath t}}\right|^2dt.$$

Legyen $\alpha_n=u_n-\imath v_n$ $(u_n,v_n\in\mathbf{R},u_n^2+v_n^2<1)$, ekkor

$$\left|1-\overline{\alpha}_n e^{\imath t}\right|^2=|1-(u_n+\imath v_n)(\cos t+\imath\sin t)|^2=$$

$$(1-u_n\cos t+v_n\sin t)^2+(v_n\cos t+u_n\sin t)^2=$$

$$1+u_n^2+v_n^2+2v_n\sin t-2u_n\cos t=$$

$$1+u_n^2+v_n^2+2\sqrt{u_n^2+v_n^2}\left(\frac{v_n}{\sqrt{u_n^2+v_n^2}}\sin t-\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+v_n^2}}\cos t\right)=$$

$$1+u_n^2+v_n^2+2\sqrt{u_n^2+v_n^2}\cdot(\sin t\cos\gamma_n-\cos t\sin\gamma_n)=$$

$$1+u_n^2+v_n^2+2\sqrt{u_n^2+v_n^2}\cdot\sin(t-\gamma_n)=1+2a_n\cdot\sin(t-\gamma_n)+a_n^2,$$

ahol $\gamma_n\in[0,2\pi)$ egy alkalmas „szög”, $a_n:=\sqrt{u_n^2+v_n^2}$. Azt írhatjuk tehát, hogy (a 2π-szerinti periodicitást is figyelembe véve)

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-\overline{\alpha}_n e^{\imath t}}\right|^2 dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1+2a_n\cdot\sin(t-\gamma_n)+a_n^2}=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1+2a_n\cdot\sin t+a_n^2}.$$

A „szokásos” $x=\operatorname{tg}(t/2)$ helyettesítéssel

$$t=\operatorname{arctg}x\ ,\quad \sin t=\frac{2x}{1+x^2}\ ,\quad dt=\frac{2}{1+x^2}\,dx,$$

tehát a $b_n:=\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}$ jelöléssel $b_n<1$, és

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1+2a_n\cdot\sin t+a^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+x^2+4a_nx+a_n^2(1+x^2)}\,dx=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{(1+a_n^2)x^2+4a_nx+1+a_n^2}\,dx=$$

$$\frac{2}{1+a_n^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2b_nx+1}\,dx=$$

$$\frac{2}{1+a_n^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+b_n)^2+1-b_n^2}\,dx=$$

$$\frac{2}{(1+a_n^2)(1-b_n^2)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+((x+b_n)/\sqrt{1-b_n^2})^2}\,dx=$$

$$\frac{2}{(1+a_n^2)\sqrt{1-b_n^2}}\cdot\left[\operatorname{arctg}\frac{x+b_n}{\sqrt{1-b_n^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{(1+a_n^2)\sqrt{1-b_n^2}}=$$

$$\frac{2\pi}{1-a_n^2}=\frac{2\pi}{1-u_n^2-v_n^2}=\frac{2\pi}{1-|\alpha_n|^2}.$$

Következésképpen

$$\langle\Phi_n,\Phi_n\rangle=\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-\overline{\alpha}_n e^{\imath t}}\right|^2\,dt=1.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy a Malmquist–Takenaka-rendszer a $\psi_n \quad (n\in\mathbf{N})$ függvényrendszerből a fenti skaláris szorzatot alapul véve a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással adódik. Speciálisan, ha $\alpha_n=0 \quad (n\in\mathbf{N})$, akkor $\Phi_n(z)=z^n \quad (z\in\overline{K_1(0)}, n\in\mathbf{N})$, és az előbbi ortonormáltság nem jelent mást, mint a klasszikus trigonometrikus rendszer ortonormáltságát:

$$\langle\Phi_n,\Phi_s\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\imath(n-s)t}\,dt=\begin{cases}1 & (n=s)\\ \\ 0 & (n\neq s)\end{cases}\qquad (n,s\in\mathbf{N}).$$

Megjegyezzük, hogy a valamilyen $a\in K_1(0)$ paraméter mellett tekintett (konstans) $\alpha_n:=a \quad (n\in\mathbf{N})$ generáló sorozat esetén kapott

$$\Phi_n(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha}_n z}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}=$$

$$\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\overline{a}z}\cdot\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n \qquad (z\in\overline{K_1(0)}, n\in\mathbf{N})$$

függvénysorozat az ún. *Laguerre-rendszer.* Hasonlóan, ha most $a,\, b \in K_1(0)$, és

$$\alpha_n := \begin{cases} a & (n = 2k \quad (k \in \mathbf{N})) \\ \\ b & (n = 2k+1 \quad (k \in \mathbf{N})), \end{cases}$$

akkor

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\overline{b}z} \cdot \left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^{k+1} \cdot \left(\dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}\right)^k & (n = 2k+1 \quad (k \in \mathbf{N})) \\ \\ \dfrac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\overline{a}z} \cdot \left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^{k} \cdot \left(\dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}\right)^k & (n = 2k \quad (k \in \mathbf{N})) \end{cases}$$

$(z \in \overline{K_1(0)})$ az ún. *Kautz-rendszer.*

1.5. Nyílt leképezések, invertálás

Legyen valamilyen $\zeta \in \mathbf{C}$, $R > 0$ mellett $f : K_R(\zeta) \to \mathbf{C}$ differenciálható függvény, $a \in \mathcal{D}_f$, $r > 0$ pedig olyan, hogy

$$\overline{K_r(a)} = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| \leq r\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Tegyük fel, hogy f nem állandó függvény. Ekkor egyértelműen létezik olyan $0 < k \in \mathbf{N}$ „kitevő”, amellyel f Taylor-sora a körül a következő alakú:

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j \qquad (z \in \overline{K_r(a)}),$$

ahol $f^{(k)}(a) \neq 0$. Tehát

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^{j-k} =: (z-a)^k g(z) \quad (z \in \overline{K_r(a)}),$$

és itt a

$$g(z) := \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^{j-k} \qquad (z \in \overline{K_r(a)})$$

függvény differenciálható, $g(a) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$. Utóbbi miatt r-ről feltehető, hogy $g(z) \neq 0 \quad (z \in \overline{K_r(a)})$. Mivel $\{z \in \mathbf{C} : |z-a| = r\}$ kompakt, g pedig folytonos, ezért a Weierstrass-tétel alapján egy $v \in \mathbf{C}$, $|v-a| = r$ mellett

$$\rho := \min\{|f(z) - f(a)| : z \in \mathbf{C}, |z-a| = r\} =$$

$$r^k \cdot \min\{|g(z)| : z \in \mathbf{C}, |z-a| = r\} = r^k |g(v)| > 0.$$

Válasszunk egy tetszőleges $w \in K_\rho(f(a))$ számot, ekkor a fentiek szerint minden $z \in \mathbf{C}$, $|z-a| = r$ esetén

$$f(z) - w = (f(z) - f(a)) + (f(a) - w)\,,$$

ahol $|f(a) - w| < \rho \leq |f(z) - f(a)|$, tehát

$$|f(a) - w| < |f(z) - f(a)| \qquad (z \in \mathbf{C},\ |z-a| = r).$$

Innen a Rouchè-tétel alapján az adódik, hogy $K_r(a)$-ban az $f(z) - w = 0$ egyenletnek és az

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z) = 0$$

egyenletnek (multiplicitással számolva) ugyanannyi megoldása van z-re nézve. Mivel a

$$(z-a)^k g(z) = 0$$

egyenletnek az a pont k-szoros gyöke, ezért $K_r(a)$-ban az

$$f(z) = w$$

egyenletnek is k darab gyöke van, tehát $k \geq 1$ miatt legalább egy $z \in K_r(a)$ helyen $f(z) = w$. Ez azt is jelenti egyúttal, hogy a $K_\rho(f(a))$ környezet részhalmaza $f[K_r(a)]$-nak.

Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq U \subset \mathcal{D}_f$, U nyílt és $b \in f[U]$. Ekkor alkalmas $a \in U$ választással $b = f(a)$ és U nyíltsága miatt valamilyen $r > 0$ mellett $K_r(a) \subset U$. A fentiek szerint tehát $K_\rho(f(a)) \subset f[K_r(a)] \subset f[U]$, tehát $K_\rho(b) \subset f[U]$. Ezért $f[U]$ nyílt halmaz.

Egy $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényt *nyíltnak* nevezünk, ha $\mathcal{D}_g$ nyílt és minden nyílt $U \subset \mathcal{D}_g$ halmazra a $g[U]$ képhalmaz is nyílt halmaz. Az előbbiekben tehát a következő állítást láttuk be (*komplex nyílt leképezések tétele*): a fenti f függvény nyílt leképezés.

Speciálisan, a most mondott tétel feltételei mellett f értékkészlete nyílt halmaz. Ha f injektív is, akkor f^{-1} folytonos függvény. Ui. bármely

$U \subset \mathbf{C}$, U nyílt halmaz esetén $\left(f^{-1}\right)^{-1}[U] = f[U]$ nyílt halmaz, ami a folytonosság nyílt halmazok ősképeivel való jellemzése alapján valóban azt jelenti, hogy f^{-1} folytonos. Ha még valamely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen az is igaz, hogy $f'(a) \neq 0$, akkor $f^{-1} \in D\{f(a)\}$ és $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \left(f'(a)\right)^{-1}$. Ehhez ui. azt kell megmutatnunk (a határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján), hogy tetszőleges $f(a) \neq y_n \in \mathcal{R}_f \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(y_n) = f(a)$ sorozatra

$$\lim\left(\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)}\right) = \lim\left(\frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - f(a)}\right) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Legyen ehhez $x_n \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ az a sorozat, amelyre $y_n = f(x_n)$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor $x_n \neq a \quad (n \in \mathbf{N})$ és f^{-1} folytonossága miatt

$$\lim(x_n) = \lim\left(f^{-1}(y_n)\right) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Tehát

$$\lim\left(\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)}\right) = \lim\left(\frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}\right) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Lássuk be, hogyha a tételben szereplő f függvény invertálható, akkor bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f'(a) \neq 0$. Ha ui. valamely $a \in \mathcal{D}_f$ mellett $f'(a) = 0$, akkor a fenti k „kitevőre" $k \geq 2$ teljesül. Mivel f folytonos, ezért alkalmas $0 < \varrho \leq r$ mellett $f[K_\varrho(a)] \subset K_\rho(f(a))$. Ezért tetszőleges $x \in K_\varrho(a)$ esetén az $f(z) - f(x) = 0 \quad (z \in K_r(a))$ egyenletnek legalább két gyöke van. Ugyanakkor f injektív, ezért ezek a gyökök egybeesnek x-szel, azaz az $f(z) - f(x) = 0 \quad (z \in K_r(a))$ egyenletnek x legalább kétszeres gyöke, így

$$(f - f(x))'(x) = f'(x) = 0.$$

Tehát $f'_{|_{K_\varrho(a)}} \equiv 0$, amiből az következik, hogy $f_{|_{K_\varrho(a)}}$ állandó függvény. Ez viszont ellentmond az f invertálhatóságának, tehát valóban $f'(a) \neq 0$.

Vegyük észre, hogy az előbbi okoskodásban csak annyit használtunk ki f invertálhatóságából, hogy $f_{|_{K_r(a)}}$ invertálható. Ez motiválja a következő definíciót: a $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény *lokálisan invertálható az a-ban* $(a \in \mathcal{D}_g)$, ha van olyan $K_r(a)$ környezet, hogy $g_{|_{K_r(a)}}$ invertálható.

Ha tehát f lokálisan invertálható a-ban, akkor $f'(a) \neq 0$. Nem nehéz megmutatni, hogy mindez fordítva is igaz. Ennek a bizonyításához ismét a fentebb mondottakra hivatkozunk. Ha (az ottani jelölésekkel) $f'(a)$ nem nulla, akkor $k = 1$, és (az előbbi ϱ mellett) bármely $x \in K_\varrho(a)$ esetén az

$f(z) - f(x) = 0 \quad (z \in K_r(a))$ egyenletnek pontosan egy megoldása van: $z = x$. Ez persze azt is jelenti, hogy $f_{|K_\varrho(a)}$ injektív, azaz az f függvény a-ban lokálisan invertálható.

Igaz tehát a következő állítás (*komplex függvények lokális invertálhatósága*): legyen valamilyen $\zeta \in \mathbf{C}$, $R > 0$ esetén $f : K_R(\zeta) \to \mathbf{C}$, $f \in D$. Ekkor bármely $a \in K_R(\zeta)$ pontot is véve f akkor és csak akkor lokálisan invertálható a-ban, ha $f'(a) \neq 0$.

Az eddigiek alapján már egyszerűen adódik az alábbi következmény (*inverz függvény differenciálhatósága*): az invertálható $f : K_R(\zeta) \to \mathbf{C}$ függvényről tegyük fel, hogy $f \in D$. Ekkor $f^{-1} \in D$. Valóban, az invertálhatóság miatt f nyilván nem állandó függvény, ezért f^{-1} folytonos. Továbbá (ismét csak az invertálhatóság miatt) minden $a \in \mathcal{D}_f$ esetén f lokálisan is invertálható a-ban, azaz az előbbi állítás alapján $f'(a) \neq 0$. Így a korábbiak szerint $f^{-1} \in D\{f(a)\}$, tehát f^{-1} differenciálható függvény.

1.6. Feladatok

1^o Legyen $0 \neq p \in \mathbf{C}$. Lássuk be, hogy p akkor és csak akkor periódusa exp-nek, ha $p = 2k\pi\imath \quad (0 \neq k \in \mathbf{Z})$!

2^o Mutassuk meg, hogy a $\sin, \cos$ függvények 2π-szerint periodikusak!

3^o Tekintsünk (a komplex számsíkon) a valós tengellyel párhuzamos valamilyen $\ell \subset \mathbf{C}$ egyenest, az $L \subset \mathbf{C}$ egyenes pedig legyen párhuzamos a képzetes tengellyel. Mik lesznek az $\exp[\ell]$, $\exp[L]$ képhalmazok?

4^o Adott $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén legyen

$$\mathbf{C}_\alpha := \{z = x + \imath y \in \mathbf{C} : x \in \mathbf{R}, \alpha - \pi < y \leq \alpha + \pi\}.$$

Lássuk be, hogy a $\mathbf{C}_\alpha \ni z \mapsto e^z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ leképezés bijekció, aminek az inverze $\alpha = 0$ esetén a $\log$ függvény!

5^o Tetszőleges $w, v \in \mathbf{C}$ komplex számokhoz adjunk meg olyan $z, u \in \mathbf{C}$ komplex számokat, amelyekkel $\sin z = w$ és $\cos u = v$!

6^o Legyen $\mathbf{C}^* := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, $\Gamma := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \setminus \{-1\}$, és

$$f(z) := \frac{z-1}{z+1} \qquad (-1 \neq z \in \mathbf{Z}).$$

Mutassuk meg, hogy

a) $f : \mathbf{C} \setminus \{-1\} \to \mathbf{C} \setminus \{1\}$ bijekció;

b) $f^{-1}(w) = \dfrac{1+w}{1-w} \quad (1 \neq w \in \mathbf{C})$;

c) $K_1(0) \ni z \mapsto f(z) \in \mathbf{C}^*$ bijekció;

d) $\Gamma \ni z \mapsto f(z) \in \{w \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Re}\, w = 0\}$ bijekció!

7^o Határozzuk meg azokat a racionális törtfüggvényeket, amelyek (esetleg 1-1 pont kivételével) a $\mathbf{C}^*$ (ld. 6^o) „bal oldali” félsíkot a nyílt egységkörlemezre, a képzetes tengelyt az egységkörre, a

$$\{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$$

„jobb oldali” félsíkot pedig a zárt egységkörlemez „külsejére” képezik le bijektív módon! Lássuk be, hogy ezek pontosan azok az f racionális törtfüggvények, amelyek a következő alakúak:

$$f(z) = q \cdot \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha} - z} \qquad (\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C}),$$

ahol $q, \alpha \in \mathbf{C}$, $|q| = 1$ és $\mathrm{Re}\ \alpha > 0$.

8^o A Cauchy-formula alkalmazásával számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\text{a)} \int_{\varphi_{ar}} \frac{dz}{z-a} \ ; \ \int_{\varphi_{ar}} \frac{z}{z-a}\, dz \ ; \quad \text{b)} \int_{\varphi_{ar}} \frac{e^z}{z-a}\, dz \qquad (a \in \mathbf{C}, r > 0);$$

$$\text{c)} \int_{\varphi_{\frac{1}{2}1}} \frac{e^{z^2}}{z^2-1}\, dz \ ; \quad \text{d)} \int_{\varphi_{1\frac{3}{2}}} \frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2+1}\, dz\,!$$

9^o Legyen $\varphi_1 := \varphi_{51}$, $\varphi_2 := \varphi_{\imath 1}$, $\varphi_3 := \varphi_{-\imath 1}$, $\varphi_4 := \varphi_{02}$ és adjuk meg az

$$\int_{\varphi_j} \frac{dz}{1+z^2} \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

vonalintegrálok értékét!

10^o Tekintsük a $\varphi_1 := \varphi_{4\imath 1}$, $\varphi_2 := \varphi_{0\frac{1}{2}}$, $\varphi_3 := \varphi_{1\frac{1}{2}}$, $\varphi_4 := \varphi_{-1\frac{3}{4}}$, $\varphi_5 := \varphi_{02}$ köröket, és számítsuk ki az

$$\int_{\varphi_j} \frac{dz}{z(z^2-1)} \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

vonalintegrálokat!

11^o A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula segítségével határozzuk meg a következő vonalintegrálokat:

$$\text{a)} \int_{\varphi_{22}} \frac{\sin^2 z}{(z-\pi/2)^3}\, dz \;\; ; \quad \text{b)} \int_{\varphi_{\imath\frac{3}{2}}} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\, dz\,!$$

12^o Adjuk meg azokat a $c_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ együtthatókat, amelyekkel

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \qquad (z \in \mathbf{C})\,!$$

13^o Igazoljuk a $2\sin^2 z = 1 - \cos(2z)$ $(z \in \mathbf{C})$ azonosságot, és ennek alapján írjuk fel a $\sin^2$ függvény Taylor-sorát 0 körül!

14^o Legyen

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{1,2\}).$$

Állítsuk elő az f függvény 0 körüli Laurent-sorát a H_j halmazon, ha

$$H_1 := K_1(0),\; H_2 := K_2(0) \setminus \overline{K_1(0)},\; H_3 := \mathbf{C} \setminus \overline{K_2(0)}\,!$$

15^o Fejtsük Laurent-sorba 1 körül az

$$f(z) := \frac{z^2+z+3}{z^2-1} \qquad (\pm 1 \neq z \in \mathbf{C})$$

függvényt!

16^o Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénynek valamely $a \in \mathbf{C}$ helyen n-ed rendű pólusa van $(0 < n \in \mathbf{N})$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} F^{(n-1)}(z),$$

ahol $F(z) := f(z)(z-a)^n$ $(z \in \mathbf{C})\,!$

17^o Számítsuk ki $\mathrm{res}_a f$-et, ha

a) $f(z) := \dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1} \qquad (\pm\imath \neq z \in \mathbf{C}),\; a := \imath);$

b) $f(z) := \dfrac{z^2}{e^z - 1} \quad (2n\pi\imath \neq z \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{Z}),\ a := 2\pi\imath);$

c) $f(z) := \dfrac{z^3}{(z-1)^2} \quad (1 \neq z \in \mathbf{C}),\ a := 1)\,!$

18^o Határozzuk meg az alábbi vonalintegrálok értékét:

a) $\displaystyle\int_{\varphi_{02}} \frac{e^z - 1}{z^3}\, dz$; b) $\displaystyle\int_{\varphi_{12}} e^{1/z}\, dz;$

c) $\displaystyle\int_{\varphi_{\imath r}} \frac{e^{\pi z}}{z^2+4}\, dz \quad (0 < r \notin \{1, 3\});$

d) $\displaystyle\int_{\varphi_{2r}} \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}\, dz \quad (0 < r \neq 1)\,!$

19^o A differenciálható $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$ függvényről tegyük fel, hogy $\overline{f(z)} = f(1/\overline{z}) \quad (0 \neq z \in \mathbf{C})$. Mutassuk meg, hogy $f(z) \in \mathbf{R}$ $(z \in \mathbf{C},\ |z| = 1)$, és az f függvény 0-körüli Laurent-sorának a c_n $(n \in \mathbf{Z})$ együtthatóira $\overline{c_n} = c_{-n} \quad (n \in \mathbf{Z})$ teljesül!

20^o Az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvény esetén legyen valamely $r > 0$ mellett $K_r(0) \subset \mathcal{D}_f$, és $f(z) \in \mathbf{R} \quad (z \in (-r, r))$. Lássuk be, hogyha c_n-ek $(n \in \mathbf{N})$ jelölik az f függvény 0-körüli Taylor-sorának az együtthatóit, akkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $c_n \in \mathbf{R}$ és

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \qquad (z \in K_r(0))!$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\mathrm{Re}(f(z)) = 0 \quad (z \in K_r(0),\ \mathrm{Re}\, z = 0)$, és bizonyítsuk be az $f(-z) = -f(z) \quad (z \in K_r(0))$ egyenlőséget!

21^o Legyen $0 \leq q < p$, és igazoljuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q\cos x)^2} = \frac{2p\pi}{(p^2 - q^2)^{3/2}}\,!$$

22^o Az $0 \neq a \in \mathbf{R}$ paraméter tetszőleges értéke mellett számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2}\, dx$$

integrált!

2. fejezet

Differenciálegyenletek

2.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

Egy m tömegű rakétát v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük α-val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen β). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Ha $v \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy $v \in D$, $\mathcal{D}_v$ nyílt intervallum és $0 \in \mathcal{D}_v$ – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott m, α, β pozitív számok mellett olyan v függvényt keresünk, amelyre

$$mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{1}$$

Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ „pillanatot" kell meghatározni, amelyre $v(T) = 0$. Világos, hogy (1) ekvivalens a következővel:

$$v'(t) = -\alpha \left(1 + \frac{\beta}{m\alpha} v^2(t)\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{2}$$

Emlékeztetünk arra, hogy $(\operatorname{arctg})'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ $(t \in \mathbf{R})$, tehát bármely $c > 0$ állandóval a $\varphi(t) := \operatorname{arctg}(ct)$ $(t \in \mathbf{R})$ függvényre (az összetett függvény deriválási szabálya szerint)

$$\varphi'(t) = \frac{c}{1+(ct)^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Speciálisan a $c := \sqrt{\beta/m\alpha}$ választással

$$\varphi'(t) = \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\beta}{m\alpha} t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha tehát F jelöli azt az összetett függvényt, amelyre

$$F(t) := \varphi(v(t)) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t)\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v),$$

akkor

$$F'(t) = \varphi'(v(t)) \cdot v'(t) = \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot \frac{v'(t)}{1 + \dfrac{\beta}{m\alpha} v^2(t)} \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Következésképpen (2)-t figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$F'(t) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{3}$$

Legyen $G(t) := -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t \qquad (t \in \mathcal{D}_v)$, ekkor $G'(t) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \qquad (t \in \mathcal{D}_v)$. A (3) egyenlőségből az következik tehát, hogy $F'(t) = G'(t)$, azaz

$$(F - G)'(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{4}$$

Mivel a v függvény $\mathcal{D}_v$ értelmezési tartománya nyílt intervallum, ezért u. ez teljesül az $F - G$ függvényre is. Így (4) miatt alkalmas $\kappa \in \mathbf{R}$ konstanssal $F - G \equiv \kappa$. Más szóval igaz az alábbi egyenlőség:

$$\varphi(v(t)) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \kappa \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A $v(0) = v_0$ *kezdeti feltétel* miatt

$$\kappa = \varphi(v(0)) = \varphi(v_0) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right),$$

ezért

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t)\right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{5}$$

A $v(T) = 0$ egyenlőségből és (5)-ből (a $t := T$ helyettesítéssel - figyelembe véve, hogy $\operatorname{arctg}(0) = 0$) - az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

2.1. Megjegyzések

i) A most vizsgált feladat egy speciális *szeparábilis differenciálegyenlet.* Ez utóbbi meghatározásához tegyük fel, hogy I és J egyaránt egy-egy nyílt intervallum, $g : I \to \mathbf{R}$, $h : J \to \mathbf{R}$ pedig folytonos függvények. A h függvényről feltesszük továbbá azt is, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_h$ helyen $h(x) \neq 0$. Tekintsük ezek után a következő feladatot: adjunk meg olyan $\varphi \in I \to J$ differenciálható függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum és

$$(*) \qquad \varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot szeparábilis differenciálegyenletnek nevezzük. (Gyakran csak magát a $(*)$ egyenlőséget hívják így.) Minden ilyen φ függvényt *megoldásnak* nevezünk.

ii) Ha adottak a $\tau \in I, \xi \in J$ értékek, és az i)-beli φ függvénytől azt is megköveteljük, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi \ , \ \ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az így kiegészített feladatot *kezdetiérték-problémának* nevezzük.

iii) Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért az i)-beli $(*)$ egyenlőség így is írható:

$$(**) \qquad \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A feltételeink szerint $g, 1/h$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, ezért léteznek olyan

$$G : I \to \mathbf{R}\,,\ H : J \to \mathbf{R}$$

differenciálható függvények (primitív függvények), amelyekre $G' = g$ és $H' = 1/h$. Vegyük észre, hogy az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint $(**)$ a következőt jelenti:

$$(H \circ \varphi)'(t) = G'(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz
$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$
Ha tehát φ megoldása a szóban forgó szeparábilis differenciálegyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy
$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$
Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát H' állandó előjelű. Ezért H szigorúan monoton függvény, következésképpen invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy
$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

iv) Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor iii)-ban $\xi = H^{-1}(G(\tau)+c)$, azaz $H(\xi) = G(\tau)+c$, ill.
$$c = H(\xi) - G(\tau).$$
Válasszuk G-t és H-t úgy, hogy $H(\xi) = G(\tau) = 0$, ekkor $c = 0$ és
$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

v) A 2.1. feladat esetén tehát (ld. az ottani jelöléseket) az $I := J := \mathbf{R}$,
$$g(t) := -\alpha\ , \ h(t) := 1 + \frac{\beta t^2}{m\alpha} \qquad (t \in \mathbf{R})$$
választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen $\tau := 0$, és $\xi := v_0$, ekkor a
$$G(t) := -\alpha t\ , \ H(t) := \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} t - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right) \qquad (t \in \mathbf{R})$$
függvények eleget tesznek a fenti kívánalmaknak. Mivel
$$H^{-1}(t) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} t + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right)$$

(hacsak $\left|\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}t + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}v_0\right| < \frac{\pi}{2}$), így ezekben az t pontokban

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}}\,\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}v_0 - \sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}}t\right).$$

vi) A iii)-ban szereplő H^{-1} inverz függvény explicit megadása a gyakorlatban többnyire komoly nehézségekbe ütközik. Gyakran azonban (ld. pl. a 2.1. feladatot) nem is a megoldásra, hanem olyan paraméterre vagyunk kíváncsiak, amely a megoldás explicit ismerete nélkül is meghatározható. Egyébként „megelégszünk” a

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség felírásával.

vii) A szeparábilis differenciálegyenletek speciális egzakt differenciálegyenletek. Legyen ezek értelmezéséhez továbbra is I és J egy-egy nyílt intervallum, a

$$g : I \times J \to \mathbf{R}\,,\ h : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy folytonosak és $0 \notin \mathcal{R}_h$. Olyan $\varphi \in I \to J$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt részintervalluma I-nek és

$$(*) \qquad \varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy a most megfogalmazott feladat *egzakt differenciálegyenlet,* ha az

$$I \times J \ni (x,y) \mapsto (g(x,y), h(x,y)) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható $G : I \times J \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$\operatorname{grad} G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g,h).$$

A $(*)$ egyenlőség $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt azzal ekvivalens, hogy

$$g(x,\varphi(x)) + h(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható és bármely $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \langle \operatorname{grad} G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Mivel $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, ezért F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Amennyiben φ-től azt is megköveteljük, hogy adott $\tau \in I$, $\xi \in J$ mellett tegyen eleget a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feltételnek is, akkor

$$c = G(\tau, \xi)$$

következik. Mivel G-ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó kezdetiérték-probléma (feltételezett) φ megoldása eleget tesz a

$$(**) \qquad G(x, \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Vegyük észre, hogy $(**)$ szerint a fenti φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. A feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau, \xi) = 0$, továbbá $\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0$, ezért G-re (a (τ, ξ) helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható $\psi \in I \to J$ függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, $\tau \in \mathcal{D}_\psi$, $G(x, \psi(x)) = 0$ $(x \in \mathcal{D}_\psi)$, $\psi(\tau) = \xi$, és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

A ψ függvény tehát megoldás. Más szóval a szóban forgó kezdetiérték-probléma megoldható és a megoldás(ok) a fenti $(**)$ implicitfüggvény-egyenletből határozható(k) meg. Megjegyezzük, hogy a szeparábilis esettel kapcsolatban mondottakhoz hasonlóan a $(**)$-nak eleget tevő φ függvény „explicit” megadása a gyakorlatban sokszor nem lehetséges.

A $\operatorname{grad} G = (g, h)$ feltételből a

$$\partial_1 G = g \ , \ \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha $g,\, h \in D$, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h \,,$$

azaz ekkor a $\partial_2 g = \partial_1 h$ feltétel teljesülése szükséges az „egzaktsághoz”.

Minden szeparábilis egyenlet egzakt is, ui. (ld. i), ill. ii)) az ottani „szereplőkkel”

$$g(x)\cdot h(y) = -\frac{-g(x)}{1/h(y)} \qquad (x \in I,\ y \in J),$$

és bármely $\tau \in I \,,\ \xi \in J$ esetén a

$$G(x, y) := -\int_\tau^x g(t)\, dt + \int_\xi^y \frac{1}{h(t)}\, dt \qquad (x \in I,\ y \in J)$$

függvényre $G \in D$, és $\operatorname{grad} G = (-g, 1/h)$ igaz.

viii) Az egzakt differenciálegyenleteket illetően gyakran találkozhatunk az alábbi jelöléssel is:

$$g(x, \varphi)\, dx + h(x, \varphi)\, d\varphi = 0.$$

Állapodjunk meg abban, hogy a fenti szimbólum ugyanazt fogja jelenteni, mint a vii)-beli $(*)$ egyenlőség. A dolog hátterében az áll, hogy $(*)$-ban $\varphi'(x)$ helyett $\dfrac{d\varphi}{dx}$-et, ill. $\varphi(x)$ helyett φ-t írva „rendezzük” az így kapott

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g(x, \varphi)}{h(x, \varphi)}$$

egyenlőséget. Természetesen pusztán formai „manipulációról” van szó.

ix) A feladatok kitűzését illetően is gyakran az előbbi megjegyzés „szellemét” követik, sőt, a legtöbbször pusztán a viii)-ban szereplő $g(x, \varphi)\, dx + h(x, \varphi)\, d\varphi = 0$ „egyenlet” alakjában van megfogalmazva a feladat. Minden ilyen esetben tegyük ezt „teljessé” az I, J, g, h alkalmas megválasztásával. Tekintsük pl. az

$$(x^2 - \varphi)\, dx - x\, d\varphi = 0$$

egyenletet. A fenti megállapodásunk szerint ezen a

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x) - x^2}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséget értjük. Legyen pl. $I := (0, +\infty)$, $J := \mathbf{R}$,

$$g(x, y) := y - x^2 \ , \ h(x, y) := x \qquad ((x, y) \in I \times J) \, .$$

Az így definiált g, h függvények differenciálhatók, $0 \notin \mathcal{R}_h$,

$$\partial_2 g(x, y) = 1 = \partial_1 h(x, y) \qquad ((x, y) \in I \times J) \, ,$$

azaz teljesül az egyzaktság vii)-beli szükséges feltétele. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a szóban forgó egyenlet egzakt, azaz a

$$(g, h) : I \times J \to \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ilyen ui. pl. a

$$G(x, y) := xy - \frac{x^3}{3} \qquad ((x, y) \in I \times J)$$

függvény. Az egyenletünk megoldásait tehát az

$$x\varphi(x) - \frac{x^3}{3} = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőségből nyerjük alkalmas $\mathcal{R}_G \ni c$-vel. (Nem nehéz meggondolni, hogy jelen esetben $\mathcal{R}_G = \mathbf{R}$, így bármely $c \in \mathbf{R}$ választható.) Ezért pl. a

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény megoldása az egyenletünknek, amit egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetünk:

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2} = -\frac{\varphi(x) - x^2}{x} \qquad (x \in (0, +\infty)).$$

Ha valamely $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételt is kitűzünk, akkor a feladat „teljessé” tevése során a $\tau \in I$, $\xi \in J$ feltételre is ügyelnünk kell. A példaként most megoldott egzakt egyenlet mellett tekintsük mondjuk a $\varphi(-1) = 0$ kezdeti feltételt. Ekkor az előbbi I intervallum helyett legyen $I := (-\infty, 0)$, a fenti g, h függvényeket pedig értelmezzük ugyanazzal az előírással, de $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$ helyett a $(-\infty, 0) \times \mathbf{R}$ halmazon. Az előbbi számolás formális megismétlésével az új egyenlet

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \qquad (x \in (-\infty, 0)\,,\ c \in \mathbf{R})$$

megoldásait kapjuk. Ezek közül a kezdeti feltételnek is az tesz eleget, amelyre $\varphi(-1) = 1/3 - c = 0$, azaz, amikor $c = 1/3$. A kezdetiérték-probléma (egy) megoldása tehát a

$$\varphi(x) := \frac{x^3 + 1}{3x} \qquad (x \in (-\infty, 0))$$

függvény.

x) Ha a vii)-beli $(*)$ feladat nem tesz eleget az egzaktság feltételeinek, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal „az egyenlet egzakt alakra hozható”. Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a $\mu : I \times J \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor $(*)$ nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))\cdot \mu(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))\cdot \mu(x, \varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel (azaz a g, h és a $g\cdot \mu$, $h\cdot \mu$ függvények is a $(*)$ feladatot határozzák meg) és az egzaktságnak a vii) megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\cdot \mu) = g\cdot \partial_2\mu + \mu\cdot \partial_2 g = \partial_1(h\cdot \mu) = h\cdot \partial_1\mu + \mu\cdot \partial_1 h$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Ez valójában egy „parciális differenciálegyenlet” a μ-re nézve, amelynek a megoldása általában lényegesen bonyolultabb feladat, mint az eredeti. Számunkra elegendő viszont csupán egyetlen ilyen μ-t kiszámítani, ami gyakran könnyen vezet célhoz abban a speciális esetben, amikor a μ függvény valójában egyváltozós: alkalmas $m \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvénnyel az alábbiak egyike valósul meg:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} m(x) \\ \\ m(y) \\ \\ m(x * y) \end{cases} \qquad (x\,,\ y\,,\ x * y \in \mathcal{D}_m)$$

(ahol $*$ az összeadás, kivonás, szorzás vagy osztás valamelyikét jelöli). Tekintsük pl. a

$$(3x + 6x\varphi + 3\varphi^2)\, dx + (2x^2 + 3x\varphi)\, d\varphi = 0$$

feladatot, amit „teljessé” téve legyen pl. $I := J := (0, +\infty)$, ill.

$$g(x, y) := 3x + 6xy + 3y^2 \ , \ h(x, y) := 2x^2 + 3xy \quad ((x, y) \in I \times J)\, .$$

Ekkor $g,\, h \in D\, , 0 \notin \mathcal{R}_h$, de

$$\partial_2 g(x, y) = 6x + 6y \neq \partial_1 h(x, y) = 4x + 3y \qquad ((x, y) \in I \times J)\, .$$

Úgy tűnik, hogy az egyenletünk nem egzakt, de pl.

$$m(x) := x \qquad (x \in (0, +\infty))$$

egy megfelelő *multiplikátor*. Valóban, a (formálisan x-szel való szorzás után adódó)

$$(3x^2 + 6x^2\varphi + 3x\varphi^2)\, dx + (2x^3 + 3x^2\varphi)\, d\varphi = 0$$

egyenlet már egzakt és ekvivalens a kiindulásival. Ekkor tehát

$$\tilde{g}(x, y) := 3x^2 + 6x^2y + 3xy^2 \ , \ \tilde{h}(x, y) := 2x^3 + 3x^2y \quad ((x, y) \in I \times J)\, ,$$

és $\partial_2 \tilde{g}(x, y) = 6x^2 + 6xy = \partial_1 \tilde{h}(x, y)$, a

$$G(x, y) := x^3 + 2x^3y + \frac{3x^2y^2}{2} \qquad ((x, y) \in I \times J)$$

függvényre pedig $G \in D$ és $\operatorname{grad} G = (\tilde{g}, \tilde{h})$ teljesül. A kiindulási egyenletünk φ megoldásait ezért az

$$x^3 + 2x^3\varphi(x) + \frac{3x^2\varphi^2(x)}{2} = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi\, , \ c \in \mathcal{R}_G)$$

egyenlőségből kapjuk. Oldjuk meg pl. a fenti egyenletre vonatkozó $\varphi(1) = 2$ kezdetiérték-problémát. Ekkor

$$c = 1 + 2\varphi(1) + \frac{3\varphi^2(1)}{2} = 11,$$

tehát egy megoldás a

$$3x^2\varphi^2(x) + 4x^3\varphi(x) + 2x^3 - 22 = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőségből számítható:

$$\varphi(x) = \frac{-2x^2 + \sqrt{4x^4 - 6x^3 + 66}}{3x} \qquad (0 < x < 2).$$

2.1.1. Feladatok

1^o Határozzuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenletek egy-egy megoldását:

a) $\varphi'(t) = \dfrac{t^3}{(1+\varphi(t))^2} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

b) $\varphi'(t) = \varphi(t) + \varphi^2(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

c) $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)-t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

d) $\varphi'(t) = \dfrac{\varphi^2(t) - \varphi(t)}{t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

e) $\varphi'(t) = \dfrac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

f) $\varphi'(t) = \varphi^2(t) + 3\varphi(t) - 4 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)!$

2^o Adjuk meg a következő kezdetiérték-problémák egy-egy megoldását:

a) $\varphi'(t) = \dfrac{t(1+t)}{\varphi(t)(1+\varphi(t))} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 1;$

b) $\varphi'(t) = 1 + \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 0;$

c) $\varphi'(t) = x - 2x\varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 1;$

d) $\varphi'(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)\varphi(t)} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 1;$

e) $\varphi'(t) = -\dfrac{\varphi(t)\ln(\varphi(t))}{t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 1!$

3^o Alkalmas új függvények bevezetésével mutassuk meg, hogy az alábbi *d.e.*-ek ekvivalensek egy-egy szeparábilis *d.e.*-tel, és oldjuk is meg őket:

a) $\varphi'(t) = \sin(t + \varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

b) $\varphi'(t) = \sqrt{\varphi(t) - 2t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

c) $\varphi'(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t} + \sqrt{1 - (\dfrac{\varphi(t)}{t})^2} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

d) $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}(2t - \varphi(t) + 1)^2 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

e) $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(t - \varphi(t))^2}(t - \varphi(t) + 1)^2 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

f) $\varphi'(t) = 2\varphi(t) + t + 1 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi);$

g) $\varphi'(t) = -2(2t + 3\varphi(t))^2 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

h) $\varphi'(t) = \Psi(at + b\varphi(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$, ahol $\Psi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$!

4^o Legyen $\tau, \xi \in \mathbf{R}$. Mik a

$$\varphi'(t) = \sqrt{|\varphi(t)|} \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-probléma megoldásai?

5^o Oldjuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenleteket:

a) $2x\varphi\, dx + (x^2 + 1)\, d\varphi = 0$;

b) $\varphi(1 + x\varphi)\, dx + (x^2\varphi + \varphi + x)\, d\varphi = 0$;

c) $(2x + \varphi)\, dx + (x - 2\varphi)\, d\varphi = 0$;

d) $(1 + \varphi^2 \sin 2x)\, dx - 2\varphi \cos^2 x\, d\varphi = 0$!

6^o Milyen $\mathbf{R} \ni \lambda$-ra lesz egzakt a

$$(3x^2 + \varphi^2)\, dx + \lambda\varphi(x - 2)\, d\varphi = 0$$

egyenlet? Mik a megoldások ekkor?

7^o Határozzuk meg a következő kezdetiérték-problémák megoldásait:

a) $(2x + \varphi + 1)\, dx + (x + 3\varphi + 2)\, d\varphi = 0\ ,\ \varphi(0) = 0$;

b) $(2x\varphi + 3\varphi^2)\, dx + (x^2 + 6x\varphi - 2\varphi)\, d\varphi\ ,\ \varphi(1) = -1/2\,$;

c) $(2x + \varphi)\, dx + (x - 2\varphi)\, d\varphi = 0\ ,\ \varphi(1) = 1$;

d) $3x^2\, dx + e^\varphi\, d\varphi = 0\ ,\ \varphi(0) = 0$!

8^o Keressünk multiplikátort az alábbi egyenletek egzakttá tételéhez, és oldjuk is meg őket:

a) $(x^2 + \varphi^2 + x)\, dx + x\varphi\, d\varphi = 0$;

b) $(x^2 - 1 - \varphi)\, dx + x\, d\varphi = 0$;

c) $(\varphi - x^2\varphi^2)\, dx + x\, d\varphi = 0$;

d) $(\varphi + \ln x)\, dx - x\, d\varphi = 0$!

2.2. Lineáris differenciálegyenletek

Képzeljük el, hogy valamely (pl. radioaktív) anyag bomlik. A bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt „feleződik meg" az anyag (azaz bomlik el a fele)?

Jelöljük m-mel ($\mathbf{R} \ni m > 0$) az anyag eredeti mennyiségét, $\phi(t)$-vel a $t\,(\in \mathbf{R})$ időpillanatban még el nem bomlott anyag mennyiségét. A $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényről tegyük fel, hogy differenciálható. Ekkor a bomlási sebességet matematikailag a következőképpen „foghatjuk meg". Legyen $t, \Delta t \in \mathbf{R}$, $\Delta t > 0$. A $[t, t + \Delta t]$ idő-intervallumban elbomlott anyag mennyisége nem más, mint $\phi(t) - \phi(t + \Delta t)$. Az „átlagos bomlási sebesség" tehát a vizsgált idő-intervallumban

$$\frac{\phi(t) - \phi(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}.$$

Ez az átlagos bomlási sebesség annál jobban jellemzi a t pillanatbeli helyzetet, minél kisebb a Δt változás. Matematikailag tehát jól modellezi a „bomlási sebességet" a t pillanatban a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = -\phi'(t)$$

határérték, azaz a ϕ függvény t-beli deriváltja. A feladatbeli arányossági tényezőt jelöljük α-val (ahol tehát $0 < \alpha \in \mathbf{R}$). Ekkor a matematikai modellünk a következő:

$$\phi'(t) = -\alpha\phi(t) \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{6}$$

Világos, hogy $\phi(0) = m$. Azt a T időpontot keressük (ez az ún. *felezési idő*), amikor $\phi(T) = m/2$. Figyelembe véve a logaritmusfüggvényre vonatkozó jól ismert $\ln'(x) = 1/x \quad (x > 0)$ derválási szabályt azt kapjuk az $F(t) := \ln(\phi(t)) \quad (t \in \mathbf{R})$ függvényre, hogy

$$F'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A (6) egyenlőségből tehát

$$F'(t) = -\alpha = G'(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol most $G(t) := -\alpha t \quad (t \in \mathbf{R})$. A 2.1. feladatban látottakkal analóg módon innen az következik, hogy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ konstans mellett

$$\ln(\phi(t)) = -\alpha t + c \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ugyanez másképp kifejezve $\phi(t) = e^c \cdot e^{-\alpha t}$ $(t \in \mathbf{R})$. Mivel $\phi(0) = m$, ezért $c = \ln m$, tehát

$$\phi(t) = me^{-\alpha t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A T definíciója alapján

$$\phi(T) = me^{-\alpha T} = \frac{m}{2},$$

azaz $e^{-\alpha T} = 1/2$. Innen

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

2.2. Megjegyzések

i) A radioaktív bomlást leíró 2.2. feladat egy speciális *lineáris differenciálegyenlet.* Legyen ez utóbbi megfogalmazásához $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, $g, h : I \to \mathbf{R}$ pedig legyenek folytonos függvények, és tekintsük az alábbi feladatot: olyan differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, és

$$(*) \qquad \varphi'(t) = g(t)\varphi(t) + h(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot (néha csak magát a $(*)$ egyenlőséget) lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. Minden ilyen φ függvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *megoldása.*

ii) Ha az i)-beli feladatnak θ is és ψ is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t)\,(\theta(t) - \psi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Vegyük észre, hogy a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris differenciálegyenletnek, amelyben $h \equiv 0$:

$$(**) \qquad \varphi'(t) = g(t)\varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén,* ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

iii) Legyen $G : I \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amely differenciálható és $G' = g$ (a g-re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van), akkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \qquad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek. Erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk:

$$\varphi_0'(t) = G'(t)e^{G(t)} = g(t)\varphi_0(t) \qquad (t \in I).$$

Tegyük fel most, hogy a $\chi : I \to \mathbf{R}$ függvény megoldása a szóban forgó $(**)$ homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t)\chi(t) \qquad (t \in I).$$

Ekkor a differenciálható $\frac{\chi}{\varphi_0} : I \to \mathbf{R}$ függvényre azt kapjuk, hogy bármely $t \in I$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t)\varphi_0(t) - \chi(t)\varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} =$$

$$\frac{g(t)\chi(t)\varphi_0(t) - \chi(t)g(t)\varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén I nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal $\frac{\chi}{\varphi_0} \equiv c$. Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet tetszőleges $\chi : I \to \mathbf{R}$ megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c\varphi_0(t) \qquad (t \in I),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott $(**)$ homogén lineáris differenciálegyenletnek. (Ezzel ezeknek a megoldását el is „intéztük”, így a továbbiakban már elég csak az inhomogén egyenletekre szorítkoznunk.)

iv) A iii) megjegyzés alapján a ii)-beli $\theta, \psi : I \to \mathbf{R}$ megoldásokra azt kapjuk tehát, hogy egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\theta(t) - \psi(t) = c\varphi_0(t) \qquad (t \in I).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $m : I \to \mathbf{R}$ függvény, hogy az $m\varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának a módszere*). Ehhez azt kell „biztosítani”, hogy $(m\varphi_0)' = gm\varphi_0 + h$, azaz

$$m'\varphi_0 + m\varphi_0' = m'\varphi_0 + mg\varphi_0 = gm\varphi_0 + h$$

és kézenfekvő átalakítás után innen szükséges feltételként az adódik m-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a $\dfrac{h}{\varphi_0} : I \to \mathbf{R}$ folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás „megfordításából” – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármely m primitív függvényét véve, $m\varphi_0$ megoldás.

v) Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek tetszőleges $\varphi : I \to \mathbf{R}$ megoldása egy alkalmas $\mathbf{R} \ni c$-vel

$$\varphi(t) = (c + m(t))\varphi_0(t) \qquad (t \in I)$$

alakban írható. Sőt, az itt szereplő $c \in \mathbf{R}$ bármely megválasztásával megoldást kapunk. Ezt megint csak egy egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük:

$$\varphi'(t) = m'(t)\varphi_0(t) + (c + m(t))\,\varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)}\varphi_0(t) + (c + m(t))\,g(t)\varphi_0(t) = g(t)\varphi(t) + h(t) \qquad (t \in I).$$

vi) A iv), v) megjegyzéseket figyelembe véve a következők adódnak: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi'(t) = g(t)\varphi(t) + h(t) \;\; (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi'(t) = g(t)\varphi(t) \;\; (t \in I)\}.$$

Ekkor $\mathcal{M}_h = \{c\varphi_0 : c \in \mathbf{R}\}$ (azaz algebrai nyelven mondva az $\mathcal{M}_h$ halmaz 1-dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m\varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m\varphi_0 : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt $m\varphi_o$ helyébe bármely $\psi \in \mathcal{M}$ (ún. *partikuláris megoldás*) írható.

vii) Legyen $\tau \in I, \xi \in \mathbf{R}$ és a fent vizsgált lineáris differenciálegyenlet φ megoldásától követeljük meg azt is, hogy $\varphi(\tau) = \xi$ (*kezdetiérték-probléma.*) Ekkor (ld. iii), ill. v))

$$c = \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_0(\tau)} - m(\tau) = \varphi(\tau)e^{-G(\tau)} - m(\tau) = \xi e^{-G(\tau)} - m(\tau)\,.$$

Ha $G(\tau) = m(\tau) = 0$ (ez feltehető), akkor $c = \xi$, így a szóban forgó kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\varphi(t) = (\xi + m(t))\, e^{G(t)} \qquad (t \in I).$$

A most mondott G, m függvényeket integrálfüggvényekként állítva elő, amikor is

$$G(t) := \int_\tau^t g(x)\, dx \ \ , \ \ m(t) := \int_\tau^t \frac{h(x)}{\varphi_0(x)}\, dx \qquad (t \in I),$$

azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = \Big(\xi + \int_\tau^t h(x)e^{-\int_\tau^x g(s)\, ds}\, dx\Big)e^{\int_\tau^t g(x)\, dx} \qquad (t \in I).$$

Illusztrációképpen alkalmazzuk a most kapott eredményt Fourier-transzformált kiszámítására. Tekintsük példaként az $f(t) := e^{-t^2}$ $(t \in \mathbf{R})$ függvényt. Ekkor

$$f'(t) = -2te^{-t^2} = -2tf(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha valamely (abszolút integrálható) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-\imath tx}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

a g függvény Fourier-transzformáltja, akkor

$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-\imath tx}\, dt = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f'(t)e^{-\imath tx}\, dt =$$

$$\lim_{r\to+\infty} \Big(f(r)e^{-\imath rx} - f(-r)e^{\imath rx} + \imath x \int_{-r}^{r} f(t)e^{-\imath tx}\, dt\Big) =$$

$$\imath x \hat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

mivel

$$\lim_{r\to+\infty} f(r)e^{-\imath rx} = \lim_{r\to+\infty} f(-r)e^{\imath rx} = \lim_{r\to+\infty} e^{-r^2}\cdot e^{\imath rx} = 0.$$

Továbbá

$$(\hat{f})'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{-\imath t(x+h)}-e^{-\imath tx}}{h}\,dt$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\imath tx}e^{-\imath th/2}\cdot\frac{e^{-\imath th/2}-e^{\imath th/2}}{h}\,dt =$$

$$-\imath\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-\imath tx}e^{-\imath th/2}\cdot\frac{\sin(th/2)}{(th/2)}\,dt = -\imath\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t)\,dt,$$

ahol $f_h(0) := 0$ és

$$f_h(t) := tf(t)e^{-\imath tx}e^{-\imath th/2}\cdot\frac{\sin(th/2)}{(th/2)} \qquad (0\neq t\in\mathbf{R}).$$

Nyilván $|f_h(t)| \leq |t|\cdot|f(t)| = |t|e^{-t^2} \quad (t\in\mathbf{R})$, ill.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_h(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|t|e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = 1$$

miatt az f_h függvény is abszolút integrálható. Nem nehéz meggondolni, hogy

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0} f_h(t)\,dt.$$

Ui.

$$\lim_{h\to 0} f_h(t) = tf(t)e^{-\imath tx} \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

és tetszőleges $r>0$ esetén

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-\imath tx}\,dt\right| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_h(t)-tf(t)e^{-\imath tx}\right|\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|t|\cdot f(t)\cdot\left|e^{-\imath th/2}\cdot\frac{\sin(th/2)}{(th/2)}-1\right|\,dt \leq$$

$$\int_{-r}^{r}|t|\cdot f(t)\cdot\left|e^{-\imath th/2}\cdot\frac{\sin(th/2)}{(th/2)}-1\right|\,dt + 4\int_r^{+\infty} tf(t)\,dt.$$

Ha $\varepsilon>0$, akkor van olyan r, hogy $\int_r^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_r^{+\infty} te^{-t^2}\,dt < \varepsilon$. Ugyanakkor minden $t\in[-r,r]$ helyen

$$\left|e^{-\imath th/2}\cdot\frac{\sin(th/2)}{(th/2)}-1\right| = \left|\frac{\sin(th/2)}{(th/2)}-e^{\imath th/2}\right| \leq$$

$$\left|\frac{\sin(th/2)}{(th/2)} - \cos(th/2)\right| + |\sin(th/2)| \leq$$

$$\left|\frac{\sin(th/2)}{(th/2)} - 1\right| + |1 - \cos(th/2)| + |\sin(th/2)|\,.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin\, x}{x} - 1\right| = \lim_{x\to 0}|1 - \cos\, x| = \lim_{x\to 0}|\sin\, x|\,,$$

ezért alkalmas $\delta > 0$ mellett

$$\left|\frac{\sin\, x}{x} - 1\right| < \varepsilon\ \ ,\ \ |1 - \cos\, x| < \varepsilon\ \ ,\ \ |\sin\, x| < \varepsilon \qquad (0 < |x| < \delta).$$

Így $0 < |h| < 2\delta/r$ esetén $|th|/2 < \delta \quad (t \in [-r, r])$, tehát

$$\left|e^{-\imath th/2}\cdot \frac{\sin(th/2)}{(th/2)} - 1\right| < 3\varepsilon.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t)\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-\imath tx}\, dt\right| \leq$$

$$6\varepsilon\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\, dt + 4\varepsilon = 7\varepsilon \qquad (0 < |h| < 2\delta/r).$$

Ha tehát $f_*(t) := tf(t) \quad (t \in \mathbf{R})$, akkor

$$(\hat{f})'(x) = -\imath \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t)\, dt =$$

$$-\imath\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-\imath tx}\, dt = -\imath\widehat{f_*}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$(\hat{f})'(x) = -\imath\widehat{f_*}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és $f' = -2f_*$ miatt

$$\widehat{f'}(x) = \imath x\hat{f}(x) = -2\widehat{f_*}(x) = -2\imath(\hat{f})'(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Más szóval

$$(\hat{f})'(x) = -\frac{x}{2}\hat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ami $\hat{f}$-ra nézve egy homogén elsőrendű differenciálegyenlet. Ennek minden megoldása a fentiek szerint $\alpha e^{-x^2/4}$ $(x \in \mathbf{R})$ alakú, alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ együtthatóval. Mivel $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, ezért $\alpha = \sqrt{\pi}$, ezért

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Jegyezzük meg, hogy ha $h(t) := e^{-t^2/2}$ $(t \in \mathbf{R})$, akkor $h(t) = f(t/\sqrt{2})$ $(t \in \mathbf{R})$, ill.

$$\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t/\sqrt{2}) e^{-\imath t x}\, dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\imath t \sqrt{2} x}\, dt =$$

$$\sqrt{2} \hat{f}(\sqrt{2} x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi} h(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Sőt, legyen a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ abszolút integrálható függvényre

$$\check{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-\imath t x}\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor nyilván $\check{g} = \hat{g}/\sqrt{2\pi}$, ezért $\check{h} = h$ (ld. 1.4. xiv) megjegyzés).

viii) A fentiekben tárgyaltakhoz hasonlóan „kezelhető” a következő feladat (*állandó együtthatós lineáris differenciaegyenlet*). Legyen adott ehhez a $0 \neq q \in \mathbf{R}$ szám és az $a_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat. Határozzunk meg olyan $x_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot, amely eleget tesz az alábbi rekurzív összefüggésnek:

$$(*) \qquad x_{n+1} = q x_n + a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha $a_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ (*homogén egyenlet*), azaz

$$(**) \qquad x_{n+1} = q x_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor különösen egyszerű a feladat (ekkor egy *mértani sorozatról* van szó). Ti. világos, hogy a $\xi_n := q^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat eleget tesz $(**)$-nak, továbbá ugyanez igaz bármely $\alpha \in \mathbf{C}$ esetén az $\alpha \xi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatra is:

$$\alpha \xi_{n+1} = \alpha q^{n+1} = q \alpha q^n = q \alpha \xi_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor nem nehéz belátni, hogy ha $x_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ a $(**)$ egyenlet megoldása, akkor van olyan $\alpha \in \mathbf{C}$, amivel $x_n = \alpha \xi_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Valóban, legyen

$$y_n := \frac{x_n}{\xi_n} = q^{-n} x_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$y_{n+1} = q^{-n-1}x_{n+1} = \frac{1}{q}q^{-n}qx_n = y_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért az y_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konstans-sorozat: $y_n = y_0 = x_0$ $(n \in \mathbf{N})$. Következésképpen az $\alpha := x_0$ választással $x_n = \xi_n y_n = \alpha\xi_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

ix) Vegyük észre, hogy ha az $x_n, z_n \in \mathbf{C}$ sorozatok eleget tesznek a viii)-beli $(*)$ egyenlőségnek, akkor az $x_n - z_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat megoldása az előbbi $(**)$ homogén egyenletnek:

$$x_{n+1} - z_{n+1} = qx_n + a_n - (qz_n + a_n) = q(x_n - z_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A viii) megjegyés szerint tehát egy $\alpha \in \mathbf{C}$ együtthatóval

$$x_n - z_n = \alpha\xi_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(Nyilván elegendő már csak azzal az esettel foglalkozni, amikor legalább egy $\mathbf{N} \ni n$-re $a_n \neq 0$ (*inhomogén egyenlet*).) Lássuk be, hogy ekkor alkalmas $c_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal a $z_n := c_n\xi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat megoldása lesz a $(*)$ egyenletnek. Ti. (behelyettesítés után) ez azzal ekvivalens, hogy

$$c_{n+1}\xi_{n+1} = c_{n+1}q^{n+1} = qc_n\xi_n + a_n = c_nq^{n+1} + a_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$(***) \qquad c_{n+1} = c_n + q^{-n-1}a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy tetszőleges $c_0 \in \mathbf{C}$ megadásával a $(***)$ egyenlőség egyértelműen meghatározza a c_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot:

$$c_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(c_{k+1} - c_k) = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{q^{k+1}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így megválasztott z_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal a $z_n + \alpha\xi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat tetszőleges $\alpha \in \mathbf{C}$ mellett eleget tesz $(*)$-nak:

$$z_{n+1} + \alpha\xi_{n+1} = qz_n + a_n + \alpha q\xi_n = q(z_n + \alpha\xi_n) + a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megjegyezzük, hogy $(***)$ alapján a c_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat annak a viii)-beli $(*)$ rekurziónak tesz eleget, amikor $q = 1$, és a_n-et $q^{-n-1}a_n$-re $(n \in \mathbf{N})$ cseréljük. Speciálisan, ha $q = 1$, és az a_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konstans sorozat: $\alpha \in \mathbf{R}$, $a_n = \alpha$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az előbbiek szerint

$$c_n = c_0 + n\alpha \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egy ún. *számtani sorozat.*

x) Az előbbi jelöléseket megtartva azt kaptuk tehát, hogy a szóban forgó állandó együtthatós lineáris differenciaegyenlet megoldásai a következők:

$$x_n = c_n q^n + \alpha q^n \qquad (\alpha \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

Ha valamilyen $\beta \in \mathbf{C}$ mellett előírjuk az $x_0 = \beta$ *kezdeti feltételt* is, akkor (pl.) $c_0 := 0$ esetén

$$\beta = x_0 = c_0 + \alpha = \alpha$$

miatt

$$x_n = c_n q^n + \beta q^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tekintsük pl. az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}) \ , \ x_0 = 1$$

kezdetiérték-feladatot. Most tehát $q = 1/2, a_n = 1 \quad (n \in \mathbf{N})$, $\beta := 1$ és a $c_0 = 0$ választással

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$x_n = \left(2^{n+1} - 2\right) \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

xi) Nem foglalkozunk általában *differenciálegyenletekkel,* csupán az alábbiakat jegyezzük meg. Mi a közös a 2.1., 2.2. feladatokban? Egyrészt mindkettőben egy olyan „egyenletet” kell megoldani, amelyben az „ismeretlen” egy differenciálható egyváltozós függvény; az illető egyenletben a keresett függvény első deriváltja szerepel; mind a két egyenlet „explicit” az említett deriváltfüggvényre nézve. Mindezek „benne vannak” a következő, eléggé tág keretek között megadott értelmezésben. Legyen ti. $I, J \subset \mathbf{R}$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az $f : I \times J \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

> *határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to J$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások*:

1^o $\quad \mathcal{D}_\varphi$ *nyílt intervallum;*

2^o $\quad \varphi \in D$;

3^o $\quad \varphi'(x) = f(t, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük, f az „egyenlet” *jobb oldala.* Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, akkor a fenti φ függvény $1^o - 3^o$ mellett tegyen eleget a

4^o $\quad \tau \in \mathcal{D}_\varphi,$ *és* $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így „kibővített” feladat egy ún. *kezdetiérték-probléma* (vagy *Cauchy-feladat*). A fentieknek eleget tevő bármely φ függvény a differenciálegyenlet (kezdetiérték-probléma) *megoldása.* A most definiált (ún. 1-dimenziós) Cauchy-feladat „többdimenziós” változatának a megfogalmazásához tekintsük valamilyen $n = 2, 3, ...$ mellett a $J_k \subset \mathbf{R} \quad (k = 1, ..., n)$ nyílt intervallumokat és legyen

$$J := J_1 \times J_2 \times ... \times J_n,$$

ill. $f : I \times J \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvény. Ekkor az $1^o - 3^o$ feltételeknek eleget tevő $\varphi \in I \to J$ függvény megkeresésére vonatkozó fenti feladat egy *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer.* Ha az f koordináta-függvényei $f_1, ..., f_n$, a φ megoldáséi pedig a $\varphi_1, ..., \varphi_n$ függvények, akkor a $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ egyenlőség „koordinátás” alakban felírva a következő egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(x) &= f_1(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \\
\varphi_2'(x) &= f_1(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \qquad\qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \\
&\vdots \\
\varphi_n'(x) &= f_n(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))
\end{aligned}$$

xii) Speciálisan legyenek adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \to \mathbf{R} \quad (i, k = 1, ..., n) \ , \ b = (b_1, ..., b_n) : I \to \mathbf{R}^n$$

függvények és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x,y) := A(x)\cdot y + b(x) \qquad ((x,y) \in I \times \mathbf{R}^n)\,,$$

akkor az f által a fentiek (ld. xi)) szerint meghatározott differenciálegyenletrendszert *lineáris differenciálegyenletrendszernek* nevezzük. Ekkor tehát

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1'(x) & = & \sum_{k=1}^n a_{1k}(x)\varphi_k(x) + b_1(x) \\ \\ \varphi_2'(x) & = & \sum_{k=1}^n a_{2k}(x)\varphi_k(x) + b_2(x) \qquad\qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \\ & \vdots & \\ \varphi_n'(x) & = & \sum_{k=1}^n a_{nk}(x)\varphi_k(x) + b_n(x) \end{array}$$

Jegyezzük meg, hogy (az előbb mondottakat némileg kibővítve) itt komplex értékű $\varphi_1, ..., \varphi_n$ függvényeket is megengedhetünk. Más szóval a lineáris differenciálegyenletrendszert meghatározó előbbi f függvény a következő:

$$f(x,y) := A(x)\cdot y + b(x) \qquad ((x,y) \in I \times \mathbf{C}^n)\,.$$

Ha a b függvény az azonosan nulla(-vektor) függvény, akkor a szóban forgó lineáris differenciálegyenletrendszer *homogén.* Általában egy lineáris differenciálegyenletrendszer megoldása nem egyszerű feladat, még akkor sem, ha az $a_{ik} \quad (i,k = 1,2,...,n)$ függvények mindegyike konstans függvény. Ekkor az A mátrixfüggvény is konstans függvény, azaz (erre a „konstansra” is az A jelölést használva) $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. A részletek mellőzésével csak a legegyszerűbb rendszert illusztrálva tegyük fel, hogy $n = 2$. Az $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrixot illetően két eset lehetséges.

- Van olyan invertálható $T \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mátrix, amellyel alkalmas $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{C}$ számokkal

  $$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

  Ismert, hogy ekkor $\lambda_1,\ \lambda_2$ az A mátrix sajátértékei. Ha $t_1,\ t_2 \in \mathbf{C}^2$ a T mátrix első, ill. második oszlopvektora, akkor $t_1,\ t_2$ az A mátrix két lineárisan független sajátvektora (*sajátvektor-bázis*): $At_i = \lambda_i t_i \quad (i = 1,2)$. A homogén rendszer minden (az I intervallumon értelmezett) megoldása alkalmas $c_1,\ c_2 \in \mathbf{C}$ együtthatókkal a következő alakú:

  $$c_1 e^{\lambda_1 x} t_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} t_2 \qquad (x \in I)$$

(és minden ilyen függvény megoldása a homogén rendszernek). Igaz továbbá az, hogyha $\psi : I \to \mathbf{C}$ egy (ún. *partikuláris*) megoldása a szóban forgó lineáris differenciálegyenletrendszernek (azaz $\psi' = A\psi + b$), akkor minden φ megoldás a következő alakban írható fel:

$$\varphi(x) = \psi(x) + c_1 e^{\lambda_1 x} t_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} t_2 \qquad (x \in I)$$

(és bármely $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ választással megoldást kapunk).

- Alkalmas invertálható $T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix és $\lambda \in \mathbf{R}$ szám segítségével

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ha $t_1, t_2 \in \mathbf{R}^2$ a T mátrix első, ill. második oszlopvektora, akkor $At_1 = \lambda t_1$, és $At_2 = \lambda t_2 + t_1$ (és t_1, t_2 lineárisan függetlenek). Tehát λ sajátértéke A-nak, t_1 pedig egy sajátvektora és a homogén rendszer (I-n értelmezett) megoldásai a következők (tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal):

$$c_1 e^{\lambda x} t_1 + c_2 e^{\lambda x}(t_2 + x t_1) \qquad (x \in I).$$

Továbbá az első esetben említett ψ partikuláris megoldással

$$\varphi(x) = \psi(x) + c_1 e^{\lambda x} t_1 + c_2 e^{\lambda x}(t_2 + x t_1) \qquad (x \in I).$$

Ha

$$\Phi_1(x) := e^{\lambda_1 x} t_1\ ,\ \Phi_2(x) := e^{\lambda_2 x} t_2 \qquad (x \in I)$$

(első eset), ill.

$$\Phi_1(x) := e^{\lambda x} t_1\ ,\ \Phi_2(x) := e^{\lambda x}(t_2 + x t_1) \qquad (x \in I)$$

(második eset), akkor megadhatók olyan differenciálható $g_1, g_2 : I \to \mathbf{C}$ függvények, amelyekkel

$$\psi(x) := g_1(x) \cdot \Phi_1(x) + g_2(x) \cdot \Phi_2(x) \qquad (x \in I)$$

egy partikuláris megoldás.

Jól ismert, hogyha az A szimmetrikus mátrix vagy $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor az első eset áll elő. Nyilván az első esetről van szó akkor is, ha maga az

A mátrix diagonális. A második eset könnyen karakterizálható. Ti. ehhez szükséges és elégséges, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

mátrix sajátértékeit meghatározó

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

(másodfokú) egyenletnek egyetlen gyöke legyen, azaz a szóban forgó egyenlet diszkriminánsa nulla legyen:

$$(a-d)^2 + 4bc = 0,$$

és az A ne legyen diagonális:

$$|b| + |c| > 0.$$

xiii) Tekintsük pl. az alábbi feladatot:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ , \ b(x) := (e^x, 0) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Olyan $\varphi = (\chi, \eta) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ differenciálható függvényt keresünk tehát, amelyre $\varphi' = A\varphi + b$, azaz

$$\begin{aligned} \chi'(x) &= \chi(x) + 2\eta(x) + e^x \\ \eta'(x) &= 2\chi(x) + \eta(x) \end{aligned} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az A sajátértékeit meghatározó egyenlet a következő:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0,$$

ennek a gyökei (az A sajátértékei):

$$\lambda_1 := 3 \ , \ \lambda_2 := -1,$$

a megfelelő sajátvektorok pedig (pl.)

$$t_1 := (1, 1) \ , \ t_2 := (1, -1).$$

Ezek nyilván lineárisan függetlenek, és

$$\Phi_1(x) = (e^{3x}, e^{3x}) \ , \ \Phi_2(x) = (e^{-x}, -e^{-x}) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Egy ψ partikuláris megoldás előállításához tehát olyan differenciálható g_1, g_2 egyváltozós valós függvényeket keresünk, amelyekkel

$$\psi(x) = g_1(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + g_2(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha $x \in \mathbf{R}$ esetén $\Phi(x)$ jelenti azt a

$$\Phi(x) := [\Phi_1(x) \ \Phi_2(x)] \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

mátrixot, amelynek az oszlopvektorai rendre $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ (*alapmátrix*), valamint $g(x) := (g_1(x), g_2(x)) \in \mathbf{R}^2$, akkor

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot g(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A $\Phi'(x) := [\Phi_1'(x) \ \ \Phi_2'(x)]$ jelöléssel könnyen ellenőrizhető, hogy $\Phi'(x) = A\Phi(x)$, ill.

$$\psi'(x) = \Phi'(x) \cdot g(x) + \Phi(x) \cdot g'(x) = A\Phi(x) \cdot g(x) + \Phi(x) \cdot g'(x) =$$

$$A \cdot \psi(x) + \Phi(x) \cdot g'(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ezért a fenti ψ függvény akkor és csak akkor megoldás (azaz $\psi' = A\psi + b$), ha $\Phi \cdot g' = \Phi \cdot (g_1', g_2') = b$, tehát bármely $\mathbf{R} \ni x$-re

$$\begin{aligned} e^{3x} g_1'(x) + e^{-x} g_2'(x) &= e^x \\ e^{3x} g_1'(x) - e^{-x} g_2'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Innen $g_1'(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$, $g_2'(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$ $(x \in \mathbf{R})$, tehát pl.

$$g_1(x) := -\frac{1}{4} e^{-2x} \ , \ g_2(x) = \frac{1}{4} e^{2x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

adódik. Így egy partikuláris megoldás a következő:

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot g(x) = (0, -e^x/2) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A szóban forgó lineáris egyenletrendszer megoldásai ezért:

$$\varphi(x) = \psi(x) + c_1 e^{\lambda_1 x} t_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} t_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -e^x/2 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \\ \\ c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x} - e^x/2 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(ahol $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ tetszőleges együtthatók). Más szóval

$$\chi(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}\ ,\ \eta(x) = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x} - e^x/2 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha pl. a $\varphi(0) = (1, 1/2)$ kezdeti feltételeket tűzzük ki, akkor a megfelelő c_1, c_2 együtthatókat az

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 1 \\ c_1 - c_2 - 1/2 & = & 1/2 \end{array}$$

egyenletrendszerből nyerjük: $c_1 = 1\,, c_2 = 0$. Így a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ \\ e^{3x} - e^x/2 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

xiv) Második példaként legyen

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ b(x) := (0,0) \ \ (x \in \mathbf{R})$$

(homogén eset). Ekkor (az előbbi $\varphi = (\chi, \eta)$ jelöléssel) a

$$\begin{array}{rcl} \chi'(x) & = & 3\chi(x) + \eta(x) \\ \eta'(x) & = & -\chi(x) + \eta(x) \end{array}$$

egyenletrendszernek kell fennállnia. Most (ld. fent)

$$a = 3,\ b = d = 1,\ c = -1,$$

tehát $(a-d)^2 + 4bc = 0$ és $|b| + |c| = 2 > 0$, így az A nem hasonló egyetlen diagonális mátrixhoz sem. A sajátérték-egyenlet a következő:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

tehát az A egyetlen sajátértéke a $\lambda := 2$. A „nem diagonalizálható esetnek” megfelelően az

$$At_1 = \lambda t_1 = 2t_1 \ , \ At_2 = \lambda t_2 + t_1 = 2t_2 + t_1$$

egyenlőségeknek eleget tevő (lineárisan független) t_1, t_2 vektorok (pl.) a következők:

$$t_1 := (1, -1) \ , \ t_2 := (1, 0),$$

ezért (az előbbi példa analógiájára) egy alapmátrix:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{2x} & e^{2x}(1+x) \\ & \\ -e^{2x} & -xe^{2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A most vizsgált homogén lineáris rendszer megoldásai tehát az alábbiak:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}(c_1 + c_2(1+x)) \\ \\ -e^{2x}(c_1 + c_2 x) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz

$$\chi(x) = e^{2x}(c_1+c_2+c_2 x) \ , \ \eta(x) = -e^{2x}(c_1+c_2 x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}).$$

xv) Harmadik példaként is homogén esetet fogunk vizsgálni:

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $\varphi = (\chi, \eta)$ megoldásra most tehát

$$\begin{aligned} \chi'(x) &= 4\chi(x) - \eta(x) \\ \eta'(x) &= 5\chi(x) + 2\eta(x) \end{aligned}$$

teljesül. Az A sajátértékei a

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

egyenletből

$$\lambda_1 := 3 + 2\imath \ , \ \lambda_2 := 3 - 2\imath \, ,$$

egy-egy sajátvektor pedig rendre

$$t_1 := (1, 1 - 2\imath)\ ,\ t_2 := (1, 1 + 2\imath)\,.$$

Az előbbieknek megfelelően egy alapmátrix a következő:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{(3+2\imath)x} & e^{(3-2\imath)x} \\ \\ (1-2\imath)e^{(3+2\imath)x} & (1+2\imath)e^{(3-2\imath)x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R})\,.$$

A szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai ezért:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x}\left(c_1 e^{2\imath x} + c_2 e^{-2\imath x}\right) \\ \\ e^{3x}\left((1-2\imath)c_1 e^{2\imath x} + (1+2\imath)c_2 e^{-2\imath x}\right) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz

$$\chi(x) = e^{3x}\left(c_1 e^{2\imath x} + c_2 \overline{e^{2\imath x}}\right)\ ,$$

$$\eta(x) = e^{3x}\left(c_1(1-2\imath)e^{2\imath x} + c_2\overline{(1-2\imath)e^{2\imath x}}\right) \qquad (x \in \mathbf{R},\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{C})$$

(ahol a felülhúzás a komplex konjugálást jelenti). Ha itt $c_1 \in \mathbf{C}\,, c_2 := \overline{c_1}$, akkor

$$\chi(x) = e^{3x}\left(c_1 e^{2\imath x} + \overline{c_1 e^{2\imath x}}\right) = 2e^{3x}\cdot\ \mathrm{Re}\left(c_1 e^{2\imath x}\right) =$$

$$e^{3x}(2\,\mathrm{Re}\,c_1\cdot\cos(2x) - 2\,\mathrm{Im}\,c_1\cdot\sin(2x)),$$

$$\eta(x) = e^{3x}\left(c_1(1-2\imath)e^{2\imath x} + \overline{c_1(1-2\imath)e^{2\imath x}}\right) =$$

$$2e^{3x}\,\mathrm{Re}\left(c_1(1-2\imath)e^{2\imath x}\right) =$$

$$e^{3x}(2\,\mathrm{Re}\,(c_1(1-2\imath))\cdot\cos(2x) - 2\,\mathrm{Im}\,(c_1(1-2\imath))\cdot\sin(2x)) =$$

$$e^{3x}((2\,\mathrm{Re}\,c_1 + 4\,\mathrm{Im}\,c_1)\cdot\cos(2x) + (4\,\mathrm{Re}\,c_1 - 2\,\mathrm{Im}\,c_1)\cdot\sin(2x)) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Így az említett megoldások közül a valós értékűeket az alábbiak szerint kapjuk:

$$\chi(x) = e^{3x}(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x))\,,$$

$$\eta(x) = e^{3x}((\alpha - 2\beta)\cos(2x) + (2\alpha + \beta)\sin(2x)) \qquad (x \in \mathbf{R},\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}).$$

Vegyük észre, hogy a valós értékű megoldások előbbi „megkeresése" az összes megoldás között valójában nem volt esetleges. Ha ui. $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ és valamilyen $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ szám, ill. $t \in \mathbf{C}^2$ nem nulla vektor esetén

$At = \lambda t$, akkor $A\overline{t} = \overline{At} = \overline{\lambda t} = \overline{\lambda}\overline{t}$. Mivel a A mátrix sajátérték-egyenlete egy valós együtthatós másodfokú egyenlet, ezért ennek a λ gyökével együtt $\overline{\lambda}$ is gyöke. Ez azt jelenti, hogyha λ sajátértéke A-nak, $t = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{C}^2$ pedig egy neki megfelelő sajátvektor, akkor $\overline{\lambda}$ is sajátérték, $\overline{t} = (\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2})$, pedig sajátvektor. Nyilván $\lambda \neq \overline{\lambda}$, ezért a fentiekben vizsgált első esetről van szó, amikor is a homogén egyenletrendszer megoldásai:

$$\varphi(x) = (\chi(x), \eta(x)) = c_1 e^{\lambda x} \cdot t + c_2 e^{\overline{\lambda} x} \cdot \overline{t} \qquad (x \in \mathbf{R},\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{C}).$$

Ha tehát $\lambda = s + \imath r$, $\tau_1 = y + \imath w$, $\tau_2 = e + \imath f$, $c_1 = u + \imath v \in \mathbf{C}$ és $c_2 = \overline{c_1}$, akkor

$$\varphi(x) = (\chi(x), \eta(x)) = c_1 e^{\lambda x} \cdot t + \overline{c_1 e^{\lambda x} \cdot t},$$

tehát

$$\chi(x) = 2\mathrm{Re}((u + \imath v) \cdot e^{sx}(\cos(rx) + \imath \sin(rx)) \cdot (y + \imath w)),$$

$$\eta(x) = 2\mathrm{Re}((u + \imath v) \cdot e^{sx}(\cos(rx) + \imath \sin(rx)) \cdot (e + \imath f)).$$

Innen már nyilvánvaló, hogy a valós értékű megoldásokat a következőképpen kapjuk:

$$\chi(x) = e^{sx} \cdot (\alpha \cos(rx) + \beta \sin(rx)) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\eta(x) = e^{sx} \cdot (\tilde{\alpha} \cos(rx) + \tilde{\beta} \sin(rx)) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol α, $\beta \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} \in \mathbf{R}$ pedig α-tól és β-tól függő alkalmas együtthatók.

xvi) Világos, hogy a 2.1., 2.2. feladatok mindegyike egy-egy kezdetiérték-probléma. Ui. a 2.1. i) megjegyzésbeli szeparábilis egyenletet illetően legyen

$$f(x, y) := g(x)h(y) \qquad ((x, y) \in I \times J)\,.$$

A xi)-beli 3^o egyenlőség tehát valóban azt jelenti, hogy

$$\varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A 2.1. vii)-beli egzakt egyenletre gondolva az

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \qquad ((x, y) \in I \times J)$$

függvény a fentiek szerint valóban egy egzakt differenciálegyenletet határoz meg. Hasonlóan, a 2.2. i) megjegyzésben definiált lineáris differenciálegyenlet esetén

$$f(x,y) := g(x)y + h(x) \qquad ((x,y) \in I \times \mathbf{R})\,.$$

Ekkor az előbb említett 3^o kívánság a „várt”

$$\varphi'(t) = g(t)\varphi(t) + h(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséget jelenti. Ha pl. $l : I \to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény, és

$$f(x,y) := l(x) \qquad ((x,y) \in I \times \mathbf{R})\,,$$

akkor a megfelelő differenciálegyenlet megoldása olyan differenciálható φ függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, és

$$\varphi'(t) = l(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez a φ tehát nem más, mint az l egy primitív függvénye. A feladatgyűjteményekben az „oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket” címszó után általában csak a xi)-beli 3^o egyenlőséget szokták megadni. Mi is alkalmazni fogjuk ezt a rövidítést, azzal a megjegyzéssel, hogy minden ilyen esetben tegyük „kerekké” a feladatot: adjuk meg a „hiányzó” paramétereket úgy, hogy a xi)-beli $1^o, 2^o, 3^o$ egyenlőségek a feladat szerintiekkel azonosak legyenek.

Bizonyos (nem lineáris) differenciálegyenletek megoldása visszavezethető a lineáris esetre. Példaként tekintsük azt a differenciálegyenletet, amelynek valamely $\alpha \in \mathbf{R}$ „kitevő” mellett a jobb oldala a következő:

$$f(x,y) := g(x)y + h(x)y^\alpha \qquad ((x,y) \in I \times (0,+\infty)).$$

Mivel az $\alpha \in \{0,1\}$ vagy a $h \equiv 0$ választással egy-egy lineáris differenciálegyenletet kapunk, ezért feltehetjük, hogy $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ és $\mathcal{R}_h \neq \{0\}$. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletet *Bernoulli-féle dif-ferenciálegyenletnek* nevezzük. Ha a $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény ennek egy megoldása, akkor $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, $\varphi(x) > 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ és

$$\varphi'(x) = g(x)\varphi(x) + h(x)(\varphi(x))^\alpha \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi nyilván ekvivalens az $(1-\alpha)(\varphi(x))^{-\alpha}$-val való beszorzás után kapott

$$(1-\alpha)\varphi'(x)(\varphi(x))^{-\alpha} =$$

$$(1-\alpha)g(x)(\varphi(x))^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel. Ha tehát

$$\psi := \varphi^{1-\alpha}\ ,\ \tilde{g} := (1-\alpha)g\ ,\ \tilde{h} := (1-\alpha)h,$$

akkor $\varphi := \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$ és

$$\psi'(x) = \tilde{g}(x)\psi(x) + \tilde{h}(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi).$$

Más szóval a $\psi\,(>\ 0)$ függvény megoldása egy lineáris differenciálegyenletnek.

Oldjuk meg pl. a

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletet. A $\psi := \varphi^2$ „helyettesítés” után $\psi' + 2\psi = -2$. A vii) „megoldóképlet” szerint $(\tau \in \mathcal{D}_\varphi\,,\ \xi := \varphi^2(\tau))$:

$$\psi(x) = \Big(\xi - 2\int_\tau^x e^{2\int_\tau^t ds}\,dt\Big)e^{-2\int_\tau^x dt} = \Big(\xi - 2\int_\tau^x e^{2(t-\tau)}\,dt\Big)e^{-2(x-\tau)} =$$

$$\Big(\xi - e^{2(x-\tau)} + 1\Big)e^{-2(x-\tau)} = (\xi+1)e^{-2(x-\tau)} - 1 = \gamma e^{-2x} - 1 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol $\gamma := (\xi+1)e^{2\tau}$, és az $a := \ln\sqrt{\gamma}$ jelöléssel pl. $\mathcal{D}_\varphi := (-\infty, a)$. Következésképpen

$$\varphi(x) = \sqrt{\gamma e^{-2x} - 1} \qquad (x < a).$$

xvii) Ha a differenciálegyenlet általunk adott meghatározásában (ld. xi)) f helyett pl. egy $F \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvényből indulnánk ki, és a keresett differenciálható $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ függvénytől 1^o, 2^o mellett 3^o-ban az

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség teljesülését kívánnánk meg, akkor egy ún. *implicit* elsőrendű közönséges differenciálegyenlethez jutnánk. Világos, hogy xi)-ben (az ottani jelölésekkel) az

$$F(x, y, z) := f(x, y) - z \qquad ((x, y, z) \in I \times J \times \mathbf{R}^n)$$

speciális esetet fogalmaztuk meg. Legyen pl. $n := 1$, és

$$F(x,y,z) := x(z^2-1) - 2yz \qquad ((x,y,z) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}).$$

Ekkor tehát olyan $\varphi : \tilde{I} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $\tilde{I} \subset I$ nyílt intervallum, és

$$x((\varphi'(x))^2 - 1) - 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0 \qquad (x \in \tilde{I}).$$

Ilyen φ pl. (könnyen ellenőrizhetően) bármely $p \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ esetén a következő:

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A xi) definícióban szereplő *explicit* szó arra utal, hogy a 3^o egyenlőség egyik oldalán egyedül a keresett φ függvény $\mathcal{D}_\varphi \ni t$-beli deriváltja áll. Az *elsőrendű* jelző a definícióban azt mutatja, hogy a differenciálegyenlet megoldásának csak az első deriváltjára tettünk előírást. Végül a xi) feladat *közönséges*, mert benne egyváltozós függvényt keresünk, amelynek a „közönséges" deriváltját illetően fogalmaztunk meg elvárásokat. „Egyszerűnek" tűnő kérdések vezethetnek nem „közönséges" (*parciális*) differenciálegyenletekhez, mint pl. a *rezgő húr* problémája: a két végén kifeszített homogén, rezgő húr alakjának a meghatározása. Feltesszük, hogy az $l\,(>0)$ hosszúságú húr transzverzális síkrezgést végez. Megfelelő koordinátarendszert választva a húr időben változó alakját egy $u \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény írja le abban az értelemben, hogy minden $(x,t) \in \mathcal{D}_u$ esetén a húr x pontjának a kitérése $u(x,t)$. Ha $u \in D^2$, akkor (fizikai megfontolások alapján) egy $q \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\partial_{22}u(x,t) = q\partial_{11}u(x,t) \qquad ((x,t) \in \mathcal{D}_u).$$

(A q-t a feszítőerő és a húr sűrűsége határozza meg.) Megadva a húr kezdeti alakját és sebességét $(u(x,0)$-t, ill. $\partial_2 u(x,0)$-t $\;(x \in [0,l]))$ az u függvény meghatározható.

xviii) A xi)-ben megfogalmazott kezdetiérték-probléma megoldására (a szeparábilis, ill. a lineáris esettel szemben) általános „megoldó képlet" nincs. Ilyen feladat pl. a következő:

$$\varphi'(t) = t^2 + \varphi^2(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\;\;,\;\; \varphi(0) = 0.$$

A megoldás közelítésére szolgáló, a gyakorlatban is gyakran jól alkalmazható módszer ugyanakkor az alábbi *szukcesszív approximáció.* Legyen a $\varphi_n \in I \to \mathbf{R}$ $\;(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat a következőképpen definiálva: az f függvényre tett alkalmas feltételek mellett van olyan $r > 0$, hogy a

$$\varphi_0(t) := \xi \ , \ \ \varphi_{n+1}(t) := \xi + \int_\tau^t f(x, \varphi_n(x))\,dx \qquad (t \in (\tau - r, \tau + r))$$

függvények valamennyien léteznek, bármely $t \in (\tau - r, \tau + r)$ helyen a $\varphi_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$ (szám)sorozat konvergens és a

$$\varphi(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \qquad (t \in (\tau - r, \tau + r))$$

függvény megoldása a xi)-beli kezdetiérték-problémának. Megjegyezzük, hogy erről a φ megoldásról az is belátható, hogy

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(x, \varphi(x))\,dx \qquad (t \in (\tau - r, \tau + r)).$$

Ezért (is) szokták néha a szukcesszív approximációt *fixpont-algoritmusnak* is nevezni, ti. a

$$\psi \mapsto \xi + \int_\tau^t f(x, \psi(x))\,dx \qquad (t \in (\tau - r, \tau + r))$$

transzformáció a φ függvényt nem változtatja meg (a φ függvény az illető transzformáció *fixpontja*). Illusztrációként tekintsük pl. (az egyébként szeparábilis)

$$\varphi'(t) = t\varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 1$$

feladatot:

$$I := \mathbf{R}\,,\ J := (0, +\infty)\,,\ f(x,y) := xy\ (x \in \mathbf{R}, y > 0))\,,\ \tau := 0\,,\ \xi := 1.$$

Ekkor a fentiek szerint $\varphi_0(t) = 1$, és

$$\varphi_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x\varphi_n(x)\,dx \qquad (t \in (-r, r), n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t x\varphi_0(x)\,dx = 1 + \int_0^t x\,dx = 1 + \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t x\varphi_1(x)\,dx = 1 + \int_0^t \left(x + \frac{x^3}{2}\right)dx = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t x\varphi_2(x)\,dx = 1 + \int_0^t \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8}\right)dx =$$

$$1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48}.$$

Innen már „megsejthető” (és a „sejtés” teljes indukcióval könnyen be is bizonyítható), hogy

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!} \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy

$$\varphi(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = e^{t^2/2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ami „tényleg” megoldása a szóban forgó feladatnak:

$$\varphi(0) = 1 \ , \ \ \varphi'(t) = te^{t^2/2} = t\varphi(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

xix) Sokszor használható közelítő megoldások előállítására (esetenként a megoldás „megsejtésére”) az ún. *hatványsormódszer*. Pl. a

$$\varphi'(t) = t\varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi) \ , \ \varphi(0) = 1$$

feladaton bemutatva mindezt, tételezzük fel, hogy a φ megoldás $\tau = 0$ körül hatványsorba fejthető:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad (t \in (-r, r)).$$

Ekkor $1 = \varphi(0) = a_0$ és

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} \qquad (t \in (-r, r)),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} t^k \qquad (t \in (-r, r)).$$

Következésképpen az alábbi rekurzív összefüggést kapjuk az a_k $(k \in \mathbf{N})$ együtthatók között:

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 0 \ , \ a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k+1} \qquad (1 \le k \in \mathbf{N}).$$

Más szóval

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = 0\ ,\ a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\ ,\ a_3 = \frac{a_1}{3} = 0,$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{8}\ ,\ a_5 = \frac{a_3}{5} = 0\ ,$$

amiből már „sejthető” (és teljes indukcióval egyszerűen be is látható), hogy

$$a_k = \begin{cases} 0 & (k = 2j+1 \quad (j \in \mathbf{N})) \\ \\ 1/(2^j \cdot j!) & (k = 2j \quad (j \in \mathbf{N})). \end{cases}$$

Következésképpen

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{2^j \cdot j!} = e^{t^2/2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

xx) A xviii) megjegyzésben „bemutatott” közelítő eljárás mögött a következő általános meggondolások húzódnak meg. Legyen adott egy $X \neq \emptyset$ halmaz és egy $F : X \to X$ leképezés. Ekkor bármely $a \in X$ esetén az

$$x_0 := a\ \ ,\ \ x_{n+1} := F(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

előírás (*egylépéses rekurzió*) egy $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatot definiál. Ha pl.

$$X := [1, +\infty)\quad ,\quad F(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in X),$$

akkor a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség alapján tetszőleges $t \in X$ mellett

$$F(t) = 2 \cdot \frac{t/2 + 1/t}{2} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t}} = \sqrt{2} > 1,$$

azaz $\mathcal{R}_F \subset (\sqrt{2}, +\infty)$. Többek között tehát $F : X \to X$, így pl. az $a := 2$ választással a

$$\varsigma_0 = 2\ \ ,\ \ \varsigma_{n+1} = F(\varsigma_n) = \frac{\varsigma_n}{2} + \frac{1}{\varsigma_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozathoz jutunk. A xviii)-ban mondottakat idézve a paraméterek alkalmas megválasztásával az előbbi absztrakt egylépéses rekurzióba illeszkedik a $\varphi_0(t) := \xi$,

$$\varphi_{n+1}(t) := F(\varphi_n)(t) :=$$

$$\xi + \int_\tau^t f(x, \varphi_n(x))\,dx \qquad (t \in (\tau - r, \tau + r),\ n \in \mathbf{N})$$

rekurzív megadású (φ_n) (függvény)sorozat is, ahol

$$F(\psi)(t) := \xi + \int_\tau^t f(x, \psi(x))\,dx \qquad (\psi \in X,\ t \in (\tau - r, \tau + r))$$

és X most olyan $\psi : (\tau - r, \tau + r) \to \mathbf{R}$ folytonos függvényekből álló halmazt jelöl, amelyekre $(x, \psi(x)) \in \mathcal{D}_f \quad (x \in (\tau - r, \tau + r))$ és $F(\psi) \in X \quad (\psi \in X)$.

Az előbbi (ς_n) pozitív valós számokból álló (sőt, $(\sqrt{2}, +\infty)$-beli) sorozatról a következőket mondhatjuk:

$$|\varsigma_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{\varsigma_n}{2} + \frac{1}{\varsigma_n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{\varsigma_n^2 - 2\varsigma_n\sqrt{2} + 2}{2\varsigma_n}\right| =$$

$$\frac{(\varsigma_n - \sqrt{2})^2}{2\varsigma_n} \le \frac{(\varsigma_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a

$$\delta_n := \frac{|\varsigma_n - \sqrt{2}|}{2\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel $\delta_{n+1} \le \delta_n^2 \ (n \in \mathbf{N})$. Innen teljes indukcióval rögtön adódik a

$$\delta_n \le \delta_0^{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőtlenség, más szóval

$$|\varsigma_n - \sqrt{2}| \le 2\sqrt{2}\left(\frac{|\varsigma_0 - \sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n} =$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{|2 - \sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n} \le \frac{2\sqrt{2}}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos ezért, hogy $\lim_{n\to\infty} \varsigma_n = \sqrt{2}$. Következésképpen a

$$\varsigma_0,\ \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n, \ldots$$

(racionális!) számok „használhatók” a $\sqrt{2}$ (irracionális) szám „közelítésére”: tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibahatárhoz van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $|\varsigma_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$. Pl.

$$|\varsigma_3 - \sqrt{2}| = \left|\frac{577}{408} - \sqrt{2}\right| < 0,0115$$

(ahol $\varsigma_3 = 1,41421568627...$).

Vegyük észre, hogy a (ς_n) sorozatot „generáló" fenti F függvényre $F(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Általában, ha az $F : X \to X$ függvényhez található olyan $\alpha \in X$, hogy $F(\alpha) = \alpha$, akkor α-t az F függvény *fixpontjának* nevezzük. Formálisan mondva ekkor az $F(x) = x$ „egyenletnek" α (egy) megoldása. Számos gyakorlati feladat vezet ilyen „egyenlet" megoldására, amikor is az illető feladat megoldása a *matematikai modelljében* (egy alkalmas X halmaz és $F : X \to X$ függvény mellett) az F függvény valamely fixpontjának a megkeresését jelenti. Ez utóbbi közelítéséül szolgálhatnak a fenti egylépéses rekurzióval megadott (x_n) sorozat tagjai.

xxi) Az előbbi megjegyzés végén említett „közelítésnek" akkor van értelme, ha valahogyan el tudjuk dönteni, hogy a szóban forgó (x_n) sorozat bizonyos tagja már „elég jó-e"? Ez utóbbin a legtöbbször azt értjük, hogy valamilyen értelemben már elég közel van-e az illető tag α-hoz. Ezt a közelséget pl. az előbbi ς_n-ek esetében azzal mértük, hogy mekkora a $|\varsigma_n - \sqrt{2}|$ „távolság". Ugyanakkor a „távolság" fogalma már elemi szinten sem kötődik a valós számokhoz. Gondoljunk pl. az $\mathbf{R}^2$-ben megismert *euklideszi távolságra,* amikor az (x, y), $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ vektorok távolságát a

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

nem-negatív számmal mértük. Mind a most mondott távolság, mind pedig a valós számok közötti távolság szempontjából csak az alábbi szempontok (*axiómák*) az érdekesek:

- két vektor (szám) távolsága nem-negatív szám;
- két vektor (szám) távolsága akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor (szám) azonos;
- az egyik vektor (szám) távolsága a másiktól ugyanaz, mint a másiknak az előbbitől;
- két vektor (szám) távolsága nem lehet nagyobb egy harmadik vektortól (számtól) mért távolságaik összegénél.

Nem nehéz belátni, hogy az előbbi tulajdonságokkal pl. a folytonos függvények közötti alábbi távolság-fogalom is rendelkezik: legyen valamely korlátos és zárt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén a folytonos $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvények „távolsága”

$$\max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Ugyanígy távolsághoz jutunk, ha azt az előbbi f, g esetén az

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

integrállal mérjük. A konkrét példák sokasága vezet el a távolság-fogalom általánosításához. Tegyük fel ehhez, hogy az $X \neq \emptyset$ halmaz esetén a

$$\rho : X^2 \to [0, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) minden $x \in X$ esetén $\rho(x,x) = 0$;

b) ha $x, y \in X$ és $\rho(x,y) = 0$, akkor $x = y$;

c) bármely $x, y \in X$ elemekre $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

d) tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekkel $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

(Egy $(x,y) \in X^2$ „vektor” esetén a ρ függvény (x,y)-beli helyettesítési értékére a „szabványos” $\rho((x,y))$ szimbólum helyett használjuk az egyszerűbb $\rho(x,y)$-t.)

Azt mondjuk, hogy ekkor ρ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval *metrika*); ha $x, y \in X$, akkor $\rho(x,y)$ az x, y elemek *távolsága*. Az (X, ρ) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük. Az X-beli elemek távolsága tehát egy nem-negatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága nulla (ld. a)), továbbá két különböző elem távolsága mindig pozitív (ld. b)). A távolság *szimmetrikus*, azaz két elem távolsága független az illető elemek sorrendjétől (ld. c)). A d) tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* idézik. Jegyezzük meg, hogy bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ távolságfüggvény, ui. a

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 0 & (\text{ha } x = y) \\ \\ 1 & \text{ha } (x \neq y) \end{cases} \qquad \big((x,y) \in X^2\big)$$

leképezés nyilván eleget tesz az a) – d) axiómáknak. (Az így definiált (X, ρ)-párt *diszkrét metrikus térnek* nevezzük.)

xxii) Egy (X, ρ) metrikus térben tehát van értelme annak a kérdésnek, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat és valamely $\alpha \in X$ elem esetén vajon van-e a sorozatnak olyan tagja, amely egy előre adott hibakorlátnál „közelebb" van α-hoz. Másképp fogalmazva: legyen $\varepsilon > 0$ és keressünk olyan $N \in \mathbf{N}$ indexet, amelyre $\rho(x_N, \alpha) < \varepsilon$ igaz. Ha a szóban forgó sorozatot valamilyen feladat matematikai modelljében azzal a céllal konstruáltuk, hogy az illető feladat megoldását jelentő α-t a sorozat tagjaival a fenti értelemben közelítsük, akkor az (x_n) sorozat meghatározását *numerikus módszernek* (vagy *közelítő eljárásnak*) nevezzük. Egy ilyen módszerrel szemben természetes követelmény egyrészt az, hogy a $\rho(x_N, \alpha) < \varepsilon$ egyenlőtlenség bármely $\varepsilon > 0$ mellett realizálható legyen. Másrészt logikusnak tűnik az az elvárás is, hogy ha az α-t valamilyen hibahatárnál $(\varepsilon > 0)$ már jobban közelítő tagot találtunk a sorozatban - legyen ez a módszer N-edik „lépésében" kapott x_N -, akkor a további lépések során adódó $x_n \quad (n > N)$ tagokra is teljesüljön a $\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon$ becslés.

Mindezek az alábbi definíciót motiválják: az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel minden $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ mellett igaz a $\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon$ becslés. Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens*. Világos, hogy minden konstans sorozat konvergens, hiszen $\alpha \in X$, $x_n = \alpha \quad (n \in \mathbf{N})$ esetén bármely $N \in \mathbf{N}$ indexre $\rho(x_n, \alpha) = 0$. Könnyen belátható, hogy ha az $x := (x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia fenti definíciójában szereplő α egyértelműen van meghatározva. Ezt az $\alpha \in X$ elemet az illető sorozat *határértékének* (vagy idegen szóval *limeszének*) nevezzük, és rá a számsorozatok körében megszokott $\lim x$ vagy $\lim_{n\to\infty} x_n$ jelölések valamelyikét használjuk. Így az $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$ mellett létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Speciálisan legyen valamely korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum esetén

$$X := C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbf{R} :\ f \text{ folytonos}\},$$

$$\rho(f, g) := \rho_c(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \qquad (f, g \in X).$$

Ebben a metrikus térben egy $f_n \in X \ (n \in \mathbf{N})$ (függvény)sorozat konvergenciája a következőt jelenti: van olyan $f \in X$ függvény, amellyel bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ („küszöb") indexszel minden $x \in [a, b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N)$$

teljesül. Világos, hogy egyúttal tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén a helyettesítési értékek $(f_n(x))$ sorozata (ami egy valós számokból álló sorozat) $f(x)$-hez konvergál. Külön is érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az itt szereplő N csak ε-tól függ, $[a, b] \ni x$-től nem. Ezért azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat *egyenletesen konvergál* az f *határfüggvényhez.*

xxiii) A sorozatok konvergenciájára adott definíciónknak formálisan megvan az a hátránya, hogy a konvergencia tényének az eldöntéséhez felhasznál egy, a sorozaton „kívüli” valamit is, ti. (egy később határértéknek nevezett) $\alpha \in X$ elemet. Joggal vetődik fel a kérdés, hogy nem lehetne-e a konvergenciának egy olyan „belső” értelmezését megadni, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a szóban forgó sorozat konvergens vagy divergens voltáról. Egy szükséges feltételt mindenesetre könnyen kaphatunk, nevezetesen: ha az (x_n) sorozat konvergens és $\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_k, \alpha) < \varepsilon/2 \qquad (k \in \mathbf{N},\, k > N).$$

Ekkor viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n > N$ esetén

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n\alpha) + \rho(x_m, \alpha) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Nevezzük az (x_n) sorozatot *Cauchy-sorozatnak,* ha az előbbi következmény igaz rá: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N},\, n, m > N).$$

Tehát minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Különös jelentőséggel bírnak azok a terek, amelyekben ez utóbbi feltétel elégséges is a szóban forgó sorozat konvergenciájához. Ezekkel kapcsolatos a következő definíció: azt mondjuk, hogy (X, ρ) egy *teljes metrikus tér,* ha benne bármely Cauchy-sorozat konvergens. Magát a Cauchy-sorozat definíciójában szereplő feltételt *Cauchy-kritériumnak* (vagy *belső konvergencia-kritériumnak*) nevezzük. Így pl. teljes metrikus terek az alábbiak:

- $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$, ahol $0 < s \in \mathbf{N}$, $1 \le p \le +\infty$, a $\mathbf{K}$ szimbólum vagy $\mathbf{R}$-et vagy $\mathbf{C}$-t jelöli, és $\xi = (\xi_1, ..., \xi_s)$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_s) \in \mathbf{K}^s$ esetén

$$\rho_p(\xi, \eta) := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^s |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \max\{|\xi_k - \eta_k| : k = 1, ..., s\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Speciálisan $(\mathbf{K}, \rho) := (\mathbf{K}^1, \rho)$ is teljes metrikus tér, ha

$$\rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

- bármely korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum esetén $(C[a, b], \rho_c)$ (ld. xxii)) teljes metrikus tér.

xxiv) (*Banach-Tyihonov-Cacciopoli-féle fixponttétel.*) Legyen (X, ρ) teljes metrikus tér, $f : X \to X$ *kontrakció*, azaz egy alkalmas $q \in [0, 1)$ számmal minden $x, y \in X$ esetén teljesül a $\rho(f(x), f(y)) \le q \cdot \rho(x, y)$ becslés. Ekkor

1^o egyértelműen létezik olyan $\alpha \in X$, amely fixpontja f-nek: $f(\alpha) = \alpha$;

2^o bármely $x_0 \in X$ elemet véve az $x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ előírással definiált (x_n) sorozat konvergens, és $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$;

3^o tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ indexre igaz a következő (*apriori*) becslés:

$$\rho(x_n, \alpha) \le \frac{q^n}{1 - q} \cdot \rho(x_0, x_1).$$

Tekintsük pl. az $X := [1, +\infty)$, $\rho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in X)$ módon definiált (X, ρ) teljes metrikus teret és az

$$f(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad (x \in X)$$

függvényt (ld. xx)). Ekkor $f : X \to X$, és bármely $x, y \in X$ esetén

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x - y}{2} + \frac{y - x}{xy}\right| = |x - y| \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| < \frac{|x - y|}{2},$$

ezért f kontrakció (pl. $q := 1/2$ „megfelelő” választás ehhez). A fenti tétel szerint tehát f-nek egyetlen fixpontja van, ami könnyen láthatóan $\sqrt{2}$. Következésképpen az

$$x_0 := 2\ ,\ x_{n+1} := f(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatra $\lim (x_n) = \sqrt{2}$ és

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} \cdot |2 - 3/2| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(A xx) megjegyzésben ugyanerre (az ott (ς_n)-nel jelölt) sorozatra „jobb” hibabecslést kaptunk. Ez nem meglepő, hiszen xx)-ban a szóban forgó metrikus tér, ill. sorozat speciális jellemzőit is kihasználtuk, míg most csupán az általános (absztrakt) tétel feltételeit.)

xxv) A fixponttétel 1^o és 2^o pontja egyúttal hatékony algoritmust is kínál a fixpont közelítő meghatározására. A 3^o hibabecslő formulából bármely $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén

$$\rho(x_m, \alpha) \leq \frac{q}{1 - q} \cdot \rho(x_m, x_{m-1})$$

adódik. Alkalmazzuk ui. az említett becslést az $y_n := x_{m-1+n}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatra az $n := 1$ választással.

xxvi) Emlékeztetünk a xi) megjegyésben megfogalmazott kezdetiérték-feladatra. Adott $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, $\tau \in I$, $\xi \in J$ és $f : I \times J \to \mathbf{R}$ folytonos függvény esetén olyan $\varphi \in I \to J$ függvényt keresünk, amelyre igazak a következő állítások:

1^o $\mathcal{D}_\varphi$ *nyílt intervallum*;

2^o $\varphi \in D$;

3^o $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

4^o $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ *és* $\varphi(\tau) = \xi$.

Az itt szereplő 3^o és 4^o egyenlőség együttesen ekvivalens a következő (φ-re vonatkozó) *integrálegyenlettel*:

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(x, \varphi(x))\, dx \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyen $\delta > 0$ olyan szám, hogy $[\tau - \delta, \tau + \delta] \subset I$, ill.

$$X := \{\psi : [\tau - \delta, \tau + \delta] \to J : \ \psi \text{ folytonos}\}.$$

Ha $\psi \in X$, akkor tekintsük a

$$(*) \qquad [\tau - \delta, \tau + \delta] \ni t \mapsto \xi + \int_\tau^t f(x, \psi(x))\, dx$$

leképezést. Ahhoz, hogy ez szintén X-beli legyen, az kell, hogy

$$\xi + \int_\tau^t f(x, \psi(x))\, dx \in J \qquad (t \in [\tau - \delta, \tau + \delta])$$

teljesüljön. Ezt pl. a következőképpen biztosíthatjuk. Válasszuk először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a $[\xi - \mu, \xi + \mu] \subset J$ tartalmazás fennálljon, és legyen

$$M := \max\{|f(x, y)| : x \in [\tau - \delta, x + \delta],\, y \in [\xi - \mu, \xi + \mu]\}.$$

Ekkor a kívánt tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_\tau^t f(x, \psi(x))\, dx\right| : \ t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]\right\} \leq \mu.$$

Módosítsuk az X definícióját úgy, hogy

$$X := \{\psi : [\tau - \delta, \tau + \delta] \to [\xi - \mu, \xi + \mu] : \ \psi \text{ folytonos}\}\,,$$

ekkor az előbbi maximum nyilván becsülhető $M\delta$-val. Így $M\delta \leq \mu$ esetén a $(*)$-ban definiált függvény (jelöljük ez utóbbi függvényt $T(\psi)$-vel) is X-beli. (Ha a kiindulásul választott δ-ra $M\delta > \mu$, akkor írjunk a δ helyébe olyan (nyilván nála kisebb) „új” pozitív δ számot, hogy $M\delta \leq \mu$ legyen. Az ennek megfelelő „új” M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az $M\delta \leq \mu$ becslés nem „romlik” el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : X \to X$ leképezést, amelyre tetszőleges $\psi, \phi \in X$ mellett

$$\rho_c(T(\psi), T(\phi)) =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^t (f(x, \psi(x)) - f(x, \phi(x))\, dx\right| : \ t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]\right\}.$$

Tegyük fel, hogy egy alkalmas $L \geq 0$ konstanssal minden $t \in I$, valamint $y, z \in [\xi - \mu, \xi + \mu]$, választással igaz a következő becslés:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L \cdot |y - z|.$$

Ekkor

$$\rho_c(T(\psi), T(\phi)) \leq$$

$$\max\left\{\int_\tau^t |f(x,\psi(x)) - f(x,\phi(x)|\, dx :\, t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\right\} \leq$$

$$L\cdot \max\left\{\int_\tau^t |\psi(x)) - \phi(x)|\, dx :\, t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\right\} \leq$$

$$L\cdot \max\left\{\int_\tau^t \rho_c(\psi,\phi)\, dx :\, t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\right\} =$$

$$L\rho_c(\psi,\phi)\cdot \max\{|t-\tau| :\, t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\} \leq L\delta\rho_c(\psi,\phi) \quad (\psi, \phi \in X),$$

tehát a T leképezés $L\delta < 1$ esetén kontrakció. Válasszuk így a δ-t (ezt - az „eddigi” δ-t legfeljebb csökkentve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in X$, amelyre $T(\psi) = \psi$. (Emlékeztetünk arra, hogy (X, ρ_c) teljes metrikus tér.) Legyen

$$\varphi(t) := \psi(t) \qquad (t \in (\tau-\delta, \tau+\delta)),$$

ekkor a T definíciója szerint

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(x, \varphi(x))\, dx \qquad (t \in (\tau-\delta, \tau+\delta)).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy φ megoldása a kiindulási kezdetiérték-feladatnak. A fixponttétel révén az alábbi numerikus algoritmust kapjuk a szóban forgó kezdetiérték-probléma közelítő megoldására (*szukcesszív approximáció* (ld. xviii))):

$$\varphi_0(t) := \xi\,,\ \varphi_{n+1}(t) := \xi + \int_\tau^t f(x, \varphi_n(x))\, dx \quad (t \in [\tau-\delta, \tau+\delta],\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a fixponttétel 3^o hibabecslő formulája (ld. xxiv)) szerint bármely $n \in \mathbf{N}$ indexre tetszőleges $t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]$ helyen

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq \max\{|\varphi(z) - \varphi_n(z)| : z \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\} \leq$$

$$\frac{(L\delta)^n}{1-L\delta}\cdot \max\{|\varphi_0(z) - \varphi_1(z)| : z \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\} =$$

$$\frac{(L\delta)^n}{1-L\delta}\cdot \max\left\{\left|\int_\tau^z f(x,\xi)\, dx\right| : z \in [\tau-\delta, \tau+\delta]\right\} \leq \frac{M\delta}{1-L\delta}\cdot (L\delta)^n.$$

Így $L\delta < 1$ miatt minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$ „küszöb, hogy az $N < n \in \mathbf{N}$ indexekre tetszőleges $t \in (\tau-\delta, \tau+\delta)$ pontban $|\varphi(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon$ (azaz a (φ_n) sorozat egyenletesen konvergál φ-hez).

xxvii) Foglaljuk össze az eddig mondottakat az alábbi *Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tételben*: legyenek $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \times J \to \mathbf{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel továbbá, hogy a J bármely korlátos és zárt $\tilde{J}$ részintervallumához van olyan $L \geq 0$ szám, hogy a $t \in I$, $y, z \in \tilde{J}$ elemekre

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|.$$

Ekkor tetszőleges $\tau \in I$, $\xi \in J$ esetén az f, τ, ξ által meghatározott kezdetiérték-feladatnak van megoldása.

Azt mondjuk, hogy f eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek,* ha rendelkezik az előbbi tételben megfogalmazott tulajdonsággal. Megmutatható, hogy az egzisztencia-tétel feltételei mellett az abban szereplő bármely kezdetiérték-feladat *egyértelműen* oldható meg (*unicitási tétel*) az alábbi értelemben: ha a φ függvény mellett $\tilde{\varphi}$ is megoldása, akkor $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}})$. Pl. a

$$\varphi'(t) = \sqrt{|\varphi(t)|}\ , \quad \varphi(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat triviálisan megoldható, hiszen a $\varphi \equiv 0$ függvény nyilván megoldása. Ugyanakkor könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} t^2/4 & (t \geq 0) \\ \\ -t^2/4 & (t < 0) \end{cases}$$

függvény is megoldás. Mivel $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}} = \mathbf{R}$ és $\varphi(t) \neq \tilde{\varphi}(t)$ $(0 \neq t \in \mathbf{R})$, ezért ez a feladat nem egyértelműen oldható meg. Világos, hogy a szóban forgó kezdetiérték-problémát az

$$f(x,y) := \sqrt{|y|} \qquad (x, y \in I := J := \mathbf{R})$$

függvény „generálja”. Tetszőleges

$$t \in \mathbf{R},\ 0 < y < z \leq n^{-2} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetén az

$$|f(t,y) - f(t,z)| = |\sqrt{y} - \sqrt{z}| = \frac{|y - z|}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \leq L \cdot |y - z|$$

egyenlőtlenségből

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} > \frac{1}{2\sqrt{z}} \geq \frac{n}{2}$$

következik. Innen nyilvánvaló, hogy erre az f függvényre nem teljesül a fenti Lipschitz-feltétel.

2.2.1. Feladatok

1^o Oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenleteket:

a) $\varphi'(t) = \frac{1}{t}\varphi(t) + t^2 + 3t - 2 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

b) $\varphi'(t) = (\operatorname{ctg} t)\,\varphi(t) - \frac{1}{\cos t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

c) $\varphi'(t) = \frac{3t^2-2}{t^3}\varphi(t) + 1 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

d) $\varphi'(t) = \varphi(t) + \sin t \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

e) $\varphi'(t) = 2\varphi(t) + e^t \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

f) $\varphi'(t) = \frac{1}{1-t}\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$!

2^o Adjuk meg a következő kezdetiérték-problémák megoldásait:

a) $\varphi'(t) + \frac{2}{t}\varphi(t) = t^3 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 1$;

b) $\varphi'(t) + \varphi(t)\operatorname{ctg} t = 5e^{\cos t} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(\pi/2) = -4$;

c) $(1-t^2)\varphi'(t) + t\varphi(t) = 1 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 1$;

d) $\varphi'(t) + t^2\varphi(t) = t^2 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(2) = 1$;

e) $\varphi'(t) = \frac{1}{t}\varphi(t) + te^t \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 0$;

f) $t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 2t\cos t + 2\sin(2t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(\pi) = 1$!

3^o Számítsuk ki egy soros RL-körben folyó áram erősségét, ha a körre kapcsolt feszültség (U) az alábbiak szerint függ az időtől (adott $A, \omega > 0$ paraméterekkel):

$$U(t) := A\sin(\omega t) \qquad (t \in \mathbf{R})!$$

4^o Mik a megoldásai az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteknek:

a) $\varphi'(t) + \varphi(t) + \varphi^2(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(1) = 0$;

b) $\varphi'(t) + \varphi^2(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

c) $\varphi'(t) = \varphi(t) + x\varphi^5(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

d) $\varphi'(t) + \varphi(t) = (1-2t)\varphi^3(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

e) $t^2\varphi'(t) + t\varphi(t) + \sqrt{\varphi(t)} = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

f) $\varphi'(t) - \varphi^2(t) + t\varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

g) $\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi^2(t)\,\mathrm{tg}\,t = \cos^{3/2} t \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$?

5^o Valamely vízben oldódó anyagból egy bizonyos mennyiséget vízbe szórunk. Tapasztalatból tudjuk, hogy az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével egyenesen arányos. Írjunk fel olyan kezdetiérték-problémát, amely matematikailag modellezi a fenti folyamatot!

6^o Adott magasságból adott kezdő sebességgel függőlegesen lefelé eldobunk egy testet. Tegyük fel, hogy a testre esés közben csupán a sebességével egyenesen arányos fékező erő és a nehézségi erő hat. Milyen kezdetiérték-problémának tesz eleget a test sebességét leíró függvény?

7^o Egy folyadékkal teli henger alakú tartály alján lyukat vágunk. A folyadék kifolyásának a sebessége (a súrlódást figyelmen kívül hagyva) egyenesen arányos a folyadék tartálybeli magasságának a négyzetgyökével. Azt szeretnénk meghatározni, hogy mennyi idő alatt folyik ki a tartályból a folyadék. Adjunk meg olyan kezdetiérték-problémát, amelynek a megoldásával válaszolhatunk a kérdésre!

8^o Forgásfelület alakú tükörről a forgástengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a visszaverődés után egy ponton mennek át. Metsszük el a szóban forgó felületet egy, a forgástengelyen áthaladó síkkal. Írjunk fel olyan differenciálegyenletet, amelynek a megoldásával meghatározható a metszetgörbe!

9^o Egy forgástest alakú, homogén anyageloszlású oszlop vízszintes fedőlapját valamekkora függőleges irányú erő terheli. Az oszlopot úgy akarjuk megtervezni, hogy a fedőlappal párhuzamos összes keresztmetszetben ugyanakkora nyomás keletkezzen. Melyik az a kezdetiérték-probléma, amelynek a megoldásával meg tudjuk határozni a forgástest felületéből a forgástengelyen átmenő sík által kimetszett görbét?

10^o A vízszintessel α szöget $(0 < \alpha < \pi/2)$ bezáró sík felületre egy testet helyezünk, amely a nehézségi erő hatására lefelé csúszik. A mozgást a "szokásos" súrlódási erő (amely tehát egyenesen arányos a felületre merőleges nyomóerővel) és a lehelyezéshez képesti elmozdulással egyenesen arányos visszatérítő erő akadályozza. Modellezzük egy megfelelő kezdetiérték-problémával a test mozgását!

11^o Egy testet valamekkora kezdősebességgel elhajítunk, mégpedig a vízszintessel α szöget $(0 < \alpha < \pi/2)$ bezáró irányban. Tegyük fel, hogy mozgás közben a testre a nehézségi erőn kívül a mindenkori sebességgel arányos fékező erő hat. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy (a kezdeti helyzethez képest) mikor lesz a test a legmagasabban és mekkora ez a magasság. Milyen kezdetiérték-problémával hozható kapcsolatba a feladat?

12^o Tegyük fel, hogy egy áramkörben csak (sorbakapcsolt) ohmos és induktív ellenállás van (RL-kör). Az áramkört (időtől függő) feszültség alá helyezve a körben folyó áram erőssége is függ az időtől. Adjunk meg olyan differenciálegyenletet, amelynek az áramerősség-idő függvény eleget tesz!

13^o Egy nyílt intervallumon értelmezett, differenciálható valós értékű φ függvényről azt tudjuk, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén az $(a, \varphi(a))$ pontnak az a-beli érintő X-tengellyel való metszéspontjától vett (euklideszi) távolsága ugyanakkora. Milyen differenciálegyenlet megoldásaként kapható meg a φ függvényt?

14^o Van-e olyan nyílt intervallumon értelmezett, valós értékű, differenciálható φ függvény, hogy bármely $t \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén a t-beli érintő, az X-tengely és az origót $(t, \varphi(t))$-vel összekötő szakasz által határolt háromszög területe állandó?

15^o Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat:

a) $x_{n+1} - 2x_n = 0 \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = 1;$

b) $4x_{n+1} - x_n = 0 \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = 2;$

c) $x_{n+1} - x_n + 3 = 0 \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = 1;$

d) $x_{n+1} = 2x_n + 4 \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = 1;$

e) $2x_{n+1} + 3x_n = (-2)^n \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = -1;$

f) $3x_{n+1} = x_n + 2 \ \ (n \in \mathbf{N})\ ,\ x_0 = 1!$

16^o Számítsuk ki a felsorolt lineáris rendszerek, ill. kezdetiérték-problémák megoldásait (a $\chi(x), \eta(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ helyettesítési értékeket):

a) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 2\chi(x) + \eta(x) \\ \eta'(x) &= 3\chi(x) + 4\eta(x) \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 3\chi(x) + 2\eta(x) \\ \eta'(x) &= 2\chi(x) + 6\eta(x) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 4\chi(x) - \eta(x) \\ \eta'(x) &= \chi(x) + 2\eta(x) \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \chi'(x) &= -5\chi(x) - \eta(x) \\ \eta'(x) &= \chi(x) - 3\eta(x) \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \chi'(x) &= \chi(x) - \eta(x) \\ \eta'(x) &= -4\chi(x) + 3\eta(x) \end{aligned}$, $\chi(0) = 0\,,\ \eta(0) = 1$

f) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 3\chi(x) + 2\eta(x) + e^{2x} \\ \eta'(x) &= 2\chi(x) + 6\eta(x) + 1 \end{aligned}$, $\chi(0) = \eta(0) = 0$

g) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 3\chi(x) + \eta(x) \\ \eta'(x) &= -\chi(x) + \eta(x) + e^{2x} \cdot \sin x \end{aligned}$, $\chi(0) = \eta(0) = 1$

h) $\begin{aligned} \chi'(x) &= \chi(x) + 2\eta(x) + e^{x} \\ \eta'(x) &= 2\chi(x) + \eta(x) + 1 \end{aligned}$, $\chi(0) = \eta(0) = 1$

i) $\begin{aligned} \chi'(x) &= -7\chi(x) + \eta(x) \\ \eta'(x) &= -2\chi(x) - 5\eta(x) \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} \chi'(x) &= 3\chi(x) - 2\eta(x) \\ \eta'(x) &= 4\chi(x) - \eta(x)! \end{aligned}$

17^o Alkalmazzuk a fixpont-tételt az alábbi kezdetiérték-feladatok megoldására:

a) $\varphi'(x) = x\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 1;$

b) $\varphi'(x) = x + \varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 0;$

c) $\varphi' = \varphi^2\ ,\ \varphi(1) = 1!$

18^o Számítsuk ki a következő kezdetiérték-feladatok közelítő megoldásait a 0.1 helyen 10^{-2} pontossággal:

a) $\varphi'(x) = 3x + \varphi^2(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 1;$

b) $\varphi'(x) = x^2 - \varphi^2(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\ ,\ \varphi(0) = 0!$

2.3. Másodrendű differenciálegyenletek

Tegyük fel, hogy egy egyenes mentén mozgó m tömegű tömegpontra az alábbi erők hatnak:

a) *az egyenes valamely pontjához viszonyított elmozdulással arányos, az illető pontba mutató „visszatérítő” erő;*

b) *a pillanatnyi sebességgel arányos „fékező” erő;*

c) *az előbbiektől (de az időtől nem feltétlenül) független „külső” erő.*

Írjuk le a tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyzetét és az akkori sebességét!

Jelöljük az a)-beli elmozdulás-idő függvényt s-sel, az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. A b)-beli arányossági tényező legyen $0 \leq \beta \in \mathbf{R}$, a c)-beli erő pedig $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, s \in D^2$ és $s_0 := s(0)$, $s_0' := s'(0)$ adottak (a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, ill. sebesség). A Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az alábbi matematikai modell („egyenlet”) adódik:

$$ms''(t) = F(t) - \alpha s(t) - \beta s'(t) \qquad (t \in \mathbf{R}), \tag{7}$$

ahol tehát $s(0) = s_0$, $s'(0) = s_0'$. Vizsgáljuk először a (7) egyenletnek azt a speciális esetét, amikor $F \equiv 0$ (*homogén egyenlet*), azaz (ekvivalens módon mindjárt átalakítva)

$$s''(t) + \frac{\beta}{m}s'(t) + \frac{\alpha}{m}s(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{8}$$

Könnyen látható, hogy a (8) egyenlőségnek alkalmas q valós vagy (nem valós) komplex számmal a $\varphi(t) := e^{qt} \quad (t \in \mathbf{R})$ függvény eleget tesz. Ui. a $\varphi'(t) = qe^{qt}$, $\varphi''(t) = q^2e^{qt} \quad (t \in \mathbf{R})$ deriváltakat behelyettesítve (8)-ba azt kapjuk, hogy

$$\left(q^2 + \frac{\beta}{m}q + \frac{\alpha}{m}\right)e^{qt} = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{9}$$

A (9) egyenlőség (és így (8) is) pontosan akkor teljesül, ha a q szám eleget tesz a

$$q^2 + \frac{\beta}{m}q + \frac{\alpha}{m} = 0 \tag{10}$$

másodfokú egyenletnek. A (10) megoldásai a következők:

$$q_1 := \frac{-\beta/m + \sqrt{(\beta/m)^2 - 4\alpha/m}}{2} \ , \ q_2 := \frac{-\beta/m - \sqrt{(\beta/m)^2 - 4\alpha/m}}{2}.$$

Vegyük észre, hogyha $q := q_1 = q_2$, azaz, ha $(\beta/m)^2 = 4\alpha/m$, akkor a $\varphi(t) := te^{qt} \quad (t \in \mathbf{R})$ függvény is kielégíti (8)-at. Valóban, ekkor

$$\varphi'(t) = e^{qt} + qte^{qt} \ , \ \varphi''(t) = 2qe^{qt} + q^2te^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

miatt a most mondottak azzal ekvivalensek, hogy

$$2qe^{qt} + q^2te^{qt} + \frac{\beta}{m}\left(e^{qt} + qte^{qt}\right) + \frac{\alpha}{m}te^{qt} =$$

$$\left(\left(q^2 + \frac{\beta}{m}q + \frac{\alpha}{m}\right)t + 2q + \frac{\beta}{m}\right)e^{qt} = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel q megoldása (10)-nek, ezért $q^2 + \beta q/m + \alpha/m = 0$. Ugyanakkor a $(\beta/m)^2 = 4\alpha/m$ feltételezés miatt $q = -\beta/(2m)$, azaz $2q + \frac{\beta}{m} = 0$ is igaz.

Legyen tehát

$$\varphi_1(t) := \begin{cases} e^{q_1t} & (q_1 \neq q_2) \\ \\ e^{qt} & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \ , \ \varphi_2(t) := \begin{cases} e^{q_2t} & (q_1 \neq q_2) \\ \\ te^{qt} & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor a φ_1, φ_2 függvények eleget tesznek (8)-nak. Sőt, megmutatható, hogy ha az $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ (kétszer differenciálható) függvény a (8) homogén egyenletnek megoldása, akkor alkalmas $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ együtthatókkal

(11) $$s(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

és minden ilyen alakú függvény megoldása (8)-nak. Valóban, legyen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha/m & -\beta/m \end{pmatrix} \ , \ \psi(t) := (s(t), s'(t)) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor könnyen láthatóan $\psi'(t) = A\psi(t) \quad (t \in \mathbf{R})$. Tegyük fel először, hogy $q_1 \neq q_2$. Mivel q_1, q_2 egyúttal az A mátrix két (különböző) sajátértéke, ezért alkalmas $T \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mátrix segítségével A diagonális alakra transzformálható:

$$T^{-1}AT = \Lambda := \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Következésképpen a $\theta(t) := T^{-1}\psi(t) \quad (t \in \mathbf{R})$ jelöléssel

$$\theta'(t) = T^{-1}\psi'(t) = T^{-1}A\psi(t) = \Lambda T^{-1}\psi(t) = \Lambda\theta(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz (a θ vektorfüggvény koordináta-függvényeit rendre θ_1, θ_2-vel jelölve)

$$\theta_j'(t) = q_j\theta_j(t) \qquad (t \in \mathbf{R}, j = 1, 2).$$

A 2.2. pontban látottak alapján tehát alkalmas $\alpha_j \in \mathbf{C}$ együtthatókkal

$$\theta_j(t) = \alpha_j e^{q_j t} \qquad (t \in \mathbf{R}, j = 1, 2).$$

Legyenek a T mátrix első sorának az elemei rendre a, b, továbbá $c_1 := \alpha_1 a$, $c_2 := \alpha_2 b$, akkor a $\psi(t) = T\theta(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ (vektor-)egyenlőségből

$$s(t) = a\theta_1(t) + b\theta_2(t) = c_1 e^{q_1 t} + c_2 e^{q_2 t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha $q_1 = q_2\,(=: q)$, akkor a fenti A mátrix nem diagonalizálható ugyan, de a $T \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mátrix megválasztható úgy, hogy

$$T^{-1}AT = \Lambda := \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

A fenti jelöléseket megtartva ekkor

$$\theta_1'(t) = q\theta_1(t) + \theta_2(t) \ \ , \ \ \theta_2'(t) = q\theta_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ismét a 2.2. pontra hivatkozva ezért valamilyen $\mathbf{C} \ni \alpha$-val $\theta_2(t) = \alpha e^{qt}$ $(t \in \mathbf{R})$, így

$$\theta_1'(t) = q\theta_1(t) + \alpha e^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen (ld. 2.2.) valamilyen $\beta \in \mathbf{C}$ együtthatóval

$$\theta_1(t) = \beta e^{qt} + g(t)e^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a g differenciálható függvényre $g'(t)e^{qt} = \alpha e^{qt} \quad (t \in \mathbf{R})$. A $g(t) := \alpha t \quad (t \in \mathbf{R})$ választás ezért nyilván megfelelő, következésképpen

$$\theta_1(t) = \beta e^{qt} + \alpha t e^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Innen (az előbbiekhez hasonlóan) a $c_1 := a\beta + b\alpha$, $c_2 := a\alpha$ jelölésekkel

$$s(t) = a\theta_1(t) + b\theta_2(t) = c_1 e^{qt} + c_2 t e^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha a (10) ún. *karakterisztikus egyenletnek* egy darab (kétszeres) gyöke van (azaz $q := q_1 = q_2$), akkor $q = -\beta/(2m)$ valós szám. Ezért ekkor a

φ_1, φ_2 *alaprendszer* is egyváltozós valós függvényekből áll. Következésképpen a (8) homogén egyenlet összes valós értékű megoldását úgy kapjuk meg, hogy (11)-ben c_1, c_2 helyébe rendre a valós számokat írjuk. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $q_1 \neq q_2$ és $(\beta/m)^2 > 4\alpha$. Ha viszont $q_1 \neq q_2$, és $(\beta/m)^2 < 4\alpha$, akkor q_1, q_2 nem valós komplex számok. Nyilvánvaló, hogy a 2.3 feladat szempontjából csak a valós értékű s függvények jöhetnek szóba. Legyen ezért $q_1 = u + \imath v \quad (u, v \in \mathbf{R}, v \neq 0)$ a q_1 gyök kanonikus előállítása, ekkor $q_2 = u - \imath v$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\tilde{\varphi}_1(t) := e^{ut}\cos(vt) \;\; , \;\; \tilde{\varphi}_2(t) := e^{ut}\sin(vt) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

valós függvények eleget tesznek (8)-nak, ill. a (8) homogén egyenlet bármely $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ megoldása egyértelműen írható fel

$$s(t) = c_1\tilde{\varphi}_1(t) + c_2\tilde{\varphi}_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

alakban $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal (és minden ilyen alakú függvény megoldása (8)-nak). Speciálisan, ha $\beta = 0$ (a *csillapítás nélküli,* vagy más szóval a *harmonikus rezgés* esete), akkor $u = 0$, és $v = \sqrt{\alpha/m}$, ill.

$$s(t) = c_1\cos(vt) + c_2\sin(vt) = c\cdot\sin(vt + \delta) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(alkalmas $c \in \mathbf{R}$ *amplitúdóval* és $\delta \in \mathbf{R}$ *fázisszöggel*).

Tekintsük tehát a (8) homogén egyenlet fenti φ_1, φ_2 alaprendszerét, és tegyük fel, hogy az F függvény nem az azonosan nulla függvény (azaz (7) *inhomogén egyenlet*). Ekkor alkalmas g, h kétszer differenciálható függvényekkel az

$$S(t) := g(t)\varphi_1(t) + h(t)\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R}) \tag{12}$$

függvény eleget tesz a (7) inhomogén egyenletnek (az *állandók variálásának a módszere*). Ui. bármely $t \in \mathbf{R}$ helyen

$$S'(t) = g'(t)\varphi_1(t) + g(t)\varphi_1'(t) + h'(t)\varphi_2(t) + h(t)\varphi_2'(t),$$

$$S''(t) = g''(t)\varphi_1(t) + 2g'(t)\varphi_1'(t) + g(t)\varphi_1''(t) + h''(t)\varphi_2(t) + 2h'(t)\varphi_2'(t) + h(t)\varphi_2''(t),$$

amiből

$$S''(t) + \frac{\beta}{m}S'(t) + \frac{\alpha}{m}S(t) =$$

$$g(t)\left(\varphi_1''(t) + \frac{\beta}{m}\varphi_1'(t) + \frac{\alpha}{m}\varphi_1(t)\right) + h(t)\left(\varphi_2''(t) + \frac{\beta}{m}\varphi_2'(t) + \frac{\alpha}{m}\varphi_2(t)\right) +$$

$$+\frac{\beta}{m}\left[\varphi_1(t)g'(t)+\varphi_2(t)h'(t)\right]+\left[\varphi_1'(t)g'(t)+\varphi_2'(t)h'(t)\right]+$$
$$+\left[\varphi_1(t)g'(t)+\varphi_2(t)h'(t)\right]'=$$
$$\frac{\beta}{m}\left[\varphi_1(t)g'(t)+\varphi_2(t)h'(t)\right]+\left[\varphi_1'(t)g'(t)+\varphi_2'(t)h'(t)\right]+$$
$$+\left[\varphi_1(t)g'(t)+\varphi_2(t)h'(t)\right]'.$$

Így az

$$S''(t)+\frac{\beta}{m}S'(t)+\frac{\alpha}{m}S(t)=\frac{F(t)}{m}\qquad (t\in\mathbf{R})$$

egyenlőség teljesül, hacsak pl. a g, h függvények minden $\mathbf{R}\ni t$-re eleget tesznek a

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned}\varphi_1(t)g'(t)+\varphi_2(t)h'(t) &= 0\\ \varphi_1'(t)g'(t)+\varphi_2'(t)h'(t) &= \frac{F(t)}{m}\end{aligned}$$

egyenletrendszernek. Adott $t\in\mathbf{R}$ mellett a $g'(t), h'(t)$ „ismeretlenekre” vonatkozó (13) lineáris egyenletrendszer determinánsa a következő:

$$W(t):=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}$$

(a φ_1, φ_2 rendszer ún. *Wronski-determinánsa*). Továbbá $q_1\neq q_2$ esetén

$$W(t):=\begin{vmatrix}e^{q_1t} & e^{q_2t}\\ q_1e^{q_1t} & q_2e^{q_2t}\end{vmatrix}=e^{(q_1+q_2)t}(q_2-q_1)\neq 0,$$

ill., ha $q:=q_1=q_2$, akkor

$$W(t):=\begin{vmatrix}e^{qt} & te^{qt}\\ qe^{qt} & (1+qt)e^{qt}\end{vmatrix}=e^{2qt}\neq 0.$$

Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha φ_1, φ_2 helyébe a (valós értékű) $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ függvényeket írjuk:

$$W(t):=\begin{vmatrix}e^{ut}\cos(vt) & e^{ut}\sin(vt)\\ e^{ut}(u\cos(vt)-v\sin(vt)) & e^{ut}(u\sin(vt)+v\cos(vt))\end{vmatrix}=$$

$$e^{2ut}(v\cos^2(vt)+v\sin^2(vt)))=ve^{2ut}\neq 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy (13) minden $\mathbf{R} \ni t$-re egyértelműen megoldható, és (ld. Cramer-szabály)

$$g'(t) = \begin{cases} \dfrac{F(t)e^{-q_1 t}}{m(q_1 - q_2)} & (q_1 \neq q_2) \\ \\ -\dfrac{t\cdot F(t)e^{-qt}}{m} & (q := q_1 = q_2) \end{cases},$$

$$h'(t) = \begin{cases} \dfrac{F(t)e^{-q_2 t}}{m(q_2 - q_1)} & (q_1 \neq q_2) \\ \\ \dfrac{F(t)e^{-qt}}{m} & (q := q_1 = q_2), \end{cases}$$

ill. $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ esetén a valós értékű $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ alaprendszert használva

$$g'(t) = -\frac{e^{-ut}F(t)\sin(vt)}{mv} \quad , \quad h'(t) = \frac{e^{-ut}F(t)\cos(vt)}{mv}.$$

A $g', h' : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ deriváltfüggvények tehát folytonosak, ezért a szóban forgó g és h valóban létezik, pl. (ld. a primitív függvényekkel kapcsolatos Newton-Leibniz-tételt):

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(q_1 - q_2)} \displaystyle\int_0^t F(x)e^{-q_1 x}\,dx & (q_1 \neq q_2) \\ \\ -\dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^t x\cdot F(x)e^{-qx}\,dx & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(q_2 - q_1)} \displaystyle\int_0^t F(x)e^{-q_2 x}\,dx & (q_1 \neq q_2) \\ \\ \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^t F(x)e^{-qx}\,dx & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ill. $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ esetén

$$g(t) = -\frac{1}{mv} \int_0^t e^{-ux}F(x)\sin(vx)\,dx \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$h(t) = \frac{1}{mv} \int_0^t e^{-ux}F(x)\cos(vx)\,dx \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

(Megjegyezzük, hogyha $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, akkor az előbbi valós értékű g, h együttható-függvényekkel a (12)-beli S függvény is valós értékű lesz, ha φ_1, φ_2 helyett a $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ függvényeket írjuk.)

Legyen most már $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ a (7) inhomogén egyenlet valamely megoldása. Ekkor a (12)-beli S függvénnyel $s - S$ megoldása a (8) homogén egyenletnek:

$$(s-S)''(t) + \frac{\beta}{m}(s-S)'(t) + \frac{\alpha}{m}(s-S)(t) =$$

$$\left(s''(t) + \frac{\beta}{m}s'(t) + \frac{\alpha}{m}s)(t)\right) + \left(S''(t) + \frac{\beta}{m}S'(t) + \frac{\alpha}{m}S(t)\right) =$$

$$\frac{F(t)}{m} - \frac{F(t)}{m} = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Láttuk viszont, hogy alkalmas $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ együtthatókkal

$$(s-S)(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz (12) szerint a (7) inhomogén egyenlet *általános megoldása* a következő:

$$s(t) = (s-S)(t) + S(t) = (g(t)+c_1)\varphi_1(t) + (h(t)+c_2)\varphi_2(t) =$$

$$\begin{cases} (g(t)+c_1)e^{q_1 t} + (h(t)+c_2)e^{q_2 t} & (q_1 \neq q_2) \\ & \\ (g(t)+c_1)e^{qt} + (h(t)+c_2)te^{qt} & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ esetben a φ_1, φ_2 függvények helyett a $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ alaprendszert használva és c_1, c_2 helyébe valós számokat írva az általános valós értékű megoldásokhoz jutunk:

$$s(t) = (g(t)+c_1)e^{ut}\cos(vt) + (h(t)+c_2)e^{ut}\sin(vt) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az $s(0) = s_0, s'(0) = s'_0$ kezdeti feltételeknek megfelelő c_1, c_2 együtthatók kiszámítása $g(0) = h(0) = g'(0) + h'(0) = 0$ miatt $q_1 \neq q_2$ esetén a

$$\begin{array}{ll} c_1 + c_2 & = 0 \\ q_1c_1 + q_2c_2 & = s'_0 \end{array} \quad \text{vagy} \quad \begin{array}{ll} c_1 & = 0 \\ uc_1 + vc_2 & = s'_0 - g'(0), \end{array}$$

ha pedig $q := q_1 = q_2$, akkor a

$$\begin{array}{ll} c_1 & = s_0 \\ qc_1 + c_2 & = s'_0 - g'(0), \end{array}$$

egyenletrendszerből történhet.

2.3. Megjegyzések

i) A 2.3. feladat egy *másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet.* Legyenek ti. adottak az $a, b \in \mathbf{R}$ számok, az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum és a folytonos $f : I \to \mathbf{R}$ függvény. Adjunk meg olyan kétszer differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{C}$ függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, és

$$(*) \qquad \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot (gyakran csak $(*)$-ot) nevezzük másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletnek.

Megjegyezzük, hogy mindez speciális esete az általános másodrendű differenciálegyenleteknek. Legyen ehhez ti. $G \in \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és keressünk olyan $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in D^2$ függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, bármely $\mathcal{D}_\varphi \ni x$-re $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in \mathcal{D}_G$, és

$$G(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0.$$

Általában ennek a feladatnak a megoldása „reménytelen”, egyes esetekben azonban könnyűszerrel visszavezethetők már ismert („megoldóképlettel” bíró) egyenletekre. Ez a helyzet pl. akkor, ha az egyenlet *hiányos*: egy alkalmas $H \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ folytonos függvénnyel

$$G(x, y, z, v) = H(x, z, v) \qquad (y \in \mathbf{R}\,,\ (x, z, v) \in \mathcal{D}_H)$$

vagy

$$G(x, y, z, v) = H(y, z, v) \qquad (x \in \mathbf{R}\,,\ (y, z, v) \in \mathcal{D}_H).$$

Az első esetben a φ megoldásra

$$(1^o) \qquad H(x, \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

a második esetben

$$(2^o) \qquad H(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

teljesül.

Ha (1^o)-ben $\phi := \varphi'$, akkor

$$H(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\phi = \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz ϕ egy (implicit) elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása. A korábbi ismereteink alapján ezt sok esetben meg tudjuk oldani, amiből φ már könnyen meghatározható. Legyen pl.

$$H(x, z, v) := v + \frac{z}{x+1} \qquad ((x, z, v) \in (-1, +\infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}),$$

ekkor tehát

$$\varphi''(x) + \frac{\varphi'(x)}{x+1} = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x+1}\phi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\phi).$$

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, amelynek a megoldásai (ld. 2.2.):

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{x+1} \qquad (x \in (-1, +\infty)\,,\ \alpha \in \mathbf{R}).$$

A $\varphi'(x) = \dfrac{\alpha}{x+1}$ $\quad (x \in (-1, +\infty))$ egyenlőségből

$$\varphi(x) = \alpha \ln(x+1) + \beta \qquad (x \in (-1, +\infty)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

A (2^o) esetben tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$, ekkor φ invertálható, és $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, így $\psi' = \dfrac{\varphi'' \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$, azaz

$$\varphi'' \circ \varphi^{-1} = \psi' \varphi' \circ \varphi^{-1} = \psi' \psi.$$

A (2^o) egyenlőség az $x := \varphi^{-1}(t) \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}})$ helyettesítéssel tehát a következő:

$$(2^{oo}) \qquad H(t, \psi(t), \psi'(t)\psi(t)) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}),$$

ami ismét csak egy (implicit) elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. A ψ megoldás ismeretében a φ függvény a $\varphi' = \psi \circ \varphi$ elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenletből számítható ki. Tekintsük pl. a

$$H(y, z, v) := yv - 2z^2 + 2z \qquad ((y, z, v) \in \mathbf{R}^3)$$

függvényt, azaz, amikor

$$\varphi(x)\varphi''(x) = 2\left(\varphi'(x)\right)^2 - 2\varphi'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$ helyettesítéssel (feltételezve, hogy a (2^{oo})-höz vezető feltételek teljesülnek) (2^{oo}) a következő:

$$t\psi'(t)\psi(t) = 2\psi^2(t) - 2\psi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Tegyük fel, hogy $0 \notin \mathcal{R}_\psi$, ekkor az előbbi egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$t\psi'(t) = 2\psi(t) - 2 \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Innen egy alkalmas $\mathbf{R} \ni \alpha$-val $\psi(t) = 1 + \alpha^2 t^2 \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}})$, tehát φ-t a

$$\varphi'(x) = \psi(\varphi(x)) = 1 + \alpha^2\varphi^2(x) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletből határozhatjuk meg: $\varphi(x) = x + \gamma \quad (x, \gamma \in \mathbf{R})$, vagy

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}\,(\alpha x + \beta) \qquad \Big(\alpha \neq 0, \beta \in \mathbf{R}\,,\ \alpha x + \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\Big).$$

ii) A $P(t) := t^2 + at + b \quad (t \in \mathbf{C})$ másodfokú polinom az i)-beli $(*)$ egyenlet *karakterisztikus polinomja.* Minden, az i)-ben megfogalmazott feltételeknek eleget tevő φ függvényt a szóban forgó feladat (egyenlet) *megoldásának* nevezünk. A 2.3. feladat vizsgálata során lényegében a $(*)$ egyenlet $\varphi : I \to \mathbf{C}$ megoldásait (beleértve a valós $\varphi : I \to \mathbf{R}$ megoldásokat is) állítottuk elő.

iii) Legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \to \mathbf{C} : \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = f(t) \quad (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \to \mathbf{C} : \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = 0 \quad (t \in I)\}.$$

Ekkor $\mathcal{M}_h = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : c_1, c_2 \in \mathbf{C}\}$ és tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ (*partikuláris megoldás*) esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \varphi : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

A lineáris algebra nyelvén tehát $\mathcal{M}_h$ 2-dimenziós vektortér. Ha φ_1, φ_2 az $\mathcal{M}_h$ vektortér bázisa (*alaprendszer*), akkor

$$W(t) := \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) \qquad (t \in I)$$

az ún. *Wronski-determináns.* Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$W'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) =$$

$$\varphi_1(t)\left(-a\varphi_2'(t) - b\varphi_2(t)\right) - \varphi_2(t)\left(-a\varphi_1'(t) - b\varphi_1(t)\right) = -aW(t) \quad (t \in I).$$

A W függvény tehát eleget tesz egy homogén lineáris differenciálegyenletnek (ld. 2.2. ii) megjegyzés). Következésképpen (ld. 2.2. iii) megjegyzés) alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$W(t) = ce^{-at} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

iv) A kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete, amikor is a 2.3. feladatban (ld. (7)):

$$F(t) := A\sin(\omega t + \theta) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol $A > 0$ (*amplitudó*), $\omega > 0$ (*kényszerfrekvencia*) és $\theta \in [0, 2\pi)$. Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen $\beta := 0$. Ekkor (ld. a 2.2. feladat valós értékű megoldásainak az előállítását) egy (valós) alaprendszer az $\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$ (*sajátfrekvencia*) jelöléssel az

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \cos(\omega_0 t) \ , \ \mathbf{R} \ni t \mapsto \sin(\omega_0 t)$$

függvényrendszer. Egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

a) $\omega \neq \omega_0$ esetén pl. a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \theta),$$

b) $\omega = \omega_0$ (*rezonancia*) esetén pedig pl. a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto -\frac{q}{2\omega} t\cos(\omega t + \theta)$$

függvény ($q := A/m$). Az $\omega_0 \neq \omega$ feltétel mellett tehát

$$s(t) = \gamma\cos(\omega_0 t) + \delta\sin(\omega_0 t) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \theta) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a γ, δ együtthatókat az

$$s(0) = \gamma + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\theta = s_0 \ , \ s'(0) = \delta\omega_0 + \frac{q\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\theta = s_0'$$

egyenlőségekből kapjuk. Így az a) esetben

$$s(t) = \left(s_0 - \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\,\theta\right)\cos(\omega_0 t) +$$

$$+\frac{1}{\omega_0}\left(s_0' - \frac{q\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\,\theta\right)\sin(\omega_0 t) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \theta) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

A harmonikus rezgéshez hasonlóan alkalmas $r > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ segítségével most is felírhatjuk $s(t)$-t a következő alakban:

$$s(t) = r\sin(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \theta) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ami nem más, mint két harmonikus rezgés összege.

Ha $\omega_0 = \omega$, akkor

$$s(t) = \gamma\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t + \theta) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

és

$$s(0) = s_0 = \gamma \ , \ s'(0) = \delta\omega - \frac{q}{2\omega}\cos\,\theta = s_0'.$$

Tehát a b) esetben

$$s(t) = s_0\cos(\omega t) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{\omega}\left(s_0' + \frac{q}{2\omega}\cos\,\theta\right)\sin(\omega t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz megfelelően választott $r > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ paraméterekkel

$$s(t) = r\sin(\omega t + \theta_0) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t + \theta) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az ω sajátfrekvenciájú harmonikus rezgésre ekkor nem harmonikus rezgés, hanem a $t \mapsto -\frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t + \theta)$ aperiodikus mozgás szuperponálódik.

v) A fentiekben vizsgált másodrendű egyenletek speciális esetei a *magasabb rendű állandó együtthatós lineáris differenciáelgyenleteknek.* Nevezetesen, legyen $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, ..., n-1)$, $f : I \to \mathbf{R}$ pedig folytonos függvény. Olyan $\varphi \in I \to \mathbf{C}$ függvényt keresünk, amelyre

i) $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;

ii) $\varphi \in D^n$;

iii) $\varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot *n-edrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény, amely eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciáelgyenlet *megoldása.* A

$$P(t) := t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \qquad (t \in \mathbf{C})$$

polinom a szóban forgó egyenlet *karakterisztikus polinomja.*

Nem nehéz belátni, hogy a fenti feladat ekvivalens egy (állandó együtthatós) lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel a következő értelemben. Legyen ti. $i, k = 1, ..., n$ és

$$b_i := \begin{cases} 0 & (i = 1, ..., n-1) \\ \\ f & (i = n), \end{cases}$$

$$a_{ik} := \begin{cases} 0 & (i = 1, ..., n-1\, ,\ k \neq i+1) \\ \\ 1 & (i = 1, ..., n-1\, ;\ k = i+1) \\ \\ -a_{k-1} & (i = n\, ,\ k = 1, ..., n). \end{cases}$$

Tekintsük az

$$f(x, y) := A\cdot y + b(x) \qquad (x \in I,\ y \in \mathbf{C}^n)$$

függvény által meghatározott

$$(*) \qquad \psi'(x) = A\cdot \psi(x) + b(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert (ld. 2.2. xii) megjegyzés), ahol

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^n =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & -a_{n-4} & ... & -a_0 \end{bmatrix} : I \to \mathbf{R}^{n\times n},$$

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f \end{pmatrix} : I \to \mathbf{R}^n \,.$$

Ha tehát a

$$(**) \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix} \in I \to \mathbf{C}^n$$

függvény ez utóbbinak a megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ egy nyílt intervallum és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$\begin{cases} \psi_i'(x) = \psi_{i+1}(x) \quad (i = 1, ..., n-1) \\ \\ \psi_n'(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1}(x)\psi_k(x) + f(x). \end{cases}$$

Legyen valamely n-szer differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{C}$ függvény esetén

$$\Phi_\varphi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \in I \to \mathbf{C}^n.$$

Ha φ megoldása a fent definiált n-edrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletnek, akkor a $\psi := \Phi_\varphi$ függvény eleget tesz $(*)$-nak. Fordítva, ha a $(**)$-beli ψ megoldása $(*)$-nak, akkor $\varphi := \psi_1$ megoldása a szóban forgó n-edrendű differenciálegyenletnek (*átviteli elv*).

vi) Az v) megjegyzésben megfogalmazott feladatra utalva $n = 3$ esetén vázoljuk a

$$\varphi'''(t) + a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

homogén egyenlet megoldásait (ahol $a, b, c \in \mathbf{R}$). Az v)-beli karakterisztikus polinom most tehát az alábbi:

$$P(t) = t^3 + at^2 + bt + c \qquad (t \in \mathbf{C}).$$

Megmutatható, hogy alkalmas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvényekkel (*alaprendszer*) a homogén egyenlet $\mathbf{R}$-en értelmezett $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ megoldásai pontosan a következő alakú függvények:

$$(*) \qquad \varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C}, t \in \mathbf{R}).$$

A most említett alaprendszer a P polinom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökeitől függően pl. az alábbi lehet:

a) ha a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökök páronként különbözőek, akkor

$$\varphi_1(t) := e^{\lambda_1 t} \ , \ \varphi_2(t) := e^{\lambda_2 t} \ , \ \varphi_3(t) := e^{\lambda_3 t} \qquad (t \in \mathbf{R});$$

b) ha $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, akkor

$$\varphi_1(t) := e^{\lambda t} \ , \ \varphi_2(t) := te^{\lambda t} \ , \ \varphi_3(t) := e^{\lambda_3 t} \qquad (t \in \mathbf{R});$$

c) ha $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, akkor

$$\varphi_1(t) := e^{\lambda t} \ , \ \varphi_2(t) := te^{\lambda t} \ , \ \varphi_3(t) := t^2e^{\lambda t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Arról egyszerű számolással (behelyettesítéssel) meggyőződhetünk, hogy az a), b), c)-beli függvények a jelzett esetekben megoldásai a most vizsgált harmadrendű homogén egyenletnek. Ha pl. $\lambda \in \mathbf{C}$ és $\varphi(x) := e^{\lambda x}$ $(x \in \mathbf{R})$, akkor a φ függvény pontosan abban az esetben lesz a fenti homogén egyenletnek a megoldása, ha

$$\varphi'''(t) + a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot \Big(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c\Big) =$$

$$e^{\lambda t} \cdot P(\lambda) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz pontosan akkor, ha $P(\lambda) = 0$. Ha λ (legalább) kétszeres gyöke P-nek, akkor $P(\lambda) = 0$ és

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0.$$

Ebben az esetben a $\varphi(x) := xe^{\lambda x}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvényre

$$\varphi'''(t) + a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) =$$

$$e^{\lambda t}\cdot\left(\lambda^3 t + 3\lambda^2 + 2a\lambda + a\lambda^2 t + b + b\lambda t + ct\right) =$$

$$e^{\lambda t}\cdot\left(t\left(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + \left(3\lambda^2 + 2a\lambda + b\right)\right) =$$

$$e^{\lambda t}\cdot t\cdot P(\lambda) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

azaz φ megoldása a homogén egyenletnek. Ha λ háromszoros gyöke P-nek, akkor $P(\lambda) = 0$, és

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \;\;,\;\; P''(\lambda) = 6\lambda + 2a = 0,$$

ill. a $\varphi(x) := x^2 e^{\lambda x}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvényre

$$\varphi'''(t) + a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) =$$

$$e^{\lambda t}\cdot\left(6\lambda + 6t\lambda^2 + \lambda^3 t^2 + 2a + 4at\lambda + a\lambda^2 t^2 + 2bt + b\lambda t^2 + ct^2\right) =$$

$$e^{\lambda t}\cdot\left((6\lambda + 2a) + 2t(3\lambda^2 + 2a\lambda + b) + t^2\cdot P(\lambda)\right) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen φ megoldása a homogén egyenletnek.

vii) Tetszőleges $2 \le n \in \mathbf{N}$ esetén a következőket mondhatjuk. Tekintsük ehhez a (ld. v))

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \qquad (x \in \mathbf{C})$$

karakterisztikus polinomot és tegyük fel, hogy a P gyöktényezős előállítása a következő:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\nu_j} \qquad (x \in \mathbf{C})$$

(ahol $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{C}$ jelöli a P összes páronként különböző gyökét, $0 < \nu_j \in \mathbf{N}$ pedig a λ_j gyök multiplicitását $(j = 1, ..., k)$). Ekkor a

$$\varphi_{jl}(x) := x^l e^{\lambda_j x} \qquad (x \in I\ ,\ j = 1, ..., k\ ;\ l = 0, ..., \nu_j - 1)$$

függvények lineárisan független megoldásai a

$$\varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

homogén egyenletnek, és ez utóbbinak a $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ megoldásai pontosan a φ_{jl}-ek lineáris kombinációi. Arról, hogy a most említett lineáris kombinációk megoldásai a homogén egyenletnek, az $n = 3$ esethez hasonlóan egyszerű behelyettesítéssel győződhetünk meg. Ehhez ui. nyilván elegendő azt belátni, hogy valamennyi φ_{jl} megoldás: legyen

$$\Delta_{ki} := \begin{cases} 1 & (i \leq k) \\ \\ 0 & (i > k) \end{cases} \qquad (i \in \mathbf{N}),$$

ekkor

$$\varphi_{jl}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{l} \Delta_{ki} \binom{k}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i}\lambda_j^{k-i}e^{\lambda_j x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\varphi_{jl}^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{jl}^{(k)}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A fenti egyenlőség bal oldala a $\varphi_{jl}^{(k)}(x)$ deriváltakra kiszámított formula alapján a következő:

$$e^{\lambda_j x}\left(\sum_{i=0}^{l}\binom{n}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i}\lambda_j^{n-i} + \right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=0}^{l} \Delta_{ki}\binom{k}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i}\lambda_j^{k-i}\right) =$$

$$e^{\lambda_j x}\left(\sum_{i=0}^{l} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i}\left(\binom{n}{i}\lambda_j^{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} a_k \binom{k}{i}\lambda_j^{k-i}\right)\right) =$$

$$e^{\lambda_j x}\left(\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}x^{l-i}\left(n(n-1)...(n-i+1)\lambda_j^{n-i} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=i}^{n-1} a_k k(k-1)...(k-i+1)\lambda_j^{k-i}\right)\right) =$$

$$e^{\lambda_j x}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}x^{l-i}P^{(i)}(\lambda_j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $l \leq \nu_j - 1$ és λ_j a P-nek ν_j-szeres gyöke, ezért bármely $i = 0, ..., l$ esetén $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$, amiből az állításunk már következik.

viii) A valós értékű megoldásokról vi)-ban a következőket mondhatjuk: ha $n = 3$, akkor a P harmadfokú polinom valós együtthatós volta miatt vagy minden gyöke valós szám (ekkor a vi)-beli $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ függvények nyilván valós értékűek) vagy (pl.) $\lambda_3 \in \mathbf{R}$ és $\lambda_1 = u + \imath v$, $\lambda_2 = u - \imath v$ (ahol $u, v \in \mathbf{R}, v \neq 0$), ami természetesen a vi)-beli a) esetben valósulhat csak meg. Ekkor az ott szereplő alaprendszer helyettesíthető az alábbival:

$$\varphi_1(t) := e^{ut}\cos(vt) \ , \ \varphi_2(t) := e^{ut}\sin(vt) \ , \ \varphi_3(t) := e^{\lambda_3 t} \qquad (t \in I).$$

Ha már most $(*)$-ban c_1, c_2, c_3 helyébe rendre a valós számokat írjuk, akkor a homogén egyenlet (valamennyi) valós értékű megoldását megkapjuk.

Tetszőleges $2 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén (is) vegyük figyelembe, hogy - a karakterisztikus polinom minden együtthatója valós szám lévén - az esetleges $\lambda_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ gyökökkel együtt $\overline{\lambda}_j$ is (ugyanannyiszoros) gyöke P-nek. Tegyük fel ezért, hogy valamely $s \in \mathbf{N}$, $s \leq k/2$ mellett

$$\lambda_1, \overline{\lambda}_1, ..., \lambda_s, \overline{\lambda}_s \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \ , \ \lambda_{2s+1}, ..., \lambda_k \in \mathbf{R},$$

és tekintsük (a vi)-ban definiált φ_{jl}-ek segítségével) a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\varphi_{jl} \ , \ \operatorname{Im}\varphi_{jl} \quad (j = 1, ..., s \ ; \ l = 0, ..., \nu_j - 1), \\ \\ \varphi_{mr} \qquad (m = 2s+1, ..., k \ ; \ r = 0, ..., \nu_m - 1) \end{cases}$$

függvényeket. Ez a függvényrendszer valós értékű (és továbbra is lineárisan független) függvényekből áll, és a homogén egyenletnek a $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ megoldásai pontosan ezek valós együtthatós lineáris kombinációi. Jegyezzük meg, hogyha $\alpha_j := \operatorname{Re}\lambda_j$, $\beta_j := \operatorname{Im}\lambda_j$, akkor

$$\operatorname{Re}\varphi_{jl}(x) = x^l e^{\alpha_j x} \cdot \cos(\beta_j x) \ , \ \operatorname{Im}\varphi_{jl}(x) = x^l e^{\alpha_j x} \cdot \sin(\beta_j x)$$

$(x \in I \ , \ j = 1, ..., s \ ; \ l = 0, ..., \nu_j - 1))$.

ix) Ha v)-ben $n = 3$, és az f függvény nem az azonosan nulla függvény, akkor a

$$(**) \qquad \varphi'''(t) + a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

inhomogén differenciálegyenlet bármely $\psi : I \to \mathbf{C}$ megoldását (*partikuláris megoldás*) véve a $(**)$ egyenlet $\varphi : I \to \mathbf{C}$ megoldásai pontosan a következő függvények:

$$\varphi(t) = \psi(t) + \Phi(t) \qquad (t \in I),$$

ahol $\Phi : I \to \mathbf{C}$ helyébe rendre a fenti vi)-beli homogén egyenlet megoldásai írhatók. Egy ilyen ψ függvényt pl. az *állandók variálásával* állíthatunk elő:

$$\psi(t) = g(t)\varphi_1(t) + h(t)\varphi_2(t) + l(t)\varphi_3(t) \qquad (t \in I).$$

A (háromszor differenciálható) $g, h, l : I \to \mathbf{C}$ függvényeknek a deriváltjai a $t \in I$ pontokban a

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t) + \varphi_3(t)l'(t) & = & 0 \\ \varphi_1'(t)g'(t) + \varphi_2'(t)h'(t) + \varphi_3'(t)l'(t) & = & 0 \\ \varphi_1''(t)g'(t) + \varphi_2''(t)h'(t) + \varphi_3''(t)l'(t) & = & f(t) \end{array}$$

egyenletrendszerből számíthatók ki. (Utána pedig integrálással kaphatók meg ilyen $g, h, l : I \to \mathbf{C}$ függvények.)

Ugyanez mondható el $n = 4, 5, 6, \ldots$ esetén is: ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, akkor alkalmas

$$g_1, \ldots, g_n : I \to \mathbf{C}$$

differenciálható függvényekkel

$$\psi := \sum_{j=1}^{n} g_j \varphi_j$$

(partikuláris) megoldása a

$$\varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

inhomogén egyenletnek. Az utóbbi (I-n értelmezett) megoldásai pontosan azok a függvények, amelyek $\psi + \Phi$ alakúak, ahol Φ (tetszőleges) megoldása a homogén egyenletnek. Az itt szereplő g_j-ket, ill. a deriváltjaikat a $t \in I$ pontokban a

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(t)g_1'(t) & + & \varphi_2(t)g_2'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n(t)g_n'(t) = 0 \\ \varphi_1'(t)g_1'(t) & + & \varphi_2'(t)g_2'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n'(t)g_n'(t) = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t)g_1'(t) & + & \varphi_2^{(n-2)}(t)g_2'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-2)}(t)g_n'(t) = 0 \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)g_1'(t) & + & \varphi_2^{(n-1)}(t)g_2'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)}(t)g_n'(t) = f(t) \end{array}$$

egyenletrendszerből határozhatjuk meg. Ennek a megoldása sok esetben fáradságos művelet, ami gyakran „elkerülhető”. Előre megmondható ui., hogy bizonyos típusú f függvények esetén milyen alakú partikuláris megoldás létezése garantálható. Az egyik ilyen, a gyakorlat számára is fontos függvénytípus az ún. *kvázipolinom.* Ez utóbbin az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto Q(x) \cdot e^{\lambda x}$$

alakú függvényt értjük, ahol $\lambda \in \mathbf{C}$, Q pedig polinom. Ha $m \in \mathbf{N}$ az itt szereplő Q fokszáma, λ pedig $j\,(\in \mathbf{N})$-szeres gyöke a P karakterisztikus polinomnak (a $j = 0$ eseten azt értve, hogy λ nem gyöke P-nek), akkor f-nek ezt a kvázipolinomot választva van olyan, legfeljebb m-edfokú R polinom, hogy az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x^j \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x}$$

függvény partikuláris megoldás. Vegyük észre, hogy minden polinom egyúttal kvázipolinom is $(\lambda = 0)$. Érdemes megjegyezni, hogyha $\lambda = 0$ és ugyanakkor $P(0) \neq 0$, akkor $j = 0$, azaz van polinom megoldása a szóban forgó differenciálegyenletnek. Ennek a fokszáma legfeljebb annyi, mint a Q-é. Világos továbbá, hogy ha az f függvény kvázipolinomok összege: $f = \sum_{j=0}^{s} P_j$ (ahol $s \in \mathbf{N}$, a $P_0, ..., P_s$ függvények pedig kvázipolinomok), akkor van olyan partikuláris megoldás, amely ugyancsak kvázipolinomok összege. Nevezetesen, legyen ψ_j $(j = 0, ..., s)$ az a kvázipolinom, amely partikuláris megoldása a

$$\varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(t) = f_j(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyenletnek. Ekkor $\psi := \sum_{j=0}^{s} \psi_j$ partikuláris megoldása a

$$\varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

feladatnak, hiszen

$$\psi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{s} \psi_j^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=0}^{s} \psi_j^{(k)}(t) =$$

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\psi_j^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_j^{(k)}(t) \right) = \sum_{j=0}^{s} f_j(t) = f(t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

x) Tekintsük pl. azt az inhomogén másodrendű egyenletet, amelyre

$$a_1 := -3\,,\ a_0 := 2\,,\ f(x) := x^2\cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A keresett $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \varphi \in D^2$ függvényre tehát az alábbi egyenlőségnek kell fennállnia:

$$\varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = x^2\cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Most

$$Q(x) := x^2 \quad (x \in \mathbf{R})\ ,\ \lambda := 1.$$

A P karakterisztikus polinom:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amelynek a λ egyeres gyöke. Így $j = 1$, és alkalmas $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$R(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A keresett ψ kvázipolinom partikuláris megoldás ezért a következő:

$$\psi(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$\psi'(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)e^x + x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x,$$

$$\psi''(x) =$$

$$(6\alpha x + 2\beta)e^x + 2(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)e^x + x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért a

$$\psi''(x) - 3\psi'(x) + 2\psi(x) =$$

$$(\,-3\alpha x^2 + (6\alpha - 2\beta)x + 2\beta - \gamma)e^x = x^2 e^x \quad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőségből

$$-3\alpha = 1\ ,\ 6\alpha - 2\beta = 0\ ,\ 2\beta - \gamma = 0$$

következik. Innen $\alpha = -1/3, \beta = -1, \gamma = -2$, a ψ partikuláris megoldás pedig:

$$\psi(x) = -\frac{x}{3}(x^2 + 3x + 6)e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A (valós értékű) φ megoldások tehát:

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{x}{3}(x^2 + 3x + 6)e^x \qquad (x \in \mathbf{R}\,,\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}).$$

xi) Tegyük fel, hogy az v)-ben megfogalmazott

$$\varphi^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi^{(k)}(t)=f(t)\qquad (t\in\mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletben valamilyen valós együtthatós m-edfokú Q polinommal ($m\in\mathbf{N}$) és a $\delta,\,\varepsilon\in\mathbf{R}$ paraméterekkel

$$f(x):=e^{\delta x}Q(x)\sin(\varepsilon x)\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Ekkor tetszőleges $\mathbf{R}\ni x$-re

$$f(x)=Q(x)e^{\delta x}\frac{e^{i\varepsilon x}-e^{-i\varepsilon x}}{2\imath}=\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}-\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta-\imath\varepsilon)x},$$

tehát f nem más, mint két kvázipolinom összege. Tudjuk (ld. ix)), hogyha $\delta+\imath\varepsilon$ a P polinom $\jmath$-szeres gyöke ($j\in\mathbf{N}$), akkor egy alkalmas, legfeljebb m-edfokú R polinommal a

$$\varphi(x):=x^jR(x)e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}\qquad (x\in\mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\varphi^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi^{(k)}(x)=\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Mivel

$$\overline{\varphi^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi^{(k)}(x)}=$$

$$\overline{\varphi}^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\overline{\varphi}^{(k)}(x)=\overline{\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}}=-\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta-\imath\varepsilon)x}\qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ezért (összeadva az utóbbi két egyenlőséget)

$$(\varphi+\overline{\varphi})^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(\varphi+\overline{\varphi})^{(k)}(x)=$$

$$\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}-\frac{1}{2\imath}Q(x)e^{(\delta-\imath\varepsilon)x}=f(x)\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

A $\psi:=\varphi+\overline{\varphi}$ függvény tehát (partikuláris) megoldás. Erről a ψ függvényről nem nehéz megmutatni, hogy valamilyen, legfeljebb m-edfokú, valós együtthatós $R_1,\,R_2$ polinomokkal

$$\psi(x)=x^j\cdot e^{\delta x}(R_1(x)\cos(\varepsilon x)+R_2(x)\sin(\varepsilon x))\qquad (x\in\mathbf{R})$$

alakú. Valóban,

$$\psi(x) = x^j R(x) e^{\delta x} e^{\imath\varepsilon x} + x^j \overline{R(x)} e^{\delta x} e^{-\imath\varepsilon x} =$$

$$x^j e^{\delta x} \Big(R(x)\cos(\varepsilon x) + \imath R(x)\sin(\varepsilon x) + \overline{R(x)}\cos(\varepsilon x) - \imath\overline{R(x)}\sin(\varepsilon x) \Big) =$$

$$x^j e^{\delta x} \Big((R(x) + \overline{R(x)})\cos(\varepsilon x) + \imath(\overline{R(x)} - \overline{R(x)})\sin(\varepsilon x) \Big) =$$

$$x^j e^{\delta x} \Big(2\,\mathrm{Re}\,(R(x))\cos(\varepsilon x) - 2\,\mathrm{Im}\,(R(x))\sin(\varepsilon x) \Big).$$

Ha

$$R_1(x) := 2\,\mathrm{Re}\,(R(x)) \;\;,\;\; R_2(x) := -2\,\mathrm{Im}\,(R(x)) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor R_1 és R_2 nyilván legfeljebb m-edfokú, valós együtthatós polinom.

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha az f definíciójában a sin függvény helyett cos-t írunk. Emlékeztetünk pl. (ld. (7), ill. iv)) a rezgések közül a

$$\varphi''(t) + \omega_0^2 \cdot \varphi(t) = q\sin(\omega t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyenlettel modellezett csillapítatlan kényszerrezgés esetére. Ekkor $\varepsilon := \omega\,(>0)$ (*kényszerfrekvencia*), $\delta := 0$, $Q(x) := q\,(>0)$ $(x \in \mathbf{R})$, a karakterisztikus polinom pedig (az $\omega_0\,(>0)$ *sajátfrekvenciával*)

$$P(x) := x^2 + \omega_0^2 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az $\omega \neq \omega_0$ eset azt jelenti, hogy $\delta + \imath\varepsilon = \imath\omega$ nem gyöke P-nek, azaz $j = 0$. Így van

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$$

$(c_1,\, c_2 \in \mathbf{R})$ alakú (partikuláris) megoldás. Ha viszont $\omega = \omega_0$, akkor $\imath\omega$ egyszeres gyöke P-nek $(j = 1)$, ezért alkalmas $c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x(c_3\cos(\omega x) + c_4\sin(\omega x))$$

(partikuláris) megoldás.

xii) Az eddigiekben közönséges differenciálegyenletekre nyert eredmények esetenként sikerrel alkalmazhatók parciális differenciálegyenletek megoldása során is. Első példaként tekintsük a 2.2. xvii) megjegyzésben említett, a rezgő húr mozgását modellező, a $q > 0$ paraméterrel megadott

$$\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u$$

egyenletet. Emlékeztetünk arra, hogy itt (valamilyen, a húr hosszát megadó) pozitív l szám mellett a keresett

$$u : [0, l] \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható, amelyre az alábbi perem- és kezdeti-feltételek teljesülnek:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \in \mathbf{R}) \ , \ u(x, 0) = f(x),$$

$$\partial_2 u(x, 0) = g(x) \qquad (x \in [0, l])$$

(adott $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekkel). Euler, Lagrange, D'Alembert, D. Bernoulli és Fourier munkássága nyomán kristályosodott ki (a más problémákra is alkalmazható) alábbi módszer. Ennek az alapötlete a következő: keressük az u megoldást

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t) \qquad (x \in [0, l], t \in [0, +\infty))$$

alakban, ahol $F, G \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható (alkalmas) függvények. Ekkor

$$\partial_{22}u(x, t) = G''(t)F(x),$$

$$\partial_{11}u(x, t) = F''(x)G(t) \qquad (x \in [0, l], t \in [0, +\infty)),$$

azaz a $\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u$ egyenlőség miatt teljesülnie kell a

$$G''(t)F(x) = q \cdot F''(x)G(t) \qquad (x \in [0, l], t \in [0, +\infty))$$

egyenlőségnek. Világos, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$G''(t) = \lambda G(t) \quad (t \in [0, +\infty)) \ , \ F''(x) = \frac{\lambda}{q} F(x) \quad (x \in [0, l]).$$

Mindez nem más, mint (két) homogén lineáris, állandó együtthatós, másodrendű differenciálegyenlet.

Ha itt $\lambda = 0$, akkor valamilyen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$G(t) = c_1 + c_2 t \quad (t \in \mathbf{R}) \ , \ F(x) = c_3 + c_4 x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$u(x,t) = (c_1 + c_2 t)(c_3 + c_4 x) \quad (x \in [0,l], t \geq 0).$$

Mivel $u(0,t) = c_3(c_1 + c_2 t) = 0 \quad (t \geq 0)$, ezért $c_3 = 0$, vagy $c_1 + c_2 t = 0 \quad (t \geq 0)$, azaz $c_1 = c_2 = 0$. Az utóbbi esetben $u \equiv 0$. Ha $|c_1| + |c_2| > 0$, akkor tehát $c_3 = 0$ és

$$u(l,t) = c_4 l (c_1 + c_2 t) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

amiből $c_4 = 0$ következik. Így ismét csak $u \equiv 0$.

Tegyük most fel, hogy $\lambda > 0$. Ekkor a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásáról mondottak alapján

$$G(t) = \alpha e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-t\sqrt{\lambda}} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$F(x) = \gamma e^{x\sqrt{\lambda/q}} + \delta e^{-x\sqrt{\lambda/q}} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ alkalmas együtthatók). Ismét figyelembe véve a peremfeltételeket

$$u(0,t) = (\gamma + \delta)\left(\alpha e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

ezért $\alpha e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-t\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (t \geq 0)$, vagy $\gamma + \delta = 0$. Az első eset (könnyen beláthatóan) csak az $\alpha = \beta = 0$ együtthatókkal állhat fenn, ekkor $u \equiv 0$. Ha tehát $|\alpha| + |\beta| > 0$, akkor $\gamma + \delta = 0$. Továbbá

$$u(l,t) = \left(\gamma e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta e^{-l\sqrt{\lambda/q}}\right)\left(\alpha e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

amiből

$$\gamma e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = \gamma\left(e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}}\right) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy vagy $\gamma = 0$, azaz egyúttal $\delta = 0$, vagy

$$e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség azt jelentené, hogy $e^{2l\sqrt{\lambda/q}} = 1$, ami csak $\lambda = 0$ esetén állhatna fenn. Mivel most $\lambda > 0$, ezért $\gamma = \delta = 0$, más szóval ismét $u \equiv 0$.

Vizsgáljuk végül a $\lambda < 0$ esetet. A másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek valós megoldásaira vonatkozó ismereteink szerint

$$G(t) = a\cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b\sin(t\sqrt{|\lambda|}) \qquad (t \geq 0),$$

$$F(x) = c\cos(x\sqrt{|\lambda|/q}) + d\sin(x\sqrt{|\lambda|/q}) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ együtthatókkal). Az

$$u(0,t) = c\Big(a\cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b\sin(t\sqrt{|\lambda|})\Big) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

feltételből az előbbiekkel analóg módon kapjuk az $a = b = 0$ egyenlőséget, amikor is $u \equiv 0$, vagy $|a| + |b| > 0$ és $c = 0$, következésképpen

$$u(l,t) = d\sin(l\sqrt{|\lambda|/q})\Big(a\cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b\sin(t\sqrt{|\lambda|})\Big) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Innen vagy $d = 0$, azaz ismét $u \equiv 0$ következik, vagy

$$\sin(l\sqrt{|\lambda|/q}) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség viszont azzal ekvivalens, hogy valamilyen pozitív $n \in \mathbf{N}$ számmal

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{\sqrt{q}\pi}{l}n.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $a_n, b_n, d_n \in \mathbf{R}$ paraméterekkel az

$$u_n(x,t) :=$$
$$d_n\sin(\pi nx/l)\Big(a_n\cos(\pi\sqrt{q}nt/l) + b_n\sin(\pi\sqrt{q}nt/l)\Big) \quad (x \in [0,l], t \geq 0)$$

függvények megoldások. A részletek mellőzésével jegyezzük meg, hogy alkalmas feltételek mellett az

$$u(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (x \in [0,l], t \geq 0)$$

összegfüggvény létezik, szintén megoldás, és a kezdeti feltételek a következő alakúak:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n \sin(\pi nx/l) = f(x) \qquad (x \in [0,l]),$$

$$\partial_2 u(x,0) = \frac{\pi\sqrt{q}}{l}\sum_{n=0}^{\infty} b_n d_n n\sin(\pi nx/l) = g(x) \qquad (x \in [0,l]).$$

(Ezek az egyenlőségek tehát az f, ill. a g függvény Fourier-sorba (speciálisan szinusz-sorba-)fejtését jelentik.)

xiii) Hasonlóan kezelhető az ún. *Dirichlet-probléma* is: keressük meg mindazokat a kétszer differenciálható $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre

$$\partial_{11} f(x,y) + \partial_{22} f(x,y) = 0 \qquad ((x,y) \in K_1(0,0))$$

(azaz az origó középpontú nyílt egységkörlemezen az f kielégíti a (síkbeli) *Laplace-egyenletet*), és tetszőleges $\phi \in [0, 2\pi]$ esetén létezik a

$$\lim_{r \to 1-0} f(r\cos\phi, r\sin\phi) = G(\phi)$$

(bal oldali) határérték, ahol $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott 2π-szerint periodikus függvény. Legyen

$$F(r,\phi) := f(r\cos\phi, r\sin\phi) \qquad (0 \le r < 1, 0 \le \phi < 2\pi),$$

ekkor könnyen láthatóan (a $* := r\cos\phi, r\sin\phi$ rövidítéssel)

$$\partial_r F(r,\phi) = \partial_1 f(*)\cos\phi + \partial_2 f(*)\sin\phi,$$

$$\partial_{rr} F(r,\phi) = \partial_{11} f(*)\cos^2\phi + \partial_{12} f(*)\sin(2\phi) + \partial_{22} f(*)\sin^2\phi,$$

$$\partial_\phi F(r,\phi) = -\partial_1 f(*) r\sin\phi + \partial_2 f(*) r\cos\phi,$$

$$\partial_{\phi\phi} F(r,\phi) = -\partial_1 f(*) r\cos\phi - \partial_2 f(*) r\sin\phi + \partial_{11} f(*) r^2\sin^2\phi -$$

$$-\partial_{12} f(*) r^2 \sin(2\phi) + \partial_{22} f(*) r^2\cos^2\phi.$$

A most kapott azonosságokból (és az f-re vonatkozó

$$\partial_{11} f(*) + \partial_{22} f(*) = 0$$

Laplace-egyenletből) adódik, hogy bármely $0 < r < 1$ esetén

$$\partial_{rr} F(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi} F(r,\phi) =$$

$$-\frac{1}{r}\left(\partial_1 f(*)\cos\phi + \partial_2 f(*)\sin\phi\right) = -\frac{1}{r}\partial_r F(r,\phi),$$

azaz (a Laplace-egyenlet „polárkoordinátás alakja”)

$$\partial_{rr}F(r,\phi)+\frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}F(r,\phi)+\frac{1}{r}\partial_r F(r,\phi)=0 \quad (0<r<1, 0\le\phi<2\pi).$$

Világos, hogy

$$F(r,\phi{+}2\pi)=F(r,\phi)\ ,\ \lim_{r\to 1-0}F(r,\phi)=G(\phi) \quad (0<r<1, 0\le\phi<2\pi).$$

Keressük az F függvényt

$$F(r,\phi)=R(r)H(\phi) \qquad (0\le r<1, 0\le\phi\le 2\pi)$$

alakban (alkalmas kétszer differenciálható $R,H\in\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényekkel, ahol H periodikus 2π-szerint). Ekkor

$$R''(r)H(\phi)+\frac{1}{r^2}R(r)H''(\phi)+\frac{1}{r}R'(r)H(\phi)=0 \quad (0<r<1, 0\le\phi<2\pi),$$

azaz

$$H(\phi)\left(r^2R''(r)+rR'(r)\right)=-R(r)H''(\phi) \qquad (0<r<1, 0\le\phi<2\pi).$$

Innen (az $R(r)\ne 0, H(\phi)\ne 0$ feltétel mellett)

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2R''(r)+rR'(r)\right)=-\frac{1}{H(\phi)}H''(\phi)$$

adódik. Más szóval alkalmas $c\in\mathbf{R}$ állandóval

$$H''(\phi)+cH(\phi)=0 \qquad (0\le\phi<2\pi)$$

és

$$r^2R''(r)+rR'(r)-cR(r)=0 \qquad (0<r<1).$$

Az első egyenletből a xii)-beli F meghatározásával analóg módon (a H függvény periodikusságát is szem előtt tartva) $c=n^2 \quad (n\in\mathbf{Z})$, ill. valamilyen $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ együtthatókkal

$$H(\phi)=\alpha\cos(n\phi)+\beta\sin(n\phi) \qquad (0\le\phi<2\pi)$$

következik. Az R-re vonatkozó (ún. *Euler-típusú*) egyenlet megoldásához tekintsük a

$$g(x):=R(e^x) \qquad (x<0)$$

függvényt. Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy

$$g''(x) - n^2 g(x) = 0 \qquad (x < 0).$$

„Látszik”, hogy itt $n = 0$ nem lehet, különben $g(x) = a + bx \quad (x < 0)$ alakú alkalmas $a, b \in \mathbf{R}$ együtthatókkal. Így

$$R(r) = g(\ln r) = a + b \ln r \qquad (0 < r < 1)$$

lenne, ami nem lehet, hiszen ez a R függvény nem lenne folytonos a 0-ban. Tehát $n \neq 0$ és (a g-t meghatározó másodrendű differenciálegyenlet „megoldóképlete” szerint) $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$g(x) = \gamma e^{nx} + \delta e^{-nx} \qquad (x < 0).$$

Következésképpen

$$R(r) = g(\ln r) = \gamma r^n + \delta r^{-n} \qquad (0 < r < 1).$$

Az R függvény 0-beli folytonossága miatt itt csak $\delta = 0$ jöhet szóba, tehát

$$R(r) = \gamma r^n \qquad (0 < r < 1).$$

Azt kaptuk, hogy

$$F(r, \phi) = \gamma r^n (\alpha \cos(n\phi) + \beta \sin(n\phi)) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \phi < 2\pi),$$

ill. alkalmas feltételek mellett $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal

$$F(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \sin(n\phi)) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \phi < 2\pi).$$

A $\lim_{r \to 1-0} F(r, \phi) = G(\phi)$ feltétel azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \sin(n\phi))$$

(véges) határérték, ami a $\sum (\alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \sin(n\phi))$ végtelen sor ún. *Abel-Poisson-féle összegzését* jelenti.

xiv) Johann Bernoulli vetette fel 1696-ban az azóta (is) *brachisztrochron-problémának* nevezett feladatot (*problema novum, ad cuins solutionem matematici invitantur* - íme egy új feladat, amelynek a megoldásához meghívom a matematikusokat). (A görög nyelvű elnevezést a legrövidebb idejű pálya meghatározásaként magyaríthatnánk.) A később *variációszámítás* címszó alatt meghatározott matematikai diszciplína kifejlődését (amely aztán Euler és Lagrange nevéhez fűződik) elindító feladat a következőképpen fogalmazható meg: adott két (különböző magasságban, de nem egy függőleges egyenesen lévő) pont. Tekintsük az összes olyan, a két pontot összekötő és a két pont által meghatározott függőleges síkban lévő görbéket, amelyeken a magasabban fekvő pontból valamilyen kezdősebességgel elindított (tömeg)pont eljut az alacsonyabban fekvő pontba. A kérdés most már az, hogy létezik-e az említett görbék között olyan, amelyet a csupán a nehézségi erőnek alávetett pont (a többi görbéhez képest) a legrövidebb idő alatt fut be? Ha a kérdésre a válasz „igen”, akkor hogyan lehet ezt a minimális idejű görbét meghatározni?

Legyen ehhez a két pont által meghatározott síkban felvett („lefelé” irányított) derékszögű koordináta-rendszerben az egyik pont az origó, a másik pedig (valamilyen $\alpha > 0, \beta > 0$ mellett) (α, β). Az egyszerűség kedvéért csupán olyan görbéket fogunk figyelembe venni, amelyek mindegyike valamely folytonosan differenciálható $y : [0, \alpha] \to [0, +\infty)$ függvény grafikonjaként állítható elő. Világos, hogy a szóba jövő y függvényekre teljesülni kell az

$$y(0) = 0 \ , \ y(\alpha) = \beta$$

ún. *peremfeltételnek.* Fizikai megfontolásokból azt kapjuk, hogy az előbbi y függvény által meghatározott görbe befutásához szükséges $\mathcal{T}(y)$ idő a következő:

$$\mathcal{T}(y) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x) + \gamma}}\, dx,$$

ahol q a nehézségi gyorsulás, $\gamma := v^2/q$, $v\,(> 0)$ a kezdősebesség.

xv) Hasonló jellegű a *legkisebb felszínű forgásfelület* meghatározása. Tekintsünk ui. valamely síkban egy ℓ egyenest és az általa meghatározott két félsík közül az egyikben két pontot: P-t és Q-t úgy, hogy a rajtuk átmenő egyenes ne legyen merőleges ℓ-re. A P, Q pontokat kössük össze sima görbékkel, majd utóbbiakat forgassuk meg az ℓ egyenes körül. Van-e a görbék között olyan, amelyre az ℓ körüli megforgatással előálló forgástest felszíne minimális? Ha van ilyen görbe, akkor hogyan lehet azt meghatározni?

A feladat matematikai modelljéhez legyen az említett síkban egy derékszögű koordinátarendszer olyan, hogy az X-tengelye az ℓ egyenes, $P=(0,\alpha)$, $Q=(\beta,\gamma)$, ahol $\beta>0$, $\alpha,\gamma\geq 0$. Csak olyan görbéket veszünk figyelembe, amelyek mindegyike valamely kétszer folytonosan differenciálható $y:[0,\beta]\to\mathbf{R}$ függvény grafikonja. Nyilván $y(0)=\alpha$ és $y(\beta)=\gamma$. Jól ismert, hogy ekkor a $\operatorname{graf} y$ görbének az X-tengely körüli megforgatásakor keletkező forgástest $\mathcal{F}(y)$ felszíne a következő:

$$\mathcal{F}(y)=2\pi\int_0^\beta y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

xvi) A most mondottakat kissé általánosabban fogalmazva meg legyen adott a kétszer folytonosan differenciálható $f\in\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ függvény, és az $\mathbf{R}^2$ síkon rögzítsük az $(a,b),(c,d)$ pontokat, ahol $a<c$. Valamely differenciálható $y:[a,c]\to\mathbf{R}$ függvény és $x\in[a,c]$ esetén legyen továbbá

$$[y](x):=(x,y(x),y'(x))\,(\in\mathbf{R}^3).$$

A továbbiakban *megengedett függvényosztálynak* nevezzük az

$$\mathcal{M}:=$$

$$\Big\{y:[a,c]\to\mathbf{R}:y\in C^2,\ y(a)=b,\ y(c)=d,\ [y](x)\in\mathcal{D}_f\ \ (x\in[a,c])\Big\}$$

halmazt. Tekintsük ezek után azt a $\Phi:\mathcal{M}\to\mathbf{R}$ *funkcionált,* amelyre

$$\Phi(y):=\int_a^c f([y](x))\,dx=\int_a^c f(x,y(x),y'(x))\,dx \qquad (y\in\mathcal{M}).$$

Hallgatólagosan feltételeztük, hogy $\mathcal{M}\neq\emptyset$. Ez a helyzet pl., ha valamilyen konvex nyílt $\emptyset\neq\Omega\subset\mathbf{R}^2$ halmazzal $\mathcal{D}_f=\Omega\times\mathbf{R}$ és $(a,b),(c,d)\in\Omega$. (Ekkor ti. mondjuk az $y(x):=b+(d-b)(x-a)/(c-a)$ $(x\in[a,c])$ függvényre $y\in\mathcal{M}$.) Innentől kezdve fel is tesszük, hogy a $\mathcal{D}_f$ halmaz ilyen szerkezetű.

A kérdés a következő: van-e olyan $y\in\mathcal{M}$, hogy

$$\Phi(y)\leq\Phi(h) \qquad (h\in\mathcal{M})?$$

Más szóval: van-e a Φ funkcionálnak minimuma? Ha igen (az $y\in\mathcal{M}$ függvényre), akkor nyilván $\operatorname{graf} y\subset\Omega$. Nem nehéz meggondolni, hogy a $\operatorname{graf} y$ halmaz kompaktsága miatt van olyan $\varepsilon>0$ szám, amellyel az $h:[a,c]\to\mathbf{R}$, $h\in C^2$, $h(a)=b$, $h(c)=d$, $\|h-y\|_\infty<\varepsilon$ feltételnek eleget tevő h függvényekre $h\in\mathcal{M}$. Ha tehát $\eta:[a,c]\to\mathbf{R}$, $\eta\in C^2$,

$\eta(a) = \eta(c) = 0$, és a $\delta \in \mathbf{R}$ számra $|\delta| \cdot \|\eta\|_\infty < \varepsilon$ teljesül, akkor $y + \delta\eta \in \mathcal{M}$. (Feltesszük, hogy η nem az azonosan nulla függvény.) Ez azt jelenti, hogy a

$$\varphi(\delta) := \int_a^c f([y + \delta\eta](x))\, dx \qquad \left(-\frac{\varepsilon}{\|\eta\|_\infty} < \delta < \frac{\varepsilon}{\|\eta\|_\infty}\right)$$

függvénynek a $\delta = 0$-ban minimuma van. A paraméteres integrállal kapcsolatban tanultak szerint a φ függvény differenciálható, következésképpen $\varphi'(0) = 0$, ahol minden $\delta \in \mathbf{R}$, $|\delta| < \varepsilon/\|\eta\|_\infty$ helyen

$$\varphi'(\delta) = \int_a^c (\partial_2 f([y + \delta\eta](x))\eta(x) + \partial_3 f([y + \delta\eta](x))\eta'(x))\, dx.$$

Parciálisan integrálva azt mondhatjuk, hogy az

$$f_\delta(x) := \partial_3 f([y + \delta\eta](x)) \qquad (x \in [a, c])$$

jelöléssel

$$\varphi'(\delta) = \int_a^c (\partial_2 f([y + \delta\eta](x)]) - f_\delta'(x))\eta(x)\, dx \qquad (|\delta| < \varepsilon/\|\eta\|_\infty).$$

Tehát

$$0 = \varphi'(0) = \int_a^c (\partial_2 f([y](x)]) - f_0'(x))\eta(x)\, dx.$$

Könnyű belátni, hogy az utóbbi egyenlőség minden itt említett η függvényre csak úgy teljesülhet, ha

$$\partial_2 f([y](x)) - f_0'(x) = 0 \qquad (x \in [a, c])$$

(*Euler-Lagrange-egyenlet*). Jegyezzük meg, hogy

$$f_0'(x) = \partial_{31} f([y](x)) + \partial_{32} f([y](x))y'(x) + \partial_{33} f([y](x))y''(x) \quad (x \in [a, c]),$$

ezért az Euler-Lagrange-egyenlet az $x \in [a, c]$ helyeken a következő:

$$\partial_2 f([y](x)) = \partial_{31} f([y](x)) + \partial_{32} f([y](x))y'(x) + \partial_{33} f([y](x))y''(x).$$

Speciálisan, ha $\partial_1 f \equiv 0$, akkor

$$\partial_{31} f([y](x)) = \partial_3(\partial_1 f([y](x))) = 0 \qquad (x \in [a, c])$$

miatt

$$(*) \qquad \partial_2 f([y](x)) = \partial_{32} f([y](x))y'(x) + \partial_{33} f([y](x))y''(x).$$

Legyen ekkor

$$\Psi(x) := f([y](x)) - \partial_3 f([y](x))y'(x) \qquad (x \in [a,c]).$$

A tett feltételek alapján a Ψ függvény differenciálható és tetszőleges $x \in [a,c]$ helyen ($\partial_1 f \equiv 0$ és $(*)$ miatt)

$$\Psi'(x) = \partial_2 f([y](x))y'(x) - y'(x)(\partial_{32} f([y](x))y'(x) + \partial_{33} f([y](x))y''(x)) =$$

$$y'(x)(\partial_2 f([y](x)) - \partial_{32} f([y](x))y'(x) - \partial_{33} f([y](x))y''(x)) = 0.$$

Következéséppen a Ψ függvény konstans, azaz alkalmas $\mathbf{R} \ni C$-vel

$$(**) \quad f(x,y(x),y'(x)) - \partial_3 f(x,y(x),y'(x))y'(x) = C \qquad (x \in [a,c]).$$

Világos, hogyha az y függvény eleget tesz $(**)$-nak és az

$$\{x \in [a,c] : y'(x) = 0\}$$

halmaz legfeljebb véges, akkor az y eleget tesz $(*)$-nak is.

xvii) Tekintsük most a xiv) megjegyzésben említett brachisztrochron-problémát (az ottani jelölésekkel):

$$f(x,z,w) := \frac{1}{\sqrt{2q}}\sqrt{\frac{1+w^2}{\gamma+z}} \qquad (x,w \in \mathbf{R}, z > -\gamma).$$

Nyilván igaz, hogy $\partial_1 f \equiv 0$, ill. $(**)$ a következő:

$$\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{\gamma+y(x)}} - \frac{(y'(x))^2}{\sqrt{(\gamma+y(x))(1+(y'(x))^2)}} = C\sqrt{2q} \qquad (x \in [0,\alpha]),$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{(\gamma+y(x))(1+(y'(x))^2)}} = C\sqrt{2q} \qquad (x \in [0,\alpha]).$$

(Belátható, hogy a feladat szempontjából szóba jövő y-ra

$$\{x \in [0,\alpha] : y'(x) = 0\}$$

legfeljebb 1 elemű.) Tehát (a $\nu := 1/(4qC^2)$ jelöléssel) az y függvényre

$$\gamma + y = \frac{2\nu}{1+(y')^2}$$

adódik, amiből

$$y' = -\frac{4\nu y' y''}{(1+(y')^2)^2} \quad , \quad y'' = -\frac{(1+(y')^2)^2}{4\nu}.$$

Látszik, hogy $y'' < 0$, ezért az y' deriváltfüggvény szigorúan monoton fogyó. Legyen $\varphi := 2\,\mathrm{arcctg} \circ y'$, ekkor φ szigorúan monoton csökken, és

$$\gamma + y(x) = \frac{2\nu}{1+\mathrm{ctg}^2(\varphi(x)/2)} = \nu(1-\cos(\varphi(x))) \qquad (x \in [0,\alpha]),$$

tehát

$$\gamma + y(\varphi^{-1}(t)) = \nu(1-\cos t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Az utóbbi egyenlőséget „deriválva” azt kapjuk, hogy

$$y'(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = \nu \sin t \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}),$$

ill. $y'(\varphi^{-1}(t)) = \mathrm{ctg}(t/2)$ miatt

$$(\varphi^{-1})'(t) = \nu\frac{\sin t}{\mathrm{ctg}(t/2)} = 2\nu \sin^2(t/2) = \nu(1-\cos t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Alkalmas $\delta \in \mathbf{R}$ konstanssal tehát

$$\varphi^{-1}(t) + \delta = \nu(t - \sin t).$$

Következésképpen az $x = \varphi^{-1}(t)$ jelöléssel az y függvény grafikonját az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$x = \nu(t-\sin t) - \delta$$

$$y(x) = \nu(1-\cos t) - \gamma,$$

ami egy *ciklois* része. (Utóbbit az $y = -\alpha$ egyenletű egyenesen gördített q sugarú kör egy pontja írja le.)

xviii) A xv) megjegyzésbeli legkisebb felszínű forgásfelület vizsgálatakor (az ottani jelölésekkel)

$$f(x,u,w) := 2\pi u\sqrt{1+w^2} \qquad (x,u,w \in \mathbf{R}).$$

Nyilván igaz, hogy $\partial_1 f \equiv 0$, ezért a fenti $(**)$ egyenlőség most a következő:

$$2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2} - 2\pi\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C \qquad (x \in [0,\beta]),$$

tehát
$$\frac{y(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = \frac{C}{2\pi} =: \delta \qquad (x \in [0,\beta]).$$
Innen $y^2 = \delta^2(1+(y')^2)$, ill. (deriválással) $yy' = \delta^2 y'y''$ következik. Most is meggondolható, hogy az y' deriváltfüggvény legfeljebb egy pontban lehet nulla. Így $y = \delta^2 y''$, ami egy homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet. A „megoldóképlet” szerint

$$y(x) = c_1 e^{x/\delta} + c_2 e^{-x/\delta} \qquad (x \in [0,\beta])$$

(alkalmas c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal). Világos, hogy

$$(y'(x))^2 = \frac{c_1^2}{\delta^2}e^{2x/\delta} + \frac{c_2^2}{\delta^2}e^{-2x/\delta} - \frac{2c_1c_2}{\delta^2} \qquad (x \in [0,\beta]),$$

ezért a fenti $y^2 = \delta^2(1+(y')^2)$ egyenlőségből

$$c_1^2 e^{2x/\delta} + c_2^2 e^{-2x/\delta} + 2c_1c_2 = \delta^2 + c_1^2 e^{2x/\delta} + c_2^2 e^{-2x/\delta} - 2c_1c_2 \quad (x \in [0,\beta]),$$

azaz $4c_1c_2 = \delta^2$ következik szükséges feltételként. Ez azt jelenti, hogy

$$y(x) = c_1 e^{x/\delta} + \frac{\delta^2}{4c_1}e^{-x/\delta} \qquad (x \in [0,\beta]),$$

ahol $0 \neq c_1 \in \mathbf{R}$. Nem nehéz belátni, hogy alkalmas $\mathbf{R} \ni q$-val

$$y(x) = \delta\cdot \mathrm{ch}(x/\delta + q) \qquad (x \in [0,\beta]).$$

(Emlékeztetünk a *koszinuszhiperbolikusz-függvényre*:

$$\mathrm{ch}(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).)$$

Megjegyezzük, hogy az $y(0) = \alpha$, $y(\beta) = \gamma$ feltételeknek,tehát a

$$\delta\cdot \mathrm{ch}\, q = \alpha \ \ , \ \ \delta\cdot \mathrm{ch}(\beta/\delta + q) = \gamma$$

egyenlőségeknek is teljesülniük kell. Könnyen ellenőrizhető azonban, hogy adott α, β, γ mellett ez utóbbi (δ-ra és q-ra vonatkozó) egyenletrendszer nem mindig, ill. nem mindig egyértelműen oldható meg.

xviii) A fentiekben csupán érintőlegesen felidézett variációszámítás szoros kapcsolatban van bizonyos (nem véletlenül *variációs elveknek* nevezett) fizikai törvényekkel. Tekintsük pl. azt az $f \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ alapfüggvényt, amely (q, m, $h>0$ adott paraméterek mellett) a következőképpen van definiálva:

$$f(x,u,w) := -\frac{mw^2}{2} + mq(h-u) \qquad (x,u,w) \in \mathbf{R}^3).$$

Nyilván $\partial_1 f = \partial_{32} f \equiv 0$, $\partial_{33} f \equiv -m$. Írjuk fel erre az f függvényre az Euler-Lagrange-egyenletet (ld. xv) $(*)$) :

$$\partial_2 f([y](x)) - \partial_{32} f([y](x))y'(x) - \partial_{33} f([y](x))y''(x) =$$

$$-mq + my''(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

Az y függvényre a xv)-beli $(**)$ formula szerint egy alkalmas C konstanssal

$$f(x,y(x),y'(x)) - \partial_3 f(x,y(x),y'(x))y'(x) =$$

$$-\frac{m(y'(x))^2}{2} + mq(h-y(x)) + m(y'(x))^2 =$$

$$(***) \qquad \frac{m(y'(x))^2}{2} + mq(h-y(x)) = C \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

Ha a most felírt matematikai modellben q a nehézségi gyorsulás, és egy m tömegű testet h magasságból elejtünk, akkor (minden egyéb tényezőt (légellenállást, stb.) figyelmen kívül hagyva) a mozgást leíró $y:[0,T] \to \mathbf{R}$ út-idő függvényről (valamilyen $T>0$ esetén) a következőket mondhatjuk:

- a Newton-féle mozgástörvény szerint $my''(x) = mq \quad (x \in [0,T]$, $y(0)=0)$;
- az $x \in [0,T]$ pillanatban a test helyzeti energiája $mq(h-y(x))$, a mozgási energiája pedig $m(y'(x))^2/2$.

Tehát a fenti Euler-Lagrange-egyenlet éppen a mozgást leíró Newton-törvényt jelenti. Jól ismert továbbá a fizikából, hogy az előbb említett két energia összege a mozgás során nem változik, állandó (mqh). A $(***)$ egyenlőség pontosan ezt fejezi ki.

xx) A másodrendű lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan vizsgálhatók az *állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciaegyenletek.* Ezek értelmezéséhez tegyük fel, hogy adottak az $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ számok és az $a_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat. Az alábbi feladatot szeretnénk megoldani: határozzunk meg olyan $x_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot, amely eleget tesz az alábbi rekurzív összefüggésnek (egyenletnek):

$$(*) \qquad x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$P(t) := t^2 + at + b \qquad (t \in \mathbf{C})$$

a $(*)$ másodrendű lineáris differenciaegyenlet *karakterisztikus polinomja.* Ha $q \in \mathbf{C}$ gyöke P-nek (mivel $b \neq 0$, ezért $q \neq 0$), akkor az $x_n := q^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatra

$$(**) \qquad x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(azaz az x_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat *megoldása* a $(**)$ *homogén differenciaegyenletnek*). Valóban, $q^2 + aq + b = 0$, így

$$x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n = q^{n+2}+aq^{n+1}+bq^n = q^n(q^2+aq+b) = 0 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Jelöljük a P másodfokú polinom gyökeit q_1, q_2-vel. Ekkor:

1^o eset: $q_1 \neq q_2$. Legyen $y_n := q_1^n$, $z_n := q_2^n$ $(n \in \mathbf{N})$ és mutassuk meg, hogy a $(**)$ homogén egyenlet bármely $x_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ megoldásához léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ együtthatók, hogy

$$x_n = \alpha y_n + \beta z_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(Könnyen beláthatóan minden ilyen alakú x_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat megoldása a $(**)$ egyenletnek.) Megmutatjuk, hogy $(**)$ minden megoldása ilyen alakban írható fel. Legyen tehát x_n $(n \in \mathbf{N})$ a $(**)$-nak eleget tevő valamely sorozat és

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \ , \ \ \xi_n := (x_n, x_{n+1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$\xi_{n+1} = A\xi_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel q_1, q_2 egyúttal az A mátrix két (különböző) sajátértéke, ezért alkalmas $T \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mátrix segítségével A diagonális alakra transzformálható:

$$T^{-1}AT = \Lambda := \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Így az $\eta_n := T^{-1}\xi_n \quad (n \in \mathbf{N})$ jelöléssel

$$\eta_{n+1} = T^{-1}\xi_{n+1} = T^{-1}A\xi_n = \Lambda T^{-1}\xi_n = \Lambda\eta_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz (az $\eta_n \quad (n \in \mathbf{N})$ vektorsorozat koordináta-sorozatait rendre η_{n1}, η_{n2}-vel jelölve)

$$\eta_{n+1j} = q_j\eta_{nj} \qquad (n \in \mathbf{N}, j = 1, 2).$$

A 2.2. viii) megjegyzésben látottak alapján tehát alkalmas $\alpha_j \in \mathbf{C}$ együtthatókkal

$$\eta_{nj} = \alpha_j q_j^n \qquad (n \in \mathbf{N}, j = 1, 2).$$

Legyenek a T mátrix első sorának az elemei rendre u, v, továbbá

$$c_1 := \alpha_1 u \ , \ c_2 := \alpha_2 v,$$

akkor

$$x_n = u\eta_{n1} + v\eta_{n2} = c_1q_1^n + c_2q_2^n = c_1y_n + c_2z_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

2^o eset: $q := q_1 = q_2$. Ellenőrizzük először is azt, hogy az $y_n := q^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat mellett ekkor a $z_n := nq^n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat is megoldása $(**)$-nak:

$$(n+2)q^{n+2} + a(n+1)q^{n+1} + bnq^n =$$

$$q^{n+1}(2q + a) + nq^n(q^2 + aq + b) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ui. (lévén a q szám kétszeres gyöke P-nek) $4b = a^2$, azaz

$$0 = q^2 + aq + b = \frac{(2q + a)^2}{4}.$$

Legyen továbbá a $T \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mátrix olyan (ld. 2.3.), hogy

$$T^{-1}AT = \Lambda := \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Az előbbi jelöléseket megtartva ezért a $(**)$ tetszőleges $x_n \quad (n \in \mathbf{N})$ megoldásából kiindulva most azt kapjuk, hogy

$$\eta_{n+11} = q\eta_{n1} + \eta_{n2} \ , \ \eta_{n+12} = q\eta_{n2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen (ld. 2.2. viii) megjegyzés) az következik, hogy valamilyen $\alpha \in \mathbf{C}$ együtthatóval $\eta_{n2} = \alpha q^n \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz

$$\eta_{n+11} = q\eta_{n1} + \alpha q^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért (ld. 2.2. ix), x) megjegyzések) van olyan $\beta \in \mathbf{C}$, ill. $c_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy

$$\eta_{n1} = \beta q^n + c_n q^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá (pl. a $c_0 : 0$ választással)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha q^k}{q^{k+1}} = \frac{\alpha n}{q} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$\eta_{n1} = \beta q^n + \frac{\alpha n}{q} q^n =: \beta q^n + \gamma n q^n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így

$$x_n = u\eta_{n1} + v\eta_{n2} = u(\beta q^n + \gamma n q^n) + v\alpha q^n =$$

$$(u\beta + v\alpha) q^n + u\gamma n q^n = c_1 y_n + c_2 z_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ahol $c_1 := u\beta + v\alpha$, $c_2 := u\gamma$). Most is könnű meggyőződni arról, hogy az $y_n, z_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatok bármely lineáris kombinációja megoldása $(**)$-nak.

xx) Összefoglalva a fentieket azt kaptuk tehát, hogy az

$$y_n := \begin{cases} q_1^n & (q_1 \neq q_2) \\ \\ q^n & (q := q_1 = q_2) \end{cases}, \; z_n := \begin{cases} q_2^n & (q_1 \neq q_2) \\ \\ nq^n & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatokkal a $(**)$ homogén egyenlet megoldásai pontosan az

$$x_n = c_1 y_n + c_2 z_n \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N})$$

alakú sorozatok. Illusztrációképpen tekintsük az

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

homogén egyenletet. Ekkor $P(t) = t^2 - t - 1$ $(t \in \mathbf{C})$, azaz

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \ q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezért $x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol a $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ együtthatókat az x_0, x_1 (*kezdeti*) értékek egyértelműen meghatározzák:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & x_0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 & = & x_1. \end{array}$$

Ha pl. $x_0 := 0, x_1 := 1$, akkor

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

tehát az x_n $(n \in \mathbf{N})$ *Fibonacci-sorozat* a következő:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

xxii) Tegyük fel, hogy a P karakterisztikus polinom gyökei nem valós komplex számok: $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Ekkor $q_2 = \overline{q_1}$, azaz, ha $q_1 = re^{\imath s}$, akkor $q_2 = re^{-\imath s}$. (Itt $r := |q_1|$, $0 \neq s \in (-\pi, \pi)$.) A xx) megjegyzés szerint a $(**)$ homogén egyenlet megoldásai a következők:

$$x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 r^n e^{\imath ns} + c_2 r^n e^{-\imath ns} =$$

$$r^n ((c_1 + c_2)\cos(ns) + \imath(c_1 - c_2)\sin(ns)) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

Ez a sorozat pontosan akkor valós értékű, ha $c_1 + c_2, \imath(c_1 - c_2) \in \mathbf{R}$, azaz, ha $c_2 = \overline{c_1}$:

$$x_n = r^n \left(2 \operatorname{Re} c_1 \cos(ns) - 2 \operatorname{Im} c_1 \sin(ns) \right) \qquad (c_1 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

Nyilván bármely $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén van olyan $c_1 \in \mathbf{C}$, hogy $\alpha = 2 \operatorname{Re} c_1$, ill. $\beta = -2 \operatorname{Im} c_1$. Ezért $q_1, q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ esetén a $(**)$ homogén egyenlet valós értékű megoldásai pontosan a következő sorozatok:

$$x_n = r^n (\alpha \cos(ns) + \beta \sin(ns)) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tehát az

$$y_n := r^n \cos(ns) \ , \ \ z_n := r^n \sin(ns) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatok egy valós értékű alaprendszert alkotnak. (Megjegyezzük, hogy ha $q_1, q_2\,(\neq q_1) \in \mathbf{R}$, akkor xiii)-ban a $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ választással kapjuk a $(**)$ valós értékű megoldásait. Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha $q := q_1 = q_2$, ti. ekkor szükségszerűen $q \in \mathbf{R}$.)

xxiii) Mutassuk meg, hogy a xx)-beli $y_n, z_n \ (n \in \mathbf{N})$ *alaprendszerrel* és a

$$\delta_n := y_n z_{n+1} - z_n y_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozattal a

$$v_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\delta_{k+1}} (z_n y_{k+1} - y_n z_{k+1}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat megoldása a xix)-beli $(*)$ egyenletnek (*partikuláris megoldás*). (Könnyen ellenőrizhetően $\delta_n \neq 0 \ (n \in \mathbf{N})$.)

Tegyük fel először, hogy $q_1 \neq q_2$. Mivel q_1, q_2 gyöke a P polinomnak, ezért $q_1 q_2 = b$. Ekkor

$$v_n := \frac{1}{q_2 - q_1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^n q_1^{k+1} - q_1^n q_2^{k+1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Azt kell belátni, hogy

$$(q_2 - q_1)\,(v_{n+2} + a v_{n+1} + b v_n) = (q_2 - q_1) a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, az itt szereplő egyenlőség bal oldala a következő:

$$B_n := \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^{n+2} q_1^{k+1} - q_1^{n+2} q_2^{k+1}) + a \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^{n+1} q_1^{k+1} - q_1^{n+1} q_2^{k+1}) +$$

$$+ b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^n q_1^{k+1} - q_1^n q_2^{k+1}) = \frac{a_n}{b^{n+1}} \left(q_2^{n+2} q_1^{n+1} - q_1^{n+2} q_2^{n+1} \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^{n+2} q_1^{k+1} - q_1^{n+2} q_2^{k+1}) + a \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{b^{k+1}} (q_2^{n+1} q_1^{k+1} - q_1^{n+1} q_2^{k+1}) +$$

$$+b\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{b^{k+1}}(q_2^n q_1^{k+1}-q_1^n q_2^{k+1}).$$

Következésképpen

$$\frac{a_n}{b^{n+1}}\left(q_2^{n+2}q_1^{n+1}-q_1^{n+2}q_2^{n+1}\right)=\frac{a_n(q_1q_2)^{n+1}}{b^{n+1}}(q_2-q_1)=a_n(q_2-q_1).$$

Továbbá bármely $k=0,...,n-1$ esetén $q_2^2+aq_2+b=q_1^2+aq_1+b=0$ miatt

$$A_k:=$$

$$q_2^{n+2}q_1^{k+1}-q_1^{n+2}q_2^{k+1}+a\left(q_2^{n+1}q_1^{k+1}-q_1^{n+1}q_2^{k+1}\right)+b\left(q_2^nq_1^{k+1}-q_1^nq_2^{k+1}\right)=$$

$$q_2^nq_1^{k+1}\left(q_2^2+aq_2+b\right)-q_1^nq_2^{k+1}\left(q_1^2+aq_1+b\right)=0.$$

Ezért

$$B_n=\frac{a_n}{b^{n+1}}\left(q_2^{n+2}q_1^{n+1}-q_1^{n+2}q_2^{n+1}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{b^{k+1}}A_k=a_n(q_2-q_1).$$

(Vegyük észre, hogy $q_1\neq q_2$ esetén a fenti $v_n \quad (n\in\mathbf{N})$ sorozat valós értékű. Ez $q_1,q_2\in\mathbf{R}$ mellett nyilvánvaló, ha viszont $q_2=\overline{q_1}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, akkor $q_2-q_1=-2\imath\,\mathrm{Im}\,q_1$, ill.

$$q_2^nq_1^{k+1}-q_1^nq_2^{k+1}=r^ne^{-\imath ns}r^{k+1}e^{\imath(k+1)s}-r^ne^{\imath ns}r^{k+1}e^{-\imath(k+1)s}=$$

$$r^{n+k+1}\left(e^{-\imath(n-k-1)s}-e^{\imath(n-k-1)s}\right)=$$

$$-2\imath r^{n+k+1}\sin((n-k-1)s)\qquad(k=0,...,n-1).$$

Tehát

$$v_n=\frac{1}{\mathrm{Im}\,q_1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_kr^{n+k+1}}{b^{k+1}}\sin((n-k-1)s)=$$

$$\frac{1}{r\sin\,s}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_kr^{n+k+1}}{b^{k+1}}\sin((n-k-1)s)\in\mathbf{R}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Legyen most $q := q_1 = q_2$, amikor is $q^2 + aq + b = 0 = 2q + a$, és

$$v_n := \frac{1}{q^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)q^n a_k}{q^k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Most tehát azt kell belátni, hogy

$$B_n := q^2\left(v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n\right) = q^2 a_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban,

$$B_n =$$

$$q^n\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n-k+1)q^2a_k}{q^k} + a\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)qa_k}{q^k} + b\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)a_k}{q^k}\right) =$$

$$q^2a_n + q^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k+1)a_k}{q^k}(q^2+aq+b) - q^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)\frac{aa_k}{2q^k}(2q+a) = q^2a_n.$$

Világos, hogy most is $v_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$.

xxiv) Írjuk a xxiii)-beli v_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot a következő alakba:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_ny_{k+1} - y_nz_{k+1}}{\delta_{k+1}}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}v_{nk}a_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$v_{nk} := \frac{z_ny_{k+1} - y_nz_{k+1}}{\delta_{k+1}} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Mivel minden $k \in \mathbf{N}$ esetén az előbbi $\mathbf{N} \ni n \mapsto v_{nk}$ sorozat a z_n, y_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozatok lineáris kombinációja, ezért $\mathbf{N} \ni n \mapsto v_{nk}$ eleget tesz a $(**)$ homogén egyenletnek. Nyilvánvaló továbbá, hogy minden $\mathbf{N} \ni k$-ra

$$v_{kk} = \frac{z_ky_{k+1} - y_kz_{k+1}}{\delta_{k+1}} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_2^kq_1^{k+1} - q_1^kq_2^{k+1}}{\delta^{k+1}} = \dfrac{(q_1q_2)^k(q_1-q_2)}{(q_1q_2)^{k+1}(q_2-q_1)} = -\dfrac{1}{q_1q_2} = -\dfrac{1}{b} & (q_1 \neq q_2) \\[2ex] \dfrac{kq^{2k+1} - (k+1)q^{2k+1}}{q^{2k+3}} = -\dfrac{1}{q^2} = -\dfrac{1}{b} & (q := q_1 = q_2). \end{cases}$$

Világos, hogy $v_{k+1k} = 0$ $(k \in \mathbf{N})$. Ha tehát

$$w_n := -bv_{n+kk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}),$$

akkor a w_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat (minden $k \in \mathbf{N}$) esetén) olyan megoldása a $(**)$ homogén egyenletnek, amely eleget tesz a $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ kezdeti feltételeknek.

xxv) Eléggé nyilvánvaló, hogyha az $x_n, \tilde{x}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatok megoldásaik a $(*)$ differenciaegyenletnek, akkor az $x_n - \tilde{x}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat megoldása a $(**)$ homogén egyenletnek, tehát alkalmas $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ együtthatókkal

$$x_n - \tilde{x}_n = c_1 y_n + c_2 z_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A xxi), xxii), xxiii) megjegyzésekben mondottak szerint a xx)-beli $(*)$ differenciaegyenlet megoldásai a következők:

$$x_n = c_1 y_n + c_2 z_n + v_n \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

Itt v_n $(n \in \mathbf{N})$ helyébe a xxii) megjegyzésben megadott sorozat helyett a $(*)$ egyenlet bármely (*partikuláris*) megoldása írható. Esetenként ilyen megoldás „ránézésre" is látszik. Tekintsük pl. az

$$\text{(a)} \quad x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2n - 3 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\text{(b)} \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

inhomogén differenciaegyenleteket. Az (a) esetben a

$$P(t) = t^2 - 5t + 6 \qquad (t \in \mathbf{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei 2 és 3, egy partikuláris megoldás pedig könnyen láthatóan az $\mathbf{N} \ni n \mapsto n$ sorozat. Ezért

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n + n \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

A (b) esetben

$$P(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \qquad (t \in \mathbf{C}),$$

aminek 2 az egyetlen (kétszeres) gyöke, az $\mathbf{N} \ni n \mapsto 1$ sorozat pedig nyilván partikuláris megoldása. Így

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n + 1 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}).$$

xxvi) A részletek mellőzésével csupán röviden vázoljuk a fentiekben vizsgált differenciaegyenletek (ld. a 2.2. viii) megjegyzést is) egyfajta általánosítását. Legyen ehhez valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett adott egy $(n+1)$-változós valós függvény:

$$f \in \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}.$$

Adjunk meg továbbá egy $(v_k) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatot, és határozzuk meg azokat a (z_k) számsorozatokat, amelyekre

$$(*) \qquad f(z_k, z_{k+1}, ..., z_{k+n}) = v_k \qquad (k \in \mathbf{N})$$

teljesül. A most megfogalmazott feladatot *differenciaegyenletnek* nevezzük, bármely, a $(*)$ egyenlőségnek („egyenletnek") eleget tevő (z_k) sorozat a differenciaegyenlet *megoldása.* Ha pl. $n := 1$ és

$$f(x, y) := y - x \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

továbbá (valamilyen $d \in \mathbf{C}$ esetén) $v_k := d \quad (k \in \mathbf{N})$, akkor a keresett (z_k) sorozatra

$$z_{k+1} - z_k = d \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Más szóval (z_k) *számtani sorozat.* Hasonlóan, legyen $q \in \mathbf{C}$, és

$$f(x, y) := y - qx \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

$v_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$, amikor is $(*)$ a következő:

$$z_{k+1} - qz_k = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz (z_k) egy *mértani sorozat.*

A differenciaegyenletünk *lineáris,* ha alkalmas $a_0, ..., a_n \in \mathbf{R}$ számokkal (ahol $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$)

$$f(x_0, ..., x_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_j \qquad ((x_0, ..., x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}).$$

Ekkor a $(*)$ „egyenlet" alakja:

$$(**) \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j z_{k+j} = v_k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Azt mondjuk, hogy ez utóbbi *homogén,* ha $v_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$:

$$(***) \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j z_{k+j} = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Könnyen belátható, hogy bármely $c_0, ..., c_n \in \mathbf{C}$ esetén a $(**)$ feladatnak egyértelműen van olyan (z_k) megoldása, amelyre fennállnak a

$$z_j = c_j \qquad (j = 0, ..., n-1)$$

egyenlőségek (*kezdeti feltétel*). Ti. $(***)$ szerint

$$z_{k+n} = \frac{1}{a_n} \cdot (v_k - a_0 z_k - ... - a_{n-1} z_{k+n-1}) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Jelöljük $\mathcal{M}$-mel, ill. $\mathcal{M}_h$-val a $(**)$ (*inhomogén*), ill. a $(***)$ homogén egyenlet megoldásainak a halmazát. Az alábbi állítások igazak:

- az $\mathcal{M}_h$ halmaz n-dimenziós vektortér $\mathbf{C}$ felett;
- bármely $(w_k) \in \mathcal{M}$ (*partikuláris megoldás*) mellett

$$\mathcal{M} = (w_k) + \mathcal{M}_h;$$

- ha $i = 0, ..., n-1$, és $(A_k^{(i)})$ jelöli a $(***)$ homogén egyenletnek azt a megoldását, amelyre

$$A_k^{(i)} = \begin{cases} 0 & (k \neq i) \\ \\ 1 & (k = i) \end{cases} \qquad (k = 0, ..., n-1),$$

  akkor tetszőleges $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbf{C}$ *kezdeti értékek* esetén a

$$z_0 := c_0, ..., z_{n-1} := c_{n-1},$$

$$z_k := \sum_{j=0}^{n-1} A_k^{(j)} c_j + \frac{1}{a_n} \cdot \sum_{l=0}^{k-n} A_{k-l-1}^{(n-1)} v_l \qquad (k = n, n+1, ...)$$

  sorozat megoldása $(**)$-nak;
- a $P(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad (x \in \mathbf{C})$ *karakterisztikus polinom* páronként különböző gyökeit, ill. ezek multiplicitásait $\lambda_1, ..., \lambda_r$-rel, ill. $s_1, ..., s_r$-rel jelölve (valamilyen $r = 1, ..., n$ mellett) a

$$(\lambda_i^k),\ (k\lambda_i^k),\ ... ,(k^{s_i-1}\lambda_i^k) \qquad (i = 1, ..., r)$$

  sorozatok bázist alkotnak $\mathcal{M}_h$-ban.

Tehát a homogén egyenlet minden $(z_k) \in \mathcal{M}_h$ megoldása a következő alakú:

$$z_k = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=0}^{s_i-1} \alpha_{ij} k^j \Big) \lambda_i^k \qquad (k \in \mathbf{N})$$

(alkalmas $\alpha_{ij} \in \mathbf{C} \quad (i \in \{1, ..., r\},\, j \in \{0, ..., s_i - 1\})$ együtthatókkal). Nyilvánvaló, hogy ezzel ekvivalens az alábbi megfogalmazás: tetszőleges, legfeljebb $(s_i - 1)$-edfokú $P_i \quad (i \in \{1, ..., r\},$ $j \in \{0, ..., s_i - 1\})$ polinomokkal

$$z_k = \sum_{i=1}^{r} P_i(k) \lambda_i^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha valamilyen $i \in \{1, ..., r\}$ esetén $\lambda_i \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, akkor $\overline{\lambda}_i$ is szerepel a gyökök között (lévén a P karakterisztikus polinom valós együtthatós), és a $\overline{\lambda}_i$ multiplicitása szintén s_i. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor a

$$(\lambda_i^k),\ (k\lambda_i^k),\ \dots,(k^{s_i-1}\lambda_i^k)\ \ ,\ \ (\overline{\lambda}_i^k),\ (k\overline{\lambda}_i^k),\ \dots,(k^{s_i-1}\overline{\lambda}_i^k)$$

nem valós értékű (bázis-)sorozatok (a $\theta_i := \arg \lambda_i$ jelöléssel) helyettesíthetők az alábbi valós értékű sorozatokkal:

$$(|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i)),\ (k|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i)),\ \dots,(k^{s_i-1}|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i)),$$

$$(|\lambda_i|^k \sin(k\theta_i)),\ (k|\lambda_i|^k \sin(k\theta_i)),\ \dots,(k^{s_i-1}|\lambda_i|^k \sin(k\theta_i)).$$

Ha ezt a „cserét” a P karakterisztikus polinom minden nem valós értékű gyökére elvégezzük, akkor az $\mathcal{M}_h$-nak egy valós értékű sorozatokból álló bázisához jutunk. Legyenek tehát a P nem valós értékű gyökei (ha egyáltalán ilyenek vannak)

$$\lambda_1, \overline{\lambda}_1, ..., \lambda_p, \overline{\lambda}_p$$

(valamilyen $p \in \mathbf{N}$ mellett, $2p \leq r$). Ekkor a homogén egyenlet valós értékű megoldásai az alábbi sorozatok:

$$z_k = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=0}^{s_i-1} k^j (\beta_{ij} \cos(k\theta_i) + \gamma_{ij} \sin(k\theta_i)) \Big) |\lambda_i|^k + \sum_{i=2p+1}^{r} \Big(\sum_{j=0}^{s_i-1} \delta_{ij} k^j \Big) \lambda_i^k$$

$(k \in \mathbf{N})$, ahol az itt szereplő valamennyi β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij} együttható valós szám. Más szóval

$$z_k = \sum_{i=1}^{p} \Big(R_i(k) \cos(k\theta_i) + Q_i(k) \sin(k\theta_i) \Big) |\lambda_i|^k + \sum_{i=2p+1}^{r} P_i(k) \lambda_i^k \quad (k \in \mathbf{N})$$

tetszőleges valós együtthatós, legfeljebb (s_i-1)-edfokú R_i, Q_i, P_i polinomokkal.

xxvii) A xxvi)-beli $(**)$ differenciaegyenlet *stabilis,* ha bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy tetszőleges olyan (z_k), $(\tilde{z}_k)$ megoldásokra, amelyekre

$$|z_0 - \tilde{z}_0| < \delta, \dots, |z_{n-1} - \tilde{z}_{n-1}| < \delta$$

fennáll, egyúttal

$$|z_k - \tilde{z}_k| < \varepsilon \qquad (n \le k \in \mathbf{N})$$

is teljesül. Tehát, ha a $z_0, ..., z_{n-1}$ kezdeti értékekben elkövetett (pl. kerekítési, mérési, stb.) hiba „elég kicsi”, akkor ugyanez igaz marad a megoldás „további” tagjaira is. Pl. a számtani sorozatot „definiáló” $z_{k+1} - z_k = d \quad (k \in \mathbf{N})$ egyenlet (valamilyen $d \in \mathbf{C}$ esetén) nyilván stabilis, hiszen

$$|z_k - \tilde{z}_k| = |z_0 - \tilde{z}_0| \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

következésképpen a stabilitás definíciójában szereplő tetszőlegesen választott $0 < \delta \le \varepsilon$ megfelelő. Ugyanakkor a $q\,(\in \mathbf{C})$ kvóciensű mértani sorozatot „definiáló” $z_{k+1} - qz_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$ egyenlet akkor és csak akkor stabilis, ha $|q| \le 1$. Ui.

$$|z_k - \tilde{z}_k| = |z_0 - \tilde{z}_0| \cdot |q|^{k-1} \qquad (k = 1, 2, ...),$$

ezért $|q| > 1$ esetén $|q|^{k-1} \to +\infty \quad (k \to \infty)$ (így $z_0 \ne \tilde{z}_0$ esetén minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $1 \le k \in \mathbf{N}$, amellyel $|z_k - \tilde{z}_k| > \varepsilon$), azaz nem teljesülhet a stabilitás kritériuma, míg ha $|q| \le 1$, akkor tetszőleges $\mathbf{N} \ni k$-ra $|z_k - \tilde{z}_k| \le |z_0 - \tilde{z}_0|$ (tehát ismét vehető bármely $0 < \delta \le \varepsilon$), ami a stabilitást jelenti. Tekintsük pl. a Fibonacci-sorozatot (ld. 2.3. xx) megjegyzés) meghatározó

$$z_{n+2} - z_{n+1} - z_n = 0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

homogén másodrendű egyenletet a $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ kezdeti értékekkel. Ha $\delta > 0$ és $0 < \sigma < \delta$, ill. $\tilde{z}_0 := 0$, $\tilde{z}_1 := 1 + \sigma$, akkor $|z_0 - \tilde{z}_0| = 0 < \delta$, $|z_1 - \tilde{z}_1| = \sigma < \delta$, de (amint az könnyen ellenőrizhető)

$$|z_k - \tilde{z}_k| \approx \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k \to +\infty \qquad (k \to \infty),$$

azaz a szóban forgó egyenlet nyilván nem stabil.

xxviii) Belátható, hogy a $(**)$ egyenlet akkor és csak akkor stabilis, ha a P karakterisztikus polinomjának minden λ gyökére az alábbi feltételek valamelyike teljesül: $|\lambda| < 1$ vagy $|\lambda| = 1$, de λ egyszeres gyök. (Vegyük észre, hogy a most mondott állítás szerint a stabilitás független a $(**)$ egyenlet (v_k) *jobb oldalától.*)

Itt a szükségesség egyszerűen adódik. Ha ui. valamely λ gyökre $|\lambda| > 1$ igaz és $\sigma > 0$ tetszőleges, akkor a $z_k := 0$, $\tilde{z}_k := \sigma\lambda^k \quad (k \in \mathbf{N})$ választással (homogén eset)

$$|z_k - \tilde{z}_k| = \sigma|\lambda|^k \to +\infty \qquad (k \to \infty).$$

Ezért bármely pozitív ε számhoz van olyan $n \le k \in \mathbf{N}$, hogy

$$|z_k - \tilde{z}_k| > \varepsilon,$$

de ugyanakkor akármilyen $\delta > 0$ esetén alkalmas σ-val

$$|z_0 - \tilde{z}_0| = \sigma < \delta, ..., |z_{n-1} - \tilde{z}_{n-1}| = \sigma|\lambda|^{n-1} < \delta.$$

Tehát ekkor az egyenlet nem stabilis (*instabilis*). Ha viszont $|\lambda| = 1$ és λ legalább kétszeres gyöke P-nek, akkor tekintsük az előbbi $(\tilde{z}_k)$ helyett a következő sorozatot: $\tilde{z}_k := \sigma k\lambda^k \quad (k \in \mathbf{N})$. Ekkor ismét

$$|z_k - \tilde{z}_k| = \sigma k \to +\infty \qquad (k \to \infty),$$

azaz az egyenlet instabilis. Megjegyezzük, hogy a fenti stabilitási tétel bizonyítása (annak az elégségesség része) meglehetősen összetett, de pl. $n = 1, 2$ esetén elemi úton is elvégezhető. Valóban, ha $n = 1$, akkor a $P(x) = a_0 + a_1x \quad (x \in \mathbf{C})$ karakterisztikus polinomnak egyetlen gyöke van: $\lambda := -a_0/a_1$ és a fenti stabilitási tétel (elégséges) feltétele szerint $|\lambda| \le 1$. Mivel (a megoldáshalmaz szerkezetére vonatkozó xx)-ban idézett állítások szerint) minden (z_k), $(\tilde{z}_k) \in \mathcal{M}$ megoldás (valamilyen $(w_k) \in \mathcal{M}$ partikuláris megoldással és $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ együtthatókkal)

$$z_k = w_k + \alpha\lambda^k \ \ , \ \ \tilde{z}_k = w_k + \beta\lambda^k \qquad (k \in \mathbf{N})$$

alakú, ezért

$$|z_0 - \tilde{z}_0| = |\alpha - \beta| \ \ , \ \ |z_k - \tilde{z}_k| = |\alpha - \beta| \cdot |\lambda|^k \le |\alpha - \beta| \qquad (1 \le k \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát $\delta > 0$, és $|z_0 - \tilde{z}_0| = |\alpha - \beta| < \delta$, akkor $|z_k - \tilde{z}_k| < \delta$ $(1 \le k \in \mathbf{N})$. Ez azt jelenti, hogy a stabilitás definíciójában szereplő

$\varepsilon > 0$ esetén tetszőleges $0 < \delta \le \varepsilon$ választással teljesül a stabilitás kritériuma.

Hasonlóan okoskodhatunk $n = 2$ esetén is. Ekkor a

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (x \in \mathbf{C})$$

karakterisztikus polinom másodfokú, legyenek a gyökei λ és μ. (Mivel $a_0 \ne 0$, ezért egyúttal $\lambda \ne 0, \mu \ne 0$ is igaz.) Ha $\lambda = \mu$ (kétszeres gyök), akkor a stabilitási (elégséges) feltétel szerint $(0 <) |\lambda| < 1$, továbbá valamilyen (w_k) partikuláris megoldással minden (z_k), $(\tilde{z}_k)$ megoldás (alkalmas α, β, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} \in \mathbf{C}$ együtthatókkal)

$$z_k = w_k + \alpha\lambda^k + \beta k\lambda^k \ , \ \ \tilde{z}_k = w_k + \tilde{\alpha}\lambda^k + \tilde{\beta} k\lambda^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ezért $|z_0 - \tilde{z}_0| = |\alpha - \tilde{\alpha}|$ és

$$|z_1 - \tilde{z}_1| = |\alpha - \tilde{\alpha} + \beta - \tilde{\beta}| \cdot |\lambda| \ge (|\beta - \tilde{\beta}| - |\alpha - \tilde{\alpha}|)|\lambda|,$$

amiből

$$|\beta - \tilde{\beta}| \le |\alpha - \tilde{\alpha}| + \frac{|z_1 - \tilde{z}_1|}{|\lambda|} = |z_0 - \tilde{z}_0| + \frac{|z_1 - \tilde{z}_1|}{|\lambda|}.$$

Továbbá

$$|z_k - \tilde{z}_k| \le |\alpha - \tilde{\alpha}| \cdot |\lambda|^k + |\beta - \tilde{\beta}| \cdot k|\lambda|^k \qquad (2 \le k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$|z_k - \tilde{z}_k| \le |z_0 - \tilde{z}_0| \cdot |\lambda|^k + \left(|z_0 - \tilde{z}_0| + \frac{|z_1 - \tilde{z}_1|}{|\lambda|}\right) \cdot k|\lambda|^k \quad (2 \le k \in \mathbf{N}).$$

A $|\lambda| < 1$ feltétel miatt $\lim_{k\to\infty} (k|\lambda|^k) = 0$, így van olyan $2 \le k_0 \in \mathbf{N}$, hogy $k|\lambda|^k < 1 \quad (k_0 < k \in \mathbf{N})$, következésképpen

$$|z_k - \tilde{z}_k| \le 2|z_0 - \tilde{z}_0| + \frac{|z_1 - \tilde{z}_1|}{|\lambda|} \qquad (k_0 < k \in \mathbf{N}).$$

Viszont

$$\max_{2<k\le k_0} |z_k - \tilde{z}_k| \le |z_0 - \tilde{z}_0| + \left(|z_0 - \tilde{z}_0| + \frac{|z_1 - \tilde{z}_1|}{|\lambda|}\right) \cdot k_0.$$

Ha tehát $\delta > 0$ és $|z_0 - \tilde{z}_0| < \delta$, $|z_1 - \tilde{z}_1| < \delta$, akkor

$$|z_k - \tilde{z}_k| \le \delta\left(1 + \left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right) =: (1 + c)\delta \qquad (k_0 < k \in \mathbf{N})$$

és

$$\max_{2<k\leq k_0} |z_k - \tilde{z}_k| \leq (1 + ck_0)\delta.$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett válasszuk a $\delta > 0$ számot úgy, hogy $(1 + ck_0)\delta < \varepsilon$, ekkor $|z_0 - \tilde{z}_0| < \delta$, $|z_1 - \tilde{z}_1| < \delta$ esetén egyúttal minden $k = 3, 4, ...$ indexre $|z_k - \tilde{z}_k| < \varepsilon$, tehát az egyenlet stabilis.

Ha $\lambda \neq \mu$, akkor mindkét gyök egyszeres, ezért most a stabilitási (elégséges) feltétel miatt $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$ és (a fenti jelöléseket megtartva)

$$z_k = w_k + \alpha\lambda^k + \beta\mu^k \quad , \quad \tilde{z}_k = w_k + \tilde{\alpha}\lambda^k + \tilde{\beta}\mu^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$|z_0 - \tilde{z}_0| = |\alpha - \tilde{\alpha} + \beta - \tilde{\beta}| \quad , \quad |z_1 - \tilde{z}_1| = |(\alpha - \tilde{\alpha})\lambda + (\beta - \tilde{\beta})\mu|,$$

ill.

$$|z_k - \tilde{z}_k| = |(\alpha - \tilde{\alpha})\lambda^k + (\beta - \tilde{\beta})\mu^k| \leq |\alpha - \tilde{\alpha}| + |\beta - \tilde{\beta}| \quad (2 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Tegyük fel, hogy $\delta > 0$, és $|z_0 - \tilde{z}_0| < \delta$, $|z_1 - \tilde{z}_1| < \delta$. Ekkor

$$\delta > |z_1 - \tilde{z}_1| = |(\alpha - \tilde{\alpha} + \beta - \tilde{\beta})\lambda + (\mu - \lambda)(\beta - \tilde{\beta})| \geq$$

$$|\mu - \lambda| \cdot |\beta - \tilde{\beta}| - |\alpha - \tilde{\alpha} + \beta - \tilde{\beta}| \cdot |\lambda| =$$

$$|\mu - \lambda| \cdot |\beta - \tilde{\beta}| - |z_0 - \tilde{z}_0| \cdot |\lambda|,$$

ezért

$$|\beta - \tilde{\beta}| < \frac{|\lambda| \cdot |z_0 - \tilde{z}_0| + \delta}{|\mu - \lambda|} < \frac{2\delta}{|\mu - \lambda|}.$$

Analóg módon kapjuk az

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| < \frac{2\delta}{|\mu - \lambda|}$$

becslést. Mindezt figyelembe véve azt mondhatjuk tehát, hogy

$$|z_k - \tilde{z}_k| < \frac{4\delta}{|\mu - \lambda|} \qquad (2 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $0 < \delta$-val $4\delta/|\mu - \lambda| < \varepsilon$, amiből

$$|z_k - \tilde{z}_k| < \varepsilon \qquad (2 \leq k \in \mathbf{N}),$$

tehát a szóban forgó esetben is következik a stabilitás.

Pl. a fentiekben idézett számtani-, mértani-, és Fibonacci-sorozatra a P karakterisztikus polinom rendre

$$P(x) = \begin{cases} x-1 \\ x-q \\ x^2-x-1 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{C}),$$

a gyökei 1, q, $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Itt az 1 és a q egyszeres gyök, ezért a számtani sorozatot meghatározó egyenlet stabilis, a mértani sorozattal kapcsolatos egyenletre pedig ugyanez akkor és csak akkor igaz, ha $|q| \leq 1$ (amint azt a stabilitási tétel megfogalmazása előtt láttuk). A „Fibonacci-esetben” viszont $(1+\sqrt{5})/2 > 1$, tehát ez az egyenlet instabilis.

2.3.1. Feladatok

1^o Adjuk meg az alábbi magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek valós értékű megoldásait:

a) $\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

b) $\varphi''(t) - 2\varphi'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

c) $2\varphi''(t) - 5\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$

d) $\varphi''(t) - 4\varphi'(t) + 5\varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

e) $\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 10\varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

f) $\varphi''(t) + \varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

g) $\varphi'''(t) - \varphi''(t) - \varphi'(t) + \varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$;

h) $\varphi'''(t) - 3\varphi''(t) + 3\varphi'(t) - \varphi(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$!

2^o Keressük meg a következő magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek valós értékű megoldásait:

a) $\varphi''(t) - 2\varphi'(t) + \varphi(t) = \dfrac{e^t}{t} \quad (t > 0)\,;$

b) $\varphi''(t) + 3\varphi'(t) + 2\varphi(t) = \dfrac{1}{e^t + 1} \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

c) $\varphi''(t) + \varphi(t) = \dfrac{1}{\sin\, t} \quad (0 < t < \pi)\,;$

d) $\varphi''(t) - 4\varphi'(t) + 3\varphi(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t} \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

e) $\varphi''(t) + 5\varphi'(t) + 4\varphi(t) = 3 - 2t - t^2 \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

f) $\varphi''(t) - 3\varphi'(t) + 2\varphi(t) = e^t + 2e^{3t} \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

g) $\varphi''(t) - 6\varphi'(t) + 13\varphi(t) = \sin(3t) \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

h) $\varphi''(t) + 4\varphi(t) = \cos(2t) \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

i) $\varphi''(t) - 2\varphi'(t) + a\varphi(t) = 1,$ ahol $a \in \mathbf{R}\,;$

j) $\varphi'''(t) - 4\varphi''(t) + 3\varphi(t) = te^{2t} \quad (t \in \mathbf{R})\,;$

k) $\varphi'''(t) - \varphi''(t) + \varphi'(t) - \varphi(t) = te^t \quad (t \in \mathbf{R})\,!$

3^o Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat:

a) $\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 5\varphi(t) = \dfrac{1}{e^t\cos(2t)} \quad (|t| < \pi/2)\,,$
$\varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(0) = 1\,;$

b) $\varphi''(t) - 8\varphi'(t) + 16\varphi(t) = t^2 \quad (t \in \mathbf{R})\,,$
$\varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(0) = 1\,;$

c) $\varphi''(t) + \varphi'(t) = 4e^t \quad (t \in \mathbf{R})\,,$
$\varphi(0) = 4\,,\ \varphi'(0) = -3\,;$

d) $\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 2\varphi(t) = te^{-t} \quad (t \in \mathbf{R})\,,$
$\varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(0) = 0\,;$

e) $\varphi'''(t) - \varphi'(t) = 0 \quad (t \in \mathbf{R})\,,$
$\varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(0) = -1, \varphi''(0) = 1\,;$

f) $\varphi'''(t) - 3\varphi'(t) - 2\varphi(t) = 9e^{2t} \quad (t \in \mathbf{R})\,,$
$\varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(0) = -3\,,\ \varphi''(0) = 3\,!$

4^o Határozzuk meg a következő hiányos másodrendű egyenletek, ill. kezdetiérték-problémák megoldásait:

a) $x\varphi''(x) - \varphi'(x) = x^3 \quad (x > 0)\,;$

b) $(x^2+1)\varphi''(x) + (\varphi'(x))^2 + 1 = 0 \quad (x > 0)\,;$

c) $\varphi''(x) - \frac{1}{x}\varphi'(x) = x\sin\,x \quad (x > 0)\,;$

d) $\varphi''(\varphi-1)=2(\varphi')^2$, $\varphi(0)=-1, \varphi'(0)=2$;

e) $\varphi''\varphi+(\varphi')^2-1=0$, $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0$;

f) $\varphi''=2\varphi\varphi'$;

g) $\varphi''\varphi-\varphi'+1=0$!

5^o Az alábbi f függvény esetén oldjuk meg a megfelelő Euler-Lagrange-egyenletet:

a) $f(x,u,w):=\sqrt{1+w^2}$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

b) $f(x,u,w):=x^2w^2$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

c) $f(x,u,w):=w(1+x^2w^2)$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

d) $f(x,u,w):=xw+w^2$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

e) $f(x,u,w):=3x^2u^2+2x^3uw$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$!

6^o Legyen $f(x,u,w):=u^2+\sqrt{1+w^2}$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$. Gondoljuk meg, hogy az Euler-Lagrange-egyenletre vonatkozó $y(x_i)=y_i$ $(i=1,2)$ peremfeltételek nem minden $x_i,y_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2)$ esetén teljesíthetők!

7^o Milyen $x_i,y_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2)$ mellett van az Euler-Lagrange-egyenletnek az $y(x_i)=y_i$ $(i=1,2)$ peremfeltételeknek megfelelő megoldása, ha

a) $f(x,u,w):=u^2+x^2w^2$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

b) $f(x,u,w):=u+xw$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

c) $f(x,u,w):=x-3u$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$;

d) $f(x,u,w):=x^2+w^2$ $((x,u,w)\in\mathbf{R}^3)$?

8^o Hol lehet lokális minimuma az $\mathcal{F}$ funkcionálnak, ha

a) $\mathcal{F}(y):=\int_0^{\pi/2}((y'(t))^2-y^2(t))\,dt$ $(y\in C^2[0,\pi/2],\ y(0)=0,$ $y(\pi/2)=1)$;

b) $\mathcal{F}(y):=\int_1^2 y'(t)(1+t^2)\,dt$ $(y\in C^2[1,2],\ y(1)=3,\ y(2)=5)$;

c) $\mathcal{F}(y) := \displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y'(t))^2}}{t}\,dt \quad (y \in C^2[1,2],\ y(1)=0,\ y(2)=1)$?

9^o Oldjuk meg a következő differenciaegyenleteket, ill. kezdetiérték-problémákat! Adjuk meg a valós értékű megoldásokat is:

a) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$;

b) $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$;

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$;

d) $x_{n+2} + x_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$;

e) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3 \quad (n \in \mathbf{N})$;

f) $3x_{n+2} + 2x_n = 4 \quad (n \in \mathbf{N})$;

g) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 4^n - n^2 \quad (n \in \mathbf{N})$;

h) $x_{n+2} - x_{n+1} + 6x_n = 4^n - n^2 \quad (n \in \mathbf{N}),\ x_0 = 1, x_1 = 2$;

i) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n \quad (n \in \mathbf{N}),\ x_0 = 1, x_1 = 3$!

10^o Bizonyítsuk be, hogy a $z_0 := 0,\ z_1 := 1,\ z_{k+2} - z_{k+1} - z_k = 0\ (k \in \mathbf{N})$ kezdetiérték-probléma megoldását jelentő (z_k) Fibonacci-sorozatra

$$z_k z_{k+2} - z_{k+1}^2 = (-1)^{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N})!$$

11^o Legyen valamely $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén

$$I_k(\alpha) := \int_0^\pi \frac{\cos(kt) - \cos(k\alpha)}{\cos t - \cos\alpha}\,dt \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mutassuk meg az alábbiakat:

- $I_0(\alpha) = 0,\ I_1(\alpha) = \pi,$ és
$$I_{k+2}(\alpha) - 2\cos\alpha I_{k+1}(\alpha) + I_k(\alpha) = 0 \qquad (k \in \mathbf{N});$$
- $I_k(\alpha) = \dfrac{\pi\sin(k\alpha)}{\sin\alpha} \quad (k \in \mathbf{N})$!

3. fejezet

Laplace-transzformált

3.1. A $\mathcal{D}_L$ függvényosztály

A matematikai modellezés alapvető eszköztárába tartoznak a különböző típusú transzformációs módszerek. Ezek közös jellemzője, hogy a szóban forgó feladat matematikai modelljét előzetesen „transzformáljuk”, elérve ezáltal azt, hogy a feladat, ill. a matematikai modell (pl. egyenlet) megoldásának a transzformáltját bizonyos értelemben egyszerűbben tudjuk meghatározni, mint magát a megoldást. Pl. a matematikai modell igen gyakran egy differenciál- (vagy integrál-) egyenletet jelent, amelynek a megoldása (azaz a kiindulási feladatban keresett függvény meghatározása) az eredeti alakjában sokszor „reménytelennek” tűnhet. Ugyanakkor (mint látni fogjuk) alkalmas transzformációval a szóban forgó (pl.) differenciálegyenlet az illető függvény transzformáltjára vonatkozó algebrai egyenletté alakítható, amely a legtöbbször már (relatíve) egyszerűen oldható meg. Ehhez előzetesen nyilván tisztázni kell az alkalmazott transzformáció és a függvények, a függvény- és algebrai-műveletek, ill. az egyéb matematikai operációk (pl. deriválás, integrálás, stb.) széles körének a viszonyát. Más szóval olyan eszköztárat kell felépíteni, amelynek a segítségével aztán a fent említett transzformáció már szinte rutinszerűen végezhető. Az eljárásnak persze akkor van értelme, ha a megoldás transzformáltjából aztán elő tudjuk állítani a keresett megoldást („inverz-transzformáció”). Megjegyezzük, hogy gyakran nem is magára a „megoldásra” vagyunk kiváncsiak, hanem csak annak bizonyos tulajdonságaira. Ezt is nagyban megkönnyítheti egy jól megválasztott transzformációs eljárás, feltéve, ha a utóbbinak bizonyos (pl. aszimptotikus) tulajdonságaiból következtetni tudunk a megoldás analóg jellemzőire. A klasszikus módszerek között említhető a *Fourier-transzformáció* és a *Laplace-transzformáció,* amelyek közül ebben a fejezetben az utóbbiról fogunk (messze nem teljes) áttekintést adni. Ehhez először azoknak a függvényeknek a körét írjuk le, amelyekre a később definiálandó Laplace-transzformációt alkalmazni tudjuk.

Legyen ti. $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre igazak az alábbiak:

1^o minden $b > 0$ mellett integrálható a $[0, b]$ intervallumon;

2^o van olyan $z \in \mathbf{C}$ komplex szám, amelyre

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}.$$

Jelöljük ezentúl az ilyen feltételeknek eleget tevő f függvények halmazát $\mathcal{D}_L$-lel. A továbbiakban az 1^o tulajdonságot – hacsak mást nem mondunk – mindig feltesszük a szóban forgó függvényekről.

3.1. Megjegyzések

i) Tegyük fel pl., hogy alkalmas $\gamma \in \mathbf{R}$, $K, c \geq 0$ számokkal minden $t \geq c$ pontban
$$|f(t)| \leq Ke^{\gamma t}.$$
Ekkor $f \in \mathcal{D}_L$. Ha ui. $z \in \mathbf{C}$, és $\operatorname{Re} z > \gamma$, akkor $t \geq c$ esetén
$$|f(t)e^{-tz}| = |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z} \leq Ke^{-t(\operatorname{Re} z-\gamma)}.$$
Következésképpen
$$\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-tz}|\,dt \leq \int_0^{c}|f(t)e^{-tz}|\,dt + K\int_c^{+\infty}e^{-t(\operatorname{Re} z-\gamma)}\,dt \leq$$
$$\max_{0\leq t\leq c}|e^{-tz}|\int_0^c|f(t)|\,dt + K\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_c^b e^{-t(\operatorname{Re} z-\gamma)}\,dt =:$$
$$\gamma + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{K}{\operatorname{Re} z-\gamma}\left(e^{-c(\operatorname{Re} z-\gamma)} - e^{-b(\operatorname{Re} z-\gamma)}\right)\right) =$$
$$\gamma + \frac{K}{\operatorname{Re} z-\gamma}e^{-c(\operatorname{Re} z-\gamma)} < +\infty,$$
azaz $\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-tz}|\,dt < +\infty$. Ezért az $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-tz}\,dt$ improprius integrál is konvergens. Jelöljük a jelen megjegyésben megfogalmazott feltételnek eleget tevő függvények halmazát $\mathcal{D}_L^\gamma$-val. Tehát $\mathcal{D}_L^\gamma \subset \mathcal{D}_L$. Világos, hogy tetszőleges korlátos f függvényre $f \in \mathcal{D}_L^0$.

ii) Legyen $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ az előbbi megjegyzésben szereplő függvény, $\beta > \gamma$, és $c < b < d$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq \beta$ esetén (az i)-ben látottakkal analóg módon)

$$\left|\int_b^d f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq K\int_b^d e^{-t(\operatorname{Re} z-\gamma)}\,dt =$$

$$\frac{K}{\operatorname{Re} z-\gamma}\left(e^{-b(\operatorname{Re} z-\gamma)} - e^{-d(\operatorname{Re} z-\gamma)}\right) \leq \frac{K}{\beta-\gamma}e^{-b(\beta-\gamma)}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $b_0 > c$ olyan, hogy $e^{-b_0(\beta-\gamma)} < \varepsilon$, akkor bármely $b_0 < b < d$ esetén

$$\left|\int_b^d f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq \frac{K\varepsilon}{\beta-\gamma}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq \beta\}$ félsíkon az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ improprius integrál egyenletesen konvergens. Az eddigiekből az is kiderült, hogyha $b > c$ tetszőlegesen rögzített, akkor

$$\left|\int_b^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq \frac{K}{\operatorname{Re} z-\gamma}e^{-b(\operatorname{Re} z-\gamma)} \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty).$$

Belátható, hogy

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$$

is teljesül. Ez különösen egyszerű, ha valamilyen $C > 0$ konstanssal $|f(t)| \leq C \quad (t \in [0,b])$. Ekkor ui.

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq C\int_0^b e^{-t\operatorname{Re} z}\,dt = C\frac{1-e^{-b\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \gamma),$$

ahol $\dfrac{1-e^{-b\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \to 0 \quad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$. Tehát $\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq 2\varepsilon$, hacsak $\operatorname{Re} z$ már elég nagy.

iii) Ha pl. $n \in \mathbf{N}$, és $h_n(t) := t^n \quad (t \geq 0)$, akkor h_n nyilván eleget tesz az i) megjegyzés feltételeinek, azaz $h_n \in \mathcal{D}_L$. Innen az is rögtön következik, hogy bármely P polinom esetén az $f(t) := P(t) \quad (t \geq 0)$ leszűkítés is $\mathcal{D}_L$-beli.

iv) Legyen P polinom, $\beta \in \mathbf{R}$, és $f(t) := P(t)e^{\beta t} \quad (t \geq 0)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}_L$. Ugyanakkor pl. megmutatható, hogy a $0 \leq t \mapsto e^{t^2} \quad (t \geq 0)$ vagy a $0 \leq t \mapsto e^{e^t}$ függvények egyike sem $\mathcal{D}_L$-beli.

v) Ha f *abszolút integrálható* $[0, +\infty)$-n, azaz az $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ integrál véges (röviden: $f \in L[0, +\infty)$), akkor bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ esetén

$$\left|f(t)e^{-tz}\right| = |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z} \leq |f(t)| \qquad (t \geq 0)$$

miatt a $0 \leq t \mapsto f(t)e^{-tz}$ függvény is abszolút integrálható. Ezért létezik (és véges) az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ integrál, azaz $f \in \mathcal{D}_L$.

vi) Az $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvény *exponenciális típusú,* ha van olyan $x \in \mathbf{R}$, hogy az $f_x(t) := f(t)e^{-tx} \quad (t \geq 0)$ függvény abszolút integrálható. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq x$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\,dt = \int_0^{+\infty} |f_x(t)|e^{t(x-\operatorname{Re} z)}\,dt \leq \int_0^{+\infty} |f_x(t)|\,dt < +\infty,$$

azaz a $0 \leq t \mapsto f(t)e^{-tz}$ függvény is abszolút integrálható. Következésképpen $f \in \mathcal{D}_L$. Ha tehát $\mathcal{D}_L^{\exp}$ jelöli a most definiált exponenciális típusú függvények halmazát, akkor $\mathcal{D}_L^{\exp} \subset \mathcal{D}_L$, továbbá nyilván $L[0, +\infty) \subset \mathcal{D}_L^{\exp}$, ill. $\mathcal{D}_L^{\gamma} \subset \mathcal{D}_L^{\exp} \quad (\gamma \in \mathbf{R})$.

vii) A későbbiek szempontjából alapvető fontosságú az a tény, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L$, ill. $z_0 \in \mathbf{C}$, és $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\,dt \in \mathbf{C}$, akkor bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ helyen $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}$. (Innen nyilvánvaló, hogy bármely $f, h \in \mathcal{D}_L$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ mellett $\alpha f + \beta h \in \mathcal{D}_L$.)

Csak folytonos f esetén vázolva a bizonyítást legyen

$$\varphi(t) := \int_0^t f(x)e^{-xz_0}\,dx \qquad (t \geq 0).$$

Ekkor a φ függvény minden $\tau \geq 0$ helyen differenciálható és $\varphi'(\tau) = f(\tau)e^{-\tau z_0}$. Ezért minden $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ és $b > 0$ mellett

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^b f(t)e^{-tz_0}e^{-t(z-z_0)}\,dt,$$

ahol parciálisan integrálva

$$\int_0^b f(t)e^{-tz_0}e^{-t(z-z_0)}\,dt = \varphi(b)e^{-b(z-z_0)} + (z - z_0)\int_0^b \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt =:$$

$$A(b) + B(b).$$

Mivel

$$\lim_{b\to+\infty} \varphi(b) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\,dt \in \mathbf{C}\ ,\ \lim_{b\to+\infty} |e^{-b(z-z_0)}| =$$

$$\lim_{b\to+\infty} e^{-b(\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0)}=0,$$

ezért $\lim_{b\to+\infty}\varphi(b)e^{-b(z-z_0)}=0$, azaz $\lim_{b\to+\infty}A(b)=0$. A φ függvény folytonos (is), és $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)\in\mathbf{C}$, ezért φ korlátos, így egy alkalmas K számmal

$$\int_0^b |\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}|\,dt\le K\int_0^b|e^{-t(z-z_0)}|\,dt=K\int_0^b e^{-t(\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0)}\,dt=$$

$$\frac{K}{\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0}\left(1-e^{-b(\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0)}\right)\to\frac{K}{\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0}\qquad(b\to+\infty).$$

Következésképpen létezik az $\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt\in\mathbf{C}$ integrál, azaz $\lim_{b\to+\infty}B(b)\in\mathbf{C}$, és

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt=\lim_{b\to+\infty}B(b)=$$

$$(z-z_0)\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt\in\mathbf{C}.$$

viii) Emeljük ki külön is az előző megjegyzés végén kapott egyenlőséget (az ottani szereplőkkel):

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt=(z-z_0)\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt\in\mathbf{C}.$$

ix) A 3.1. értelmezés 1^o feltételében „integrálhatóságon” az illető függvény Riemann-integrálhatóságára gondolunk. A Lebesgue-elméletet ismerők számára azonban az 1^o-beli „integrálhatóság” Lebesgue-integrálhatóságot is jelenthet. Ekkor pl. egy függvény akkor és csak akkor abszolút integrálható (ld. v)), ha Lebesgue-integrálható a $[0,+\infty)$ félegyenesen, ill. az $L[0,+\infty)$ függvényosztály nem más, mint a Lebesgue-féle $L^1[0,+\infty)$ függvénytér. Továbbá a vii) megjegyzésben a szóban forgó f függvényről a folytonosság helyett (az aktuális $[0,b]$ intervallumon) Lebesgue-integrálhatóságot feltételezve a fenti φ függvény abszolút folytonos lesz, így csupán majdnem mindenütt deriválható, de igaz marad a parciális integrálás szabálya.

3.2. Laplace-transzformált

Most már minden készen áll ahhoz, hogy értelmezni tudjuk a Laplace nevével fémjelzett transzformációs eljárást. Valamely $f \in \mathcal{D}_L$ esetén tekintsük ui. azt az

$$Lf \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

függvényt, amelyre

$$\mathcal{D}_{Lf} := \left\{ z \in \mathbf{C} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt \in \mathbf{C} \right\},$$

és

$$Lf(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt \qquad (z \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

Ha tehát $\mathcal{F}$ jelöli a $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvények halmazát, akkor $L : \mathcal{D}_L \to \mathcal{F}$. Az így definiált (függvényhez függvényt rendelő) L leképezést *Laplace-operátornak* nevezzük, Lf az $f \in \mathcal{D}_L$ függvény *Laplace-transzformáltja* (Euler (1737), Laplace (1782)). A 3.1. vii) megjegyzés szerint tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L$ esetén az Lf Laplace-transzformált legalább egy $\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z > x\}$ „jobb oldali" félsíkon értelmezve van (alkalmas $x \in \mathbf{R}$ mellett). Pl. a 3.1. i), ill. ii) megjegyzésében szereplő $f \in \mathcal{D}_L^{\gamma}$ függvényekre (az ottani jelölésekkel)

$$\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z > \gamma\} \subset \mathcal{D}_{Lf}.$$

Hasonlóan, ha $f \in L[0, +\infty)$, akkor a fent mondottak szerint

$$\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z \geq 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf},$$

ill. $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ esetén valamilyen (f-től függő) $x \in \mathbf{R}$ számmal szintén teljesül, hogy

$$\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z > x\} \subset \mathcal{D}_{Lf}.$$

Ha $f \in \mathcal{D}_L$, akkor legyen

$$q_f := \inf \left\{ x \in \mathbf{R} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt \in \mathbf{C} \quad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > x) \right\}.$$

Világos (ld. 3.1. vii) megjegyzés), hogy $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt \in \mathbf{C}$ bármely $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > q_f$ esetén, ill., ha $z \in \mathbf{C}$, és $\mathrm{Re}\, z < q_f$, akkor az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt$ integrál nem konvergens. Tehát

$$\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z > q_f\} \subset \mathcal{D}_{Lf} \subset \{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z \geq q_f\}.$$

Pl. tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ függvényre nyilván $q_f \le \gamma$. Továbbá tetszőleges $f, h \in \mathcal{D}_L$ függvényre és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ „együtthatóra”

$$q_{\alpha f+\beta h} \le \max\{q_f, q_h\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy $f \in \mathcal{D}_L$, $z \in \mathcal{D}_{Lf}$ esetén $\overline{z} \in \mathcal{D}_{Lf}$, és $\overline{Lf(z)} = Lf(\overline{z})$. Ti., ha $z = u + \imath v \quad (u, v \in \mathbf{R})$ és $t \ge 0$, akkor

$$\overline{e^{-tz}} = \overline{e^{-tu-\imath tv}} = e^{-tu}\cdot \overline{\cos(-tv) + \imath \sin(-tv)} =$$

$$e^{-tu}(\cos(tv) + \imath \sin(tv)) = e^{-tu}\cdot e^{\imath tv} = e^{-t(u-\imath v)} = e^{-t\overline{z}},$$

így

$$\overline{Lf(z)} = \int_0^{+\infty} f(t)\overline{e^{-tz}}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t\overline{z}}\, dt = Lf(\overline{z}).$$

Ha $f \in \mathcal{D}_L$, és valamely $z_0 \in \mathbf{C}$ mellett az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\, dt$ integrál *abszolút konvergens,* tehát $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\, dt < +\infty$, akkor minden $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \ge \operatorname{Re} z_0$ helyen az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt$ integrál is abszolút konvergens (következésképpen konvergens is, azaz egyúttal $z \in \mathcal{D}_{Lf}$. Ui.

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\, dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z}\, dt \le$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z_0}\, dt = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\, dt < +\infty.$$

A most mondottakból az is kiderült, hogy ekkor

$$|Lf(z)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\, dt \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z \ge \operatorname{Re} z_0).$$

Legyen

$$Q_f := \inf\left\{x \in \mathbf{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\, dt < +\infty \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > x)\right\}$$

(ahol $\inf\emptyset := +\infty$), akkor nyilván $q_f \le Q_f$, ill. bármely

$$z, v \in \mathbf{C}\ ,\ \operatorname{Re} z > Q_f\ ,\ \operatorname{Re} v < Q_f$$

esetén $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\, dt$ abszolút konvergens, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tv}\, dt$ nem abszolút konvergens.

A 3.1. i) megjegyzésben foglaltak szerint tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ függvényre $Q_f \leq \gamma$, ill. (ld. 3.1. v) megjegyzés) $f \in L[0, +\infty)$ esetén $Q_f \leq 0$. Világos, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ (ld. 3.1. vi) megjegyzés), azaz valamilyen $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}dt < +\infty,$$

akkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq x$ komplex számra az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ integrál az

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}dt < +\infty$$

becslés miatt abszolút konvergens. Ekkor tehát $Q_f < +\infty$. Igaz továbbá, hogy ha az f függvény $\mathcal{D}_L$-beli, és valamely $z \in \mathbf{C}$ számra az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ integrál abszolút konvergens, azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z}dt < +\infty$, akkor $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$.

3.2. Megjegyzések

i) Megmutatható, hogyha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, akkor

$$Lf(z) \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty),$$

és a fenti konvergencia $\mathbf{C} \ni z$-ben *egyenletes*: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|Lf(z)| < \varepsilon \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \delta)$. Az $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, feltétel miatt ui. van olyan $x \in \mathbf{R}$, amellyel

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tx}|\, dt < +\infty.$$

Válasszuk a $T > 0$ számot úgy, hogy

$$\int_0^{T} |f(t)e^{-tx}|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesüljön. (Feltéve, hogy a szóban forgó f függvényről Riemann-integrálhatóságot feltételezünk a $[0, b] \quad (0 < b \in \mathbf{R})$ intervallumokon. Ebben az esetben az f függvény korlátos (pl.) a $[0, 1]$ intervallumon, azaz valamilyen $K > 0$ számmal $|f(t)e^{-tx}| \leq K \quad (t \in [0, 1])$. Így bármely $0 < T \leq 1$ esetén

$$\int_0^{T} |f(t)e^{-tx}|\, dt \leq KT < \varepsilon/2,$$

ha $T < \varepsilon/(2K)$ is fennáll.) Ekkor bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > x$ helyen

$$|Lf(z)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}e^{-t(z-x)}\,dt\right| \le \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tx}|\cdot e^{-t(\operatorname{Re} z-x)}\,dt =$$

$$\int_0^T \cdots + \int_T^{+\infty} \cdots =: I_1(z) + I_2(z).$$

Világos, hogy

$$I_1(z) \le \int_0^T |f(t)e^{-tx}|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Továbbá

$$I_2(z) \le e^{-T(\operatorname{Re} z-x)} \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tx}|\,dt,$$

ahol $e^{-T(\operatorname{Re} z-x)} \to 0$ $(\operatorname{Re} z \to +\infty)$ miatt alkalmas $\delta > 0$ mellett a $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \delta$ helyeken $e^{-T(\operatorname{Re} z-x)}$ már olyan kicsi, hogy még

$$e^{-T(\operatorname{Re} z-x)} \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tx}|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

is igaz. Következésképpen ekkor $|Lf(z)| < \varepsilon$, amint állítottuk.

(Ha az itt szereplő f függvényről Lebesgue-integrálhatóságot feltételezünk (ld. 3.1. ix) megjegyzés), akkor a $[0,1]$ intervallumon való fenti korlátosság nem feltétlenül teljesül. Viszont $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, miatt (az előbbi x-szel) az

$$f_x(t) := f(t)e^{-tx} \qquad (t \ge 0)$$

függvény Lebesgue-integrálható a $[0,+\infty)$ félegyenesen. Ha tehát z olyan komplex szám, hogy $\operatorname{Re} z > x$, akkor

$$|Lf(z)| \le \int_0^{+\infty} |f_x(t)|e^{(x-\operatorname{Re} z)t}dt,$$

ahol bármely $t \ge 0$ mellett

$$f_x(t)e^{(x-\operatorname{Re} z)t} \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty),$$

és $|f_x(t)e^{(x-\operatorname{Re} z)t}| \le |f_x(t)|$. Alkalmazható tehát a Lebesgue-féle konvergencia-tétel:

$$\int_0^{+\infty} |f_x(t)|e^{(x-\operatorname{Re} z)t}dt \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty).)$$

Speciálisan: ha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, akkor alkalmas $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$Lf(z) \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \ge x, |z| \to +\infty).$$

Sőt, bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan α, β „határok”, hogy

$$|Lf(z)| < \varepsilon \qquad (z \in \mathbf{C},\, \operatorname{Re} z \geq \alpha,\, \operatorname{Im} z \geq \beta).$$

ii) Ha csak annyit tudunk, hogy $f \in \mathcal{D}_L$, és $z_0 \in \mathcal{D}_{Lf}$, akkor a következőt mondhatjuk: bármely $0 \leq \alpha < \pi/2$ esetén

$$Lf(z) \to 0 \qquad (z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0}, |z| \to +\infty),$$

ahol

$$\mathcal{D}_{\alpha,z_0} := \{w \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} w > \operatorname{Re} z_0,\, |\arg(w - z_0)| \leq \alpha\}.$$

Geometriailag $\mathcal{D}_{\alpha,z_0}$ a komplex számsíkon egy z_0 csúcspontú és α nyílásszögű szögtartomány.

iii) Belátható, hogyha $f \in \mathcal{D}_L, \varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor

$$\frac{Lf(z)}{\operatorname{Im} z} \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \geq q_f + \varepsilon, |\operatorname{Im} z| \to +\infty)$$

teljesül $\operatorname{Re} z$-ben egyenletesen. (A $q_f = -\infty$ esetben a fenti konvergencia tetszőleges „jobb oldali” félsíkban értendő.)

iv) Legyen $f(t) := \dfrac{1}{1+t^2}$ $(t \geq 0)$. Ekkor $0 \in \mathcal{D}_{Lf}$, ui. $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ a $z = 0$ helyen abszolút konvergens:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Következésképpen $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$. Ha viszont $z \in \mathbf{C}$, és $\operatorname{Re} z < 0$, akkor legyen $\operatorname{Re} z < a < 0$. Mivel bármely $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$f(t)e^{-at} \geq e^{-an}/(5n^2) \qquad (n \leq t \leq n+1),$$

ezért

$$\int_n^{n+1} f(t)e^{-at}\,dt \geq \frac{e^{-an}}{5n^2} \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

tehát $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,dt = +\infty$. Így $a \notin \mathcal{D}_{Lf}$, tehát egyúttal (ld. 3.1. vii) megjegyzés) $z \notin \mathcal{D}_{Lf}$. Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{D}_{Lf} = \{z \in \mathbf{R} : \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

v) Ha $g(t) := \dfrac{t}{1+t^2}$ $(t \geq 0)$, akkor $0 \notin \mathcal{D}_{Lg}$, ui.

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln(1+b^2) = +\infty.$$

A 3.1. vii) megjegyzés szerint ezért bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z < 0$ esetén $z \notin \mathcal{D}_{Lg}$, azaz

$$\mathcal{D}_{Lg} \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{0\}.$$

Megmutatható, hogy itt „$\subset$ " helyett „$=$ " is írható. Ez nyilván következik pl. abból, hogy tetszőleges $0 \neq y \in \mathbf{R}$ mellett $\imath y \in \mathcal{D}_{Lg}$, más szóval

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\imath yt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos(yt)}{1+t^2}\,dt - \imath\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(yt)}{1+t^2}\,dt \in \mathbf{C}.$$

Ismert, hogy az előbbi két (valós) improprius integrál konvergens.

vi) A fenti

$$\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > q_f\} \subset \mathcal{D}_{Lf} \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq q_f\}.$$

összefüggés szoros analógiát mutat a hatványsorokkal kapcsolatos jól ismert eredménnyel (ld. Cauchy-Hadamard-tétel). Nevezetesen, legyenek adottak az $a_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ „együtthatók", ill. az $a \in \mathbf{C}$ „középpont", és tegyük fel, hogy valamilyen $a \neq z_0 \in \mathbf{C}$ helyen létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n \in \mathbf{C}$ sorösszeg. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $|z-a| < |z_0-a|$ esetén is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \in \mathbf{C}$. Ha

$$R := \sup\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \in \mathbf{C} \quad (z \in \mathbf{C}, |z-a| < r)\},$$

akkor

$$K_R(a) \subset \Big\{z \in \mathbf{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n \in \mathbf{C}\Big\} \subset \overline{K_R(a)}.$$

vii) Legyen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *abszolút integálható* függvény (azaz az $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt$ integrál véges), ekkor minden $y \in \mathbf{R}$ esetén a $\mathbf{R} \ni t \mapsto g(t)e^{-\imath yt}$ függvény is nyilván abszolút integrálható, ezért létezik (és véges) a

$$\hat{g}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-\imath yt}\,dt \qquad (y \in \mathbf{R})$$

integrál is. Az így definiált $\hat{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvény a g függvény *Fourier-transzformáltja.* Ha

$$g_1(t) := g(-t) \quad , \quad g_2(t) := g(t) \qquad (t \geq 0),$$

akkor $g_1,\, g_2 \in L[0,+\infty)$, és

$$\hat{g}(y) := \int_{-\infty}^{0} g(t)e^{-\imath yt} + \int_{0}^{+\infty} g(t)e^{-\imath yt}\,dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} g(-t)e^{\imath yt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)e^{-\imath yt}\,dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} g_1(t)e^{\imath yt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} g_2(t)e^{-\imath yt}\,dt = Lg_1(-\imath y) + Lg_2(\imath y).$$

„Fordítva”, tegyük fel, hogy $f \in L[0,+\infty)$, $z \in \mathbf{C}$, $x := \operatorname{Re} z \geq 0$, $y := \operatorname{Im} z$, ekkor a

$$\Phi_{x,f}(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \\ f(t)e^{-xt} & (t \geq 0) \end{cases}$$

függvény a fenti értelemben abszolút integrálható, és

$$Lf(z) = Lf(x + \imath y) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-xt}e^{-\imath yt}\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x,f}(t)e^{-\imath yt}\,dt = \widehat{\Phi}_{x,f}(y).$$

viii) Legyen $f, g \in \mathcal{D}_L$. Az

$$f * g(x) := \int_{0}^{x} f(t)g(x-t)\,dt \qquad (x \geq 0)$$

függvényt f és g *konvolúciójának* nevezzük. Világos, hogy $f*g = g*f$. Speciálisan az $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$, $|g(t)| \leq Me^{\beta t}$ $(t \geq 0)$ feltételeknek (alkalmas $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}$, $K, M \geq 0$ paraméterekkel) eleget tevő $f, g \in \mathcal{D}_L$ függvényekre

$$|f * g(x)| \leq \int_{0}^{x} |f(t)||g(x-t)|\,dt \leq KMe^{\beta x} \int_{0}^{x} e^{(\alpha-\beta)t}\,dt =$$

$$\frac{KM}{\alpha - \beta}\left(e^{\alpha x} - e^{\beta x}\right) \leq \frac{KM}{|\alpha - \beta|}e^{\gamma x} \qquad (x \geq 0),$$

ahol $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$. Ha pl.

$\mathcal{D}_L^* := \{h \in \mathcal{D}_L : h$ korlátos minden $[a,b] \subset (0,+\infty)$ intervallumon$\}$,

akkor belátható, hogy bármely $f, g \in \mathcal{D}_L^*$ esetén $f * g \in \mathcal{D}_L^*$, és $f * g$ folytonos minden $x > 0$ helyen.

Legyen pl. $f(t) := \sqrt{t} \quad (t \geq 0)$. Ekkor

$$f * f(x) = \int_0^x \sqrt{t}\sqrt{x-t}\, dt = \frac{\pi x^2}{8} \qquad (x \geq 0),$$

ui. az integrandus grafikonja egy $(x/2, 0)$ középpontú és $x/2$ sugarú félkörív a koordinátasík $y \geq 0$ felében, így az integrál az illető félkör területe. Hasonlóan, legyen $g(t) := 1 \quad (t \geq 0)$, akkor bármely $f \in \mathcal{D}_L$ esetén

$$f * g(x) = \int_0^x f(t) g(x-t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt \qquad (x \geq 0),$$

ami nem más, mint az f függvény integrálfüggvénye. A 3.3. xi) megjegyzés szerint tehát (az ottani jelöléssel) az előbbi példában $f * g = \Psi$, tehát

$$L(f * g)(z) = L\Psi(z) = \frac{1}{z} Lf(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \max\{0, q_f\}).$$

Mivel (ld. 3.3.1. példa) $Lg(z) = \frac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$, ezért

$$L(f * g)(z) = Lf(z) Lg(z) \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > \max\{0, q_f\}).$$

Sőt, igaz az alábbi „konvolúciótétel”: ha $f, g \in \mathcal{D}_L^*$ és valamely $s \in \mathbf{C}$ esetén Lf, Lg abszolút konvergensek s-ben, azaz

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-ts}|\, dt \ , \ \int_0^{+\infty} |g(t)e^{-ts}|\, dt < +\infty,$$

akkor $L(f*g)$ is abszolút konvergens s-ben és bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} s$ esetén

$$L(f * g)(z) = Lf(z) Lg(z).$$

Innen az is rögtön következik, hogy tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} s$ mellett az $Lf(z)$, $Lg(z)$ helyettesítési értékeket definiáló integrálok is abszolút konvergensek. Ha csak Lf (vagy Lg) abszolút konvergens s-ben, és Lg (vagy Lf) csupán konvergens s-ben, akkor $L(f * g)$ is csak konvergens s-ben, az $L(f * g)(z) = Lf(z)Lg(z)$ „konvolúció-egyenlőség” pedig $z = s$-re és $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} s$ esetén teljesül.

ix) Például legyen $f(t) := \sqrt{t}$, $g(t) := \pi h_2(t)/8 = \pi t^2/8 \quad (t \geq 0)$, akkor a korábbi példáink alapján a következőket mondhatjuk: $f * f = g$, azaz

$$(Lf(z))^2 = L(f * f)(z) = Lg(z) =$$

$$\frac{\pi}{8} Lh_2(z) = \frac{\pi}{4z^3} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Ha itt $0 < z \in \mathbf{R}$, akkor

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-tz}\, dt = Lf(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{z}},$$

ezért általában is

$$Lf(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{z}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ahol $z = |z| e^{\imath\alpha} \quad (|\alpha| < \pi/2)$ esetén $\sqrt{z} := \sqrt{|z|} e^{\imath\alpha/2}$.

x) Tekintsük az

$$f(t) := \begin{cases} 0 & (t = 0) \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & (t > 0) \end{cases}$$

függvényt. Világos, hogy $f \in \mathcal{D}_L^*$, ill. $f * f(0) = 0$, és $x > 0$ esetén

$$f * f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{x - t}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xu}} \frac{x}{\sqrt{x(1 - u)}}\, du =$$

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1 - u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 y}\sqrt{1 - \sin^2 y}}\, dy = \pi,$$

tehát

$$f * f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ \pi & (x > 0). \end{cases}$$

Alkalmazzuk a fenti konvolúciótételt az f függvényre: ha $z \in \mathbf{C}$ és $\mathrm{Re}\, z > 0$, akkor (ld. 3.3.1.)

$$(Lf)^2(z) = L(f * f)(z) = \pi \int_0^{+\infty} e^{-\imath tz}\, dt = \frac{\pi}{z},$$

tehát $Lf(z) = \sqrt{\pi}/\sqrt{z}$.

xi) Speciális esetben látjuk be csupán a következő *egyértelműségi* tételt: tegyük fel, hogy a folytonos $f, g \in \mathcal{D}_L$ függvények, és valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén

$$Lf(z) = Lg(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > a).$$

Ekkor $f(t) = g(t) \quad (t \geq 0)$. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy ha $h \in \mathcal{D}_L$, h folytonos, és $Lh(z) = 0 \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > a)$, akkor $h(t) = 0 \ \ (t \geq 0)$. Sőt, azt látjuk be, hogy ha valamilyen $z_0 \in \mathbf{C}$, és $\mathbf{R} \ni \sigma > 0$ esetén

$$Lh(z_0 + n\sigma) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $h(t) = 0 \ \ (t \geq 0)$. Valóban (ld. 3.1. viii)), tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z >\ \operatorname{Re} z_0$ helyen

$$Lh(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)} dt$$

(ahol most $\varphi(t) := \int_0^t h(x) e^{-xz_0} dx \qquad (t \geq 0))$. Ezért azt mondhatjuk, hogy

$$Lh(z_0 + n\sigma) = n\sigma \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-tn\sigma} dt = 0 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A $\sigma t = -\ln x$, ill.

$$\psi(x) := \varphi(-(\ln x)/\sigma) \quad (0 < x \leq 1)\ ,\ \psi(0) := \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = Lh(z_0)$$

helyettesítéssel az előbbi egyenlőségekből

$$\int_0^1 x^k \psi(x)\, dx = 0 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

következik. Tehát a folytonos ψ függvény valamennyi momentuma zérus. Jól ismert, hogy ebből $\psi \equiv 0$ következik, amiből meg nyilván azt kapjuk, hogy $\varphi \equiv 0$. Mivel $0 = \varphi'(t) = h(t) e^{-tz_0} \ \ (t \geq 0)$, ezért innen $h(t) = 0 \ \ (t \geq 0)$ már adódik.

3.3. Speciális függvények Laplace-transzformáltja

Az alábbiakban néhány gyakran előforduló függvény Laplace-transzformáltját számítjuk ki. Vizsgáljuk továbbá bizonyos függvényátalakítások és a Laplace-transzformáció viszonyát. Ezzel mintegy „műveleti táblázatot" állíthatunk fel a Laplace-transzformációt illetően, amelynek az alkalmazások során lehet nagy hasznát venni.

3.3.1. Legyen $f(t) := 1 \quad (t \geq 0)$. Ekkor $0 \neq z \in \mathbf{C}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-tz}\,dt = \frac{1}{z}\left(1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-bz}\right) \in \mathbf{C}$$

azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{b\to+\infty}|e^{-bz}| = \lim_{b\to+\infty} e^{-b\,\mathrm{Re}\,z} = 0,$$

azaz, hogy $\mathrm{Re}\,z > 0$. Ezért $f \in \mathcal{D}_L$, $q_f = 0$, és

$$Lf(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z > 0).$$

Világos, hogy $0 \notin \mathcal{D}_{Lf}$, más szóval $\mathcal{D}_{Lf} = \{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\,z > 0\}$.

3.3.2. Tekintsük most az $f(t) := t \quad (t \geq 0)$ függvényt. Ha $0 \neq z \in \mathbf{C}$, akkor

$$\int_0^{+\infty} te^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\left[-t\frac{e^{-tz}}{z}\right]_0^b + \frac{1}{z}\int_0^b e^{-tz}\,dt\right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{z}be^{-bz} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}e^{-bz}\right] \in \mathbf{C}$$

most is azzal ekvivalens, hogy $\lim_{b\to+\infty} e^{-bz} = 0$, azaz, hogy $\mathrm{Re}\,z > 0$. Ekkor

$$Lf(z) = \frac{1}{z^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z > 0),$$

és $q_f = 0$. Nyilvánvaló, hogy $0 \notin \mathcal{D}_{Lf}$, tehát $\mathcal{D}_{Lf} = \{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\,z > 0\}$.

3.3.3. Az előbbi példa általánosításaként legyen $n \in \mathbf{N}$, és $h_n(t) := t^n$ $(t \geq 0)$. Mutassuk meg, hogy

$$Lh_n(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z > 0).$$

Az $n = 0, 1$ eseteket az előbbi példákban már „elintéztük”, ezért (ld. teljes indukció) elegendő az belátni, hogy

$$Lh_n(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad Lh_{n+1}(z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}} \qquad (n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0).$$

Valóban, parciálisan integrálva $\lim_{b\to+\infty} e^{-bz} = 0$ miatt

$$Lh_{n+1}(z) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-tz}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t^{n+1} e^{-tz}\, dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^{n+1}e^{-tz}}{z} \right]_0^b + \frac{n+1}{z} \int_0^b t^n e^{-tz}\, dt \right) = \frac{n+1}{z} Lh_n(z) =$$

$$\frac{n+1}{z} \frac{n!}{z^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

A most vizsgált példa speciális esete a

$$h_\alpha(t) := t^\alpha \qquad (-1 < \alpha \in \mathbf{R}, t > 0)$$

függvényosztálynak. Ekkor ui.

$$Lh_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} \qquad (z \in \mathbf{R}, \operatorname{Re} z > 0),$$

ahol

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad (x > 0)$$

a jól ismert *gamma-függvény* és a

$$\log \xi = |\xi| + \imath \arg \xi \qquad (0 \neq \xi \in \mathbf{C})$$

komplex logaritmus segítségével

$$z^\lambda := e^{\lambda \log z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \log z)^k}{k!} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}, \lambda \in \mathbf{C}).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (0 < x \in \mathbf{R}),$$

amiből pl. teljes indukcióval

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbf{N})$$

már egyszerűen következik.) A részletek mellőzésével annyit jegyzünk meg csupán, hogy $0 < x \in \mathbf{R}$ esetén (egyszerű helyettesítéssel)

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tx} dt = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},$$

ezért $(0, +\infty) \subset \mathcal{D}_{Lh_\alpha}$. Következésképpen (ld. 3.1. vii) megjegyzés) bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ komplex számra is $z \in \mathcal{D}_{Lh_\alpha}$.

3.3.4. Hasonlóan számíthatjuk ki az $f(t) := t^n e^t \quad (t \geq 0, n \in \mathbf{N})$ függvény Laplace-transzformáltját:

$$Lf(z) = \frac{n!}{(z-1)^{n+1}} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 1).$$

Ugyanis, ha $n = 0$, akkor

$$Lf(z) = L\exp(z) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(z-1)}\, dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-t(z-1)}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{e^{-t(z-1)}}{z-1} \right]_0^b \right) = \frac{1}{z-1} \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 1).$$

Az $n \to n+1$ „öröklődés" (ld. teljes indukció) igazolása:

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^t e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t(z-1)}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\int_0^b t^{n+1} e^{-t(z-1)}\, dt \right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^{n+1} e^{-t(z-1)}}{z-1} \right]_0^b + \frac{n+1}{z-1} \int_0^b t^n e^{-t(z-1)}\, dt \right) =$$

$$\frac{n+1}{z-1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t(z-1)}\, dt = \frac{n+1}{z-1} \frac{n!}{(z-1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(z-1)^{n+2}}.$$

3.3.5. Tekintsük azt az 1-szerint periodikus F függényt („négyszögjelet"), amelyre

$$F(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2) \\ 0 & (1/2 \leq t < 1), \end{cases}$$

és legyen $f(t) := F(t) \quad (t \geq 0)$. Ekkor bármely $b > 1$ esetén egyértelműen van olyan $n \in \mathbf{N}$, amelyre $n \leq b < n+1$. Két eset lehetséges:

1^o $b < n + 1/2$, ekkor tetszőleges $0 \neq z \in \mathbf{C}$ mellett

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1/2} e^{-tz}\,dt + \int_n^b e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-(k+1/2)z} - e^{-kz}\right) - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right) =$$

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kz} - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right),$$

ahol $\operatorname{Re} z > 0$ esetén

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kz} - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right) \to$$

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z(1-e^{-z})} = \frac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (b \to +\infty).$$

2^o $b \geq n + 1/2$, ekkor tetszőleges $0 \neq z \in \mathbf{C}$ mellett az 1^o esettel analóg módon

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1/2} e^{-tz}\,dt \to \frac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (b \to +\infty).$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy $Lf(z) = \dfrac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$.

3.3.6. Legyen $0 \neq \omega \in \mathbf{R}$, ekkor a

$$0 \leq t \mapsto \sin(\omega t) \quad , \quad 0 \leq t \mapsto \cos(\omega t)$$

függvények Laplace-transzformáltjai is könnyen kiszámíthatók. Pl.

$$\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt,$$

ahol $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ esetén

$$\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt = -\left[\frac{\sin(\omega t)e^{-tz}}{z}\right]_0^b + \frac{\omega}{z}\int_0^b \cos(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{\sin(\omega b)e^{-bz}}{z} - \frac{\omega}{z}\left[\frac{\cos(\omega t)e^{-tz}}{z}\right]_0^b - \frac{\omega^2}{z^2}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{\sin(\omega b)e^{-bz}}{z} - \frac{\omega\cos(\omega b)e^{-bz} - \omega}{z^2} - \frac{\omega^2}{z^2}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt,$$

ezért

$$\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\frac{z^2}{\omega^2+z^2}\frac{\omega - \omega\cos(\omega b)e^{-bz} - z\sin(\omega b)e^{-bz}}{z^2} \to \frac{\omega}{\omega^2+z^2} \qquad (b\to+\infty).$$

Tehát az $s_\omega(t) := \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$ függvényre

$$Ls_\omega(z) = \frac{\omega}{\omega^2+z^2} \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>0).$$

Ha $\mathrm{Re}\,z = 0$, akkor $z = \imath y \quad (y\in\mathbf{R})$, és $b>0$ esetén

$$\int_0^b \sin(\omega t)e^{-\imath ty}\,dt = \int_0^b \sin(\omega t)\cos(ty)\,dt - \imath\int_0^b \sin(\omega t)\sin(ty)\,dt.$$

A

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin(\omega t)\cos(ty)\,dt$$

határérték viszont nem létezik, tehát az $\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-\imath ty}\,dt$ improprius integrál sem létezik. Következésképpen $\imath y \notin \mathcal{D}_{Ls_\omega}$, így (ld. 3.1. vii) megjegyzés) $w\notin\mathcal{D}_{Ls_\omega}$, hacsak $w\in\mathbf{C}$, és $\mathrm{Re}\,w\leq 0$.

Hasonlóan kapjuk, hogy a $c_\omega(t) := \cos(\omega t) \quad (t\geq 0)$ függvényre

$$Lc_\omega(z) = \frac{z}{\omega^2+z^2} \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>0).$$

Speciálisan, ha $\omega = 1$, akkor a sin, cos függvények (valójában ezek leszűkítéseinek (a $[0,+\infty)$ félegyenesre) Laplace-transzformáltjai:

$$L\sin(z) = Ls_1(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>0),$$

$$L\cos(z) = Lc_1(z) = \frac{z}{1+z^2} \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>0).$$

3.3. Megjegyzések

i) Tetszőleges $f, g \in \mathcal{D}_L,\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ esetén

- $L(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha Lf(z) + \beta Lg(z) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf} \cap \mathcal{D}_{Lg})$;
- $L(\exp^\alpha f)(z) = Lf(z - \alpha) \quad (z - \alpha \in \mathcal{D}_{Lf})$;
- ha van olyan $T > 0$, hogy $f(t + T) = f(t) \quad (t \geq 0)$, akkor

$$\left(1 - e^{-Tz}\right) Lf(z) = \int_0^T f(t) e^{-tz}\, dt \qquad (z \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

Ti. az első állítás eléggé triviális. A második bizonyításához legyen $z \in \mathbf{C}$ olyan, hogy $z - \alpha \in \mathcal{D}_{Lf}$, ekkor

$$L(\exp^\alpha f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(z-\alpha)}\, dt = Lf(z - \alpha).$$

Végül számoljuk ki a harmadik állításbeli feltételek mellett $Lf(z)$-t $(z \in \mathcal{D}_{Lf})$:

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz}\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{nT} f(t) e^{-tz}\, dt.$$

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$\int_0^{nT} f(t) e^{-tz}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) e^{-tz}\, dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(t + kT) e^{-(t+kT)z}\, dt = \left(\int_0^T f(t) e^{-tz}\, dt \right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz}.$$

Az $\int_0^T f(t) e^{-tz}\, dt = 0$ esetben tehát $Lf(z) = 0$, és a szóban forgó állítás nyilván igaz. Ha $\int_0^T f(t) e^{-tz}\, dt$ nem nulla, akkor léteznie kell a

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-Tz}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-Tz}\right)^k \in \mathbf{C}$$

határértéknek. A $\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-Tz}\right)^k$ mértani sor tehát konvergens, így szükségképpen

$$\left|e^{-Tz}\right| = \left|e^{-T \cdot \mathrm{Re} z} \cdot e^{-\imath T \cdot \mathrm{Im} z}\right| = \left|e^{-T \cdot \mathrm{Re} z}\right| < 1,$$

tehát $\operatorname{Re} z > 0$, és

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-Tz}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-Tz}}.$$

Innen a vizsgált állításunk már következik.

ii) Példaként legyen rendre $f(t) := h_n(t) = t^n \quad (n \in \mathbf{N}, t \geq 0)$, $f := s_\omega$, vagy $f := c_\omega \quad (0 \neq \omega \in \mathbf{R})$. Ekkor az i) megjegyzés (és a korábbi példák) szerint (közvetlen számolással is könnyen ellenőrizhetően) az $\exp^\alpha f(t) = f(t)e^{\alpha t} \quad (t \geq 0)$ függvényekre a $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\alpha$ helyeken

$$L(\exp^\alpha h_n)(z) = \int_0^{+\infty} t^n e^{\alpha t} e^{-tz} dt = \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}},$$

$$L(\exp^\alpha s_\omega)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\sin(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{\omega}{\omega^2+(z-\alpha)^2},$$

$$L(\exp^\alpha c_\omega)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\cos(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{z-\alpha}{\omega^2+(z-\alpha)^2}.$$

iii) Az i) megjegyés harmadik állítását is illusztrálhatjuk az alábbi (elemi úton is könnyen kiszámolható) példával:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{\omega(1-e^{-2\pi z/\omega})}{\omega^2+z^2} \qquad (0 \neq \omega \in \mathbf{R},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Valóban, ha az említett állításban $f := s_\omega$, akkor T helyébe írható $2\pi/\omega$, ezért az Ls_ω-ra vonatkozó formula (ld. 3.3.6.) alapján kapjuk a fenti öszefüggést.

iv) Az i)-beli első állítás szerint a Laplace-transzformáció *additív* az alábbi értelemben: ha $n \in \mathbf{N}$, és $f_k \in \mathcal{D}_L \quad (k = 0, ..., n)$, továbbá valamilyen $x \in \mathbf{R}$ esetén $\mathcal{D} := \{\xi \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}\xi > x\} \subset \mathcal{D}_{Lf_k} \quad (k = 0, ..., n)$, akkor $\sum_{k=0}^n f_k \in \mathcal{D}_L$, és

$$L\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)(z) = \sum_{k=0}^n Lf_k(z) \qquad (z \in \mathcal{D}).$$

v) Legyen valamely $f \in \mathcal{D}_L$ és $a > 0,\ b \geq 0$ esetén

$$\delta_a f(t) := f(at) \quad , \quad \Delta_b f(t) := f(t+b) \qquad (t \geq 0),$$

ill.

$$\tau_b f(t) := \begin{cases} f(t-b) & (t \geq b) \\ \\ 0 & (0 \leq t < b). \end{cases}$$

Ekkor

- $L(\tau_b f)(z) = e^{-bz} Lf(z) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf});$
- $L(\delta_a f)(z) = \frac{1}{a} Lf(z/a) \quad (z/a \in \mathcal{D}_{Lf});$
- $L(\Delta_b f)(z) = e^{bz} \left(Lf(z) - \int_0^b f(t) e^{-tz} dt \right) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf}).$

Ha ui. $z \in \mathcal{D}_{Lf}$, ekkor

$$L(\tau_b f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t-b) e^{-tz}\, dt = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(t-b) e^{-tz}\, dt =$$

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^{c-b} f(t) e^{-(t+b)z}\, dt =$$

$$e^{-bz} \lim_{c \to +\infty} \int_0^{c-b} f(t) e^{-tz}\, dt = e^{-bz} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz}\, dt = e^{-bz} Lf(z).$$

Hasonlóan, ha $z \in \mathbf{C}$, és $z/a \in \mathcal{D}_{Lf}$, akkor

$$L(\delta_a f)(z) = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(at) e^{-tz}\, dt = \lim_{c \to +\infty} \int_0^{ac} f(t) e^{-tz/a} \frac{1}{a}\, dt =$$

$$\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz/a}\, dt = \frac{1}{a} Lf(z/a).$$

Végül

$$L(\Delta_b f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t+b) e^{-tz} dt = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(t+b) e^{-tz} dt =$$

$$\lim_{c \to +\infty} \int_b^{b+c} f(t) e^{-(t-b)z} dt =$$

$$e^{bz} \lim_{c\to+\infty} \left(\int_0^{b+c} f(t)e^{-tz}dt - \int_0^b f(t)e^{-tz}dt \right) =$$

$$e^{bz} \left(Lf(z) - \int_0^b f(t)e^{-tz}dt \right).$$

vi) Ha tehát $f \in \mathcal{D}_L$, $a > 0$, $b \geq 0$, és

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(at-b) & (t \geq b/a) \\ \\ 0 & (0 \leq t < b/a), \end{cases}$$

akkor

$$L\tilde{f}(z) = \frac{1}{a} e^{-bz/a} Lf(z/a) \qquad (z/a \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

Mindez másképp kifejezve: az

$$f_*(t) := e^{-bt/a} f(t/a) \qquad (t \geq 0)$$

jelöléssel

$$Lf(az+b) = \frac{1}{a} Lf_*(z) \qquad (az+b \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

vii) Tekintsük pl. az $f_a(t) := e^{at} \quad (t \geq 0)$ függvényt, ahol $a \in \mathbf{C}$. Ekkor bármely $z \in \mathbf{C}$ és $b > 0$ esetén

$$\int_0^b f_a(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^b e^{(a-z)t}\,dt = \begin{cases} b & (a = z) \\ \\ \dfrac{e^{(a-z)b}-1}{a-z} & (a \neq z). \end{cases}$$

Innen világos, hogy $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f_a(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C} \iff \mathrm{Re}\,(a-z) < 0$, azaz $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,a$, és ekkor

$$Lf_a(z) = \frac{1}{z-a}.$$

viii) Nyilvánvaló, hogy az előző megjegyzésbeli f_a függvényre

$$f_a = \delta_a \exp = \delta_a f_1.$$

Itt (ld. vii))

$$L\exp(z) = Lf_1(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1),$$

ezért v) alapján

$$Lf_a(z) = L\exp(z/a) =$$

$$\frac{1}{a}\cdot \frac{1}{z/a-1} = \frac{1}{z-a} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,(z/a) > 1 \iff \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, a).$$

ix) Legyen most valamely $a \in \mathbf{C}$ esetén $g_a(t) := te^{at} \quad (t \geq 0)$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy $g_a = h\exp^a$, ahol $h(t) := t \quad (t \geq 0)$. Mivel (ld. 3.3.2.)

$$Lh(z) = 1/z^2 \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ezért az i) megjegyzés alapján

$$Lg_a(z) = Lh(z-a) = \frac{1}{(z-a)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,(z-a) > 0)$$

(ahol $\mathrm{Re}\,(z-a) > 0 \iff \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, a$), amiről közvetlen számolással is könnyen meggyőződhetünk: tetszőleges $b > 0$ mellett

$$\int_0^b g_a(t)e^{-tz}\, dt = \int_0^b te^{t(a-z)}\, dt =$$

$$\begin{cases} b^2/2 & (a = z) \\ \dfrac{be^{b(a-z)}}{a-z} - \dfrac{e^{b(a-z)}}{(z-a)^2} + \dfrac{1}{(z-a)^2} & (a \neq z). \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b g_a(t)e^{-tz}\, dt \in \mathbf{C} \iff \lim_{b\to+\infty} \frac{be^{b(a-z)}}{a-z} =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{e^{b(a-z)}}{(a-z)^2} = 0 \iff \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, a,$$

és ekkor $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b g_a(t)e^{-tz}\, dt = Lg_a(z) = 1/(z-a)^2$.

x) Az előbbiekhez képest jóval bonyolultabb meggondolásokat igényel az alábbi állítás: bármely $f \in \mathcal{D}_L$ függvény, $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > q_f$ választással $Lf \in D^\infty\{z\}$, és

$$(Lf)^{(n)}(z) = (-1)^n L(h_n f)(z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-tz}\, dt \quad (n \in \mathbf{N})$$

(ahol - emlékeztetőül - $h_n(t) := t^n \quad (t \geq 0)$). Speciálisan az Lf Laplace-transzformált differenciálható és

$$(Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz}\, dt \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q_f).$$

(Teljes indukcióra hivatkozva egyébként az előbbi egyenlőségből nyilván következik tetszőleges $\mathbf{N} \ni n$-re is az állítás.) Ha tehát

$$\Phi(t,z) := f(t)e^{-tz} \qquad (t \geq 0, z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q_f),$$

akkor a Φ „kétváltozós” függvény segítségével $Lf(z) = \int_0^{+\infty} \Phi(t,z)\, dt$ („paraméteres integrál”), és

$$(Lf)^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \Phi(t,z)}{\partial z^n}\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > q_f).$$

Formálisan szólva „szabad az integráljel mögött deriválni”.

xi) Legyen $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $f \in D^n$ és tegyük fel, hogy $f^{(n)} \in \mathcal{D}_L$. Ekkor $f^{(k)} \in \mathcal{D}_L \quad (k = 0, ..., n-1)$ és

$$Lf^{(n)}(z) = z^n Lf(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) z^{n-k-1} \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > \max\{0, q_{f^{(n)}}\}).$$

A bizonyítás részleteit itt is mellőzve annyit jegyzünk meg csupán, hogy a teljes indukció módszerére hivatkozva csak az $n = 1$ esettel kell foglalkozni. Ekkor az állításunk a következő: ha $f' \in \mathcal{D}_L$, akkor $f \in \mathcal{D}_L$, és

$$Lf'(z) = zLf(z) - f(0) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \max\{0, q_{f'}\}).$$

(Parciálisan integrálva

$$Lf'(z) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f'(t) e^{-tz}\, dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\Big(f(b)e^{-bz}-f(0)+z\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\Big)=$$

$$\lim_{b\to+\infty} f(b)e^{-bz}-f(0)+z\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\Big(f(b)e^{-bz}\Big)-f(0)+zLf(z).$$

Elég tehát azt megmutatni, hogy $\lim_{b\to+\infty} f(b)e^{-bz}=0.$)

Analóg módon kapjuk az alábbi állítást: ha $f\in\mathcal{D}_L,\ \Psi(t):=\int_0^t f(x)\,dx$ $(t\geq 0)$, akkor $\Psi\in\mathcal{D}_L,$ és

$$L\Psi(z)=\frac{1}{z}Lf(z)\qquad(z\in\mathbf{C},\,\mathrm{Re}\,z>\max\{0,q_f\}).$$

xii) Ha $f\in\mathcal{D}_L^\gamma,\ f\in D$ és $f'\in\mathcal{D}_L,$ akkor az

$$Lf'(z)=zLf(z)-f(0)\qquad(z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>\gamma)$$

egyenlőség egyszerűen adódik:

$$Lf'(z)=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f'(t)e^{-tz}\,dt=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(f(b)e^{-bz}-f(0)+z\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right),$$

ahol $b\geq c$ esetén

$$\Big|f(b)e^{-tz}\Big|\leq Ke^{-b(\mathrm{Re}\,z-\gamma)}\to 0\qquad(b\to+\infty).$$

Tehát

$$Lf'(z)=-f(0)+z\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt=zLf(z)-f(0).$$

Megjegyezzük, hogy ha az $f\in\mathcal{D}_L^\gamma$ függvényről $f\in D$ helyett csak annyit teszünk fel, hogy a $t>0$ helyeken differenciálható, és létezik az

$$f(+0):=\lim_{t\to+0} f(t)$$

véges határérték, akkor

$$\int_0^b f'(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{a\to+0}\int_a^b f'(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\lim_{a\to+0}\Big(f(b)e^{-bz} - f(a)e^{-az}\Big) = f(b)e^{-bz} - f(+0)$$

miatt

$$Lf'(z) = zLf(z) - f(+0) \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z > \gamma)$$

adódik. Ha még $f'\in\mathcal{D}_L^\gamma$ is igaz, akkor (ld. 3.2. i) megjegyzés) azt kapjuk, hogy $\mathrm{Re}\,z\to+\infty$ esetén $Lf'(z)\to 0$. Ezért az előbbiek szerint

$$zLf(z)\to f(+0) \qquad (\mathrm{Re}\,z\to+\infty).$$

xiii) Legyen most $f\in\mathcal{D}_L$ olyan függvény, amelyre létezik az

$$f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t)\in\mathbf{C}$$

véges határérték. Ekkor tetszőleges $z\in\mathcal{D}_{Lf}$, $\mathrm{Re}\,z>0$ helyen

$$zLf(z) - f(+\infty) = z\int_0^{+\infty}(f(t)-f(+\infty))e^{-tz}\,dt.$$

Speciálisan, ha $f\in L[0,+\infty)$, azaz $\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt < +\infty$, akkor nyilvánvaló, hogy $f(+\infty)=0$. Továbbá bármely $z\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z\geq 0$ esetén $|Lf(z)|\leq\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$, tehát Lf korlátos a $\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}\,z\geq 0\}$ félsíkon. Így

$$\lim_{\mathrm{Re}\,z\geq 0,\,z\to 0}(zLf(z)) = 0$$

triviálisan teljesül.

xiv) Tegyük fel, hogy az $f:[0,+\infty)\to\mathbf{C}$ függvény differenciálható, $f'\in\mathcal{D}_L$, és létezik a véges $f(+\infty)$ határérték. Ekkor (ld. xi) megjegyzés) $Lf'(z) = zLf(z) - f(0)$ $(z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>0)$, azaz

$$zLf(z) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\,dt.$$

Ha itt f olyan, hogy

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z>0, z\to 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{z\to 0}\left(f'(t)e^{-tz}\right) dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f'(t)\, dt = \lim_{b\to+\infty} (f(b) - f(0)) = f(+\infty) - f(0),$$

akkor

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z>0, z\to 0} (zLf(z)) = f(+\infty).$$

Ez a helyzet pl., ha $K \geq 0, \gamma > 0,$ és alkalmas $c > 0$ mellett

$$|f'(t)| \leq Ke^{-\gamma t} \qquad (t \geq c).$$

3.4. Mellin-transzformáció

Tegyük fel, hogy a folytonos $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre valamely $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén teljesül a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\} \subset \mathcal{D}_g$ feltétel. Ha $x > \alpha$, $b > 0$, és

$$\ell_b(y) := x + \imath y \qquad (-b \leq y \leq b),$$

akkor legyen

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz := \lim_{b\to+\infty} \int_{\ell_b} g(z)\, dz$$

(ahol $\int_{\ell_b} g(z)\, dz$ a g függvénynek az ℓ_b (irányított) komplex útra („szakaszra") vett vonalintegrálját jelenti), feltéve, hogy ez a határérték létezik és $\mathbf{C}$-beli. Tehát (a vonalintegrál definíciója szerint)

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} g(\ell_b(y))\ell_b'(y)\, dy =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \imath g(x+\imath y)\, dy = \imath \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\imath y)\, dy.$$

Más szóval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\imath y)\, dy = \frac{1}{\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz,$$

ahol $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots := (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots := \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \ldots$ a szóban forgó improprius „integrál" ún. *Cauchy-féle főértéke* (*valor principalis*) .

A fenti integrálfogalmat alapul véve látható be az alábbi állítás, amely alapvető fontosságú az „inverz” Laplace-transzformációt illetően. Legyen ehhez $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, és

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\} \subset \mathcal{D}_F,$$

$F \in D\{z\} \quad (z \in \mathcal{D})$. Tegyük fel továbbá, hogy tetszőleges $0 < \delta$-ra a

$$\mathcal{D}_\delta := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha + \delta\}$$

zárt félsíkban $\lim_{z \in \mathcal{D}_\delta, |z| \to +\infty} F(z) = 0$, és minden $x \in \mathbf{R}$, $x > \alpha$ esetén az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + \imath y)|\, dy$$

integrál véges. Ekkor bármely $t \geq 0$ helyen az $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz$ integrálok is végesek és függetlenek $\alpha < x$-től, az

$$f(t) := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz \qquad (t \geq 0)$$

előírással definiált f függvény $\mathcal{D}_L$-beli (ahol tehát $\alpha < x$ tetszőleges), folytonos, és

$$Lf(z) = F(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \alpha).$$

3.4. Megjegyzések

i) Tehát azt írhatjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(z)e^{tz}\, dz \qquad (t \geq 0).$$

Ez az egyenlőség az ún. *Mellin-formula* (Riemann (1859), Mellin (1902)),

$$\frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz \qquad (t \geq 0)$$

az F függvény *Mellin-transzformáltja.*

ii) A tételben szereplő $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz$ integrálról a következőt mondhatjuk:

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz = \imath \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} F(x + \imath y)e^{t(x+\imath y)}\, dy =$$

$$\imath e^{tx} \cdot \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} F(x+\imath y)e^{\imath ty}\,dy.$$

Mivel

$$\int_{-b}^{b} |F(x+\imath y)e^{\imath ty}|\,dy = \int_{-b}^{b} |F(x+\imath y|\,dy \le \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+\imath y)|\,dy,$$

azaz

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} |F(x+\imath y)e^{t(x+\imath y)}|\,dy \le e^{tx} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+\imath y)|\,dy < +\infty,$$

ezért a szóban forgó (a fenti f-et meghatározó) impropríus integrál (abszolút) konvergens.

iii) Az $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz$ integrál $(\alpha <)x$-től való függetlensége egyszerűen belátható. Legyen ui. $\alpha < u < x$, és valamely $b > 0$ mellett

$$s_b(y) := u - \imath b + y(x-u)\ ,\ \tilde{s}_b(y) := x + \imath b + y(u-x) \quad (0 \le y \le 1),$$

$$\tilde{\ell}_b(y) := u - \imath y \qquad (-b \le y \le b),$$

ill. jelöljük φ-vel az $s_b, \ell_b, \tilde{s}_b, \tilde{\ell}_b$ (komplex) utak egyesítését (geometriailag egy téglalap kerülete pozitív körüljárással). Ekkor a Cauchy-alaptétel miatt

$$0 = \int_{\varphi} F(z)\,dz = \int_{s_b} F(z)\,dz + \int_{\ell_b} F(z)\,dz + \int_{\tilde{s}_b} F(z)\,dz + \int_{\tilde{\ell}_b} F(z)\,dz,$$

ahol (pl.)

$$\left| \int_{s_b} F(z)\,dz \right| \le \max_{z\in\mathcal{R}_{s_b}} |F(z)| \cdot (x-u).$$

Az F-re tett feltételek alapján minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan pozitív r szám, hogy

$$|F(\xi)| < \varepsilon \qquad (\xi \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,\xi \ge u,\ |\xi| > r).$$

Mivel $z \in \mathcal{R}_{s_b}$ esetén (valamilyen) $0 \le y \le 1$ mellett

$$|z| = |u - \imath b + y(x-u)| \ge b,$$

ezért $|F(z)| < \varepsilon$, hacsak $b > r$. Így egyúttal

$$\left|\int_{s_b} F(z)\,dz\right| \leq (x-u)\varepsilon \qquad (b > r),$$

tehát

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{s_b} F(z)\,dz = 0,$$

és analóg módon

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\tilde{s}_b} F(z)\,dz = 0.$$

Továbbá

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{l_b} F(z)\,dz = \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz,$$

és

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\tilde{\ell}_b} F(z)\,dz = -\int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz.$$

Mindebből $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz = \int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz$ már nyilván következik.

iv) Legyen $f, g \in \mathcal{D}_L^\gamma$, és tegyük fel, hogy az $F := Lf$ és az $F := Lg$ Laplace-transzformáltak teljesítik az előző tétel feltételeit (alkalmas α_f, α_g paraméterekkel). Más szóval tehát a Mellin-formula szerint

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(z)e^{tz}\,dz \qquad (x > \alpha_f, t \geq 0),$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lg(z)e^{tz}\,dz \qquad (x > \alpha_g, t \geq 0).$$

Ekkor a konvolúció-tétel mintegy megfordításaként azt kapjuk, hogy

$$L(fg)(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)Lg(z-\xi)\,d\xi \quad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > \alpha_f + \alpha_g),$$

ahol $x > \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$. Ui.

$$L(fg)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\cdot\int_0^{+\infty} g(t)e^{-tz}\left(\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)e^{t\xi}\,d\xi\right)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\cdot\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)\left(\int_0^{+\infty} g(t)e^{-t(z-\xi)}\,dt\right)d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\cdot\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)Lg(z-\xi)\,d\xi.$$

(Az $\int_0^{+\infty}\left(\ldots\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\ldots\,d\xi\right)dt = \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\ldots\left(\int_0^{+\infty}\ldots\,dt\right)d\xi$ integrálási sorrend felcserélhetőségét a szóban forgó integrálok „egyenletes” konvergenciája biztosítja.)

v) Mutassuk be a Mellin-transzformáció alkalmazását egy, a gyakorlat szempontjából is fontos speciális esetben. Ennek a megfogalmazásához tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha \ge 0$ esetén az

$$F : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\} \to \mathbf{C}$$

függvény differenciálható és alkalmas $n \in \mathbf{N}$, $c_1, ..., c_n \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$, $0 < a_1, ..., a_n \le 1$ paraméterekkel előállítható a következő alakban:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} + \frac{H(z)}{z^{1+\varepsilon}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \alpha),$$

ahol a $H : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\} \to \mathbf{C}$ függvény minden $\delta > 0$ esetén korlátos a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \ge \alpha + \delta\}$ zárt félsíkban. Ekkor az $\alpha < x$-től független

$$f(t) := \frac{1}{2\pi\imath}\cdot\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz \qquad (t \ge 0)$$

függvényre $f \in \mathcal{D}_L$, és $Lf = F$ igaz.

Ti. könnyű belátni, hogy az

$$F_1(z) := F(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \alpha)$$

függvényre teljesülnek a Mellin-transzformáció feltételei. Következésképpen $Lf_1 = F_1$, ahol

$$f_1(t) := \frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F_1(z) e^{tz} dz =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz} \left(F(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} \right) dz \qquad (t \geq 0).$$

Mivel itt $x > 0$, ezért a Mellin-transzformáció és 3.3.3. alapján

$$\frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz} \frac{c_k}{z^{a_k}} dz = \frac{c_k t^{a_k - 1}}{\Gamma(a_k)} \qquad (t \geq 0, k = 1, ..., n).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \cdot \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z) e^{tz} dz - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k t^{a_k - 1}}{\Gamma(a_k)} =:$$

$$f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k t^{a_k - 1}}{\Gamma(a_k)} \qquad (t \geq 0).$$

Innen viszont az következik, hogy tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \alpha$ helyen

$$F_1(z) = Lf_1(z) = Lf(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} = Lf(z) - (F(z) - F_1(z)),$$

tehát valóban $Lf = F$.

vi) Tegyük fel, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvényre valamilyen $x_0 \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx_0} dt < +\infty.$$

Ekkor nyilván

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx} dt < +\infty$$

is igaz tetszőleges $x \geq x_0$ mellett. Ha viszont $x > x_0$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\left(\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t(x-x_0)}e^{-tx_0}dt\right)^2 \leq$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-2t(x-x_0)}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx_0}dt\right) < +\infty,$$

hiszen

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t(x-x_0)}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-2t(x-x_0)}\,dt =$$

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{1-e^{-2c(x-x_0)}}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2(x-x_0)} < +\infty.$$

Mindez azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{D}_L$, ill. (ld. 3.2. vii) megjegyzés) a

$$\Phi_{x,f}(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t)e^{-xt} & (t \geq 0) \end{cases}$$

függvény abszolút integrálható, és

$$Lf(x+\imath y) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}e^{-\imath yt}\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x,f}(t)e^{-\imath yt}\,dt = \widehat{\Phi}_{x,f}(y) \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

A $\widehat{\Phi}_{x,f}$ Fourier-transzformáltra vonatkozó Parseval-egyenlőség szerint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_{x,f}(y)|^2\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\Phi}_{x,f}(y)\right|^2 dy,$$

más szóval az előbbiek alapján igaz a Laplace-transzformáltra vonatkozó

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Lf(x+\imath y)|^2 dy$$

Parseval-egyenlőség. Sőt, ennek mintegy általánosításaként, ha $f_k \in \mathcal{D}_L \quad (k=1,2)$, és alkalmas $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ számokkal

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx_k} dt < +\infty \ , \ \int_0^{+\infty} |f_k(t)|^2 e^{-2tx_k} dt < +\infty,$$

akkor a $z_k := x_k + \imath y \quad (y \in \mathbf{R},\ k=1,2)$ jelöléssel

$$(*) \ \int_0^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-t(z_1+\overline{z}_2)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(x_1+\imath y)\overline{Lf_2(x_2+\imath y)}\, dy.$$

Speciálisan, ha $z_1 := z_2 := 0$, amikor is az $f_k \quad (k=1,2)$ függvényekre

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)|\, dt < +\infty \ , \ \int_0^{+\infty} |f_k(t)|^2\, dt < +\infty,$$

akkor

$$\int_0^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(\imath y)\overline{Lf_2(\imath y)}\, dy.$$

Ha itt a bal oldal nulla, azaz (az előbbi „integrál-értelemben") f_1, f_2 *ortogonálisak* a $[0, +\infty)$ félegyenesen, akkor az $F_k(y) := Lf_k(\imath y)$ $(y \in \mathbf{R},\ k=1,2)$ függvények is ortogonálisak a számegyenesen (vagy másképp kifejezve az $Lf_k \quad (k=1,2)$ függvények az imaginárius tengelyen).

vii) Tekintsük pl. a jól ismert $P_n \ (n \in \mathbf{N})$ *Laguerre-polinomokat,* azaz a

$$g_n(t) := e^{-t} t^n \qquad (t \geq 0)$$

jelöléssel legyen

$$P_n(t) := \frac{e^t}{n!} g_n^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} \qquad (t \geq 0).$$

Ekkor az

$$l_n(t) := e^{-t/2}P_n(t) \qquad (n \in \mathbf{N}, t \geq 0)$$

ún. *Laguerre-függvények* ortogonális rendszert alkotnak az alábbi értelemben: tetszőleges $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ esetén

$$\int_0^{+\infty} l_n(t)l_m(t)\,dt = \int_0^{+\infty} P_n(t)P_m(t)e^{-t}dt = 0.$$

Világos, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ mellett (lévén P_n polinom)

$$\int_0^{+\infty} |l_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t/2}|P_n(t)|\,dt < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |l_n(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}|P_n(t)|^2 dt < +\infty.$$

Ezért vi) szerint az Ll_n $(n \in \mathbf{N})$ Laplace-transzformáltak rendszere is ortogonális az imaginárius tengelyen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ll_n(\imath y)\overline{Ll_m(\imath y)}\,dy = 0 \qquad (m, n \in \mathbf{N}, m \neq n).$$

Könnyen kiszámíthatjuk (ld. 3.3.3. és 3.3. i) megjegyzés) az itt szereplő Ll_n Laplace-transzformáltakat:

$$Ll_n(z) = LP_n(z + 1/2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(z+1/2)^{k+1}} =$$

$$\frac{1}{z+1/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{z+1/2}\right)^k = \frac{1}{z+1/2}\left(1 - \frac{1}{z+1/2}\right)^n =$$

$$\frac{(z-1/2)^n}{(z+1/2)^{n+1}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > -1/2,\ n \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\imath y - 1/2)^n}{(\imath y + 1/2)^{n+1}} \cdot \frac{(\imath y + 1/2)^m}{(1/2 - \imath y)^{m+1}}\,dy = 0 \qquad (m, n \in \mathbf{N}, m \neq n).$$

viii) Emlékeztetünk a speciális Malmquist–Takenaka-rendszerként adódott Laguerre-rendszerre (ld. 1.4. xv), xvi) megjegyzések): $a \in K_1(0)$, és

$$\Phi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\overline{a}z}\cdot\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n \qquad \left(z \in \overline{K_1(0)}, n \in \mathbf{N}\right).$$

Ha itt $0 \neq a \in \mathbf{R}$, akkor bármely $b \in \mathbf{R}$ mellett

$$\Phi_n(z+b) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a(z+b)}\cdot\left(\frac{z+b-a}{1-a(z+b)}\right)^n =$$

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{(-a)^{n+1}}\cdot\frac{(z+b-a)^n}{(z+b-1/a)^{n+1}} =$$

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{(-a)^{n+1}}\cdot\frac{(z-(a-b))^n}{(z+(ab-1)/a)^{n+1}} \qquad \left(z \in \overline{K_1(-b)}, n \in \mathbf{N}\right).$$

Könnyen látható, hogy alkalmas a-val és b-vel $a-b = (ab-1)/a = 1/2$, ti.

$$a := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;,\; b := -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Következésképpen

$$\Phi_n(z-\sqrt{5}/2) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{(-a)^{n+1}}\cdot\frac{(z-1/2)^n}{(z+1/2)^{n+1}} =$$

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{(-a)^{n+1}}\cdot Ll_n(z) =: c_n\cdot Ll_n(z) \qquad \left(z \in \overline{K_1(\sqrt{5}/2)},\ n \in \mathbf{N}\right)$$

vagy ugyanez másképp kifejezve:

$$\Phi_n(\xi) = c_n\cdot Ll_n(\xi+\sqrt{5}/2) \qquad \left(\xi \in \overline{K_1(0)},\ n \in \mathbf{N}\right)$$

A most kapott öszefüggés egyúttal magyarázza is az 1.4. xvi) megjegyzésbeli „Laguerre-rendszer” elnevezést.

ix) Tegyük fel, hogy az $f_k \in L[0, +\infty)$ $(k = 1, 2)$ függvényekre teljesül a vi) megjegyzésben megfogalmazott feltétel: valamilyen $s_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, 2)$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)|e^{-ts_k}dt < +\infty \ , \ \int_0^{+\infty} |f_k(t)|^2 e^{-2ts_k}dt < +\infty.$$

Legyen tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, ill. $s_1 \le u \le \operatorname{Re} z - s_2$, $s_2 \le v \le \operatorname{Re} z - s_1$ választással a vi)-beli $(*)$ egyenlőségben $z_1 := u$ és $z_2 := \overline{z} - u$. Ekkor a szóban forgó egyenlőség bal oldala: $\int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-tz}dt$, a jobb oldala:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(u + \imath y)Lf_2(\overline{z_2} - \imath y)\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(u + \imath y)Lf_2(z - (u + \imath y))\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{u-\infty}^{u+\infty} Lf_1(\xi)Lf_2(z - \xi)\, d\xi.$$

(Megjegyezzük, hogy az u-ra vonatkozó kikötés miatt $\operatorname{Re} z_1 = u \ge s_1$, továbbá $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z - u \ge s_2$. Ezért a vi)-beli feltételek teljesülnek az $x_1 := u$, $x_2 := \operatorname{Re} z - u$ választással.) Hasonló meggondolással kapjuk az utóbbi integrálra, hogy az nem más, mint

$$\frac{1}{2\pi}\int_{v-\infty}^{v+\infty} Lf_1(z - \xi)Lf_2(\xi)\, d\xi.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy minden $z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z \ge s_1 + s_2$ helyen létezik az $L(f_1 f_2)(z)$ Laplace-transzformált és az a következőképpen számítható ki:

$$L(f_1 f_2)(z) = \int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-tz}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} Lf_1(\xi)Lf_2(z - \xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{v-\imath\infty}^{v+\imath\infty} Lf_1(z - \xi)Lf_2(\xi)\, d\xi$$

(*komplex konvolúció*, ld. iv)).

x) Az i) megjegyzésben szereplő Mellin-formula alkalmazásához (azaz az ott szereplő F függvény Laplace-transzformáltjának a kiszámítására) számos „segédállítás” ismert. Pl. tegyük fel, hogy az $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény differenciálható, $\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$, valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén

$$\{a + \imath y \in \mathbf{C} : y \in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{D}_F,$$

míg a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < a\}$ félsíkon F legfeljebb véges sok pont kivételével van értelmezve. Ekkor bármely $t > 0$ szám mellett

$$\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{tz} F(z)\, dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{\xi_k} H,$$

ahol $\operatorname{res}_{\xi_k} H$ $(k = 1, ..., n\ (\in \mathbf{N}))$ jelenti a $H(z) := e^{tz}F(z) \quad (z \in \mathcal{D}_F)$ függvény ξ_k-beli $(\operatorname{Re}\xi_k < a)$ reziduumát.

Ui. mutassuk meg először, hogy bármely $t > 0$ mellett

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\, dz = 0,$$

ahol γ_r a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \le a\}$ félsíkban az $[a - r\imath, a + r\imath]$ szakaszra, mint átmérőre illesztett félkör. Legyen ehhez

$$\gamma_r(x) := a + re^{\imath x} \qquad (\pi/2 \le x \le 3\pi/2)$$

az említett félkör egy paraméterezése. Ha r már „elég nagy”, akkor a

$$\mu_r := \max\{|F(\gamma_r(x))| : \pi/2 \le x \le 3\pi/2\}$$

jelöléssel

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\, dz\right| = \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\gamma_r(x)} F(\varphi_r(x)) r\imath e^{\imath x}\, dx\right| \le$$

$$r\mu_r \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t(a+r\cos x)}\, dx = r\mu_r e^{ta} \int_0^{\pi} e^{-tr\sin y}\, dy =$$

$$2r\mu_r e^{ta} \int_0^{\pi/2} e^{-tr\sin y}\, dy.$$

A gyakran használt $\sin y \geq 2y/\pi \quad (0 \leq y \leq \pi/2)$ egyenlőtlenség alapján tehát

$$2r\mu_r e^{ta} \int_0^{\pi/2} e^{-tr\sin y}\,dy \leq 2r\mu_r e^{ta} \int_0^{\pi/2} e^{-2try/\pi}\,dy =$$

$$2r\mu_r e^{ta} \frac{\pi}{2tr} \left(1 - e^{-tr}\right).$$

Következésképpen

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi e^{ta}}{t} \mu_r.$$

Mivel a feltétel szerint $\mu_r \to 0 \quad (r \to +\infty)$, ezért az állításunk már következik.

Ha viszont a Γ_r szimbólum az előbbi γ_r félkör és az $[a - \imath r, a + \imath r]$ szakasz egyesítését jelenti (pozitív körüljárással), akkor („elég nagy” $r > 0$ mellett) a reziduum-tételből

$$\int_{\Gamma_r} H(z)\,dz = \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\,dz + \int_{a-\imath r}^{a+\imath r} e^{tz} F(z)\,dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{\xi_k} H.$$

A bizonyítás elején mondottak miatt itt $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\,dz = 0$, tehát

$$\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} H(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{a-\imath r}^{a+\imath r} e^{tz} F(z)\,dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{\xi_k} H.$$

xi) A részletek mellőzésével jegyezzük meg, hogy az előbbiekben szereplő „függőleges” félsíkok kicserélhetők „vízszintes” félsíkokra, amikor is a bizonyítások analóg módon végezhetők. Pl. legyen az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény differenciálható, $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, $\mathbf{R} \subset \mathcal{D}_f$, míg a

$$\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

félsíkon f legfeljebb véges sok pont kivételével van értelmezve. Ekkor bármely $t > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} f(x)\, dx = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{\xi_k} g,$$

ahol a ξ_k-k $(k = 1, ..., n\,(\in \mathbf{N}))$ a $g(z) := e^{\imath tz} f(z)$ $(z \in \mathcal{D}_f)$ függvény szinguláris helyei a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ félsíkban.

Példaként tekintsük az

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2}\, dx \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

integrált, ill. annak a kiszámítását. Az Euler-formula miatt

$$I = \mathrm{Re}\, \tilde{I} := \mathrm{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\imath ax}}{x^2 + b^2}\, dx \right).$$

Az itt szereplő

$$f(x) := \frac{1}{x^2 + b^2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

valós függvény „analitikus kiterjesztése” (az ugyancsak f-fel jelölt)

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + b^2} \qquad (\pm\imath b \neq z \in \mathbf{C})$$

függvény, amelynek a $\{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ „felső félsíkban” az egyetlen szinguláris helye: $\xi := \imath b$. Mindebből adódóan $\tilde{I} = 2\pi\imath\, \mathrm{res}_\xi g$, ahol

$$g(z) := e^{\imath az} \frac{1}{(z + \imath b)(z - \imath b)} = \frac{e^{\imath az}}{2\imath b} \left(\frac{1}{z - \imath b} - \frac{1}{z + \imath b} \right) =$$

$$\frac{e^{\imath az}}{2\imath b(z - \imath b)} - \frac{e^{\imath az}}{2\imath b(z + \imath b)} \qquad (\pm\imath b \neq z \in \mathbf{C}).$$

A $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > -b\} \ni z \mapsto \dfrac{e^{\imath az}}{2\imath b(z + \imath b)}$ függvény differenciálható, ezért

$$\mathrm{res}_\xi g = \frac{1}{2\imath b} e^{\imath az}_{|_{z=\imath b}} = \frac{1}{2\imath b} e^{-ab}.$$

Következésképpen

$$I = \mathrm{Re}\, \tilde{I} = 2\pi\imath \frac{1}{2\imath b} e^{-ab} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

xii) Folytatva az alkalmazások sorát tegyük most fel, hogy a differenciálható $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre $F(z) \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$ teljesül és alkalmas $R > 0, c_n \in \mathbf{C} \quad (n \in \mathbf{N})$ paraméterekkel

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z| > R),$$

(azaz F a ∞ egy „megfelelő környezetében" Laurent-sorba fejthető). Ekkor az

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \qquad (t \geq 0)$$

utasítással értelmezett f függvény $\mathcal{D}_L$-beli, és

$$Lf(z) = F(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > R).$$

Ui. a c_n $(n \in \mathbf{N})$ Laurent-együtthatókra tetszőleges $r > R$ mellett

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\{|z|=r\}} F(z) z^{n-1}\, dz \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát $|c_n| \leq M_r r^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol M_r olyan, hogy $|F(z)| \leq M_r/r$, hacsak $z \in \mathbf{C}$, $|z| \geq r$. (Mivel $F(z) \to 0 \quad (|z| \to \infty)$, ezért ilyen M_r létezik.) Következésképpen

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1}| \frac{t^n}{n!} \leq M_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} = M_r e^{rt} \qquad (t \geq 0),$$

tehát $f \in \mathcal{D}_L^r$. Ezért bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > r$ esetén

$$\left| f(t) e^{-tz} \right| \leq M_r e^{-(\operatorname{Re} z - r)t} \qquad (t > 0).$$

Mivel a $0 < t \mapsto e^{-(\operatorname{Re} z - r)t}$ függvény $L(0, +\infty)$-beli, így (ld. 3.3.3.)

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-tz}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},$$

ezért $f \in \mathcal{D}_L$ és $Lf(z) = F(z) \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > R)$.

xiii) Pl. mutassuk meg, hogy ha $f(t) := \sin(2\sqrt{t}) \quad (t \geq 0)$, akkor

$$Lf(z) = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{\pi}{z}}e^{-1/z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Ehhez fejtsük sorba az f függvényt:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{n+1/2}.$$

A $g_n(t) := t^{n+1/2} \quad (t \geq 0,\ n \in \mathbf{N})$ függvényekre (ld. 3.3.3.)

$$Lg_n(z) = \frac{\Gamma(n+3/2)}{z^{n+3/2}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0),$$

ahol $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ alapján teljes indukcióval

$$\Gamma(n+3/2) = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$Lf(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} Lg_n(z) = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^{n+3/2}} =$$

$$\frac{1}{z}\sqrt{\frac{\pi}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{\pi}{z}}e^{-1/z}.$$

3.5. Alkalmazások

A Laplace-transzformált alkalmazásait illetően tekintsük az alábbi feladatokat.

3.5.1. Speciális kezdetiérték-problémák

Adott $0 < n \in \mathbf{N}, f \in \mathcal{D}_L,\ a_0, ..., a_n \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$ mellett oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \geq 0) \\ \\ y^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., n-1). \end{cases}$$

Feltesszük, hogy $y^{(n)} \in \mathcal{D}_L$, ekkor (ld. 3.3. xi) megjegyzés) egy alkalmas $q \in \mathbf{R}$ esetén

$$Ly^{(k)}(z) = z^k Ly(z) - \sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(0) z^{k-j-1} = z^k Ly(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\, \operatorname{Re} z > q),$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^k Ly(z) \right) = Lf(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\, \operatorname{Re} z > q).$$

Ha

$$P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (z \in \mathbf{C})$$

(a szóban forgó differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomja*), akkor

$$Ly(z)P(z) = Lf(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\, \operatorname{Re} z > q).$$

Innen (pl. Mellin-transzformációval) az y függvény meghatározható.

Különösen egyszerű esettel állunk szemben, ha az előbbi P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek. Ekkor alkalmasan megadott $d_j \in \mathbf{C}$ $(j = 1, ..., n)$ számokkal (parciális törtekre bontással)

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{z - \xi_j} \qquad (z \in \mathbf{C}, P(z) \neq 0).$$

Itt $k = 1, ..., n$ esetén valamilyen $r_k > 0$ mellett

$$d_k + \sum_{k \neq j=1}^{n} \frac{d_j (z - \xi_k)}{z - \xi_j} = \frac{z - \xi_k}{P(z)} = \frac{1}{\frac{P(z) - P(\xi_k)}{z - \xi_k}} \qquad (z \in \mathbf{C},\, 0 < |z - \xi_k| < r_k),$$

ahonnan

$$\lim_{z \to \xi_k} \sum_{k \neq j=1}^{n} \frac{d_j (z - \xi_k)}{z - \xi_j} = 0 \ , \quad \lim_{z \to \xi_k} \frac{P(z) - P(\xi_k)}{z - \xi_k} = P'(\xi_k) \neq 0$$

miatt $d_k = 1/P'(\xi_k)$. Tehát $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{q,\, \operatorname{Re} \xi_1, ...,\, \operatorname{Re} \xi_n\}$ esetén

$$Ly(z) = Lf(z) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_k)(z - \xi_j)} = Lf(z) LQ(z),$$

ahol

$$Q(t) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} e^{t\xi_j} \qquad (t \geq 0).$$

Következésképpen (ld. 3.2. viii) megjegyzés) $y = f * Q$. Oldjuk meg a fentiek szerint pl. az alábbi (teszt)feladatot (ld. 2.3.):

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t \qquad (t \geq 0), \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$P(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

ill. $P'(z) = 2z - 3$ $(z \in \mathbf{C})$ miatt $P'(1) = -1$ és $P'(2) = 1$. Ezért

$$Q(t) = -e^t + e^{2t} \qquad (t \geq 0),$$

így

$$y(x) = f * Q(x) = \int_0^x (x-t)(e^{2t} - e^t)\, dt = \frac{e^{2x}}{4} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha a P polinom gyökei között azonosak is vannak, akkor (valamilyen $p = 1, ..., n$ esetén) legyenek a páronként különböző gyökök $\xi_1, ..., \xi_p$, rendre a $\mu_1, ..., \mu_p$ multiplicitással. (Ekkor tehát minden $m = 1, ..., p$ indexre $\mu_m \in \{1, ..., n\}$, és $\sum_{m=1}^{p} \mu_m = n$.) Ez azt jelenti, hogy alkalmas $c_{im} \in \mathbf{C}$ $(m = 1, ..., p,$ ill. $i = 1, ..., \mu_m)$ együtthatókkal az $1/P$ hányadosra a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(z - \xi_m)^i} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}).$$

Az itt szereplő c_{im}-ekről a következőket tudjuk mondani: legyen $l = 1, ..., p$, és

$$z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_{l-1}, \xi_{l+1}, ..., \xi_n\}$$

esetén

$$R_l(z) := \sum_{j=0}^{\mu_l - 1} c_{\mu_l - j l}(z - \xi_l)^j + (z - \xi_l)^{\mu_l} \sum_{l \neq m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(z - \xi_m)^i} =:$$

$$\sum_{j=0}^{\mu_l - 1} c_{\mu_l - j l}(z - \xi_l)^j + (z - \xi_l)^{\mu_l} Q_l(z).$$

Ekkor

$$R_l(z)=\frac{(z-\xi_l)^{\mu_l}}{P(z)}\qquad (z\in\mathbf{C}\setminus\{\xi_1,...,\xi_n\}),$$

ill. megfelelő $r>0$ mellett a $K_r(\xi_l)$ körlemezen a Q_l függvény nyilván differenciálható. Ezért $K_r(\xi_l)$-en Taylor-sorba fejtve azt mondhatjuk, hogy

$$R_l(z)=\sum_{j=0}^{\mu_l-1}c_{\mu_l-jl}(z-\xi_l)^j+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^{(k)}(\xi_l)}{k!}(z-\xi_l)^{k+\mu_l}=$$

$$\sum_{j=0}^{\mu_l-1}c_{\mu_l-jl}(z-\xi_l)^j+\sum_{k=\mu_l}^{\infty}\frac{Q^{(k-\mu_l)}(\xi_l)}{(k-\mu_l)!}(z-\xi_l)^{k}\qquad (z\in K_r(\xi_l)).$$

Ez utóbbi sorfejtés nem más, mint az R_l függvény ξ_l-körüli Taylor-sora, így

$$c_{\mu_l-jl}=\frac{R_l^{(j)}(\xi_l)}{j!}\qquad (j=0,...,\mu_l-1).$$

Ha tehát $m=1,...,p$ és $i=1,...,\mu_m$, akkor

$$L\left(\frac{\exp^{\xi_m}h_{i-1}}{(i-1)!}\right)(z)=\frac{1}{(z-\xi_m)^i}\qquad (z\in\mathbf{C},\,\mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,\xi_m),$$

ahol $h_{i-1}(t):=t^{i-1}$ $(t\geq 0)$. Ezért az $1/P$ függvény előbbi parciális törtekre bontott alakjából $z\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z>$ $\mathrm{Re}\,\xi_m$ $(m=1,...,p)$ esetén

$$\frac{1}{P(z)}=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}L\left(\frac{c_{im}\exp^{\xi_m}h_{i-1}}{(i-1)!}\right)(z).$$

Következésképpen a

$$Q(t):=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}\frac{c_{im}}{(i-1)!}e^{t\xi_m}t^{i-1}\qquad (t\geq 0)$$

függvénnyel $LQ=1/P$, és $y=f*Q$.

Tekintsük pl. az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} y'''(t)-4y''(t)+5y'(t)-2y(t)=t \qquad (t\geq 0),\\[2ex] y(0)=y'(0)=y''(0)=0.\end{cases}$$

Ebben a feladatban a karakterisztikus polinom a következő:

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-1)^2(z-2) \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

Továbbá

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{1,2\}),$$

amiből a Q-ra kapott előző formula alapján

$$Q(t) = e^{2t} - (t+1)e^t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$y(x) = f * Q(x) = \int_0^x (x-t)(e^{2t} - (t+1)e^t)dt =$$

$$\frac{e^{2x}}{4} + (1-x)e^x - \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

3.5.2. Lineáris differenciaegyenletek

Vizsgáljuk először a „folytonos” esetet: adott $f \in \mathcal{D}_L$ függvény, $n \in \mathbf{N}$ és $c_0, ..., c_n \in \mathbf{C}$, $c_n \neq 0$ mellett keressünk olyan $y : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvényt, amelyre

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} c_k y(t+k) = f(t) \qquad (t \geq 0).$$

Feltesszük, hogy az y függvény „kezdeti értékei”, az $y(t) \quad (0 \leq t < n)$ helyettesítési értékek ismertek. Az $n = 0$ eset nyilván érdektelen, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $n > 0$. Az is nyilván feltehető, hogy $c_0 \neq 0$. Elsőként az $y(t) = 0$ $(0 \leq t < n)$ „kezdeti feltétellel” élve abból indulunk ki, hogy $y \in \mathcal{D}_L$. Világos, hogy a $(*)$ „egyenlet” egyértelműen meghatározza y-t, hiszen a $j = 0, 1, ...$ választással

$$y(t+n) = \frac{1}{c_n}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k y(t+k)\right) \qquad (j \leq t < j+1),$$

amiből a „kezdeti feltételt” figyelembe véve teljes indukcióval kapjuk az y függvény értékeit valamennyi $[j, j+1)$ intervallumon, azaz $[0, +\infty)$-en. Speciálisan

$$y(t) = \frac{1}{c_n} f(t-n) \qquad (n \leq t < n+1).$$

A 3.3. v) megjegyzés szerint $(*)$-ból alkalmas $q > 0$ választással

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz} \left(Ly(z) - \int_0^k y(t)e^{-tz}dt \right) =$$

$$Ly(z) \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz} = P(e^z)Ly(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q)$$

következik, ahol

$$P(s) := \sum_{k=0}^{n} c_k s^k \qquad (s \in \mathbf{C})$$

(a szóban forgó $(*)$ differenciaegyenlet *karakterisztikus polinomja*). Tegyük fel először, hogy a P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek. Ekkor (ld. 3.5.1.)

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)(z - \xi_j)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}),$$

így a fentiek szerint

$$Ly(z) = \frac{Lf(z)}{P(e^z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Lf(z)}{P'(\xi_j)(e^z - \xi_j)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\},\ \operatorname{Re} z > q).$$

Az $Lf(z)/(e^z - \xi_j)$ $(j = 1, ..., n)$ hányadosakat $|\xi_j e^{-z}| < 1$, azaz $|\xi_j| < e^{\operatorname{Re} z}$ $(j = 1, ..., n)$ esetén (ami feltehető)

$$\frac{Lf(z)}{e^z - \xi_j} = Lf(z)e^{-z} \frac{1}{1 - \xi_j e^{-z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} Lf(z) e^{-kz}$$

alakban írva a 3.3. v) megjegyzés alapján

$$\frac{Lf(z)}{e^z - \xi_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} L(\tau_k f)(z)$$

adódik. Ezért azt mondhatjuk, hogy

$$Ly(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} L(\tau_k f)(z).$$

Feltételezzük, hogy a fenti második szummában (végtelen sorban) az összegzés és az L operátor felcserélhető. Ez a helyzet pl. akkor, ha $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$. Ekkor tehát $z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, $\operatorname{Re} z > q$ esetén

$$Ly(z) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} \tau_k f\right)(z).$$

Más szóval

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < n) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} \tau_k f(t) & (t \ge n). \end{cases}$$

Figyelembe véve a $\tau_k f(t)$ jelentését, azt is írhatjuk, hogy

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < n) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} & (t \ge n). \end{cases}$$

Ha

$$Q(t) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} e^{t\xi_j} \qquad (t \ge 0),$$

akkor nyilván

$$(**) \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < n) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) Q^{(k-1)}(0) & (t \ge n). \end{cases}$$

Belátható, hogy az előbbi „megoldó képlet” érvényben marad akkor is, ha a $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökök között vannak azonosak, feltéve, hogy Q eleget tesz az $LQ = 1/P$ összefüggésnek.

Tekintsük most a $(*)$ differenciaegyenlet „homogén” változatát tetszőleges „kezdeti feltétel” mellett: $f \equiv 0$, így

$$\sum_{k=0}^{n} c_k y(t+k) = 0 \qquad (t \ge 0),$$

ahol adottak az $y(t)$ $(0 \le t < n)$ függvényértékek. Az előbbiekben látottaknak megfelelően most

$$P(e^z) Ly(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \int_0^k y(t) e^{-tz} dt = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} Ly_k(z),$$

azaz (feltéve, hogy a P polinom valamennyi gyöke egyszeres)

$$Ly(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_j^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=1}^{k} \xi_j^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_j^{l-1} L(\tau_{l-k} y_k)(z) =:$$

$$A(z) + B(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q),$$

ahol $y_k(t) := y(t) \quad (t \in [0,k), \quad k = 0,...,n)$. Most is feltételezzük, hogy a $\sum_{l=k+1}^{\infty} ...$ sorösszegzés és az L operátor felcserélhető, így azt mondhatjuk, hogy a

$$g(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_j^{l-1} \tau_{l-k} y_k(t) \qquad (t \geq 0)$$

függvénnyel $B = Lg$. Ha $t \geq 0$, $k = 1,...,n$ és $l = k+1, k+2, ...,$ akkor

$$\tau_{l-k} y_k(t) = \begin{cases} y_k(t-l+k) & (t \geq l-k) \\ \\ 0 & (0 \leq t < l-k). \end{cases}$$

Mivel $y_k(t-l+k) = 0$, ha $t-l+k \geq k$, azaz $t \geq l$, ezért a $g(t)$-t definiáló előbbi összegben legfeljebb $t < l \leq t+k$ esetén lesz $y_k(t-l+k) \neq 0$. Következésképpen

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{t<l\leq t+k} \xi_j^{l-1} y(t-l+k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{m=1}^{k} \xi_j^{[t]-m+k} y(t-[t]+m-1) =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1) \sum_{k=m}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \xi_j^{[t]-m+k} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1)\sum_{l=0}^{n-m} c_{m+l}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^{[t]+l}}{P'(\xi_j)} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1)\sum_{l=0}^{n-m} c_{m+l}Q^{([t]+l)}(0) \qquad (t\geq 0).$$

Feltesszük, hogy az y_k $(k=1,...,n)$ „kezdeti” függvényekre és A-ra alkalmazható a Mellin-transzformáció. Ekkor $A=Lh$, ahol (alkalmas $q>0$ paraméterrel) bármely $x>q$ esetén

$$h(t)=\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} A(z)e^{tz}dz =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P'(\xi_j)}\sum_{l=1}^{k}\xi_j^{l-1}\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{(k-l+t)z}Ly_k(z)\,dz \qquad (t\geq 0).$$

A feltételeink szerint (az előbbi k,j,l indexekre)

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{(k-l+t)z}Ly_k(z)\,dz = y_k(k-l+t) \qquad (t\geq 0).$$

Mivel $k-l\geq 0$, ha $k=1,...,n$, ill. $l=1,...,k$, így bármely $t\geq n$ helyen $k-l+t\geq k$, tehát $y_k(k-l+t)=0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $h(t)=0$ $(t\geq n)$. Az $y=g+h$ egyenlőség alapján ezért $y(t)=g(t)$ $(t\geq n)$.

Formailag ugyanez adódik akkor is, ha a P gyökei között vannak többszörös gyökök is, hacsak a differenciálható Q függvény eleget tesz az $LQ=1/P$ összefüggésnek. Világos továbbá, hogy a $(*)$ „inhomogén” egyenlet megoldását tetszőleges kezdeti feltétel esetén a homogén egyenlet előbbi megoldásának és az $y(t)=0$ $(0\leq t<n)$ eset $(**)$-beli megoldásának az összegeként kapjuk.

A fentiekben vizsgált $(*)$ „folytonos” differenciaegyenlet „diszkrét” változós variánsa a következő (megtartva az eddigi jelöléseket): adott $b_\nu\in\mathbf{C}$ $(n\in\mathbf{N})$ sorozat mellett keressük azt az $x_\nu\in\mathbf{C}$ $(n\in\mathbf{N})$ sorozatot, amelyre

$$(***) \qquad \sum_{k=0}^{n} c_k x_{\nu+k} = b_\nu \qquad (\nu\in\mathbf{N})$$

(speciális esetben ld. 2.3. xx) - xxv) megjegyzések). Ekkor az $x_0, ..., x_{n-1}$ „kezdeti értékek” megadásával $(***)$ egyértelműen meghatározza az (x_ν) sorozatot:

$$x_{\nu+n} = \frac{1}{c_n}\left(b_\nu - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_{\nu+k}\right) \qquad (\nu \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy az

$$f(t) := b_\nu \qquad (\nu \le t < \nu + 1 \ \ (\nu \in \mathbf{N}))$$

választással kapott $(*)$ egyenlet minden y megoldása a $(***)$ egyenlet

$$x_\nu := y(\nu) \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

megoldását szolgáltatja. Továbbá a $(***)$-nak eleget tevő bármely $x_\nu \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatból a $(*)$ egyenlet

$$y(t) := x_\nu \qquad (\nu \le t < \nu + 1 \ \ (\nu \in \mathbf{N}))$$

megoldását kapjuk. Ezért $(***)$ megoldásaihoz a fentiek alapján juthatunk el, az ott mondott formulákat a $t := \nu \quad (\nu \in \mathbf{N})$ helyeken alkalmazva.

Mutassuk be ugyanakkor a Laplace-operátor alkalmazását a $(***)$ differenciaegyenlet megoldására a folytonos változattal kapcsolatban mondottaktól függetlenül is. Tekintsük ehhez a $(***)$-nak eleget tevő valamely $x_\nu \in \mathbf{C} \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatból az előbb „gyártott”

$$f(t) := b_\nu \ , \ \ y(t) := x_\nu \qquad (\nu \le t < \nu + 1 \ \ (\nu \in \mathbf{N}))$$

függvényeket, ill. a $(*)$ egyenletet az

$$y(t) = x_k \qquad (k \le t < k + 1 \quad (k = 0, ..., n-1))$$

„kezdeti feltétellel”. Ekkor a fentebb már alkalmazott „szabályok” szerint $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > q$ esetén (alkalmas $q > 0$ mellett)

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz}\left(Ly(z) - \int_0^k y(t)e^{-tz}dt\right) =$$

$$Ly(z)P(e^z) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz}\int_0^k y(t)e^{-tz}dt =$$

$$Ly(z)P(e^z) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{z} \left(e^{-jz} - e^{-(j+1)z}\right)$$

(P az egyenlet fenti karakterisztikus polinomja (ld. folytonos eset)). Következésképpen

$$Ly(z) = \frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{1}{P(e^z)} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{z} \left(e^{-jz} - e^{-(j+1)z}\right) =$$

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=0}^{k-1} x_j e^{(k-j-1)z} =$$

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z}.$$

Ha itt a P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek, akkor (ld. folytonos eset)

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} = Ly_1(z),$$

ahol

$$y_1(t) := \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) Q^{(k-1)}(0) = \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} \qquad (t \geq 0).$$

Továbbá a

$$P_j(s) := \sum_{k=j+1}^{n} c_k s^{k-j-1} \qquad (s \in \mathbf{C}, j = 0, ..., n-1)$$

jelöléssel

$$\frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z} = \frac{e^z - 1}{z} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \frac{P_j(e^z)}{P(e^z)}.$$

Parciális törtekre bontással alkalmas $d_{jm} \in \mathbf{C}$ $(j + 1, m = 1, ..., n)$ együtthatókkal

$$\frac{P_j(s)}{P(s)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{d_{jm}}{s-\xi_m} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}),$$

tehát

$$\frac{e^z-1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)}.$$

Lássuk be, hogy ha $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$ és $h_\alpha(t) := \alpha^{[t]} \quad (t \geq 0)$, akkor

$$Lh_\alpha(z) = \frac{e^z-1}{z(e^z-\alpha)} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}, |\alpha| < e^{\operatorname{Re} z}).$$

Valóban, mivel $|\alpha e^{-z}| = |\alpha| e^{-\operatorname{Re} z} < 1$, ezért

$$Lh_\alpha(z) = \int_0^{+\infty} \alpha^{[t]} e^{-tz} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \int_j^{j+1} e^{-tz} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{z} \left(e^{-jz} - e^{(-j-1)z} \right) =$$

$$\frac{1-e^{-z}}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha e^{-z})^j = \frac{1-e^{-z}}{z(1-\alpha e^{-z})} = \frac{e^z-1}{z(e^z-\alpha)}.$$

Ha tehát

$$y_2 := \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} h_{\xi_m},$$

akkor $0 \neq z \in \mathbf{C}, |\xi_m| < e^{\operatorname{Re} z} \quad (m = 1, ..., n)$ esetén

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)} = Ly_2(z).$$

(A fentiekben $\xi_m \neq 0 \quad (m = 1, ..., n)$ nyilván feltehető, ti. $P(0) = c_0 \neq 0$.) Összefoglalva mindezt a $(***)$ differenciaegyenlet

$$x_\nu = y_1(\nu) + y_2(\nu) =$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \xi_m^{\nu} =$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} Q^{(k-1)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \xi_m^{\nu} \qquad (n \le \nu \in \mathbf{N})$$

megoldását kapjuk.

Az előbbiekben említett d_{jm} $(j+1, m = 1, ..., n)$ paramétereket az alábbiak szerint tudjuk kiszámítani:

$$d_{jm} = \frac{P_j(\xi_m)}{P'(\xi_m)} \qquad (j+1, m = 1, ..., n).$$

Hangsúlyozzuk, hogy mindez akkor érvényes, ha a P karakterisztikus polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözők. Ha vannak köztük többszörös gyökök is, akkor ez az y_1 függvény alakját nem befolyásolja, hacsak az abban szerelő Q függvény eleget tesz az $LQ = 1/P$ összefüggésnek. A P_j/P $(j = 1, ..., n)$ racionális törtfüggvények parciális törtekre bontásában pedig annyi a változás, hogy a P polinom $\mathbf{N} \ni \mu \ge 2$ multiplicitású ξ gyöke nem csupán egy $d/(z-\xi)$ alakú parciális törtet generál, hanem a $d_i/(z-\xi)^i$ $(i = 0, ..., \mu-1)$ törteket (alkalmas $d_0, ..., d_{\mu-1} \in \mathbf{C}$ együtthatókkal). Ezért a

$$z \mapsto \frac{e^z - 1}{z(e^z - \alpha)^i}$$

alakú függvényeket kell Laplace-transzformáltként előállítani. Legyen ehhez $0 \ne \alpha \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, ...,$ és

$$h_{i,\alpha}(t) := \frac{\prod_{k=0}^{i-2}([t] - k)}{(i-1)!} \alpha^{[t]-i+1} \qquad (t \ge 0).$$

Ekkor $h_{1,\alpha} = h_\alpha$, ill. $i = 2, 3, ...$ mellett

$$Lh_{i,\alpha}(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \alpha)^i} \qquad (0 \ne z \in \mathbf{C}, |\alpha| < e^{\operatorname{Re} z}).$$

Ugyanis $h_{i,\alpha}(t) = 0 \quad (0 \le t < i-1)$, így

$$Lh_{i,\alpha}(z) = \frac{1}{(i-1)!} \int_{i-1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-2} ([t] - k) \alpha^{[t]-i+1} e^{-tz} dt =$$

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=i-1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-2} (j-k) \alpha^{j-i+1} \int_j^{j+1} e^{-tz} dt =$$

$$\frac{1}{z(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)\alpha^{j-i+1}\left(e^{-jz}-e^{(-j-1)z}\right)=$$

$$\frac{1-e^{-z}}{z(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)\alpha^{j-i+1}e^{-jz}=$$

$$\frac{e^{z}-1}{ze^{iz}(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)(\alpha e^{-z})^{j-i+1}=$$

$$\frac{e^{z}-1}{ze^{iz}(i-1)!}F^{(i-1)}(\alpha e^{-z}),$$

ahol $F(s):=\sum_{k=0}^{\infty}s^k=1/(1-s)\ \ (s\in\mathbf{C},|s|<1)$. Tehát

$$F^{(i-1)}(\alpha e^{-z})=\frac{(i-1)!}{(1-\alpha e^{-z})^i},$$

amiből a mondott formula már következik.

Tegyük fel tehát valamilyen $p=1,...,n$ esetén, hogy a P polinom páronként különböző gyökei: $\xi_1,...,\xi_p$, rendre a $\mu_1,...,\mu_p\,(\geq 1)$ multiplicitással (ahol nyilván $\sum_{m=1}^{p}\mu_m=n$). Ekkor a $P_j/P\quad(j=0,...,n-1)$ hányadosokra a következőt kapjuk:

$$\frac{P_j(s)}{P(s)}=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}\frac{d_{jm}^{(i)}}{(s-\xi_m)^i}\qquad (s\in\mathbf{C}\setminus\{\xi_1,...,\xi_n\})$$

(alkalmas $d_{jm}^{(i)}\in\mathbf{C}$ együtthatókkal). Ezért

$$\frac{e^z-1}{zP(e^z)}\sum_{j=0}^{n-1}x_j\sum_{k=j+1}^{n}c_ke^{(k-j-1)z}=\sum_{j=0}^{n-1}x_j\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}d_{jm}^{(i)}\frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)^i}.$$

Következésképpen

$$y_2:=\sum_{j=0}^{n-1}x_j\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}d_{jm}^{(i)}h_{i,\xi_m}.$$

Ennek megfelelően $\nu=n,n+1,...$ esetén

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} Q^{(k-1)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{d_{jm}^{(i)} \prod_{k=0}^{i-2}(\nu-k)}{(i-1)!} \xi_m^{\nu-i+1}.$$

A legegyszerűbb esetben, amikor is $n=1$, a $(***)$ egyenlet a következő alakú:

$$c_0 x_\nu + c_1 x_{\nu+1} = b_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

(ld. 2.3. xx) - xxv) megjegyzések). A P karakterisztikus polinom:

$$P(s) = c_0 + c_1 s \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

azaz az egyetlen gyök: $\xi := -c_0/c_1$. Ezért $P'(\xi) = c_1$, és $P_0 \equiv c_1$, így a megoldás:

$$x_\nu = \frac{1}{c_1} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} \xi^{k-1} + x_0 \cdot \xi^\nu \qquad (1 \le \nu \in \mathbf{N})$$

(amiről közvetlen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk).

Szemléltessük a fentieket a (gyakorlat szempontjából is fontos) másodrendű esetben is: $n=2$, ill.

$$c_0 x_\nu + c_1 x_{\nu+1} + c_2 x_{\nu+2} = b_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$P(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 = c_2 (s-\xi_1)(s-\xi_2),$$
$$P_0(s) = c_1 + c_2 s \ , \ P_1(s) = c_2 \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

ahol először a ξ_1, ξ_2 gyökökről tegyük fel, hogy különbözők: $\xi_1 \neq \xi_2$. Ekkor $2 \le \nu \in \mathbf{N}$ esetén

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} \left(\frac{\xi_1^{k-1}}{P'(\xi_1)} + \frac{\xi_2^{k-1}}{P'(\xi_2)} \right) + x_0 (d_{01} \xi_1^\nu + d_{02} \xi_2^\nu) + x_1 (d_{11} \xi_1^\nu + d_{12} \xi_2^\nu).$$

A klasszikus *Fibonacci-sorozat* esetén

$$c_0 := c_1 := 1 \ , \ c_2 := -1 \ , x_0 := 0 \ , \ x_1 := 1 \ , \ b_\nu := 0 \qquad (\nu \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$P(s) = 1 + s - s^2 \ , \ P_0(s) = 1 - s \ , \ P_1(s) = -1 \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

ezért

$$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \xi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ d_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ d_{12} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Más szóval a jól ismert „képlet” adódik:

$$x_\nu = d_{11}\xi_1^\nu + d_{12}\xi_2^\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu =$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^\nu - (1-\sqrt{5})^\nu}{\sqrt{5}\cdot 2^\nu} \qquad (2 \le \nu \in \mathbf{N}).$$

Ha $\xi_1 = \xi_2 =: \xi$, azaz $P(s) = c_2(s-\xi)^2$ $(s \in \mathbf{C})$, akkor

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} Q^{(k-1)}(0) + \sum_{j=0}^{1} x_j \left(d_{j1}^{(1)}\xi^\nu + d_{j1}^{(2)}\nu\xi^{\nu-1}\right) \qquad (2 \le \nu \in \mathbf{N}).$$

Itt

$$Q(0) = c_{11}\ ,\ Q^{(k-1)}(0) = \sum_{i=1}^{2} c_{i1}\binom{k-1}{i-1}\xi^{k-i} \qquad (k = 2, 3, ...),$$

ahol

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{c_{11}}{s-\xi} + \frac{c_{21}}{(s-\xi)^2} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi\}),$$

és

$$\frac{P_0(s)}{P(s)} = \frac{c_1 + c_2 s}{c_2(s-\xi)^2} = \frac{d_{01}^{(1)}}{s-\xi} + \frac{d_{01}^{(2)}}{(s-\xi)^2},$$

$$\frac{P_1(s)}{P(s)} = \frac{1}{(s-\xi)^2} = \frac{d_{11}^{(1)}}{s-\xi} + \frac{d_{11}^{(2)}}{(s-\xi)^2} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi\}).$$

Tehát $d_{11}^{(1)} = 0$, $d_{11}^{(2)} = 1$ és $d_{01}^{(1)} = 1, d_{01}^{(2)} = \xi + c_1/c_2$, ill. $c_{11} = 0$, $c_{21} = 1/c_2$. Ezért

$$x_\nu = \frac{1}{c_2}\sum_{k=1}^{\nu}(k-1)b_{\nu-k}\xi^{k-2} + x_0(\xi^\nu + (\xi + c_1/c_2)\nu\xi^{\nu-1}) + x_1\nu\xi^{\nu-1} =$$

$$\frac{1}{c_2}\sum_{k=1}^{\nu}(k-1)b_{\nu-k}\xi^{k-2} + x_0(1+\nu)\xi^\nu + \left(\frac{x_0 c_1}{c_2} + x_1\right)\nu\xi^{\nu-1} \qquad (2 \le \nu \in \mathbf{N}).$$

Ha pl. adott $x_0, x_1 \in \mathbf{C}$ mellett

$$x_\nu - 2x_{\nu+1} + x_{\nu+2} = 0 \qquad (\nu \in \mathbf{N}),$$

akkor $P(s) = (s-1)^2$ $(s \in \mathbf{C})$, azaz $c_0 = c_2 = \xi = 1$, $c_1 = -2$ és $b_\nu = 0$ $(\nu \in \mathbf{N})$. A fentiek alapján így

$$x_\nu = x_0 + \nu(x_1 - x_0) \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

(amiről közvetlen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk).

3.5.3. Általános kezdetiérték-problémák

Tekintsük most a 3.5.1. feladat alábbi általánosítását:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \geq 0), \\ \\ y^{(k)}(0) = y_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \end{cases}$$

ahol adottak az $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbf{R}$ számok. Ez utóbbi feladat két feladatra bontható a következő értelemben: ha Ψ és Θ egy-egy megoldása a

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \geq 0), \\ \\ \Psi^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \end{cases}$$

ill. a

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \Theta^{(k)}(t) = 0 \qquad (t \geq 0), \\ \\ \Theta^{(k)}(0) = y_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1) \end{cases}$$

feladatnak, akkor $y := \Psi + \Theta$ nyilván megoldja a mostani kiindulási feladatot.

A Ψ-re vonatkozó feladatot már vizsgáltuk, a Θ kiszámításához elegendő egy $\Theta_0, ..., \Theta_{n-1}$ *alaprendszert* meghatározni (tehát n darab lineárisan független megoldást). Ilyen pl. a

$$\Theta_k^{(j)}(0) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 \quad (k = j) \\ \\ 0 \quad (k \neq j) \end{cases} \qquad (k, j = 0, ..., n-1)$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő $\Theta_0, ..., \Theta_{n-1}$ rendszer. Ekkor

$$\Theta = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Theta_k.$$

Feltételezve, hogy $\Theta_k^{(n)} \in \mathcal{D}_L, \;\; L\Theta_k = \eta_k \quad (k = 0, ..., n-1)$, a következőt kapjuk:

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j L\Theta_k^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(z^j \eta_k(z) - \sum_{l=0}^{j-1} \delta_{kl} z^{j-l-1} \right) =$$

$$\eta_k(z) \sum_{j=0}^{n} a_j z^j - \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{l=0}^{j-1} \delta_{kl} z^{j-l-1} = \eta_k(z)P(z) - P_k(z) \quad (z \in \mathbf{C}, \, \mathrm{Re}\, z > q),$$

ahol

$$P_k(\xi) := \sum_{j=k+1}^{n} a_j \xi^{j-k-1} \qquad (\xi \in \mathbf{C}).$$

Innen η_k, ill. (pl. Mellin-transzformációval) $\Theta_k \quad (k = 0, ..., n-1)$ meghatározható:

$$\Theta_k(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz} \frac{P_k(z)}{P(z)}\, dz \qquad (t \geq 0),$$

és itt (a P polinom gyökeit $\xi_1, ..., \xi_n$-nel jelölve) $x > \mathrm{Re}\, \xi_k \quad (k = 1, ..., n)$. Megmutatható, hogy $t > 0$ esetén a $k = 0, ..., n-1$ indexekre

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{\xi_j} \left(\frac{\exp^t P_k}{P} \right) \qquad (t \geq 0).$$

Ha pl. minden $\xi_j \;\; (j = 1, ..., n)$ gyök egyszeres, akkor

$$\mathrm{res}_{\xi_j} \left(\frac{\exp^t P_k}{P} \right) = \frac{e^{tz} P_k(z)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (z - \xi_l)} \Bigg|_{z=\xi_j} =$$

$$\frac{e^{t\xi_j} P_k(\xi_j)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (\xi_j - \xi_l)} \qquad (j = 1, ..., n),$$

tehát

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_k(\xi_j)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (\xi_j - \xi_l)} e^{t\xi_j} \qquad (t > 0, k = 0, ..., n-1).$$

Ha a ξ_j-k között többszörös gyökök is vannak, akkor legyenek a páronként különböző gyökök $\sigma_1, ..., \sigma_s$, a megfelelő multiplicitások pedig $\nu_1, ..., \nu_s$ (ahol $s \in \mathbf{N}$ és teljesül a $\sum_{k=1}^{s} \nu_k = n$ egyenlőség). Ekkor $j = 1, ..., s$ esetén a $P(\xi) =: (\xi - \sigma_j)^{\nu_j} Q_j(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{C})$ jelöléssel

$$\frac{e^{tz}P_k(z)}{P(z)} = \frac{e^{tz}P_k(z)/Q_j(z)}{(z-\sigma_j)^{\nu_j}} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}).$$

Ezért

$$\mathrm{res}_{\sigma_j}\left(\frac{\exp^t P_k}{P}\right) = \left(\frac{\exp^t P_k}{Q_j}\right)^{(\nu_j-1)}(\sigma_j)\frac{1}{(\nu_j-1)!} =$$

$$\sum_{l=0}^{\nu_j-1}\frac{1}{l!(\nu_j-1-l)!}\left(\frac{P_k}{Q_j}\right)^{(\nu_j-1-l)}(\sigma_j)t^l e^{t\sigma_j},$$

így $k = 0, ..., n-1$ esetén

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{\nu_j-1}\left(\frac{P_k}{Q_j}\right)^{(\nu_j-1-l)}(\sigma_j)\frac{t^l}{l!(\nu_j-1-l)!}e^{t\sigma_j} \qquad (t \geq 0).$$

Legyen pl. a feladat a következő kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \\ \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1. \end{cases}$$

Ez a Θ-ra vonatkozó fenti feladat azon speciális esete, amikor (az ottani jelölésekkel)

$$P(z) = z^4 + 2z^2 + 1\ ,\ P_3(z) = 1\ \ (z \in \mathbf{C})\ ,\ \eta_3 = \frac{P_3}{P},$$

és $y = \Theta_3$. Tehát

$$\eta_3(z) = \frac{1}{z^4+2z^2+1} = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}.$$

Ezért Mellin-transzformációval bármely $x > 0$ mellett

$$y(t) = \Theta_3(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz \qquad (t \geq 0).$$

Az itt szereplő $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} ...$ integrál kiszámításához legyen $t \geq 0$, $b > 0$, ill. φ_b a következő út:

$$\varphi_b(u) := \begin{cases} \ell_b(u) & (-b \le u \le b) \\ \\ x + be^{\imath(u-b+\pi/2)} & (b \le u \le b+\pi). \end{cases}$$

(Tehát az ℓ_b által paraméterezett függőleges szakaszra, mint átmérőre egy félkört illesztettünk a $\{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Re}\, z \le x\}$ félsíkban.) Ekkor a reziduumtétel miatt

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2} \, dz = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \eta_3 \exp^t =$$

$$\mathrm{res}_\imath(\eta_3 \exp^t) + \ \mathrm{res}_{-\imath}(\eta_3 \exp^t) = \alpha_1 + \beta_1,$$

ahol

$$\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-\imath)^k \quad , \quad \frac{e^{tz}}{(z-\imath)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (z-\imath)^k.$$

Következésképpen

$$\alpha_1 = \left(\left(\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2} \right)' \right)_{z=\imath} = \left(\frac{te^{tz}(z+\imath)^2 - e^{tz}2(z+\imath)}{(z+\imath)^4} \right)_{z=\imath} =$$

$$\frac{te^{\imath t}(-4) - e^{\imath t}4\imath}{16},$$

$$\beta_1 = \left(\left(\frac{e^{tz}}{(z-\imath)^2} \right)' \right)_{z=-\imath} = \left(\frac{te^{tz}(z-\imath)^2 - e^{tz}2(z-\imath)}{(z-\imath)^4} \right)_{z=-\imath} =$$

$$\frac{te^{-\imath t}(-4) + e^{-\imath t}4\imath}{16}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2} \, dz = \frac{\sin\, t - t \cos\, t}{2} \qquad (t \ge 0).$$

Mivel a φ_b út az ℓ_b „szakasz” és a $k_b(u) := x + be^{\imath(u-b+\pi/2)}$ $(b \le u \le b+\pi)$ „félkörív” egyesítése, ezért

$$\int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2} \, dz = \int_{\ell_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2} \, dz + \int_{k_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2} \, dz.$$

Ugyanakkor (könnyen láthatóan)

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{k_b}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz=0,$$

tehát

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ell_b}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\varphi_b}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz.$$

Következésképpen

$$y(t)=\frac{1}{2\pi\imath}\lim_{b\to+\infty}\int_{\varphi_b}\frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\,dz=\frac{\sin t-t\cos t}{2}\qquad(t\geq 0).$$

Megjegyezzük, hogy az előző feladatban az $y=\Theta_3$ megoldást közvetlen reziduum-számítással is meghatározhatjuk. Ti. a

$$P(\xi)=(\xi-\imath)^2(\xi+\imath)^2\qquad(\xi\in\mathbf{C})$$

karakterisztikus polinomnak két darab kétszeres gyöke van, ezek $\sigma_1:=\imath$ és $\sigma_2:=-\imath$, ezért

$$y(t)=\Theta_3(t)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=0}^{1}\left(\frac{1}{Q_j}\right)^{(1-l)}(\sigma_j)t^le^{t\sigma_j}\qquad(t\geq 0),$$

ahol $Q_1(\xi)=(\xi+\imath)^2$, $Q_2(\xi)=(\xi-\imath)^2$ $(\xi\in\mathbf{C})$. Tehát

$$y(t)=\left(\left(\frac{1}{Q_1}\right)'(\imath)\frac{t}{Q_1(\imath)}\right)e^{\imath t}+\left(\left(\frac{1}{Q_2}\right)'(-\imath)\frac{t}{Q_2(-\imath)}\right)e^{-\imath t}=$$

$$\left(-2(2\imath)^{-3}-\frac{t}{4}\right)e^{\imath t}+\left(2(2\imath)^{-3}-\frac{t}{4}\right)e^{-\imath t}=$$

$$\frac{-\imath-t}{4}e^{\imath t}+\frac{\imath-t}{4}e^{-\imath t}=\frac{-t\cos t+\sin t}{2}\qquad(t\geq 0).$$

Vegyük észre, hogy $P(z)\eta_{n-1}(z)=P_{n-1}(z)=a_n$, továbbá

$$L\Psi(z)P(z)=Lf(z)\qquad(z\in\mathbf{C}\ ,\ \ \mathrm{Re}\,z>q),$$

ezért a konvolúció és a Laplace-transzformált kapcsolata alapján (ld. 3.2. viii) megjegyzés)

$$L\Psi(z) = \frac{\eta_{n-1}(z)}{a_n} Lf(z) = \frac{1}{a_n} L\Theta_{n-1}(z) Lf(z) =$$

$$\frac{1}{a_n} L(\Theta_{n-1} * f)(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > q).$$

Ha tehát Ψ-t a Mellin-transzformációval számíthatjuk ki, akkor

$$\Psi = \frac{1}{a_n} \Theta_{n-1} * f.$$

Tekintsük pl. az

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin\, t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. A most mondottak szerint $\Theta_1(0) = 0,\ \Theta'(0) = 1,$ ill.

$$\eta_1(z) = \frac{1}{1+z^2} = L \sin(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

azaz $\Theta_1 = \sin$. Következésképpen $y = \sin * \sin,$ tehát

$$y(x) = \int_0^x \sin\, t \sin(x-t)\, dt = \frac{\sin\, t - t\cos\, t}{2} \qquad (t \geq 0).$$

3.5.4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 4(\cos(2t) - \sin(2t) - t(8\cos(2t) + \sin(2t)) \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. Legyen

$$f_1(t) := \sin(2t)\ \ ,\ \ f_2(t) := \cos(2t)\ \ ,\ \ f_3(t) := t\sin(2t),$$

$$f_4(t) := t\cos(2t) \quad (t \geq 0).$$

Ekkor

$$Lf_1(z) = \frac{2}{z^2+4} \quad , \quad Lf_2(z) = \frac{z}{z^2+4},$$

$$Lf_3(z) = \frac{4z}{(z^2+4)^2} \quad , \quad Lf_4(z) = \frac{z^2-4}{(z^2+4)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Ezért

$$(z^2-4z+3)Ly(z) = 4\frac{z-2}{z^2+4} - \frac{8z^2+4z-32}{(z^2+4)^2} + z - 1,$$

azaz

$$Ly(z) = \frac{4z}{(z^2+4)^2} + \frac{1}{z-3} = (Lf_3 + L\exp^3)(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 3),$$

amiből $y(t) = f_3(t) + \exp^3(t) = t\sin(2t) + e^{3t}$ következik. Itt - könnyen beláthatóan - $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges lehet. Hasonlóan oldható meg az

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}(\cos\, t + 2\sin\, t) \\ \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték-probléma:

$$L\left(\exp^{-2}(\cos + 2\sin)\right)(z) =$$

$$\frac{z+2}{(z+2)^2+1} + \frac{2}{(z+2)^2+1} = \frac{z+4}{(z+2)^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > -2).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$L(y'' + 4y' + 4y) = (z^2+4z+4)Ly(z) + z - 3 =$$

$$\frac{z+4}{(z+2)^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > -2),$$

tehát

$$Ly(z) = -\frac{z^3+7z^2+16z+11}{((z+2)^2+1)(z+2)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > -2).$$

Az előbbi egyenlet jobb oldalát parciális törtekre bontva (a részletszámítást itt mellőzve) jutunk az

$$Ly(z) = -\frac{z+4}{(z+2)^2+1} + \frac{1}{(z+2)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > -2)$$

egyenlőséghez. A fentiek alapján tehát a $h(t) := t \quad (t \geq 0)$ jelöléssel

$$Ly(z) = L(-\exp^{-2}(\cos + 2\sin)) + L(\exp^{-2} h) = L(\exp^{-2}(h - \cos - 2\sin)).$$

Ebből aztán az következik, hogy

$$y(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

3.5.5. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Alkalmazzuk most a Laplace-transzformációt az

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & 3y_1(t) - 2y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) & = & 2y_1(t) - y_2(t) + e^{3t} \end{array} \quad , \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer (ill. kezdetiérték-probléma) megoldására. Legyen

$$f(t) := e^{-t} \ , \ g(t) := e^{3t} \qquad (t \geq 0),$$

ekkor

$$Lf(z) = \frac{1}{z+1} \ , \ Lg(z) = \frac{1}{z-3} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 3).$$

Továbbá (alkalmas $q \in \mathbf{R}$ mellett a $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > q$ helyeken)

$$zLy_1(z) = 3Ly_1(z) - 2y_2(z) + \frac{1}{z+1},$$

$$zLy_2(z) = 2Ly_1(z) - Ly_2(z) + \frac{1}{z-3},$$

amiből az Ly_1, Ly_2 Laplace-transzformáltakra (parciális törtekre bontással)

$$Ly_1(z) = \frac{z-5}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{2(z-3)},$$

$$Ly_2(z) = \frac{3+z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

következik. Ha tehát

$$h(t) := te^t \ , \ s(t) := e^t \qquad (t \geq 0),$$

akkor

$$Ly_1(z) = \frac{1}{2}Ls(z) + 2Lh(z) - \frac{1}{2}Lg(z),$$

$$Ly_2(z) = \frac{1}{2}Lf(z) - \frac{1}{2}Ls(z) + 2Lh(z),$$

így

$$y_1(t) = \frac{1}{2}e^t + 2te^t - \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + 2te^t$$

(ahol egyszerű ellenőrzéssel $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges lehet).

3.5.6. Parciális differenciálegyenletek

Adott $l > 0$ mellett legyenek az

$$A, B, C, D, E, F, G : [0, l] \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvények folytonosak, és keressünk olyan $u \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre tetszőleges $\xi := (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ mellett

$$A(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) + 2B(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(\xi) + C(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) + D(\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi)+$$

$$+E(\xi)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi) + F(\xi)u(\xi) + G(\xi) = 0$$

teljesül (*másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet*). Számos gyakorlati probléma matematikai modellje vezet erre a feladatra, pl.

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi),$$

ahol $0 \neq a \in \mathbf{R}$ adott állandó (*hullámegyenlet*);

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) = \beta^2 \frac{\partial u}{\partial t}(\xi),$$

ahol $0 \neq \beta \in \mathbf{R}$ adott állandó (*hővezetési egyenlet*).

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $B \equiv G \equiv 0$, ill., hogy az A, C, D, E, F függvények valójában egyváltozós függvények (a második változójuktól nem függnek):

$$A, C, D, E, F : [0, l] \to \mathbf{R}.$$

Ekkor tehát az u függvény meghatározását illetően a következő alakú egyenletből indulhatunk ki:

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) + D(x)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi) + E(x)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi) + F(x)u(\xi) = 0.$$

A fenti matematikai modellt az alábbi *kezdeti-,* ill. *peremfeltételekkel* egészítjük ki:

$$\text{i)} \qquad u(x, 0) = \varphi(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad (0 \le x \le l),$$

$$\text{ii)} \qquad u(0, t) = f(t)\ ,\ \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta\frac{\partial u}{\partial t}(l, t) = \gamma u(l, t) \qquad (t \ge 0),$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\varphi, \psi : [0, l] \to \mathbf{R}$, $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ pedig adott állandók, ill. folytonos függvények. Tételezzük fel, hogy bármely $x \in [0, l]$ esetén a

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto \begin{cases} u(x, t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \end{cases}$$

(egyváltozós) függvények $\mathcal{D}_L$-beliek, és legyen

$$Lu(x, z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz} u(x, t)\, dt\ ,\ L\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, dt,$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\, dt\ ,\ L\frac{\partial u}{\partial t}(x, z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\, dt,$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,z) := \int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dt \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > a)$$

valamilyen $a \in \mathbf{R}$ konstanssal. Feltesszük továbbá, hogy $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kiszámításakor a $\frac{\partial}{\partial x}$, ill. a $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ deriválások és az $\int_0^{+\infty}\cdots$ integrálás sorrendje felcserélhető:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-tz}u(x,t)\,dt\right),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-tz}u(x,t)\,dt\right).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy

$$L\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(Lu)}{\partial x} \quad , \quad L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}.$$

A deriváltak Laplace-transzformáltjairól szóló formulát alkalmazva (ld. 3.3. xi) megjegyzés)

$$L\frac{\partial u}{\partial t}(x,z) = zLu(x,z) - u(x,0),$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,z) = z^2Lu(x,z) - u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \quad (x \in [0,l], z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > a).$$

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy a szóban forgó parciális differenciálegyenletünk „Laplace-transzformáltja” a következő tetszőleges ($x \in [0,l]$ és $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > a$) mellett):

$$A(x)\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) + C(x)(z^2Lu(x,z) - zu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)) +$$

$$+D(x)\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(x,z) + E(x)\left(zLu(x,z) - u(x,0)\right) + F(x)Lu(x,z) = 0$$

Figyelembe véve az i) kezdeti feltételeket is a keresett u függvény „Laplace-transzformáltját” illetően az alábbi egyenletre jutunk:

$$A(x)\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) + D(x)\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(x,z) + (C(x)z^2 + E(x)z + F(x))Lu(x,z) =$$

$$C(x)z\varphi(x) + E(x)\varphi(x) + C(x)\psi(x) \qquad (x \in [0,l], z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > a).$$

Ez rögzített z mellett nem más, mint az $x \mapsto Lu(x,z)$ függvényre vonatkozó másodrendű közönséges lineáris differenciálegyenlet. Peremfeltételként a fenti ii) peremfeltételből azt kapjuk, hogy

$$Lu(0,z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} u(0,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt = Lf(z),$$

ill.

$$\alpha \frac{\partial(Lu)}{\partial x}(l,z) = \alpha L \frac{\partial u}{\partial x}(l,z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\,dt =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz} \left(\gamma u(l,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t}(l,t)\right) dt =$$

$$\gamma Lu(l,z) - \beta L \frac{\partial u}{\partial t}(l,t) = \gamma Lu(l,z) - \beta\left(zLu(l,z) - u(l,0)\right) =$$

$$\gamma Lu(l,z) - \beta z Lu(l,z) + \beta\varphi(l),$$

tehát

$$\alpha \frac{\partial(Lu)}{\partial x}(l,z) + (\beta z - \gamma) Lu(l,z) - \beta\varphi(l) = 0.$$

Ha a most kapott modellből kiszámítottuk az $x \mapsto Lu(x,z)$ függvényt, akkor - rögzített $x \in [0,l]$ mellett - pl. Mellin-transzformációval kapjuk az u megoldást.

1° Első példaként alkalmazzuk a most vázolt módszert a fent említett hullámegyenletre az

$$u(x,0) = q \sin \frac{n\pi x}{l} \;\; , \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (0 \le x \le l),$$

$$(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (t \ge 0)$$

kezdeti-, ill. peremfeltételek mellett, ahol $0 < n \in \mathbf{N}, q > 0$. Most tehát

$$\varphi(x) = q \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (0 \le x \le l)\;,\; \psi \equiv 0\;,\; f \equiv 0,$$

ill.

$$A \equiv 1\;,\; C \equiv -1/a^2\;,\; D \equiv E \equiv F \equiv 0,$$

ezért az Lu transzformáltra vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) - \frac{z^2}{a^2}Lu(x,z) = -\frac{qz}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

a peremfeltételek pedig: $Lu(0,z) = Lu(l,z) = 0$. A szóban forgó differenciálegyenlet (ld. 2.3.) karakterisztikus polinomja:

$$P(y) := y^2 - z^2/a^2 \qquad (y \in \mathbf{C}),$$

amelynek két egyszeres gyöke van: z/a és $-z/a$. Ezért egy alaprendszere:

$$x \mapsto e^{xz/a} \ , \ x \mapsto e^{-xz/a},$$

így a homogén részének az általános megoldása:

$$x \mapsto c_1 e^{xz/a} + c_2 e^{-xz/a} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

Keressünk egy partikuláris megoldást $x \mapsto c_3 \sin\frac{n\pi x}{l}$ alakban alkalmas c_3 valós számmal. Ehhez szükséges és elégséges, hogy

$$-c_3\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \frac{c_3 z^2}{a^2} = -\frac{qz}{a^2},$$

azaz $c_3 = \dfrac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2}$ legyen. Az általános megoldásunk tehát Lu-ra a következő:

$$Lu(x,z) = c_1 e^{xz/a} + c_2 e^{-xz/a} + \frac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0 \le x \le l).$$

Az $Lu(0,z) = c_1 + c_2 = 0$, $Lu(l,z) = c_1 e^{lz/a} + c_2 e^{-lz/a} = 0$ peremfeltételekből $c_1 = 0$, és $c_2 = 0$ adódik, tehát

$$Lu(x,z) = \frac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$u(x,t) = q\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad ((x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty)).$$

2° Oldjuk meg az előbbi módszerrel a bevezetőben említett hővezetési egyenletet az

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (t \geq 0)\ ,\ u(x,0) = q \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (0 \leq x \leq l)$$

feltételek mellett (ahol q, n ugyanazok a paraméterek, mint az az előbbi példában). Tehát $A \equiv 1$, $C \equiv D \equiv F \equiv 0$, $E \equiv -\beta^2$, ezért az Lu-ra vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) - \beta^2 z Lu(x,z) = -\beta^2 q \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja:

$$P(y) := y^2 - \beta^2 \qquad (y \in \mathbf{C}),$$

aminek a gyökei: $\pm\beta\cdot\sqrt{z}$. Így egy alaprendszer:

$$x \mapsto e^{\beta x\sqrt{z}}\ \ ,\ \ x \mapsto e^{-\beta x\sqrt{z}}.$$

Keressünk partikuláris megoldást most is $x \mapsto c_3 \sin \frac{n\pi x}{l}$ alakban, amikor is

$$-c_3\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l} - \beta^2 z c_3 \sin\frac{n\pi x}{l} = -\beta^2 q \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Innen $c_3 = \dfrac{\beta^2 q}{\beta^2 z + (n\pi/l)^2}$, következésképpen az általános megoldás Lu-ra:

$$Lu(x,z) = c_1 e^{\beta x\sqrt{z}} + c_2 e^{-\beta x\sqrt{z}} + \frac{\beta^2 q}{\beta^2 z + (n\pi/l)^2} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

A kezdeti-, ill. peremfeltételek szerint

$$Lu(0,z) = c_1 + c_2 = 0\ ,\ Lu(l,z) = c_1 e^{\beta l\sqrt{z}} + c_2 e^{-\beta l\sqrt{z}} = 0,$$

amiből $c_1 = c_2 = 0$. Ezért

$$Lu(x,z) = \frac{q}{z + (n\pi/\beta l)^2} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0 \leq x \leq l),$$

amiből

$$u(x,t) = q e^{-(n\pi/\beta l)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad ((x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty)).$$

Tárgymutató

állandók variálása, 98, 152
átviteli elv, 15, 147

abszolút integrálható, 68
alapmátrix, 109
alaprendszer, 143, 148, 174
algebra alaptétele, 46

belső pont, 12
Blaschke
  -függvény, 20
  -szorzat, 28
brachisztrochron-probléma, 162

Cauchy
  -Riemann-egyenlőségek, 16
  -egyenlőtlenség, 45
  -féle alaptétel, 38
  -féle főérték, 217
  -feladat, 105
  -formula, 45
  -formula deriváltakra, 51
  -kritérium, 124
  -sorozat, 124
csillagszerű tartomány, 44

derivált, 15
deriváltfüggvény, 15
differenciálegyenlet, 105
  -Bernoulli-féle, 114
  -Euler-Lagrange, 165
  -Euler-típusú, 161
  -egzakt, 87
  -explicit elsőrendű, 105
  -hiányos, 141
  -homogén lineáris, 96, 149
  -implicit, 115
  -inhomogén lineáris, 96, 151
  -jobb oldala, 105
  -lineáris, 96
  -lineáris rendszer, 106
  -másodrendű lineáris, 141
  -másodrendű parciális, 256
  -magasabb rendű lineáris, 146
  -megoldása, 85, 105
  -parciális, 256
  -rendszer, 105
  -szeparábilis, 85
differenciálhányados, 15
differenciálható
  -függvény, 15
  -folytonosan, 15
  -inverz függvény, 79
differenciaegyenlet, 178
  -homogén, 102, 178
  -inhomogén, 103, 179
  -instabilis, 182
  -jobb oldala, 182
  -lineáris, 102, 178, 236
  -másodrendű lineáris, 169
  -megoldása, 170, 178
  -stabilis, 181
Dirichlet-probléma, 160

egyértelműségi tétel, 203
egységgyökök, 10
Euler-összefüggés, 18

exponenciális függvény (exp), 18
exponenciális típusú függvény, 192

felezési idő, 95
Fibonacci-sorozat, 173, 246
fixpont, 121
fixponttétel, 125
folytonos függvény, 15
Fourier-transzformált ($\hat{f}$), 68, 99
függvény határértéke, 19

gamma-függvény, 205
Goursat-lemma, 38
gyökvonás, 8

háromszög-egyenlőtlenség, 7, 122
hővezetési egyenlet, 256
harmonikus függvények, 18
harmonikus társ, 18
hatványsormódszer, 118
hullámegyenlet, 256

imaginárius egyég ($\imath$), 7

kényszerfrekvencia, 156
kényszerrezgés, 156
képzetes tengely, 11
karakterisztikus
- -egyenlet, 136
- -polinom, 143, 146, 170

Kautz-rendszer, 76
kezdeti feltétel, 84, 86, 90, 179
kezdetiérték-probléma, 85, 105
komplex függvény, 12
- -képzetes része ($\mathrm{Im}\, f$), 14
- -valós része ($\mathrm{Re}\, f$), 14

komplex logaritmusfüggvény, 19
komplex szám, 7
- -abszolút értéke, 7
- -argumentuma, 8
- -képzetes része ($\mathrm{Im}\, z$), 7
- -konjugáltja, 7
- -trigonometrikus alakja, 8
- -valós része ($\mathrm{Re}\, z$), 7

komplex számgömb, 11
komplex számsík, 11
komplex vonalintegrál, 32
konvergens sorozat, 12, 123
konvolúció, 200, 227
kör (φ_{ar}), 31
környezet ($K_r(a)$), 12
koszinuszfüggvény (cos), 18
kvázipolinom, 153

Laguerre
- -függvények, 225
- -polinomok, 224
- -rendszer, 76

Laplace
- -egyenlet, 18, 161
- -transzformált, 194

Laurent
- -együttható, 52
- -sor, 51

Liouville-tétel, 45
Lipschitz-feltétel, 129
lokális invertálhatóság, 78
- -tétele, 79

műveletek komplex számokkal, 6
Malmquist–Takenaka-rendszer, 71
maximum-tétel, 63
megengedett függvényosztály, 164
Mellin
- -formula, 218
- -transzformált, 218

meromorf
- -függvény, 60
- -függvények alaptétele, 61

metrika, 122
metrikus tér, 122
- -teljes, 124

minimális forgásfelület, 163

Moivre-formula, 8
multiplicitás, 59
multiplikátor módszer, 91

Newton-Leibniz-formula, 33
nyílt halmaz, 12
nyílt leképezés, 77
nyílt leképezések tétele, 77

Parseval-egyenlőség, 224
partikuláris megoldás, 98, 143, 151, 174
Picard-Lindelöf-tétel, 129
Picard-tétel, 56
Poisson-magfüggvény, 29

racionális törtfüggvény, 13
rezgő húr, 116, 157
reziduum
 -res$_a f$, 57
 -tétel, 58
Riemann-féle észrevétel, 48
Riemann-gömb, 11
Rouché-tétel, 63

sajátfrekvencia, 156
sima út, 31, 33
 -ellentétes irányítású $(\tilde{\varphi})$, 31
 -hossza, 36
 -kezdőpontja, 31
 -végpontja, 31
 -zárt, 32
sima görbe, 31
sorozat határértéke, 12, 123
szakasz, 31
szakaszonként sima út, 31
szingularitás, 54
 -lényeges, 54
 -megszüntethető, 54
 -pólus, 54
szinuszfüggvény (sin), 18
sztereografikus projekció, 11
szukcesszív approximáció, 116

Taylor-sorfejtés, 45
torlódási pont, 19

utak egyesítése $(\varphi \vee \psi)$, 32

valós tengely, 11
valor principalis, 217
variációszámítás, 163

Wronski-determináns, 138, 144

zárt halmaz, 12
zárt körlemez, 12