Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

Szabó László

Kalandozások a diszkrét matematikában

Egyetemi jegyzet

Budapest, 2017

Lektorálta: Burcsi Péter

A jegyzet az ELTE tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán elnyert forrás felhasználásával készült.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A jegyzet célja az informatikus hallgatók látókörének szélesítése, ismereteinek bővítése és elmélyítése a diszkrét matematika néhány, a számítástudomány szempontjából különösen fontos területén. Az érintett témák a következők: teljes indukció, invariáns elv, rekurzió, elemi számelmélet, titkosítás, gráfelmélet, összeszámlálási feladatok, skatulya elv, generátorfüggvények. Ezeket foglalja keretbe egy a stabil párosítás problémájáról szóló kedvcsináló fejezet, valamint egy számos meglepetéssel szolgáló rövid bevezetés a valószínűségszámításba. A fejezetek lényegében függetlenek egymástól, bármilyen sorrendben haladhatunk, bármelyiket átugorhatjuk.

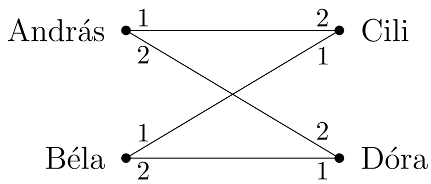
A jegyzetet egy körülbelül 180 feladatból álló feladatgyűjtemény egészíti ki. A feladatok többsége gyakorló jellegű, és elsősorban a problémamegoldó képesség fejlesztését szolgálja. Segítségül minden feladathoz részletes megoldást közlünk, azonban hangsúlyozzuk, hogy ezek tanulmányozása nem helyettesíti az önálló erőfeszítést.

Az irodalomjegyzékben csak azokat a tankönyveket soroltuk fel, amelyekből a legtöbbet merítettünk, amelyek szemléletükben a legközelebb állnak jegyzetünkhöz. Az érdeklődők számos további izgalmas témát találhatnak ezekben.

Végül szeretnék köszönetet mondani Burcsi Péternek, amiért elvállalta a kézirat lektorálását, és értékes tanácsaival hozzájárult annak jobbá tételéhez.

Stabil párosítás

Tegyük fel, hogy az ismeretségi körünkben van néhány magányos fiú és ugyanennyi magányos lány, akiket szeretnénk összehozni. Minden fiúnak van egy személyes preferencia listája a lányokról: ki tetszik neki a legjobban, ki a második, és így tovább. Egy ilyen listán minden lány szerepel, és bármely két lány esetén egyértelmű, hogy az adott fiú melyikükkel jönne szívesebben össze. Természetesen a lányoknak is van ugyanilyen személyes preferencia listája a fiúkról. A preferencia listák nem feltétlenül szimmetrikusak; előfordulhat, hogy Andrásnak Cili tetszik legjobban, Cilinek viszont Béla. Tegyük még fel, hogy a négyesben Bélának is Cili tetszik legjobban, Dórának pedig Béla.



Mi történik, ha Andrást Cilivel hozzuk össze, Bélát pedig Dórával? Nem nehéz megjósolni, hogy hamarosan Béla és Cili egyre több időt kezdenek majd diszkrét matematika tanulása címén együtt tölteni. A fő probléma itt az, hogy mind Cilinek jobban tetszik Béla, mind pedig Bélának jobban tetszik Cili, mint az aktuális partnere. Össze lehet-e hozni a fiúkat és a lányokat úgy, hogy ilyen szituáció ne alakuljon ki? Az előbbi példában mindenképp: legyenek a párok András és Dóra, valamint Béla és Cili. Itt András és Dóra nem biztos, hogy tökéletesen boldogok, azonban Bélának Cili és Cilinek Béla tetszik legjobban, így biztos nem fognak mással kikezdeni.

Stabil párosítás

Általánosabban, tekintsük n fiú egy $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ és n lány egy $L = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ halmazát. Az $F \times L = \{(f, \ell) \mid f \in F,\ \ell \in L\}$ halmaz egy S

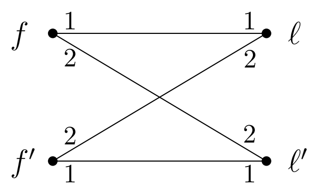
részhalmazát (teljes) párosításnak nevezzük, ha minden F-beli fiú és minden L-beli lány pontosan egy S-beli rendezett párban fordul elő.

Minden $f \in F$ fiú rangsorolja az összes L-beli lányt; az f fiú rangsorában egy ℓ lány pontosan akkor előz meg egy ℓ' lányt, ha f-nek jobban tetszik ℓ, mint ℓ' (holtverseny nincs). A lányok ugyanígy rangsorolják a fiúkat.

Tekintsünk most egy S párosítást, továbbá legyenek $(f, \ell) \in S$ és $(f', \ell') \in S$ olyan párok, amelyek esetén f-nek jobban tetszik ℓ', mint ℓ, és ℓ'-nek jobban tetszik f, mint f'. Ilyenkor azt mondjuk, az $(f, \ell') \notin S$ pár instabilitást jelent az S párosításra nézve.

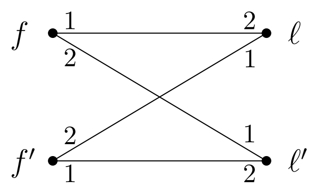
Célunk olyan S párosítás megadása, amelyre nézve nincs instabilitási tényező; egy ilyen párosítást stabilnak nevezünk. Lássunk két példát!

(1)



Itt teljes az egyetértés, $S = \{(f, \ell), (f', \ell')\}$ egy stabil párosítás, más stabil párosítás nincs.

(2)



Itt két stabil párosítás van: $S_1 = \{(f, \ell), (f', \ell')\}$ és $S_2 = \{(f, \ell'), (f', \ell)\}$. Az elsőnél a fiúk örülhetnek, a másodiknál a lányok. Ez egy fontos példa — a stabil párosítás nem feltétlenül egyértelmű!

Gale-Shapley algoritmus

A következő eljárás egy stabil párosítást szolgáltat.

1. A lányok minden este kiállnak a házuk erkélyére.

2. Minden fiú annak a lánynak az erkélye alatt kezd szerenádozni, aki legjobban tetszik neki, és még nem kosarazta ki. Ha egy fiút már minden lány kikosarazott, akkor otthon marad, és diszkrét matematikát tanul.
3. Azok a lányok, akiknek van legalább egy szerenádozója, a szerenádozóik közül a nekik legjobban tetszőnek azt mondják, hogy szívesen látják másnap este is, a többinek pedig örökre búcsút intenek. A kikosarazott fiúk a kikosarazóikat kihúzzák a preferencia listáikról.
4. Ha valamelyik nap minden lány erkélye alatt legfeljebb egy fiú szerenádozik, akkor a rítus befejeződik, minden lány lemegy a szerenádozójához, ha van neki, és elmennek vacsorázni.

Példa. Az ismeretségi körünkben öt magányos fiú és ugyanennyi magányos lány van. Adjunk meg közöttük egy stabil párosítást a Gale-Shapley algoritmus felhasználásával! A preferencia listák a következők:

```
András: (Kitti, Judit, Noémi, Helga, Mónika)
Béla:   (Helga, Judit, Noémi, Kitti, Mónika)
Dénes:  (Mónika, Kitti, Judit, Helga, Noémi)
Elő̋d:   (Helga, Kitti, Mónika, Judit, Noémi)
Feri:   (Helga, Judit, Mónika, Noémi, Kitti)

Helga:  (Dénes, Feri, Béla, András, Előd)
Judit:  (Feri, Béla, András, Előd, Dénes)
Kitti:  (Előd, Dénes, Feri, András, Béla)
Mónika: (András, Béla, Dénes, Előd, Feri)
Noémi:  (Béla, Dénes, Előd, András, Feri)
```

Megoldás. Nézzük, hogyan változnak a fiúk preferencia listái.

```
András: (Kitti, Judit, Noémi, Helga, Mónika)
Béla:   (Helga, Judit, Noémi, Kitti, Mónika)
Dénes:  (Mónika, Kitti, Judit, Helga, Noémi)
Előd:   (Helga, Kitti, Mónika, Judit, Noémi)
Feri:   (Helga, Judit, Mónika, Noémi, Kitti)

András: (Kitti, Judit, Noémi, Helga, Mónika)
Béla:   (Judit, Noémi, Kitti, Mónika)
Dénes:  (Mónika, Kitti, Judit, Helga, Noémi)
Előd:   (Kitti, Mónika, Judit, Noémi)
Feri:   (Helga, Judit, Mónika, Noémi, Kitti)
```

```
András: (Judit, Noémi, Helga, Mónika)
Béla:   (Judit, Noémi, Kitti, Mónika)
Dénes:  (Mónika, Kitti, Judit, Helga, Noémi)
Előd:   (Kitti, Mónika, Judit, Noémi)
Feri:   (Helga, Judit, Mónika, Noémi, Kitti)
```

```
András: (Noémi, Helga, Mónika)
Béla:   (Judit, Noémi, Kitti, Mónika)
Dénes:  (Mónika, Kitti, Judit, Helga, Noémi)
Előd:   (Kitti, Mónika, Judit, Noémi)
Feri:   (Helga, Judit, Mónika, Noémi, Kitti)
```

Látjuk, hogy most már minden lánynál csak egy fiú szerenádozik. Ekkor az algoritmus befejeződik, a kialakult párok a következők:

```
Helga  - Feri
Judit  - Béla
Kitti  - Előd
Mónika - Dénes
Noémi  - András
```

A Gale-Shapley algoritmus helyessége

A Gale-Shapley algoritmus helyességének belátásához három dolgot kell igazolni:

(1) Az algoritmus befejeződik.

(2) Végül mindenkinek lesz párja.

(3) A kialakult párosítás stabil.

1. Tétel. Az algoritmus legkésőbb az $(n^2 + 1)$-edik napon befejeződik.

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan napot, amikor az algoritmus nem fejeződik be. Ilyenkor valamelyik lánynál legalább két fiú szerenádozik. A lány kiválasztja a nála szerenádozó fiúk közül a neki legjobban tetszőt, a többieknek pedig végleg búcsút int. A kikosarazott fiúk ezután kihúzzák ezt a lányt a preferencia listáikról.

A kulcsmondat az utolsó: ha az algoritmus nem fejeződik be, akkor azon a napon legalább egy lány kihúzásra kerül legalább egy fiú preferencia listájáról. Kezdetben a fiúk preferencia listáinak összhossza n^2, így ilyen kihúzás az $(n^2 + 1)$-edik napon már nem történhet, vagyis az algoritmus ekkorra mindenképp befejeződik.

1. Állítás. Ha egy fiúnak sikerült végül párt találni, akkor ő minden olyan lánynál szerenádozott, aki a párjánál jobban tetszik neki.

Bizonyítás. A fiúk egymás után húzzák ki a lányokat a preferencia listájukról, a nekik legjobban tetszővel kezdve. Minden fiúnak végül az a lány lesz a párja, akinél az utolsó nap szerenádozott (már ha van ilyen lány).

2. Állítás. Ha egy fiúnak nem sikerült végül párt találni, akkor ő minden lánynál szerenádozott.

Bizonyítás. Az 1. Tétel szerint az algoritmus befejeződik. Az utolsó nap a kérdéses fiú már nem szerenádozik, ami csak úgy lehet, hogy addigra már az összes lányt kihúzta a preferencia listájáról, vagyis már az összes lány kikosarazta valamikor.

3. Állítás. Ha egy lánynál legalább egy fiú szerenádozik, akkor a lánynak lesz végül párja.

Bizonyítás. Ha feltűnik egy szerenádozó egy lány erkélye alatt, azt a lány addig nem kosarazza ki, amíg meg nem jelenik egy olyan, aki a lánynak jobban tetszik.

4. Állítás. Ha egy lánynál legalább egy fiú szerenádozik, akkor a lánynak az a szerenádozója lesz végül a párja, aki a szerenádozói közül a legjobban tetszik neki.

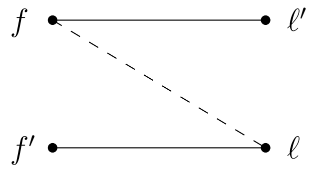
Bizonyítás. Egy lány csak akkor kosarazza ki valamelyik szerenádozóját, ha egy nála jobban tetsző is feltűnik az erkélye alatt. Így az addig szerenádozók közül a lánynak legjobban tetsző mindig maradhat.

2. Tétel. Az algoritmus végén mindenkinek lesz párja.

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben valamelyik f fiúnak nem lett párja. A 2. Állítás szerint ekkor f minden lánynál szerenádozott. Ez azt jelenti, hogy minden lánynál szerenádozott valaki, így a 3. Állítás szerint minden lánynak lett végül párja. Ez azonban csak úgy lehet, ha az összes fiú is talált végül párt magának, hiszen a fiúk és a lányok száma ugyanannyi. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

3. Tétel. Az algoritmus által szolgáltatott párosítás stabil.

Bizonyítás. Ismét indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan (f, ℓ) páros, amely instabilitási tényező. Jelölje f-nek és ℓ-nek az algoritmus által szolgáltatott párját ℓ' és f'.



Az 1. Állítás szerint f szerenádozott ℓ-nél még ℓ' előtt. Mivel végül ℓ' lett f párja, így valamikor ℓ kikosarazta őt. A 4. Állítás szerint ℓ-nek végül az a fiú lett a párja, aki a szerenádozói közül a legjobban tetszett neki, így ℓ-nek szükségképpen jobban tetszik f', mint f. Viszont ez azt jelenti, hogy az (f, ℓ) páros nem instabilitási tényező. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

Kiknek kedvez a Gale-Shapley algoritmus?

Vizsgáljuk meg, hogy a Gale-Shapley algoritmus a fiúknak vagy a lányoknak kedvez-e inkább! Mivel a lányoknak az erkélyük alatt szerenádozó fiúk közül a nekik legjobban tetsző lesz a párja, míg a fiúknak azon lányok közül, akiknek az erkélye alatt szerenádoztak a nekik legkevésbé tetsző lesz a párja, azt gondolhatnánk, hogy a lányok járnak jobban. A valóság ennek éppen az ellenkezője.

4. Tétel. Az algoritmus minden fiúhoz a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőt párosítja. (Egy fiú számára egy lány akkor jön szóba, ha van olyan stabil párosítás, amelyben a fiú és a lány egy párt alkotnak.)

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan fiú, akihez az algoritmus a számára szóba jövő lányok közül nem a neki legjobban tetszőt párosítja.

Tekintsük a legelső olyan napot, amikor egy fiút a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetsző kikosaraz. Legyen a fiú f, a lány pedig ℓ. Legyen továbbá f' az a fiú, aki miatt ℓ kikosarazta f-et. Ekkor persze ℓ-nek jobban tetszik f', mint f. Mivel a legelső olyan napon vagyunk, amikor egy fiút a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetsző kikosaraz,

f'-t még biztos nem kosarazta ki a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetsző. Legyen ez utóbbi lány ℓ^*. Világos, hogy f'-nek legalább annyira tetszik ℓ, mint ℓ^* (itt ℓ és ℓ^* nem feltétlenül különböző lányok).

Legyen S egy olyan stabil párosítás, ahol f és ℓ egy párt alkot. Ilyen stabil párosítás létezik, hisz ℓ az f fiú számára szóba jövő lányok között van. Legyen S-ben f' párja ℓ'. Nyilvánvaló módon f'-nek legalább annyira tetszik ℓ^*, mint ℓ' (itt sem feltétlenül különböző lányok ℓ^* és ℓ'). Mivel f'-nek legalább annyira tetszik ℓ, mint ℓ^*, és legalább annyira tetszik ℓ^*, mint ℓ', ezért f'-nek legalább annyira tetszik ℓ, mint ℓ' (jegyezzük meg, hogy ℓ és ℓ' különböző lányok).

Így az S stabil párosítás (f, ℓ) és (f', ℓ') párjait tekintve azt látjuk, hogy ℓ-nek jobban tetszik f', mint f, és f'-nek jobban tetszik ℓ, mint ℓ', vagyis az (f', ℓ) páros instabilitást jelent S-re nézve. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

5. Tétel. Az algoritmus minden lányhoz a számára szóba jövő fiúk közül a neki legkevésbé tetszőt párosítja. (Egy lány számára egy fiú akkor jön szóba, ha van olyan stabil párosítás, amelyben a lány és a fiú egy párt alkotnak.)

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan S stabil párosítás, ahol valamelyik ℓ lány rosszabbul jár, mint a Gale-Shapley algoritmus esetén. Legyen ℓ-nek a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott párja f, az S-beli párja pedig f'. Világos, hogy ℓ-nek jobban tetszik f, mint f'. Legyen továbbá az f fiú S-beli párja ℓ'. A 4. Tétel szerint a Gale-Shapley algoritmus f-hez a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőt párosítja. Ebből következik, hogy f-nek jobban tetszik ℓ, mint ℓ'.

Így az S stabil párosítás (f', ℓ) és (f, ℓ') párjait tekintve azt látjuk, hogy ℓ-nek jobban tetszik f, mint f', és f-nek jobban tetszik ℓ, mint ℓ', vagyis az (f, ℓ) páros instabilitást jelent S-re nézve. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

Teljes indukció

A teljes indukció talán a legfontosabb bizonyítási módszer a számítástudományban.

Teljes indukció elve I.

A legegyszerűbb alak a következő.

Teljes indukció elve.
Legyen $P(n)$ egy állítás. Tegyük fel, hogy

(1) $P(0)$ igaz,

(2) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Mielőtt a bizonyításhoz hozzákezdenénk tisztáznunk kell, hogy a bal oldali összeg

- $n = 0$ esetén megállapodás szerint egyetlen tagot sem tartalmaz, értéke definíció szerint 0,
- $n = 1$ esetén egyetlen tagból áll, bármit is sugall a 2 meg a $\cdots$; az egyetlen tag az 1, és az összeg is ugyanennyi.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = [1 + 2 + \cdots + n] + (n+1).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

így

$$[1 + 2 + \cdots + n] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ez a bizonyítás viszonylag egyszerű volt, mindazonáltal a legbonyolultabb teljes indukciós bizonyítások is ugyanezt a sémát követik.

1. Világosan fogalmazzuk meg, hogy az állítást teljes indukcióval fogjuk belátni.

2. Definiáljuk a megfelelő $P(n)$ állítást. Ez általában egyszerű, de azért vannak kivételek.

3. Mutassuk meg, hogy $P(0)$ igaz. Ez szintén egyszerű szokott lenni, azonban nem árt körültekintőnek lenni abban, hogy $P(0)$ pontosan mit is állít.

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz. Ezt a fázist indukciós lépésnek nevezzük. $P(n)$ és $P(n+1)$ általában elég hasonló állítások, mindazonáltal a közöttük lévő hézag áthidalása némi leleményt szokott igényelni. Akármilyen gondolatmenetet választunk is, annak működni kell minden n természetes számra, hisz célunk a

$$P(0) \Rightarrow P(1),\ P(1) \Rightarrow P(2),\ P(2) \Rightarrow P(3),\ \ldots$$

implikációk bizonyítása egyszerre!

5. Zárjuk le a bizonyítást azzal, hogy a teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$\frac{0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] + (n+1)^2.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

így

$$\begin{aligned}[1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2]+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$\frac{0^2\cdot(0+1)^2}{4}=\frac{0\cdot 1}{4}=0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=[1^3+2^3+\cdots+n^3]+(n+1)^3.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

így

$$[1^3+2^3+\cdots+n^3]+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3&=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{2}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)\cdot(2n+4)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2},$$

így

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}\cdot\frac{2n+3}{2n+4} \geqslant \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+4} &= \frac{1}{2n+4} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2(n+1)+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2(n+1)+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+2}\right) \\
&> \frac{1}{2(n+1)+2},
\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Jegyezzük meg, hogy a teljes indukció csak a bizonyításban van segítségünkre, a bizonyítandó állítás kitalálásához más módszerek szükségesek.

Teljes indukció elve II.

Előfordul, hogy egy állítást nem minden természetes számra akarunk belátni, hanem például csak a pozitív egészekre. A teljes indukció elvét ilyenkor is alkalmazhatjuk.

Teljes indukció elve.
Legyen $P(n)$ egy állítás, és legyen $k \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy

(1) $P(k)$ igaz,

(2) minden $n \geqslant k$ egész szám esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \geqslant k$ egész számra.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

minden n pozitív egész számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=[1+3+\cdots+(2n-1)]+(2n+1).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

így

$$[1+3+\cdots+(2n-1)]+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

minden n pozitív egész számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $1\cdot 2=2$, a jobb oldal pedig

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)+(n+1)\cdot(n+2)&=\\ =[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)]+(n+1)\cdot(n+2).&\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

így

$$[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)]+(n+1)\cdot(n+2)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)\cdot(n+2).$$

Most a jobb oldalt közös nevezőre hozva, majd kiemelve

$$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

adódik, ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

minden n pozitív egész számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

a jobb oldal pedig

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$
$$=\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

így

$$\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}= \\ =\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}&=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n+2}\\&=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Egy hibás bizonyítás

"Állítás". Minden ló ugyanolyan színű.

"Bizonyítás". Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy lovak bármely, n elemű halmazában minden ló egyforma színű.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz önmagával minden ló azonos színű.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra, azaz lovak bármely, n elemű halmazában minden ló egyforma színű. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Tekintsük lovak egy $n+1$ elemű $\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1}\}$ halmazát. Az indukciós feltevés szerint az $\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű. Ugyancsak az indukciós feltevés szerint az $\{\ell_2,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1}\}$ halmazban is minden ló ugyanolyan színű. Ebből következik, hogy az $\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1}\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén. Az állítás az a speciális eset, amikor n a világ összes lovának a száma.

Hol a hiba? A hiba a következő mondatban lapul: "Ebből következik, hogy az $\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1}\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű." A ...

jelölések azt sugallják, hogy az $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ és $\{\ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazoknak mindig van közös eleme, azonban ez $n = 1$ esetén nem igaz! Ekkor a két halmaz $\{\ell_1\}$ és $\{\ell_2\}$, amelyek magától értetődően diszjunktak.

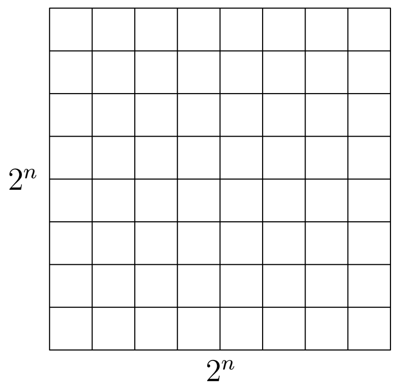
Ez alapvető hiba egy teljes indukciós bizonyításban. Beláttuk $P(1)$-et, majd beláttuk, hogy

$$P(2) \Rightarrow P(3),\ P(3) \Rightarrow P(4),\ P(4) \Rightarrow P(5),\ \ldots.$$

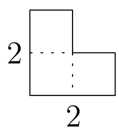
Azonban nem láttuk be, hogy $P(1) \Rightarrow P(2)$, és ettől minden összeomlik. Nem állíthatjuk, hogy $P(2), P(3), P(4), \ldots$ igaz. És természetesen nem is igazak — mindenki látott már különböző színű lovakat.

Díszburkolat

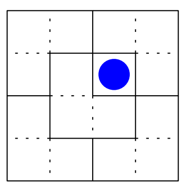
Példa. Egy régebben nagy népszerűségnek örvendő, ám mára meglehetősen elhanyagolt,



alakú tér felújítását tervezi a város önkormányzata. A tér közepére a város híres szülöttének szobrát szeretnék felállítani (ha $n \geqslant 1$, akkor négy középső négyzet van, ezek bármelyikére kerülhet a szobor), az ezen kívüli részt pedig



alakú díszkövekkel akarják burkolni. Például $n = 2$ esetén a díszkövek egy lehetséges elrendezése a következő:



Mi a helyzet más n-ekre? Mindig megoldható a feladat?

Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

"Bizonyítás". Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a tér egy négyzetnyi, és szükségképpen azon áll a szobor.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, szintén burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Bajban vagyunk! Egy kisebb térnek a kívánt módon való burkolása semmilyen támpontot nem ad egy nagyobb térnek a kívánt módon való burkolhatóságához. Nem tudjuk áthidalni a $P(n)$ és $P(n+1)$ közötti rést.

Mit tehetünk ilyenkor? Bármilyen furcsának is hangzik első hallásra, de teljes indukciós bizonyításoknál sokszor célravezető módszer, hogy ha nem tudunk valamit bebizonyítani, akkor próbáljunk meg valami általánosabbat belátni. Ez nem butaság; amikor az indukciós lépésben a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ implikációt akarjuk igazolni, akkor jobb helyzetben leszünk, ha egy általánosabb, erősebb $P(n)$ igaz voltát tételezhetjük fel. Próbáljunk meg itt is egy általánosabb állítást megfogalmazni!

Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

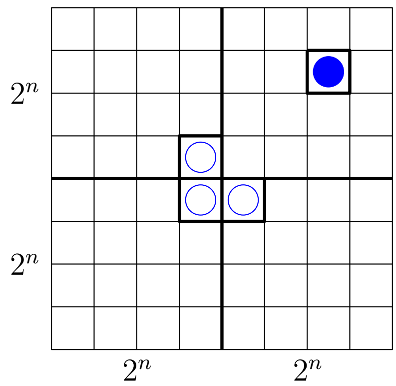
Eredeti állításunk ennek nyilván speciális esete.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a tér egy négyzetnyi, és szükségképpen azon áll a szobor.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú tér is burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

Tekintsünk egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú teret, és álljon a város híres szülöttének szobra egy tetszőleges négyzeten. Bontsuk fel a teret két egymásra merőleges egyenessel négy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú részre. Most valamelyik ilyen rész tartalmazza a város híres szülöttének szobrát. Az ábrán látható módon állítsunk fel három ideiglenes szobrot (üres körök) azokban a $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú részekben, amelyek nem tartalmazzák az igazi szobrot.



Az indukciós feltevés szerint mind a négy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú rész, bennük a három ideiglenes és az egy igazi szoborral, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel. Eltávolítva az ideiglenes szobrokat, és helyüket egyetlen L alakú díszkővel fedve, az egész tér burkolhatósága következik. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Vegyük észre, hogy nem csak azt láttuk be, hogy egy megfelelő burkolás létezik, de algoritmust is adtunk egy ilyen előállítására. Másrészt azt is beláttuk, hogy a szobor akár a tér szélére is állítható.

15-ös játék

A következő játékot Sam Lloyd találta ki 1874-ben, és a maga idejében igen népszerű volt. Egy 4×4-es négyzet alakú tartóban 15 darab négyzet alakú kő van, 1-től 15-ig megszámozva, egy négyzetnyi hely üres:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Egy lépésben az üres helyre húzhatjuk valamelyik mellette levő követ, ekkor az üres hely az elmozdított kő helyére kerül:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	14	11	15

1	2	3	4
5	6		8
9	10	7	12
13	14	11	15

1	2	3	4
5		6	8
9	10	7	12
13	14	11	15

Létezik-e húzásoknak olyan sorozata, amely a bal oldali elrendezést a jobb oldaliba viszi?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(Az egyetlen különbség, hogy a bal oldali elrendezésben a 14 és 15 feliratú kő fordított sorrendben van.)

Némi kísérletezés után az a gyanúnk támad, hogy a feladat megoldhatatlan. De hogyan lehet ezt belátni? Egy olyan megközelítést alkalmazunk, amely elég gyakori szoftverek és más rendszerek működésének elemzésénél. Úgynevezett invariánst fogunk keresni, egy olyan tulajdonságot, amelynek mindig fenn kell állnia, akárhogy is húzkodjuk a köveket. Ha ezután megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság nem áll fenn abban az esetben, amikor az utolsó két kő is helyes sorrendben áll, akkor ebből következik, hogy a bal oldali elrendezésből a jobb oldali elrendezést soha nem érhetjük el.

Tétel. Nem létezik húzásoknak olyan sorozata, amely a bal oldali elrendezést a jobb oldaliba viszi.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Két kőről azt fogjuk mondani, hogy fordított sorrendben vannak, ha a rajtuk levő számok közül a kisebbik a négyzetrácsban a normál magyar szöveg olvasását alapul véve hátrébb áll. Egy elrendezésben azon kőpárok számát, amelyek fordított sorrendben vannak, az elrendezés inverziószámának nevezzük. Először azt vizsgáljuk, hogy a húzások hogyan változtatják az elrendezés inverziószámát. Kétféle húzást fogunk megkülönböztetni.

Vízszintes húzás: ilyenkor egy követ vízszintesen mozgatunk el balra vagy jobbra.

Függőleges húzás: ilyenkor egy követ függőlegesen mozgatunk el felfelé vagy lefelé.

Állítás. Vízszintes húzás nem változtat a kövek egymáshoz képesti sorrendjén.

Bizonyítás. Az elmozdított kőnek a többi kőhöz viszonyított sorrendje nyilván nem változik. Minden más kő a helyén marad, így ezek egymáshoz viszonyított sorrendje is ugyanaz marad.

Állítás. Függőleges húzás pontosan három pár kő egymáshoz képesti sorrendjét változtatja meg.

Bizonyítás. Egy követ lefelé húzva a kő mögött álló három kő az elmozdított kő elé kerül. Hasonlóan, egy követ felfelé húzva a kő előtt álló három kő az elmozdított kő mögé kerül. Mindkét esetben az elmozdított kőnek három másik kőhöz viszonyított sorrendje változik meg. A helyükön maradt kövek egymáshoz képesti sorrendje ugyanaz marad.

Következmény. Egy vízszintes húzás az elrendezés inverziószámának paritását változatlanul hagyja, míg egy függőleges húzás az ellenkezőjére cseréli.

Bizonyítás. Egy vízszintes húzás nem változtat a fordított sorrendben levő kőpárok számán; innen az első rész adódik.

Egy függőleges húzás pontosan három pár kő egymáshoz viszonyított sorrendjét változtatja meg; egy fordított sorrendben álló pár jó sorrendben állóvá változik és viszont. Az egyik sorrendváltozás az elrendezés inverziószámának paritását ellenkezőjére változtatja, a másik visszaváltoztatja, a harmadik pedig ismét az ellenkezőjére változtatja. Innen az állítás második része is következik.

Állítás (invariáns). A kezdő elrendezésből bármely, húzásokkal elérhető elrendezésben az inverziószám paritása és az üres négyzet sorának paritása ellentétes.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik húzás után az inverziószám paritása és az üres négyzet sorának paritása ellentétes.

Alapeset. Az első húzás előtt az inverziószám 1 (csak a 14 és 15 számokat tartalmazó kövek vannak fordított sorrendben), az üres négyzet pedig a 4. sorban van. Az 1 páratlan szám, a 4 páros, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Tekintsük az $(n+1)$-edik húzást. Két eset lehetséges:

(1) Vízszintes húzás az $(n+1)$-edik. Ekkor sem az inverziószám, sem az üres négyzet sora nem változik. Az indukciós feltevés szerint ezek paritása ellentétes volt az n-edik húzás után, így az is maradt, vagyis $P(n+1)$ is igaz.

(2) Függőleges húzás az $(n+1)$-edik. Ekkor az inverziószám paritása ellenkezőjére változik. De ellenkezőjére változik az üres négyzetet tartalmazó sor paritása is, hiszen az üres négyzet egy sorral feljebb vagy lejjebb került. Az indukciós feltevés szerint a paritások ellentétesek voltak az n-edik húzás után, így azok is maradtak, vagyis $P(n+1)$ ismét igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezek után a tétel bizonyítása már egyszerű. Az elérni kívánt elrendezésben az inverziószám 0, ami páros, és az üres négyzet a 4. sorban van, ami szintén páros. Így az utolsó állítással összhangban ez az elrendezés elérhetetlen.

Örökkévalóság Temploma

Példa. Egy szerzetes, amikor belép az Örökkévalóság Templomába, kap egy csészét 15 piros és 12 zöld gyöngyszemmel. Minden nap, amikor megszólal a gong, a szerzetesek két lehetőség közül választhatnak:

(1) Ha a csészéjükben van legalább 3 piros gyöngyszem, akkor a csészéből kivesznek 3 piros gyöngyszemet, és betesznek helyette 2 zöldet.

(2) A csészéjükben levő összes zöld gyöngyszemet pirosra és az összes piros gyöngyszemet zöldre cserélik (tehát ha mondjuk 5 piros és 3 zöld gyöngyszem volt a csészében, akkor ezután 5 zöld és 3 piros lesz benne).

Egy szerzetes akkor léphet ki az Örökkévalóság Templomából, ha a csészéjében pontosan 5 piros és 5 zöld gyöngyszem van. Mutassuk meg, hogy amelyik szerzetes belép az Örökkévalóság Templomába, az soha többé nem távozik onnan!

Itt is invariánst keresünk, amelyről aztán teljes indukcióval belátjuk, hogy mindig fennáll, bármit is tesznek a szerzetesek.

Állítás (invariáns). A szerzetesek csészéjében levő piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma mindig $5k + 2$ vagy $5k + 3$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ebből következik, hogy amelyik szerzetes belép az Örökkévalóság Templomába, az soha többé nem távozik onnan. Valóban, egy szerzetes akkor léphet ki az Örökkévalóság Templomából, ha a csészéjében pontosan 5 piros és 5 zöld gyöngyszem van. Ekkor a piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma 0, ami sem $5k + 2$, sem pedig $5k + 3$ alakú egész ($k \in \mathbb{Z}$). Így az állítással összhangban ez a kombináció elérhetetlen.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik gongütés után egy szerzetes csészéjében levő piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma mindig $5k + 2$ vagy $5k + 3$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Alapeset. Kezdetben a szerzetes csészéjében levő piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma $15 - 12 = 5 \cdot 0 + 3$, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n + 1)$ is igaz.

Legyen az n-edik gongütés után a szerzetes csészéjében levő piros gyöngyök száma p, a zöld gyöngyök száma pedig z. Az $(n + 1)$-edik gongütésre a szerzetes két dolgot tehet.

(1) Ha $p \geqslant 3$, akkor a csészéből kivesz 3 piros gyöngyszemet, és betesz helyette 2 zöldet. A piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma ezután $(p - 3) - (z + 2) = (p - z) - 5$ lesz. Az indukciós feltevés szerint $p - z$ vagy $5k + 2$ vagy $5k + 3$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért az $(n + 1)$-edik gongütés után a szerzetes csészéjében levő piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma vagy $(5k + 2) - 5 = 5(k - 1) + 2$ vagy $(5k + 3) - 5 = 5(k - 1) + 3$. Így $P(n + 1)$ igaz ebben az esetben.

(2) A csészéjében levő összes zöld gyöngyszemet pirosra és az összes piros gyöngyszemet zöldre cseréli. A piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma ezután $z - p$ lesz. Az indukciós feltevés szerint $p - z$ vagy $5k+2$ vagy $5k+3$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért az $(n+1)$-edik gongütés után a szerzetes csészéjében levő piros gyöngyök száma mínusz a zöld gyöngyök száma vagy $-(5k+2) = 5(-k-1)+3$ vagy $-(5k+3) = 5(-k-1)+2$. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A sakktábla, a boszorkány és a jótündér

Példa. Kedvenc sakktáblánk színezését egy gonosz boszorkány megváltoztatta, néhány fekete mezőt fehérre, egyes fehéreket pedig feketére színezett át. A sakktábla eredeti színezésének visszaállításához szerencsére segítséget kérhetünk egy jótündértől, aki a varázspálcája egyetlen suhintásával a sakktábla egy tetszőleges sorában vagy oszlopában a színezést az ellentettjére tudja változtatni, vagyis az adott sorban vagy oszlopban minden fekete mezőt fehérre, és minden fehér mezőt feketére színez át. Vissza tudja-e állítani a jótündér a varázspálcája suhintásainak egy alkalmas sorozatával a sakktábla eredeti színezését?

Világos, hogy ha a sakktábla egy átszínezéséből a varázspálca suhintásainak egy alkalmas sorozatával visszaállítható az eredeti színezés, akkor az eredeti színezéséből is elérhető ez az átszínezés a suhintások fordított sorrendben történő végrehajtásával. Ezért a kérdés úgy is megfogalmazható, hogy mely színezések érhetők el a sakktábla eredeti színezéséből a varázspálca suhintásainak valamilyen sorozatával?

Először itt is invariánst keresünk, amelyről aztán teljes indukcióval belátjuk, hogy mindig fennáll, bármilyen átszínezést hajt végre a jótündér a varázspálcája suhintásaival.

Állítás (invariáns). A sakktábla eredeti színezéséből a varázspálca suhintásaival elérhető bármely színezésben minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy a jótündér n-edik suhintása utáni színezésben minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje.

Alapeset. Az eredeti színezésben minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Tekintsük a jótündér $(n+1)$-edik suhintását. Két eset lehetséges:

(1) Egy sort színez át a jótündér az $(n+1)$-edik suhintással. Az indukciós feltevés szerint az n-edik suhintás után minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje, így ugyanez szükségképpen fennáll az $(n+1)$-edik suhintás után is, akármelyik sort is színezte át a jótündér. Így $P(n+1)$ is igaz.

(2) Egy oszlopot színez át a jótündér az $(n+1)$-edik suhintással. Tekintsük a sakktábla egy tetszőleges sorát. Az indukciós feltevés szerint ez a sor az n-edik suhintás után megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje. Ha a sor megegyezik az első sorral, akkor az $(n+1)$-edik suhintással ellentettjére változtatott oszlopban levő mezőik a suhintás után is megegyeznek, ha pedig a sor ellentettje az első sornak, akkor az $(n+1)$-edik suhintással ellentettjére változtatott oszlopban levő mezőik a suhintás után továbbra is egymás ellentettjei. Így $P(n+1)$ ismét igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megmutatjuk még, hogy az eredeti színezésből tetszőleges olyan $\mathcal{C}$ színezés elérhető a varázspálca suhintásainak egy alkalmas sorozatával, amelyben minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje. Először az oszlopokat színezzük át úgy, hogy az első sor megegyezzen $\mathcal{C}$ első sorával. Nevezzük ezt a színezést $\mathcal{C}^*$-nak. Az invariáns állítás szerint a $\mathcal{C}^*$ színezésben minden sor megegyezik az első sorral vagy annak ellentettje. Feltételünk szerint ugyanez teljesül a $\mathcal{C}$ színezésre is, így a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}^*$ színezésekben bármely két azonos sorszámú sor megegyezik vagy egymás ellentettje. Ha két azonos sorszámú sor egymás ellentettje, akkor a $\mathcal{C}^*$ színezésben változtassuk ezt a sort az ellentettjére. Az összes ilyen sort az ellentettjére változtatva végül a $\mathcal{C}$ színezéshez jutunk.

Kupacolás

Példa. Tekintsük a következő játékot. Egy kupacban n darab gyufaszál van. Az első lépésben a kupacot két nem üres kupacra bontjuk. Minden további lépésben kiválasztjuk valamelyik kupacot, és azt ismét két nem üres kupacra bontjuk. A játék végén n kupacunk van mindegyikben pontosan egy szál gyufával.

Minden lépéssel pontokat gyűjtünk: ha kettébontunk egy $a+b$ gyufaszálból álló kupacot egy a és egy b gyufaszálból álló kupacra, akkor ezért

$a \cdot b$ pontot kapunk. Összpontszámunk az egyes lépésekben kapott pontjaink összege lesz. Lássunk egy játékot $n = 10$ gyufaszállal:

$$
\begin{array}{llllllllllr}
\boxed{10} & & & & & & & & & & \\
\boxed{5} & \boxed{5} & & & & & & & & & 25 \\
\boxed{5} & \boxed{3} & \boxed{2} & & & & & & & & 6 \\
\boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & & & & 4 \\
\boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & & & & & & 4 \\
\boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & & 2 \\
\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & & & & 1 \\
\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & & & 1 \\
\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & & 1 \\
\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \\
\cline{11-11}
 & & & & & & & & & & 45
\end{array}
$$

Milyen stratégiát kövessünk, hogy a lehető legtöbb pontot gyűjtsük össze? Megmutatjuk, hogy a játékban összegyűjtött pontok száma csak a gyufaszálak számától függ, a stratégia nem számít!

Teljes indukció elve III.

A játék elemzéséhez a teljes indukció elvének a következő, "erősebb" változatát fogjuk használni.

Teljes indukció elve ("erősebb" változat).
Legyen $P(n)$ egy állítás, és legyenek $k, l \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy

(1) $P(k), P(k+1), \ldots, P(k+l)$ igaz,

(2) minden $n \geqslant k+l$ egész szám esetén, ha $P(k), P(k+1), \ldots, P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \geqslant k$ egész számra.

A különbség annyi, hogy az indukciós lépésnél most kicsit több dolgot tehetünk fel. Esetenként ez némileg egyszerűsít a bizonyításon.

Kupacolás (folytatás)

Állítás. Akárhogyan is bontunk szét egy n gyufaszálból álló kupacot n darab egyetlen gyufaszálból álló kupacra, a kapott pontok száma mindig $n(n-1)/2$.

Bizonyítás. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy akárhogyan is bontunk szét egy n gyufaszálból álló kupacot n darab egyetlen gyufaszálból álló kupacra, a kapott pontok száma mindig $n(n-1)/2$.
Alapeset. $P(1)$ triviálisan teljesül; ilyenkor egyetlen lépés sincs, így a kapott pontszám 0, ami megegyezik a képlet által szolgáltatott értékkel.
Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Tekintsünk egy $n+1$ gyufaszálból álló kupacot. Tegyük fel, hogy az első lépésben ezt egy k és egy $n+1-k$ gyufaszálból álló kupacra bontottuk, ahol $1 \leqslant k \leqslant n$. Teljes pontszámunk nyilván az első lépésben kapott pont, plusz a keletkezett kupacok szétbontogatásával szerezhető további pontok összege. Az indukciós feltevés szerint $P(k)$ és $P(n+1-k)$ igaz, így a teljes pontszámunk

$$k(n+1-k) + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n+1-k)(n+1-k-1)}{2}.$$

Ez a kifejezés közös nevezőre hozás, majd a zárójelek felbontása után a következő alakot ölti:

$$\frac{2kn + 2k - 2k^2 + k^2 - k + n^2 - nk + n - k - kn + k^2}{2}.$$

Ezután a számlálóban lévő műveleteket elvégezve

$$\frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

adódik. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elvének "erősebb" változata szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

NIM

Helyezzünk el néhány pénzérmét az asztalon egy vagy több sorban, ahogy a következő ábrán is látható:

○ ○ ○

○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

A játékot ketten játsszák, a játékosok felváltva vesznek el egy vagy több pénzérmét valamelyik sorból. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét veszi el. Vegyen el mondjuk két pénzérmét a kezdő játékos a fenti elrendezés első sorából:

$$
\begin{array}{lllll}
\circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ
\end{array}
$$

Ezután vegye el az összes pénzérmét a második játékos az utolsó sorból:

$$
\begin{array}{llll}
\circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ
\end{array}
$$

Az első játékos most vegyen el három pénzérmét a második sorból:

$$
\begin{array}{l}
\circ \\
\circ
\end{array}
$$

A második játékos láthatóan bajban van, a két megmaradt pénzérme közül pontosan egyet kell elvennie. Bármelyiket is választja, az első játékos veszi el az utolsó pénzérmét, és így ő a nyertes.

Charles Bouton, a Harvard Egyetem professzora 1901-ben fedezte fel hogyan kell a játékot játszani, ha nyerni akarunk.

A pénzérmék elrendezését egy listával fogjuk leírni, ennek elemei az egyes sorokban lévő pénzérmék száma. Az előbbi példában a kezdő elrendezés így $(3, 4, 5)$, az ezt követő elrendezések pedig egymás után $(1, 4, 5)$, $(1, 4, 0)$, $(1, 1, 0)$. A stratégia megértéséhez szükségünk lesz egy matematikai műveletre, amelyet Nim-összegzésnek fogunk nevezni. A $c_1, \ldots, c_k$ természetes számok Nim-összege szintén egy természetes szám, amelyet a következőképpen számolunk ki:

- Írjuk fel a $c_1, \ldots, c_k$ számokat bináris alakban.
- A Nim-összeg i-edik bitje legyen a $c_1, \ldots, c_k$ számok i-edik bitjeinek "xorzata".

A xor a "kizáró vagy" rövidítése. A b_1 és b_2 bitek $b_1 \oplus b_2$ xorzatát a következőképpen definiáljuk:

b_1	b_2	$b_1 \oplus b_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A definícióból következik, hogy a $b_1, \ldots, b_k$ bitek xorzata 0, ha a bitek összege páros, és 1, ha az összeg páratlan. Például $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ mivel $1+0+1+1 = 3$ páratlan, míg $1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$ mivel $1 + 1 + 0 + 0 = 2$ páros.

Lássuk, hogyan számoljuk ki mondjuk a 3, 4 és 5 számok Nim-összegét:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & = & 011 & & \\ 4 & = & 100 & & \\ 5 & = & 101 & & \\ \hline & & 010 & = & 2 \end{array}$$

Az egyes oszlopokban levő biteket xorozva a 010 Nim-összeget kapjuk, amely a 2 bináris reprezentációja.

Legyen $(c_1, \ldots, c_k)$ pénzérmék egy elrendezése a Nim játékban: ez azt jelenti, hogy k sor van, és minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén az i-edik sorban c_i pénzérme található. Ezt az elrendezést nyerőnek nevezzük, ha $c_1, \ldots, c_k$ Nim-összege nem 0, míg vesztőnek ha a Nim-összeg 0. Ilyen módon a lehetséges elrendezések halmazát két csoportra osztottuk: a nyerő és a vesztő elrendezésekére. Ezek után a stratégia a következő:

- Ha a soron következő játékosnak nyerő elrendezésből kell pénzérmét elvenni, akkor ezt úgy tegye meg, hogy az ellenfélnek egy vesztő elrendezés maradjon.

- Ha a soron következő játékosnak vesztő elrendezésből kell pénzérmét elvenni, akkor bármit tesz, az ellenfélnek egy nyerő elrendezés marad; válasszon tetszőlegesen, és készüljön a vereségre.

Így ha az első játékosnak egy nyerő elrendezésből kell pénzérmét elvenni, akkor ezt úgy tegye meg, hogy az ellenfélnek egy vesztő elrendezés marad. Bármit tesz most a második játékos, az első játékosnak ismét egy nyerő elrendezésből kell pénzérmét elvenni. Ez addig ismétlődik, amíg az első játékos győzni fog.

Lássuk, hogyan működik Bouton stratégiája az $(1, 3, 5, 7)$ elrendezésen, amellyel a Tavaly Marienbadban című francia filmben találkozhattunk. Számoljuk ki ennek az elrendezésnek a Nim-összegét:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 001 & & \\ 3 & = & 011 & & \\ 5 & = & 101 & & \\ 7 & = & 111 & & \\ \hline & & 000 & = & 0 \end{array}$$

Mivel a Nim-összeg 0, ezért ez egy vesztő elrendezés az első játékos számára. Bármennyi pénzérmét is vesz el, a második játékosnak egy nyerő elrendezés marad, vagyis egy olyan, amelynek a Nim-összege nem 0. Távolítsa el mondjuk az első játékos az egész negyedik sort. A kapott elrendezés Nim-összege:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & = & 001 & & \\ 3 & = & 011 & & \\ 5 & = & 101 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ \hline & & 111 & = & 7 \end{array}$$

Ez egy nyerő elrendezés. Most a második játékosnak úgy kellene elvenni pénzérmét, hogy az első játékosnak egy vesztő elrendezés maradjon, vagyis egy olyan, amelynek a Nim-összege 0. Egyetlen módon érhető ez el, vegyen el három pénzérmét a harmadik sorból:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & = & 001 & & \\ 3 & = & 011 & & \\ 2 & = & 010 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ \hline & & 000 & = & 0 \end{array}$$

Most az első játékosnak megint egy vesztő elrendezésből kell pénzérmét elvenni. Bárhogyan is teszi ezt meg, a második játékosnak egy nyerő elrendezés marad. Vegye el az első játékos mondjuk mindhárom pénzérmét a második sorból. Ekkor a második játékosnak a következő elrendezés marad:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & = & 001 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ 2 & = & 010 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ \hline & & 011 & = & 3 \end{array}$$

Ez egy nyerő elrendezés. A második játékosnak ismét úgy kellene elvenni pénzérmét, hogy az első játékosnak egy vesztő elrendezés maradjon. Ez egyszerű, vegyen el egy pénzérmét a második játékos a harmadik sorból:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & = & 001 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ 1 & = & 001 & & \\ 0 & = & 000 & & \\ \hline & & 000 & = & 0 \end{array}$$

Az első játékos innen nyilván veszít, a két megmaradt pénzérme közül pontosan egyet kell elvennie, mire a második játékos elveszi a másikat, és nyer.

Belátjuk, hogy Bouton stratégiája tényleg működik.

1. Állítás Ha a soron következő játékos egy vesztő elrendezésből kénytelen elvenni pénzérmét, akkor bárhogyan is teszi ezt meg, a másik játékosnak egy nyerő elrendezés marad.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a soron következő játékos egy vesztő elrendezésből kénytelen elvenni pénzérmét, vagyis egy olyan $(c_1, \ldots, c_k)$ elrendezésből, amelynek a Nim-összege 0. Tegyük fel, hogy a játékos a j-edik sorból vesz el pénzérmét, ahol így $c'_j < c_j$ pénzérme marad. A c_j és c'_j számok bináris alakja legalább egy bit pozíción különbözik, ennélfogva a kapott elrendezés Nim-összegében ezen a bit pozíción szükségképpen 1 áll, így a Nim-összeg nem 0, vagyis a kapott elrendezés nyerő.

2. Állítás Ha a soron következő játékos egy nyerő elrendezésből vehet el pénzérmét, akkor ezt meg tudja úgy tenni, hogy a másik játékosnak egy vesztő elrendezés marad.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a soron következő játékosnak egy olyan $(c_1, \ldots, c_k)$ elrendezésből kell pénzérmét elvenni, amelynek Nim-összege $s \neq 0$. Legyen i a legértékesebb helyiérték, ahol s bináris reprezentációjában 1 áll. Ekkor kell lenni egy olyan sornak, legyen ez mondjuk a j-edik, amelyben lévő érmék c_j számának bináris reprezentációjában az i-edik helyiértéken szintén 1 áll. Vegyen el a játékos annyi pénzérmét a j-edik sorból, hogy a megmaradt pénzérmék c'_j számára teljesüljön, hogy c_j és c'_j bináris reprezentációja pontosan azokon a pozíciókon különbözik, ahol s bináris reprezentációjában 1 áll.

Mivel az i-edik pozíción c_j bináris reprezentációjában 1 áll, c'_j bináris reprezentációjában pedig 0, továbbá az ennél értékesebb helyiértékeken a két szám megegyezik, ezért $c'_j < c_j$.

Másrészt miután a j-edik sorban c'_j pénzérme maradt, a kapott elrendezés Nim-összege 0, hiszen c_j és c'_j bináris reprezentációja pontosan azokon a pozíciókon különbözik, ahol az eredeti Nim-összegben 1 állt.

Egy példa talán jobban megvilágítja a fentieket. Tegyük fel, hogy a soron következő játékosnak az $(1, 2, 4, 4)$ elrendezésből kell pénzérmét elvenni. Kiszámítjuk a Nim-összeget:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 001 & & \\ 2 & = & 010 & & \\ 4 & = & 100 & & \\ 4 & = & 100 & & \\ \hline & & 011 & = & 3 \end{array}$$

A Nim-összeg 011 binárisan. Most a legértékesebb 1 jobbról a második pozíción áll. A pénzérmék száma a második sorban 010 binárisan, itt áll jobbról a második pozíción 1. Ebből a sorból veszünk el pénzérmét úgy, hogy binárisan 001 pénzérme maradjon, ez különbözik a pézérmék eredeti számától minden olyan pozíción, ahol a Nim-összegben 1 áll. Most kiszámoljuk a kapott elrendezés Nim-összegét:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 001 & & \\ 1 & = & 001 & & \\ 4 & = & 100 & & \\ 4 & = & 100 & & \\ \hline & & 000 & = & 0 \end{array}$$

Ahogy vártuk, ez egy vesztő elrendezés.

Most már készen állunk a fő eredmény bizonyítására.

Tétel. Ha a soron következő játékosnak egy nyerő elrendezésből kell elvenni pénzérmét, akkor ő fog nyerni. Ellenkező esetben a másik játékos fog nyerni.

Bizonyítás. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy n pénzérméből álló tetszőleges elrendezés esetén ha ez egy nyerő elrendezés, akkor a soron következő játékos nyer, ellenkező esetben pedig a másik játékos.

Alapeset. $P(1)$ triviálisan teljesül; az egyetlen pénzérméből álló elrendezés nyerő, a kezdő játékos elveszi ezt a pénzérmét, és nyer.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Tekintsünk egy $n+1$ pénzérméből álló elrendezést. Két eset lehetséges.

(1) Tegyük fel, hogy az elrendezés nyerő. Ekkor a 2. Állítás szerint a soron következő játékos el tud venni úgy pénzérmét, hogy a másik játékosnak egy legfeljebb n pénzérméből álló, vesztő elrendezés marad. Az indukciós feltevés szerint így a másik játékos fog veszíteni.

(2) Tegyük fel, hogy az elrendezés vesztő. Ekkor az 1. Állítás szerint a soron következő játékos bárhogyan is vesz el pénzérmét, a másik játékosnak egy legfeljebb n pénzérméből álló, nyerő elrendezés marad. Az indukciós feltevés szerint így a másik játékos fog nyerni.

Így $P(n+1)$ mindkét esetben igaz.

A teljes indukció elvének "erősebb" változata szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Tanulócsoportok

Példa. Mutassuk meg, hogy egy $n \geqslant 12$ fős osztály mindig felosztható 4 és 5 fős tanulócsoportokra!

Megoldás. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy $n \geqslant 12$ fős osztály mindig felosztható 4 és 5 fős tanulócsoportokra.
Alapeset(ek). $P(n)$ igaz minden $12 \leqslant n \leqslant 15$ esetén:

$$\begin{aligned}12 &= 4+4+4,\\ 13 &= 4+4+5,\\ 14 &= 4+5+5,\\ 15 &= 5+5+5.\end{aligned}$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(12), P(13), \ldots, P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 15$ egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Tekintsünk egy $n+1$ fős osztályt. Alakítsunk először egy 4 fős tanulócsoportot. Mivel $n \geqslant 15$, ezért $(n+1)-4 = n-3 \geqslant 12$, így a fennmaradó $n-3$ tanuló az indukciós feltevés szerint beosztható 4 és 5 fős tanulócsoportokba. Ez utóbbi csoportbeosztás, kiegészítve az elsőnek alakított 4 fős tanulócsoporttal megfelel a kívánalmaknak. Így $P(n+1)$ is igaz.

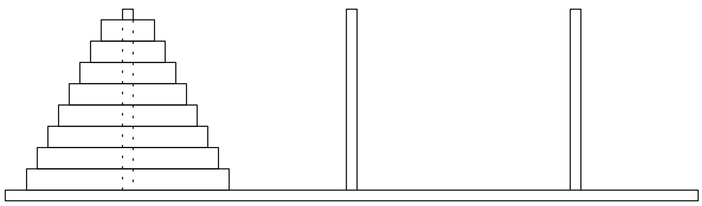
A teljes indukció elvének "erősebb" változata szerint $P(n)$ igaz minden $n \geqslant 12$ egész számra.

Rekurzió

Számítási feladatok megoldásánál gyakran alkalmazzuk azt a megközelítést, hogy az adott feladatot hasonló, de kevesebb objektumra vonatkozó feladat(ok) megoldására vezetjük vissza. Ezt a megközelítést a feladat rekurzív megoldásának nevezzük.

Hanoi tornyai

A következő feladványt Edouard Lucas tette közzé 1883-ban. Egy talapzatba három függőleges rúd van rögzítve. A rudak egyikén nyolc különböző átmérőjű, középen kifúrt korong helyezkedik el, alulról felfelé csökkenő sorrendben.

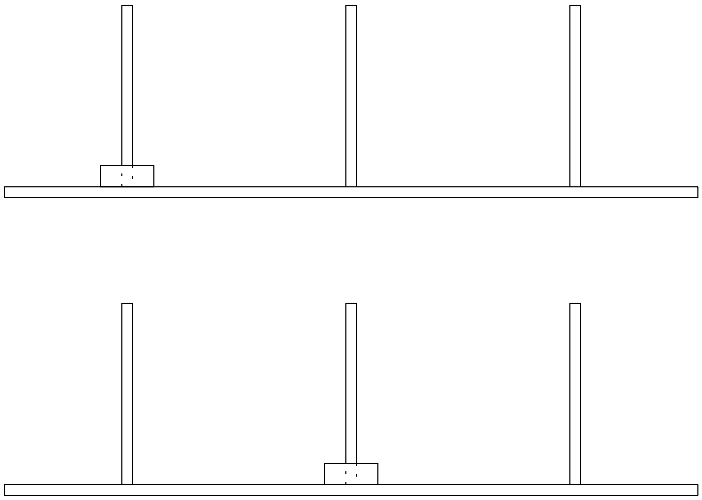


Egy lépésben valamelyik rúd legfelső korongját áttehetjük egy másik rúdon levő korongok tetejére, ha ezzel nagyobb átmérőjű korong nem kerül kisebb átmérőjű fölé. A feladat az összes korong áthelyezése egy másik rúdra a fenti szabály betartásával; a korongok a másik rúdon is alulról felfelé az átmérőjük szerint csökkenő sorrendben vannak.

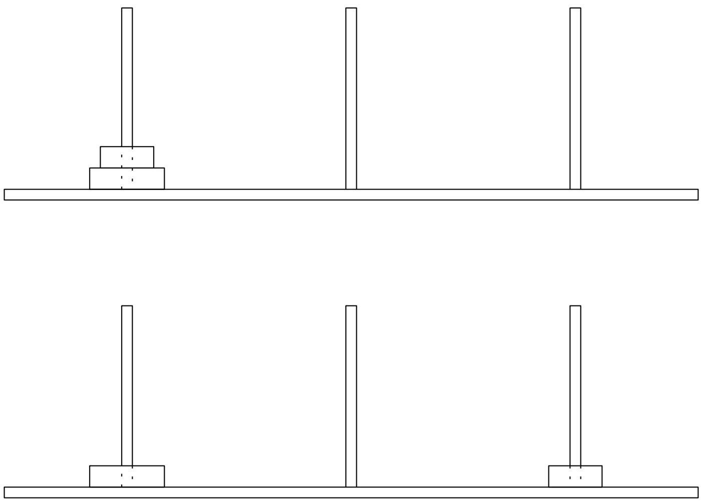
Lucas egy romantikus történetet is közreadott a feladat kapcsán. Ebben 3 gyémánttű és 64 tömör arany korong szerepel. Az idő kezdetén mind a 64 korong ugyanazon a tűn helyezkedett el. Azóta szerzetesek egy csoportja azon munkálkodik, hogy a korongokat a fenti szabályok betartásával áthelyezze egy másik tűre. Amikor végeznek, eljön a világ vége. Ami számunkra érdekes: ha elég idő áll a szerzetesek rendelkezésére, végre tudják-e hajtani a feladatot, és ha igen, mennyi idő van hátra a világ végéig?

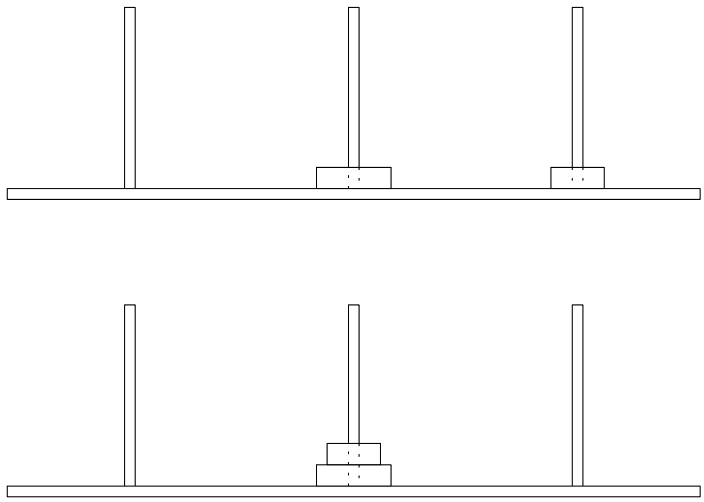
Bár első pillantásra egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy a feladat megoldható, némi próbálkozás után az a meggyőződésünk támad, hogy valószínűleg igen. A megoldás legelegánsabban rekurzív módon adható meg. Vizsgáljuk meg először a feladat egy, kettő illetve három korongra vonatkozó változatát.

Egy korong esetén nincs sok tennivalónk:

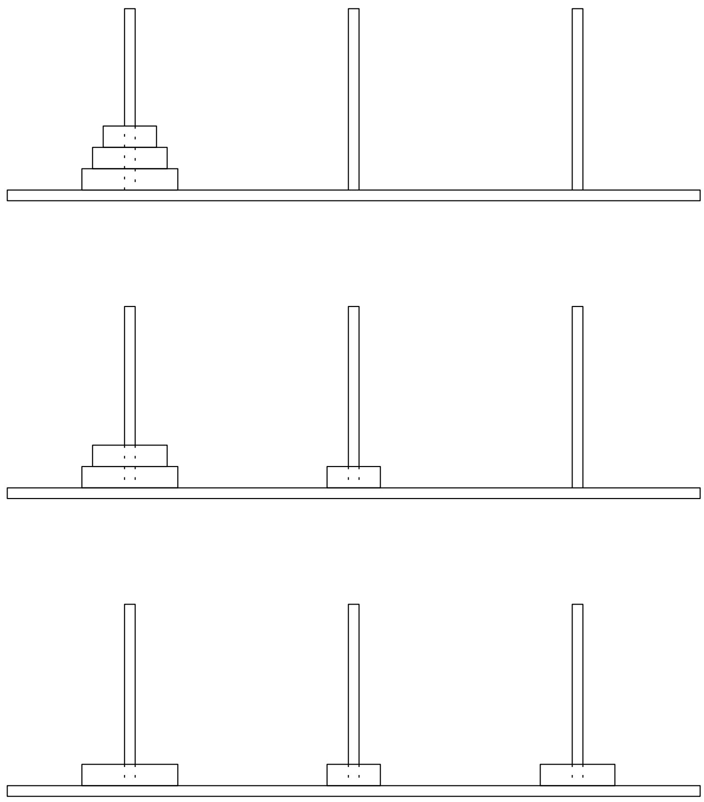


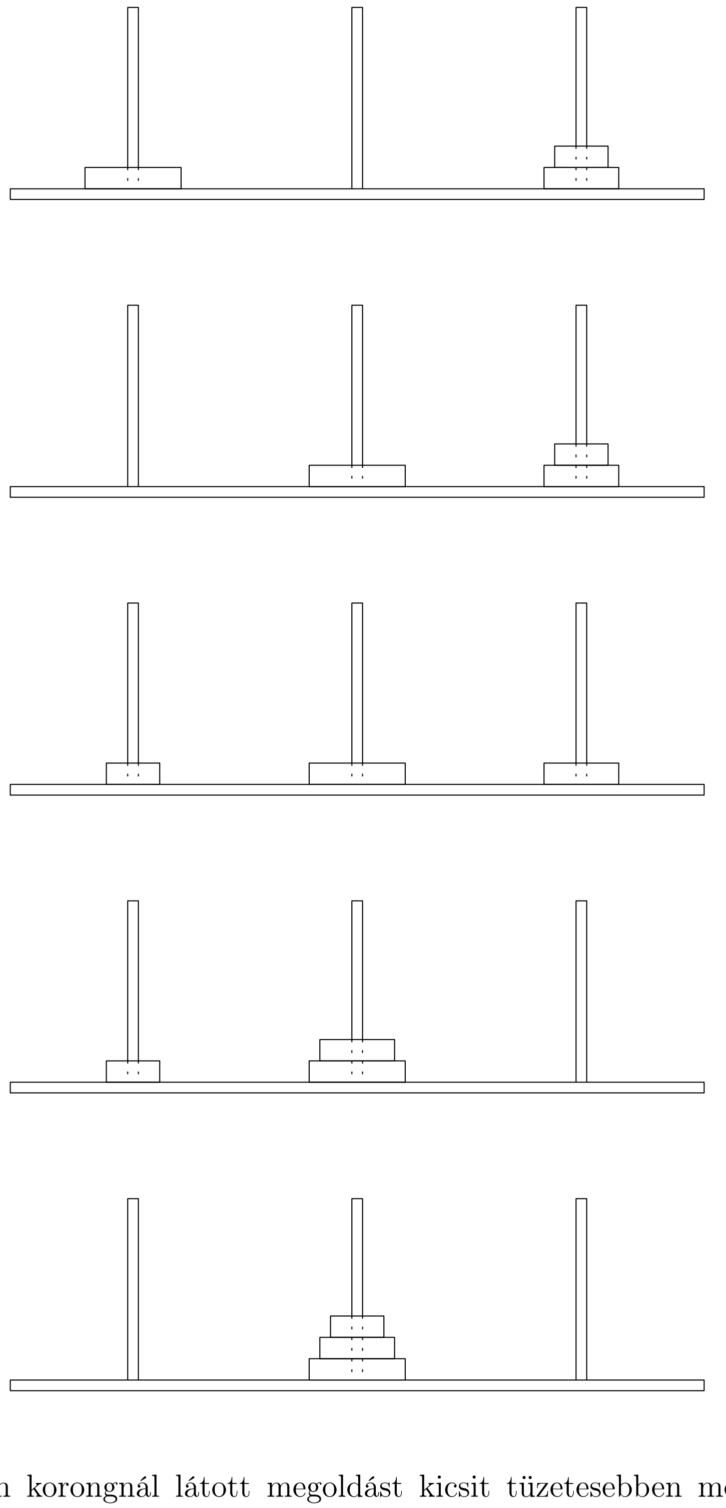
Két korong esetén sem sokkal bonyolultabb a helyzet:





Három korongra is elég gyorsan megtalálható a következő, hét lépéses megoldás:





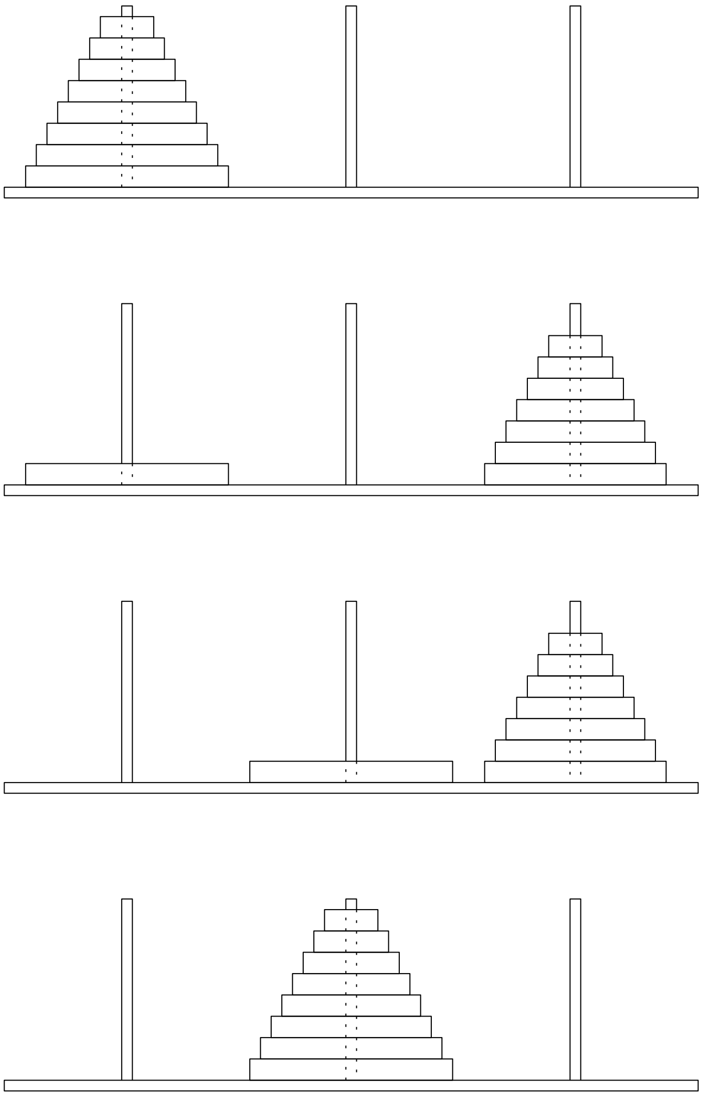
A három korongnál látott megoldást kicsit tüzetesebben megvizsgálva nem nehéz rekurzívan megfogalmazni az n korongra vonatkozó feladat megoldását:

(1) Helyezzük át az első rúd felső $n-1$ korongját (rekurzívan) a harmadik rúdra.

(2) Helyezzük át a legnagyobb korongot az elsőről a második rúdra.

(3) Helyezzük át a harmadik rúdon levő $n-1$ korongot (rekurzívan) a második rúdra, a legnagyobb korong fölé.

Képiesen:



Ebből következik, hogy a szerzetesek egyszer csak végezni fognak a feladatukkal, és a világ vége bekövetkezik. Ezek után már csak az a kérdés, hogy mikor?

Jelölje $T(n)$ a minimális lépésszámot, amely n korong egyik rúdról egy másikra történő áthelyezéséhez szükséges. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $T(1) = 1$ és $T(2) = 3$. Azt is láttuk, hogy három korong átrakható hét lépésben, így $T(3) \leqslant 7$.

Vizsgáljuk meg a rekurzív megoldásunkat a lépésszám szempontjából! Az első fázis, amikor az első rúd felső $n - 1$ korongját áthelyezzük a harmadik rúdra, megvalósítható $T(n - 1)$ lépésben. A második fázis, amikor a legnagyobb korongot az elsőről a második rúdra helyezzük át, egy lépés. A harmadik fázis, amikor a harmadik rúdon levő $n - 1$ korongot áthelyezzük a második rúdra, ismét megvalósítható $T(n - 1)$ lépésben. Ebből következik, hogy $T(n) \leqslant 2T(n - 1) + 1$ minden $n \geqslant 2$ egész számra. Speciálisan

$$
\begin{aligned}
T(3) &\leqslant 2T(2) + 1 = 7, \\
T(4) &\leqslant 2T(3) + 1 \leqslant 15, \\
T(5) &\leqslant 2T(4) + 1 \leqslant 31, \\
T(6) &\leqslant 2T(5) + 1 \leqslant 63.
\end{aligned}
$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a minimális lépésszámot ezzel még nem határoztuk meg, arra csak egy felső korlátot adtunk. Nem zárhatjuk ki, hogy az általunk talált algoritmusnál van hatékonyabb is.

Belátjuk, hogy az általunk talált algoritmusnál nincs hatékonyabb eljárás. Tegyük fel, hogy n korongot szeretnénk áthelyezni az első rúdról egy másikra. Valamelyik lépésben nyilván át kell helyeznünk a legnagyobb korongot az első rúdról mondjuk a másodikra. Hogy ezt megtehessük, nyilván az összes többi korongnak a harmadik rúdon kell lenni. Ekkor viszont ezt az $n - 1$ korongot előzőleg át kellett helyezni az első rúdról a harmadikra, ami legalább $T(n-1)$ lépés. Hasonlóan, miután a legnagyobb korong a végső helyére kerül, ismét legalább $T(n - 1)$ lépés szükséges a többi korong föléhelyezéséhez. Ebből következik, hogy $T(n) \geqslant 2T(n - 1) + 1$ minden $n \geqslant 2$ egész számra.

A két egyenlőséget összevetve $T(n)$-re a következő rekurzív formula adódik:

$$
T(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1, \\ 2T(n-1) + 1 & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}
$$

Ebből a rekurzív formulából $T(64)$ kiszámítható, bár eltart egy ideig. Jó lenne valami zárt formulát találni $T(n)$-re! Erre több módszer is ismert. A legegyszerűbb talán megsejteni a formulát, majd igazolni, általában teljes indukcióval.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Állítás. Ha $T(n)$-re a

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1, \\ 2T(n-1)+1 & \text{ha } n \geqslant 2, \end{cases}$$

rekurzív összefüggés teljesül, akkor $T(n) = 2^n - 1$ minden n pozitív egész számra.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $T(n) = 2^n - 1$.
Alapeset. $P(1)$ igaz, mert $T(1) = 1 = 2^1 - 1$.
Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

A rekurzív formula szerint $T(n+1) = 2T(n) + 1$. Alkalmazzuk az indukciós feltevést:

$$2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Megsejteni a megoldást sajnos nem mindig ilyen egyszerű. Egy alternatív módszer a következő.

1. lépés: "fejtsük ki" a rekurzív formulát.

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + 2T(n-1) \\ &= 1 + 2(1 + 2T(n-2)) \\ &= 1 + 2 + 4T(n-2) \\ &= 1 + 2 + 4(1 + 2T(n-3)) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8T(n-3) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8(1 + 2T(n-4)) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16T(n-4) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

2. lépés: keressünk "mintát".

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^i T(n-i) \\ &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^i(1 + 2T(n-(i+1))) \\ &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^i + 2^{i+1}T(n-(i+1)). \end{aligned}$$

Rögtön ellenőriztük is, hogy a "mintát" jól ismertük-e fel.

3. lépés: helyettesítsük i-be azt az értéket, hogy a jobb oldal a rekurzió "alapesetének" függvénye legyen. Itt $i = n - 1$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}T(1) \\ &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $T(1) = 1$.

4. lépés: hozzuk a jobb oldalt zárt alakra.

$$T(n) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Persze ez a módszer sem alkalmazható mindig!

Fibonacci sorozat

Egy új tudományterületen kezdetben rengeteg betöltetlen állás van a különböző egyetemeken szerte a világon. Az idő múlásával kezdenek az állások betöltődni, a terület iránt érdeklődő jövőbeni hallgatók akadémiai karrier lehetőségeit egyre behatároltabbá téve. A professzorok számának növekedésével a Ph.D. hallgatók száma is nő, ami még inkább gyorsítja az állások betöltésének ütemét. Egyszer csak az összes állás betöltődik; ezután a terület iránt érdeklődő hallgatóknak nincs esélye egyetemi állást kapni. Mikor fog ez bekövetkezni?

A részletek a következők:

- Összesen N egyetemi állás van; ez a szám nem változik soha.
- Senkit nem lehet nyugdíjba küldeni, így ha egy állás betöltődik, az sose ürül meg újra.
- Minden évben minden professzornál egy Ph.D. hallgató végez, aki a következő évben maga is professzor lesz. Egyetlen kivétel van: friss professzornak nincs Ph.D. hallgatója, ilyenkor még túl elfoglalt (publikációk, pályázatok, projektek).
- Kezdetben egy professzor sincs, és az első évben egyetlen professzort alkalmaznak, egyetlen helyen.

Jelölje $F(n)$ a professzorok számát az n-edik évben. Vizsgáljuk meg $F(n)$ értékét néhány kis n-re. Kezdetben egyetlen professzor sincs, így $F(0) = 0$. Az első évben egyetlen friss professzor van, akinek még nincs Ph.D. hallgatója, így $F(1) = 1$. A második évben friss professzor nincs, egyetlen öreg professzor van egy Ph.D. hallgatóval, így $F(2) = 1$. A harmadik évben egy friss és egy öreg professzor van, az öreg professzor egy Ph.D. hallgatóval, így $F(3) = 2$. A negyedik évben egy friss és két öreg professzor van, az öreg professzorok két Ph.D. hallgatóval, így $F(4) = 3$. Az ötödik évben két friss és három öreg professzor van, az öreg professzorok három Ph.D. hallgatóval, így $F(5) = 5$. A hatodik évben három friss és öt öreg professzor van, az öreg professzorok öt Ph.D. hallgatóval, így $F(6) = 8$.

Világos, hogy az n-edik évbeli professzorok számát úgy kapjuk meg, hogy az $(n-1)$-edik évbeli professzorok számához hozzáadjuk az új alkalmazottak számát. Az $(n-1)$-edik évbeli professzorok száma definíció szerint $F(n-1)$. Az új alkalmazottak mindegyike az $(n-1)$-edik évben Ph.D. hallgatója volt egy akkor nem friss professzornak, vagyis egy olyannak, aki már az $(n-2)$-edik évben is professzor volt. Ez utóbbiak száma $F(n-2)$, így az új alkalmazottak száma is ugyanennyi. Innen $F(n)$-re a következő rekurzív formula adódik:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0, \\ 1 & \text{ha } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Az így definiált sorozatot Fibonacci sorozatnak nevezzük, tagjait pedig Fibonacci számoknak. A Fibonacci számok meglepően sok alkalmazásnál előjönnek. A sorozatot először Fibonacci írta le 1202-ben egy nyulak szaporodásáról szóló feladvány kapcsán.

A rekurzív formula alapján a Fibonacci számok egymás után kiszámíthatók. Az állások betöltődésére vonatkozó eredeti kérdés megválaszolásához azonban egy zárt képlet lényegesen kényelmesebb volna. Most is próbálkozhatunk azzal, hogy kitaláljuk a formulát. Mint látni fogjuk, ez lineáris rekurziók esetén — ide tartozik a Fibonacci sorozatot megadó rekurzív formula — nem is olyan bonyolult.

Lineáris rekurziók

A lineáris rekurziók általános alakja (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve) a következő :

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_d f(n-d).$$

Definiáljuk a rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenletet a következőképpen:

$$x^d = a_1 x^{d-1} + a_2 x^{d-2} + \cdots + a_{d-1}x + a_d.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökeit meghatározva megkaphatjuk a rekurzió alapmegoldásait:

- ha r egyszeres (valós) gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor
$$f(n) = r^n$$
megoldása a rekurziónak,
- ha r többszörös, mondjuk k-szoros (valós) gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor
$$f(n) = r^n, nr^n, n^2r^n, \ldots, n^{k-1}r^n$$
mind megoldásai a rekurziónak.

Ha például r_1, r_2, r_3 a karakterisztikus egyenlet (valós) gyökei, mondjuk r_3 kétszeres multiplicitással, akkor

$$f(n) = r_1^n, r_2^n, r_3^n, nr_3^n$$

négy különböző (alap)megoldása a rekurziónak.

Az így kapott megoldások általában még nem konzisztensek a kezdeti értékekre vonatkozó feltevésekkel. Azonban igaz a következő.

Állítás. Ha $g(n)$ és $h(n)$ megoldásai egy lineáris rekurziónak, akkor

$$\alpha g(n) + \beta h(n)$$

is megoldás tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Mivel $g(n)$ és $h(n)$ megoldás, ezért

$$\begin{aligned} g(n) &= a_1 g(n-1) + a_2 g(n-2) + \cdots + a_d g(n-d), \\ h(n) &= a_1 h(n-1) + a_2 h(n-2) + \cdots + a_d h(n-d). \end{aligned}$$

Ám ekkor

$$\begin{aligned} \alpha g(n) + \beta h(n) = & a_1(\alpha g(n-1) + \beta h(n-1)) + \\ & a_2(\alpha g(n-2) + \beta h(n-2)) + \cdots + \\ & a_d(\alpha g(n-d) + \beta h(n-d)), \end{aligned}$$

vagyis $\alpha g(n) + \beta h(n)$ is megoldás.

Az előbbi példánál ez azt jelenti, hogy ott

$$f(n) = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n + \delta n r_3^n$$

megoldás tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén.

A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek α-ra, β-ra, γ-ra és δ-ra vonatkozó lineáris egyenletekként jelennek most meg. Ha például $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ és $f(3) = 7$, akkor az egyenletek

$$\begin{array}{l} \alpha r_1^0 + \beta r_2^0 + \gamma r_3^0 + \delta \cdot 0 \cdot r_3^0 = 0 \\ \alpha r_1^1 + \beta r_2^1 + \gamma r_3^1 + \delta \cdot 1 \cdot r_3^1 = 1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 + \delta \cdot 2 \cdot r_3^2 = 4 \\ \alpha r_1^3 + \beta r_2^3 + \gamma r_3^3 + \delta \cdot 3 \cdot r_3^3 = 7 \end{array}$$

Megoldva az egyenletrendszert, a lineáris rekurziónak a kezdeti értékekre vonatkozó feltételekkel konzisztens megoldása meghatározható.

Fibonacci sorozat (folytatás)

Alkalmazzuk az előbbieket a Fibonacci sorozatra. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2),$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = x + 1.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

mindkét gyök egyszeres.

Most

$$F(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.

A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$F(0) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = c_1 + c_2 = 0,$$

$$F(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1.$$

Az első egyenletből $c_2 = -c_1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

illetve

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

ahonnan egyszerű számolással

$$c_1 \cdot \sqrt{5} = 1$$

adódik. Következésképpen

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{és} \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ezzel kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Elég furcsa! Ha valaki nem hiszi el, teljes indukcióval ellenőrizheti a képlet helyességét!

Visszatérve az eredeti kérdésre, hány év múlva lesz betöltve mind az N egyetemi állás? Ehhez nyilván azt a legkisebb n pozitív egész számot kell meghatározni, amelyre $F(n) \geqslant N$. Az $F(n)$-re vonatkozó képlet elég komplikált, azonban vegyük észre, hogy

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

hiszen

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = 0.618\ldots < 1$$

és egy egynél kisebb abszolút értékű szám nagy hatványai alig térnek el nullától.

Keressük tehát azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \geqslant N.$$

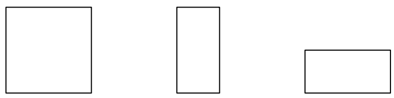
Ez már könnyű:

$$n = \left\lceil \frac{\log \sqrt{5}N}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\rceil.$$

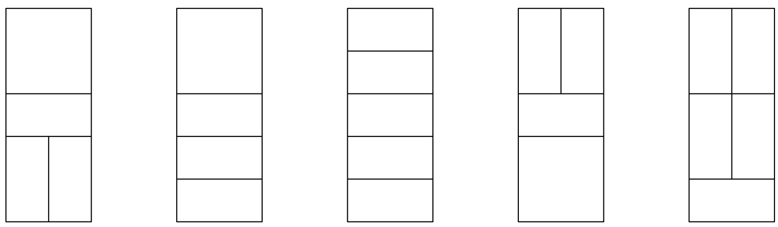
Így ha mondjuk az álláshelyek száma $N = 10000$, akkor $n = 21$ év.

Mini-tetris

Példa. A mini-tetris játékban egy nyerő konfiguráció a $2 \times n$-es játéktábla teljes kitöltése a következő három alakzattal:



Például a 2×5-ös játéktáblán néhány nyerő konfiguráció:



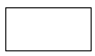
Jelölje $M(n)$ a nyerő konfigurációk számát a $2 \times n$-es játéktáblán.

(a) Határozzuk meg $M(1)$, $M(2)$ és $M(3)$ értékét!

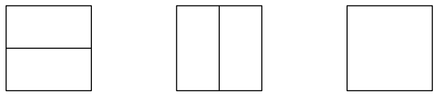
(b) Keressünk rekurzív összefüggést $M(n-2)$, $M(n-1)$ és $M(n)$ között!

(c) Adjunk zárt formulát $M(n)$-re!

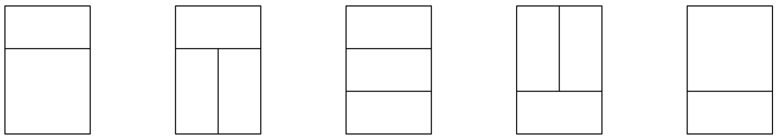
Megoldás.
(a) Könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 1$ esetén



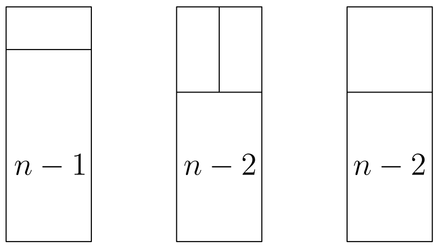
az egyetlen nyerő konfiguráció, $n = 2$ esetén



a nyerő konfigurációk, $n = 3$ esetén pedig



a nyerő konfigurációk. Így $M(1) = 1$, $M(2) = 3$ és $M(3) = 5$.
(b) A $2 \times n$-es játéktáblán minden nyerő konfiguráció a játéktábla tetején levő elrendezés alapján három típusba sorolható:



Az első típusból $M(n-1)$, míg a másik kettőből $M(n-2)$ nyerő konfiguráció van. Így

$$M(n) = M(n-1) + 2M(n-2).$$

(c) A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$M(n) = M(n-1) + 2M(n-2),$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = x + 2.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$; természetesen mindkét gyök egyszeres.

Most

$$M(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.

A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$M(1) = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot (-1)^1 = 2c_1 - c_2 = 1,$$
$$M(2) = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot (-1)^2 = 4c_1 + c_2 = 3.$$

A két egyenletet összeadva $6c_1 = 4$, és így $c_1 = \frac{2}{3}$, majd visszahelyettesítve az első egyenletbe $c_2 = 2c_1 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ adódik. Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$M(n) = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Indiana Jones és a Szent Grál

Példa. Indiana Jones legújabb kalandja a Szent Grál megszerzése. A Szent Grált egy sivatagi szentélyben őrzik, d napi járóföldre a legközelebbi oázistól. A sivatag elviselhetetlenül forró, Indiana Jonesnak folyamatosan inni kell. Sajnos Indiana Jones az egyéb felszerelése mellett egyszerre legfeljebb egy gallon vizet tud magánál tartani — ez egy napra elég neki. Viszont a sivatagban Indiana Jones bárhol készíthet víztárolókat, amelyekbe a nála levő vízből tetszőleges mennyiséget beleönthet; ezekből később, amikor ismét arra jár, kiegészítheti az apadó vízkészletét.

(a) Milyen messzire juthat Indiana Jones az oázistól, ha vissza is akar térni, és a bennszülöttek csak egy gallon vizet hajlandók neki összesen adni?

(b) Milyen messzire juthat Indiana Jones az oázistól, ha vissza is akar térni, és a bennszülöttek két gallon vizet hajlandók neki összesen adni?

(c) Milyen messzire juthat Indiana Jones az oázistól, ha vissza is akar térni, és a bennszülöttek három gallon vizet hajlandók neki összesen adni? Próbáljuk meg felhasználni az előző pontbeli stratégiát!

(d) Milyen messzire juthat Indiana Jones az oázistól, ha vissza is akar térni, és a bennszülöttek n gallon vizet hajlandók neki összesen adni?

(e) Hány napig tart az út, ha a szentély 10 napi járóföldre van az oázistól?

Megoldás.
(a) Indiana Jones $\frac{1}{2}$ napi járóföldre juthat el a sivatagban, utána vissza kell fordulnia.
(b) Indiana Jones először $\frac{1}{4}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, ott készít egy víztárolót, beleönt $\frac{1}{2}$ gallon vizet, majd visszamegy az oázisba. Ezután

újra elindul a második gallon vízzel, $\frac{1}{4}$ napi járóföldre begyalogol a sivatagba, a víztárolónál magához vesz $\frac{1}{4}$ gallon vizet, gyalogol még fél napot, majd visszafordul. A víztárolónál magához veszi a megmaradt $\frac{1}{4}$ gallon vizet, és visszamegy az oázisba. Ilyen módon Indiana Jones

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

napi járóföldre juthat el a sivatagban.

(c) Indiana Jones először $\frac{1}{6}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, ott készít egy víztárolót, beleönt $\frac{2}{3}$ gallon vizet, majd visszamegy az oázisba. A második gallon vízzel Indiana Jones ismét $\frac{1}{6}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, beleönt a víztárolóba $\frac{2}{3}$ gallon vizet, majd visszamegy az oázisba. Végül a harmadik gallon vízzel megint $\frac{1}{6}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, és beleönt a víztárolóba $\frac{2}{3}$ gallon vizet. Ekkor a víztárolóban $3 \times \frac{2}{3} = 2$ gallon víz van, Indiana Jonesnál pedig ezen kívül még $\frac{1}{6}$ gallon, amivel vissza tud térni az oázisba.

Azonban most Indiana Jones ahelyett, hogy azonnal visszatérne az oázisba, az előző pontban leírtak szerint a víztárolóban levő 2 gallon vízzel még további $\frac{3}{4}$ napi járóföldre juthat el a sivatagba, majd onnan vissza is tud térni a víztárolóhoz, az ezen kívül meglevő $\frac{1}{6}$ gallon vízzel pedig az oázisba. Ilyen módon Indiana Jones

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

napi járóföldre juthat el a sivatagban.

(d) Az előző gondolatmenetet követjük. Indiana Jones először $\frac{1}{2n}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, ott készít egy víztárolót, beleönt $\frac{n-1}{n}$ gallon vizet, majd visszamegy az oázisba. Ezután Indiana Jones még $n-2$ alkalommal begyalogol a sivatagba $\frac{1}{2n}$ napi járóföldre, beleönt a víztárolóba $\frac{n-1}{n}$ gallon vizet, majd visszamegy az oázisba. Végül az n-edik gallon vízzel megint $\frac{1}{2n}$ napi járóföldre gyalogol be a sivatagba, és beleönt a víztárolóba $\frac{n-1}{n}$ gallon vizet. Ekkor a víztárolóban $n \times \frac{n-1}{n} = n-1$ gallon víz van, Indiana Jonesnál pedig ezen kívül még $\frac{1}{2n}$ gallon, amivel vissza tud térni az oázisba.

Azonban most Indiana Jones ahelyett, hogy azonnal visszatérne az oázisba, a víztárolóban levő $n-1$ gallon vízzel, használva az erre a vízmennyiségre vonatkozó stratégiát, még további

$$\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

napi járóföldre juthat el a sivatagba, majd onnan vissza is tud térni a víztárolóhoz, az ezen kívül meglevő $\frac{1}{2n}$ gallon vízzel pedig az oázisba. Ilyen módon

Indiana Jones

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2(n-2)}+\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sim\frac{\ln n}{2}$$

napi járóföldre juthat el a sivatagban.
(e) Ekkor az

$$\frac{\ln n}{2}\geqslant 10$$

összefüggésnek kell teljesülni, vagyis $n\geqslant e^{20}\approx 4.8\cdot 10^{8}$ nap.

Elemi számelmélet

A számelmélet a matematika azon ága, amely az egész számok tulajdonságait vizsgálja. Mit lehet ezen vizsgálni — kérdezhetjük —, van a 0, az $1, 2, 3$, és így tovább, meg a negatív számok. Ezeket már az ősember is ismerte, a pozitívokat mindenképp.

Oszthatóság

Azt mondjuk, hogy egy a egész szám osztója egy b egész számnak, ha van olyan k egész szám, amelyre $ak = b$. Azt, hogy a osztója b-nek úgy jelöljük, hogy $a \mid b$. Például $7 \mid 63$, mert $7 \cdot 9 = 63$. A nullának minden egész szám osztója, hisz $a \cdot 0 = 0$ minden a egész számra teljesül. Ha a osztója b-nek, akkor azt is szoktuk mondani, hogy b többszöröse a-nak. Például 63 többszöröse 7-nek.

Tökéletes számok

Ez idáig elég egyszerűnek tűnik, de játsszunk el kicsit az oszthatóság definíciójával. Egy ókori misztikus matematikai közösség, a Pitagoreusok, egy számot tökéletesnek neveztek, ha az megegyezett a nála kisebb pozitív osztóinak összegével. Például $6 = 1 + 2 + 3$ és $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ tökéletes számok, de 10 nem tökéletes, hisz $1 + 2 + 5 = 8$, és 12 sem tökéletes, hisz $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

Euklidesz i.e. 300 körül megadta a páros tökéletes számok egy jellemzését. De mi van a páratlan tökéletes számokkal? Vannak egyáltalán ilyenek? Több mint 2000 év után a válasz még mindig nem ismert! Körülbelül 10^{300}-ig minden páratlan számot sikerült kizárni, de senki nem bizonyította be, hogy ezután sem fog feltűnni egy.

Körülbelül 5 percnyi számelmélet tanulás után az emberi tudás határain túlra tévedtünk. Az igazat megvallva ez elég tipikus: a számelmélet tele van olyan kérdésekkel, amelyeket könnyű megfogalmazni, de reménytelenül nehéz megválaszolni. Azért ez nem minden esetben rossz hír, meglepő módon a számítástudomány ezeket a nehézségeket időnként képes a maga hasznára fordítani: amikor az interneten vásárolunk, pénzt veszünk fel egy automatából vagy megnézzük a vizsgajegyünket a NEPTUN rendszerben, a számelmélet bizonyos problémáinak hatékony megoldhatatlanságában vakon megbízva tesszük ezt.

Oszthatóság (folytatás)

Összefoglaljuk az oszthatóság legfontosabb tulajdonságait, ezeket egyáltalán nem nehéz bizonyítani.

Állítás.

(1) Ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$ tetszőleges c egészre.

(2) Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$.

(3) Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid sb + tc$ tetszőleges s, t egészekre.

(4) Tetszőleges $c \neq 0$ egészre $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha $ca \mid cb$.

Bizonyítás.
(1) Mivel $a \mid b$, így van olyan k egész, amelyre $ak = b$. Megszorozva az egyenletet c-vel $a \cdot kc = bc$ adódik, amiből $a \mid bc$ következik.
(2) Mivel $a \mid b$, így van olyan k_1 egész, amelyre $ak_1 = b$. Mivel $b \mid c$, így van olyan k_2 egész, amelyre $bk_2 = c$. A második egyenletben b helyére ak_1-et helyettesítve $a \cdot k_1k_2 = c$ adódik, amiből $a \mid c$ következik.
(3) Mivel $a \mid b$, így van olyan k_1 egész, amelyre $ak_1 = b$. Megszorozva ezt az egyenletet s-sel $a \cdot k_1s = sb$ adódik. Mivel $a \mid c$, így van olyan k_2 egész, amelyre $ak_2 = c$. Megszorozva ezt az egyenletet t-vel $a \cdot k_2t = tc$ adódik. Összeadva az $a \cdot k_1s = sb$ és $a \cdot k_2t = tc$ egyenleteket kapjuk, hogy $ak_1s + ak_2t = sb + tc$, illetve kiemeléssel $a(k_1s + k_2t) = sb + tc$. Ebből $a \mid sb + tc$ következik.
(4) Először belátjuk, hogy ha $a \mid b$, akkor $ac \mid bc$. Mivel $a \mid b$, így van olyan k egész, amelyre $ak = b$. Megszorozva az egyenletet c-vel $k \cdot ac = bc$ adódik, amiből $ac \mid bc$ következik. Ezután belátjuk, hogy ha $ac \mid bc$ és $c \neq 0$, akkor $a \mid b$. Mivel $ac \mid bc$, így van olyan k egész, amelyre $ack = bc$. Most $c \neq 0$, így az egyenletet végigoszthatjuk vele. Az osztás után $ak = b$ adódik, amiből $a \mid b$ következik.

Példa. Mutassuk meg, hogy $3 \mid n^3 - n$ minden n természetes számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $n^3 - n$ osztható 3-mal.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $0^3 - 0 = 0$ osztható 3-mal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n).\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $3 \mid n^3 - n$. Másrészt $3 \mid 3(n^2 + n)$ triviálisan igaz. Ezért

$$3 \mid n^3 - n + 3(n^2 + n) = (n+1)^3 - (n+1),$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Példa. Mutassuk meg, hogy $9 \mid 2^{2n} - 3n - 1$ minden n természetes számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $2^{2n} - 3n - 1$ osztható 9-cel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $2^{2 \cdot 0} - 3 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ osztható 9-cel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n+2} - 3n - 4 \\ &= 4 \cdot 2^{2n} - 3n - 4 \\ &= 4(2^{2n} - 3n - 1) + 9n.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $9 \mid 2^{2n} - 3n - 1$. Másrészt $9 \mid 9n$ triviálisan igaz. Ezért

$$9 \mid 4(2^{2n} - 3n - 1) + 9n = 2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Példa. Mutassuk meg, hogy $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ minden n természetes számra!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ osztható 7-tel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $3^{2 \cdot 0 + 1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$ osztható 7-tel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+3} + 2^{n+3}\\ &= 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}\\ &= 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \cdot 3^{2n+1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Másrészt $7 \mid 7 \cdot 3^{2n+1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$7 \mid 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \cdot 3^{2n+1} = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Maradékos osztás

Két egész szám összege, különbsége és szorzata is egész szám, az viszont már aránylag ritka, hogy a hányadosuk is egész legyen. Elvégezhető viszont az egész számok körében a maradékos osztás.

Tétel. Minden a és $b \neq 0$ egész számhoz egyértelműen léteznek olyan q és r egészek, amelyekre

$$a = qb + r \quad \text{és} \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

Például ha $a = 2716$ és $b = 10$, akkor $q = 271$ és $r = 6$, hiszen $2716 = 271 \cdot 10 + 6$. A q mennyiséget hányadosnak, az r mennyiséget maradéknak nevezzük. Az r mennyiségre használni fogjuk $\mathrm{rem}(a, b)$ jelölést. Például $\mathrm{rem}(32, 5) = 2$, hiszen $32 = 6 \cdot 5 + 2$. A rem operátort a legtöbb programozási nyelv is ismeri, azonban negatív számok esetén meglepetésekre számíthatunk.

Die Hard 3

A Die Hard 3 című film egyik jelenetében Samuel Jacksonnak és Bruce Willisnek egy bombát kellett hatástalanítani, amit az ördögi Simon Gruber készített nekik. Ehhez egy szökőkútból kellett pontosan 4 gallon vizet kimérniük egy 5 gallonos és egy 3 gallonos kanna segítségével a nagyobbik kannába, majd azt egy mérlegre rátéve tudták az időzítő szerkezetet kikapcsolni.

Hogyan oldotta meg Samuel Jackson és Bruce Willis a feladatot? Mi lett volna, ha 3 gallon vizet kell kimérniük egy 21 gallonos és egy 26 gallonos kanna segítségével? És ha 2 gallont egy 899 és egy 1147 gallonos kanna segítségével? Vagy ha 4 gallont egy 3 és egy 6 gallonos kanna segítségével? Van valami általános módszer, amely megadja, hogy miképpen mérhető ki g gallon víz egy a és egy b gallonos kanna segítségével? A megoldást a számelmélet szolgáltatja!

Tegyük fel, hogy van egy a és egy b gallonos kannánk. Hajtsunk végre néhány öntést, és nézzük, hogyan változik a víz mennyisége az egyes kannákban. A "rendszer" állapotát minden lépésben egy (x, y) számpárral írhatjuk le, ahol x az a gallonos, y pedig a b gallonos kannában levő víz mennyisége.

0. Kezdetben mindkét kanna üres $\longrightarrow$ $(0, 0)$.

1. Töltsük tele az a gallonos kannát $\longrightarrow$ $(a, 0)$.

2. Öntsük át az a gallonos kannában levő összes vizet a b gallonos kannába $\longrightarrow$ $(0, a)$.

3. Ismét töltsük tele az a gallonos kannát $\longrightarrow$ (a, a).

4. Most öntsünk át az a gallonos kannában levő vízből a b gallonos kannába, amíg az meg nem telik $\longrightarrow$ $(2a - b, b)$.

5. Öntsük ki a vizet a b gallonos kannából $\longrightarrow$ $(2a - b, 0)$.

6. Öntsük át ezután az a gallonos kannában maradt vizet a b gallonos kannába $\longrightarrow$ $(0, 2a - b)$.

7. Töltsük tele ismét az a gallonos kannát $\longrightarrow$ $(a, 2a - b)$.

8. Öntsük át megint az a gallonos kannában levő összes vizet a b gallonos kannába $\longrightarrow$ $(0, 3a - b)$.

(Persze bizonyos feltételezésekkel éltünk itt a-ra és b-re nézve.) Nehéz nem észrevenni, hogy minden lépésben a kannákban levő víz mennyisége $s \cdot a + t \cdot b$ alakú valamilyen s és t egészekkel. Egy ilyen kifejezést az a és b számok (egész együtthatós) lineáris kombinációjának nevezünk. Észrevételünk úgy hangzik, mint egy invariáns állítás, próbáljuk hát bebizonyítani teljes indukcióval.

Állítás. Tegyük fel, hogy van egy a és egy b gallonos, kezdetben üres vizeskannánk. Egy lépésben teletölthetjük vízzel valamelyik kannát, kiönthetjük valamelyik kannát, illetve áttölthetünk az egyik kannából vizet a másikba míg vagy az első ki nem ürül vagy a másik tele nem lesz. Ekkor a kannákban levő víz mennyisége minden lépés után a és b lineáris kombinációja lesz.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik lépés után a kannákban levő víz mennyisége a és b lineáris kombinációja.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz kezdetben mindkét kanna üres, és 0 természetesen előáll a és b lineáris kombinációjaként: $0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Az indukciós feltevés szerint az n-edik lépés után az a illetve b gallonos kannában levő víz mennyisége $sa + tb$ illetve $ua + vb$ alkalmas s, t, u, v egész számokkal. Nézzük mi történik az $(n+1)$-edik lépésben!

- Az a gallonos kannát kiürítjük $\longrightarrow$ $(0, ua + vb)$.
- A b gallonos kannát kiürítjük $\longrightarrow$ $(sa + tb, 0)$.
- Az a gallonos kannát teletöltjük $\longrightarrow$ $(a, ua + vb)$.
- A b gallonos kannát teletöltjük $\longrightarrow$ $(sa + tb, b)$.
- Az a gallonos kannában levő összes vizet áttöltjük a b gallonos kannába $\longrightarrow$ $(0, (s+u)a + (t+v)b)$.
- A b gallonos kannában levő összes vizet áttöltjük az a gallonos kannába $\longrightarrow$ $((s+u)a + (t+v)b, 0)$.
- Az a gallonos kannában levő vízből áttöltünk a b gallonos kannába, amíg az meg nem telik $\longrightarrow$ $((s+u)a + (t+v-1)b, b)$.
- A b gallonos kannában levő vízből áttöltünk az a gallonos kannába, amíg az meg nem telik $\longrightarrow$ $(a, (s+u-1)a + (t+v)b)$.

Látható, hogy az összes esetben a kannákban levő víz mennyisége továbbra is a és b lineáris kombinációja, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Következmény. Nem mérhető ki 4 gallon víz egy 3 és egy 6 gallonos kanna segítségével.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a kannákban levő víz mennyisége mindig $s \cdot 3 + t \cdot 6$ alkalmas s és t egészekkel. Ez a mennyiség nyilván 3 többszöröse. Mivel 4 nem az, így $s \cdot 3 + t \cdot 6 = 4$ soha nem állhat fenn, következésképpen 4 gallon víz nem mérhető ki.

Joggal vetődhet fel, mit értünk el azzal, hogy egy vizeskannákra vonatkozó érthető kérdést átalakítottunk egy lineáris kombinációkra vonatkozó komplikált kérdéssé. Meglepő módon a lineáris kombinációk szoros kapcsolatban vannak valamivel, amit nagyon is jól ismerünk, és amelynek segítségével már meg tudjuk majd oldani a vizeskannás problémát.

Legnagyobb közös osztó

Az a és b nem mindkettő nulla egész számok legnagyobb közös osztója az a legnagyobb egész szám, amely osztója a-nak és b-nek is. Az a és b számok legnagyobb közös osztóját $\mathrm{lnko}(a, b)$ jelöli. Például $\mathrm{lnko}(18, 24) = 6$.

Tétel. Az a és b nem mindkettő nulla egész számok legnagyobb közös osztója megegyezik a és b legkisebb pozitív értékű lineáris kombinációjával.

Bizonyítás. Legyen a és b legkisebb pozitív értékű lineáris kombinációja m. Megmutatjuk, hogy $m = \mathrm{lnko}(a, b)$.

Először belátjuk, hogy $m \geqslant \mathrm{lnko}(a, b)$. Definíció szerint $\mathrm{lnko}(a, b) \mid a$ és $\mathrm{lnko}(a, b) \mid b$. Ezért tetszőleges s és t egészekre $\mathrm{lnko}(a, b) \mid sa+tb$, speciálisan $\mathrm{lnko}(a, b) \mid m$. Következésképpen $m \geqslant \mathrm{lnko}(a, b)$.

Ezek után belátjuk, hogy $m \leqslant \mathrm{lnko}(a, b)$. Ehhez elég megmutatni, hogy $m \mid a$ és $m \mid b$, vagyis m közös osztója a-nak és b-nek — ebből következik, hogy nem lehet nagyobb, mint a legnagyobb közös osztó. Lássuk $m \mid a$ bizonyítását, $m \mid b$ bizonyítása hasonló.

A maradékos osztás tétele szerint

$$a = qm + r$$

valamilyen q és $0 \leqslant r < m$ egészekkel. Másrészt $m = sa + tb$ szintén valamilyen s és t egészekkel. Az utóbbi összefüggést az előzőbe helyettesítve

$$a = q(sa + tb) + r,$$

illetve átrendezéssel

$$r = (1 - qs)a + (-qt)b$$

adódik, ami azt jelenti, hogy r is kifejezhető a és b lineáris kombinációjaként. Azonban $0 \leqslant r < m$ és m a legkisebb pozitív értékű lineáris kombinációja a-nak és b-nek, így szükségképpen $r = 0$. Ebből pedig következik, hogy $m \mid a$.

A bizonyítás során láttuk, hogy a és b minden lineáris kombinációja többszöröse $\mathrm{lnko}(a, b)$-nek. Ez megfordítva is igaz, mivel $\mathrm{lnko}(a, b)$ lineáris kombinációja a-nak és b-nek, ugyanez teljesül $\mathrm{lnko}(a, b)$ bármely többszörösére is. Összefoglalva:

Következmény. Az a és b nem mindkettő nulla egész számok minden lineáris kombinációja többszöröse $\text{lnko}(a, b)$-nek és $\text{lnko}(a, b)$ minden többszöröse lineáris kombinációja a-nak és b-nek.

A vizeskannákra vonatkozó állítás így megfogalmazható a legnagyobb közös osztóval is.

Következmény. Tegyük fel, hogy van egy a és egy b gallonos, kezdetben üres vizeskannánk. Egy lépésben teletölthetjük vízzel valamelyik kannát, kiönthetjük valamelyik kannát, illetve áttölthetünk az egyik kannából vizet a másikba míg vagy az első ki nem ürül vagy a másik tele nem lesz. Ekkor a kannákban levő víz mennyisége minden lépés után $\text{lnko}(a, b)$ többszöröse lesz.

Összefoglaljuk a legnagyobb közös osztó legfontosabb tulajdonságait.

Állítás.

(1) Az a és b számok minden közös osztója osztja $\text{lnko}(a, b)$-t.

(2) $\text{lnko}(ka, kb) = k \cdot \text{lnko}(a, b)$ minden k pozitív egészre.

(3) Ha $\text{lnko}(a, b) = 1$ és $\text{lnko}(a, c) = 1$, akkor $\text{lnko}(a, bc) = 1$.

(4) Ha $a \mid bc$ és $\text{lnko}(a, b) = 1$, akkor $a \mid c$.

(5) Ha $a \mid c$ és $b \mid c$, továbbá $\text{lnko}(a, b) = 1$, akkor $ab \mid c$.

(6) $\text{lnko}(a, b) = \text{lnko}(b, \text{rem}(a, b))$.

A bizonyítások során általában a következő stratégiát fogjuk alkalmazni: a legnagyobb közös osztóra vonatkozó kérdést a korábbi tétel felhasználásával egy lineáris kombinációra vonatkozó kérdésre vezetjük vissza, ezután megoldjuk a lineáris kombinációra vonatkozó problémát, majd az eredményt ismét a korábbi tétel felhasználásával a legnagyobb közös osztóra vonatkozó eredményként interpretáljuk.

Bizonyítás.
(1) Tudjuk, hogy $\text{lnko}(a, b) = sa + tb$ valamilyen s és t egészekkel. Legyen m tetszőleges közös osztója a-nak és b-nek. Ekkor $a = mx$ és $b = my$ szintén valamilyen x és y egészekkel. De így

$$\text{lnko}(a, b) = s(mx) + t(my) = m(sx + ty),$$

amiből következik, hogy $m \mid \text{lnko}(a, b)$.

(2) A korábbi tétel szerint $\mathrm{lnko}(a, b)$ az $\{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$ számhalmaz legkisebb pozitív eleme. Ebből következik, hogy $k \cdot \mathrm{lnko}(a, b)$ a $\{k(sa + tb) \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$ számhalmaz legkisebb pozitív eleme (itt felhasználtuk, hogy k pozitív). Most vegyük észre, hogy

$$\{k(sa + tb) \mid s, t \in \mathbb{Z}\} = \{s(ka) + t(kb) \mid s, t \in \mathbb{Z}\},$$

így a két számhalmaz legkisebb pozitív eleme is ugyanaz. Ám az utóbbi halmaz legkisebb pozitív eleme szintén a korábbi tétel szerint $\mathrm{lnko}(ka, kb)$, amiből az állítás adódik.

(3) A feltétel szerint léteznek olyan s, t és u, v egészek, amelyekkel $sa+tb = 1$ és $ua + vc = 1$. Szorozzuk össze a két egyenletet:

$$(sa + tb)(ua + vc) = 1,$$

majd csoportosítsuk kicsit másképpen a bal oldalon levő tényezőket:

$$(sua + tbu + svc)a + (tv)(bc) = 1.$$

De ez azt jelenti, hogy 1 kifejezhető a és bc lineáris kombinációjaként, ami viszont csak akkor lehetséges, ha $\mathrm{lnko}(a, bc) = 1$.

(4) Mivel $\mathrm{lnko}(a, b) = 1$, ezért léteznek olyan s és t egészek, amelyekkel $sa + tb = 1$. Szorozzuk végig az egyenletet c-vel:

$$s(ac) + t(bc) = c.$$

Triviális módon $a \mid ac$, továbbá a feltétel szerint $a \mid bc$, így

$$a \mid s(ac) + t(bc) = c.$$

(5) Mivel $a \mid c$ és $b \mid c$, így léteznek olyan x és y egészek, amelyekkel $c = xa$ és $c = yb$. Másrészt $\mathrm{lnko}(a, b) = 1$ miatt léteznek olyan s és t egészek, amelyekkel

$$sa + tb = 1.$$

Szorozzuk meg az egyenletet c-vel:

$$csa + ctb = c.$$

Ezután helyettesítsük be alkalmasan a $c = xa$ és $c = yb$ összefüggéseket:

$$ybsa + xatb = c.$$

Látható, hogy ab osztója a bal oldalnak, ezért ugyanez fennáll a jobb oldalra is, vagyis $ab \mid c$.

(6) Idézzük fel, hogy $\mathrm{rem}(a, b) = a - qb$ valamilyen q egésszel. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathrm{lnko}(a, b) = \mathrm{lnko}(a - qb, b)$ teljesül tetszőleges q egész esetén. Az állítás ennek speciális esete.

Először is $\mathrm{lnko}(a, b)$ az $\{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$ számhalmaz legkisebb pozitív eleme. Hasonlóan $\mathrm{lnko}(a - qb, b)$ az $\{x(a - qb) + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ számhalmaz legkisebb pozitív eleme. Nem nehéz észrevenni, hogy

$$\{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{Z}\} = \{x(a - qb) + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Valóban, $sa + tb = s(a - qb) + (t + qs)b$ miatt a bal oldali halmaz része a jobb oldali halmaznak, és $x(a - qb) + yb = xa + (y - qx)b$ miatt a jobb oldali halmaz része a bal oldali halmaznak. Ha viszont a két számhalmaz ugyanaz, akkor a legkisebb pozitív elemek is megegyeznek, vagyis $\mathrm{lnko}(a, b) = \mathrm{lnko}(a - qb, b)$.

Ha $\mathrm{lnko}(a, b) = 1$, akkor az a és b számokat gyakran relatív prímeknek nevezik.

Euklideszi algoritmus I.

Az előző állítás utolsó pontja lehetőséget biztosít két egész szám legnagyobb közös osztójának gyors kiszámításására. Az eljárást, amelyet euklideszi algoritmusnak neveznek, egy példán mutatjuk be:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lnko}(1147, 899) &= \mathrm{lnko}(899, \mathrm{rem}(1147, 899)) = \mathrm{lnko}(899, 248)\\
&= \mathrm{lnko}(248, \mathrm{rem}(899, 248)) = \mathrm{lnko}(248, 155)\\
&= \mathrm{lnko}(155, \mathrm{rem}(248, 155)) = \mathrm{lnko}(155, 93)\\
&= \mathrm{lnko}(93, \mathrm{rem}(155, 93)) = \mathrm{lnko}(93, 62)\\
&= \mathrm{lnko}(62, \mathrm{rem}(93, 62)) = \mathrm{lnko}(62, 31)\\
&= \mathrm{lnko}(31, \mathrm{rem}(62, 31)) = \mathrm{lnko}(31, 0)\\
&= 31.
\end{aligned}$$

Die Hard 3 (folytatás)

A fenti számításból következik, hogy 2 gallon víz nem mérhető ki egy 899 és egy 1147 gallonos kanna segítségével. Valóban, 2 nem többszöröse 31-nek, 899 és 1147 legnagyobb közös osztójának.

Kimérhető-e 3 gallon víz egy 21 gallonos és egy 26 gallonos kanna segítségével? Először is az euklideszi algoritmussal határozzuk meg 21 és 26 legnagyobb közös osztóját:

$$\mathrm{lnko}(26, 21) = \mathrm{lnko}(21, 5) = \mathrm{lnko}(5, 1) = \mathrm{lnko}(1, 0) = 1.$$

Idáig rendben megvolnánk, 3 többszöröse 1-nek. Emlékezzünk azonban, hogy a kimérhetőségnek ez csak egy szükséges feltétele. Ha teljesül, az újabb kihívás elé állít bennünket.

Továbbra is kérdés tehát, hogy kimérhető-e 3 gallon víz egy 21 gallonos és egy 26 gallonos kanna segítségével. Tudjuk, hogy 3 felírható 21 és 26 lineáris kombinációjaként, mivel 3 többszöröse 21 és 26 legnagyobb közös osztójának; léteznek tehát olyan s és t egészek, amelyekkel

$$3 = s \cdot 21 + t \cdot 26.$$

Ha s negatív, akkor alkalmazzuk a következő trükköt: növeljük s-et 26-tal és csökkentsük t-t 21-gyel. Ezzel a kifejezés jobb oldalának értéke nyilván nem változik. Ezt ismételgetve előbb-utóbb olyan

$$3 = s' \cdot 21 + t' \cdot 26$$

lineáris kombinációhoz jutunk, amelyben s' pozitív, t' pedig negatív. Ezek után lássuk a 3 gallon víz kimérésére szolgáló eljárást!

Ismételjük s' alkalommal:

(1) Töltsük meg a 21 gallonos kannát!

(2) Öntsük át az összes vizet a 21 gallonos kannából a 26 gallonosba! Ha eközben a 26 gallonos kanna tele lesz, akkor öntsük ki belőle a vizet, majd folytassuk a víz áttöltését a 21 gallonos kannából a 26 gallonosba, amíg a 21 gallonos kanna teljesen ki nem ürül!

Az eljárás végén pontosan 3 gallon víz lesz a 26 gallonos kannában! Ez a következőképpen látható be. A szökőkútból összesen $s' \cdot 21$ gallon vizet merítettünk ki, és valahányszor 26 gallont öntöttünk vissza; végül a 26 gallonos kannában maradt valamennyi, 0 és 26 gallon közötti víz. Tudjuk még, hogy $s' \cdot 21 + t' \cdot 26 = 3$. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha a 26 gallonos kannát pontosan $(-t')$-ször ürített ki. Valóban, ha kevesebbszer ürítettük volna ki, akkor végül több mint 26 gallon víz maradna benne, ami nyilván lehetetlen, másrészt nem merítettünk ki annyi vizet a szökőkútból, hogy a 26 gallonos kannát $(-t')$-nél többször kiüríthettük volna.

Vegyük észre, hogy az eljárás végrehajtásához igazából nincs is szükség az s' és t' együtthatók ismeretére! A külső ciklus s'-szeri végrehajtása helyett mondhatjuk, hogy azt annyiszor hajtsuk végre, amíg a 26 gallonos kannában 3 gallon víz nem lesz, ugyanis ez előbb-utóbb biztosan bekövetkezik. Ilyenkor persze észben kell tartani, hogy az egyes kannákban épp mennyi víz van, hogy tudjuk mikor álljunk meg.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(0,0) & \longrightarrow & (21,0) & \longrightarrow & (0,21) & \longrightarrow & (21,21) & \longrightarrow & (16,26) & \longrightarrow \\
(16,0) & \longrightarrow & (0,16) & \longrightarrow & (21,16) & \longrightarrow & (11,26) & \longrightarrow & (11,0) & \longrightarrow \\
(0,11) & \longrightarrow & (21,11) & \longrightarrow & (6,26) & \longrightarrow & (6,0) & \longrightarrow & (0,6) & \longrightarrow \\
(21,6) & \longrightarrow & (1,26) & \longrightarrow & (1,0) & \longrightarrow & (0,1) & \longrightarrow & (21,1) & \longrightarrow \\
(0,22) & \longrightarrow & (21,22) & \longrightarrow & (17,26) & \longrightarrow & (17,0) & \longrightarrow & (0,17) & \longrightarrow \\
(21,17) & \longrightarrow & (12,26) & \longrightarrow & (12,0) & \longrightarrow & (0,12) & \longrightarrow & (21,12) & \longrightarrow \\
(7,26) & \longrightarrow & (7,0) & \longrightarrow & (0,7) & \longrightarrow & (21,7) & \longrightarrow & (2,26) & \longrightarrow \\
(2,0) & \longrightarrow & (0,2) & \longrightarrow & (21,2) & \longrightarrow & (0,23) & \longrightarrow & (21,23) & \longrightarrow \\
(18,26) & \longrightarrow & (18,0) & \longrightarrow & (0,18) & \longrightarrow & (21,18) & \longrightarrow & (13,26) & \longrightarrow \\
(13,0) & \longrightarrow & (0,13) & \longrightarrow & (21,13) & \longrightarrow & (8,26) & \longrightarrow & (8,0) & \longrightarrow \\
(0,8) & \longrightarrow & (21,8) & \longrightarrow & (3,26) & \longrightarrow & (3,0) & \longrightarrow & (0,3) &
\end{array}
$$

Ugyanezt a megközelítést alkalmazhatjuk tetszőleges kannaméretek esetén.

Ismételjük amíg a nagyobb kannában a kívánt mennyiség nem lesz:

(1) Töltsük meg a kisebb kannát!

(2) Öntsük át az összes vizet a kisebb kannából a nagyobb kannába! Ha eközben a nagyobb kanna tele lesz, akkor öntsük ki belőle a vizet, majd folytassuk a víz áttöltését a kisebb kannából a nagyobb kannába, amíg a kisebb kanna teljesen ki nem ürül!

Ezzel az eljárással a kannaméretek legnagyobb közös osztójának minden (a nagyobb kanna méreténél nem nagyobb) többszöröse előbb-utóbb megkapható. Ügyeskedésre semmi szükség.

Euklideszi algoritmus II.

Láttuk, hogy két egész szám legnagyobb közös osztója előállítható a két egész szám lineáris kombinációjaként. Azonban a bizonyítás nem-konstruktív volt, az együtthatók megtalálására semmilyen útmutatással nem szolgált.

Az euklideszi algoritmus végrehajtása során némi többletmunkát végezve egy lineáris kombináció együtthatói is megkaphatók: ahogy $\mathrm{lnko}(a,b)$-t számoljuk, minden lépésben felírhatjuk a maradékot, mint a és b lineáris kombinációját; az utolsó nem nulla maradék ilyen felírása az, amit keresünk. Az eljárást egy példán mutatjuk be.

$$
\begin{array}{ccrcl}
x & y & \mathrm{rem}(x,y) & = & x - qy \\
\hline
259 & 70 & 49 & = & 259 - 3 \cdot 70 \\
70 & 49 & 21 & = & 70 - 1 \cdot 49 \\
 & & & = & 70 - 1 \cdot (259 - 3 \cdot 70) \\
 & & & = & -1 \cdot 259 + 4 \cdot 70 \\
49 & 21 & 7 & = & 49 - 2 \cdot 21 \\
 & & & = & (259 - 3 \cdot 70) - 2(-1 \cdot 259 + 4 \cdot 70) \\
 & & & = & \boxed{3 \cdot 259 - 11 \cdot 70} \\
21 & 7 & 0 & &
\end{array}
$$

Először inicializáljuk az x és y változókat: $x = a$ és $y = b$. Az első két oszlopban az euklideszi algoritmus lépései vannak. Minden lépésben kiszámoljuk $\mathrm{rem}(x,y)$-t, és felírjuk $x - qy$ alakban. Ezután x és y helyébe a már korábban kiszámolt lineáris kombinációit írjuk a-nak és b-nek. Rendezés után a maradék a és b lineáris kombinációjaként való felírását látjuk. A végeredményt bekereteztük.

A béka vacsorája

Példa. Egy kis tóban n kő látszik ki a vízből. A kövek kör alakban helyezkednek el, az egyiken egy béka ül. Mikor a béka ugrik egyet, az óramutató járásával megegyező irányban pontosan k kővel odébb landol ($0 < k < n$). A béka vacsorája, egy ízletes pondró, a béka melletti kövön van, szintén az óramutató járásával megegyező irányban.

(a) Mutassunk olyan szituációt, amikor a béka sose szerezheti meg a pondrót!

(b) Ha a béka megszerezheti a pondrót, akkor hány ugrás szükséges ehhez?

(c) Mi a helyzet $n = 50$ és $k = 21$ esetén?

Megoldás.
(a) Ha $k \mid n$ és $k \neq 1$, akkor a béka akárhányat ugorhat, a pondrót mindig átugorja.

(b) Tegyük fel, hogy a béka megszerezheti a pondrót; legyen j az ehhez szükséges ugrások száma. Ha ezalatt a béka c-szer kerülte meg a tavat, akkor $jk = cn + 1$, illetve átrendezve $(-c)n + jk = 1$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy

1 felírható k és n lineáris kombinációjaként, ami viszont csak úgy lehetséges, ha $\text{lnko}(n, k) = 1$. A $-c$ és j együtthatók ezek után meghatározhatók.

(c) Határozzuk meg $\text{lnko}(50, 21)$-et az euklideszi algoritmussal.

$$
\begin{array}{ccrcl}
x & y & \text{rem}(x,y) & = & x - qy \\
\hline
50 & 21 & 8 & = & 50 - 2 \cdot 21 \\
21 & 8 & 5 & = & 21 - 2 \cdot 8 = 21 - 2 \cdot (50 - 2 \cdot 21) \\
 & & & = & -2 \cdot 50 + 5 \cdot 21 \\
8 & 5 & 3 & = & 8 - 5 = (50 - 2 \cdot 21) - (-2 \cdot 50 + 5 \cdot 21) \\
 & & & = & 3 \cdot 50 - 7 \cdot 21 \\
5 & 3 & 2 & = & 5 - 3 = (-2 \cdot 50 + 5 \cdot 21) - (3 \cdot 50 - 7 \cdot 21) \\
 & & & = & -5 \cdot 50 + 12 \cdot 21 \\
3 & 2 & 1 & = & 3 - 2 = (3 \cdot 50 - 7 \cdot 21) - (-5 \cdot 50 + 12 \cdot 21) \\
 & & & = & \boxed{8 \cdot 50 - 19 \cdot 21} \\
2 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Így $c = -8$ és $j = -19$. Hm, hm. Próbáljuk meg valahogy értelmezni ezt az eredményt! Ha a $8 \cdot 50 - 19 \cdot 21 = 1$ egyenletet $19 \cdot 21 = 8 \cdot 50 - 1$ alakban írjuk fel, akkor ez utóbbit interpretálhatjuk úgy, hogy a béka 19 ugrással egy kő híján 8-szor kerüli meg a tavat. Ha még 19-et ugrik, akkor két kő híján 16-szor kerüli meg a tavat. A gondolatmenetet folytatva, ha a béka $49 \cdot 19$-et ugrik, akkor 49 kő híján $49 \cdot 8$-szor kerüli meg a tavat, vagyis éppen a pondrót tartalmazó kőre érkezik. A szükséges ugrások száma így $49 \cdot 19 = 931$.

Prímszámok

Ha egy $p > 1$ egész számnak egyen és önmagán kívül nincs más pozitív osztója, akkor p-t prímszámnak nevezzük. Minden más egynél nagyobb számot összetett számnak hívunk.

Prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
Összetett számok: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ...

Az egyet nem soroljuk sem a prímszámok, sem az összetett számok közé.

A számelmélet alaptétele

Tétel. Minden n pozitív egész szám felírható prímszámok szorzataként, és a felírás a prímszámok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Itt azt a konvenciót követjük, hogy a nulla tényezős szorzat értéke 1; e nélkül a tétel nem lenne igaz $n = 1$ esetén. A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő, önmagában is érdekes állításra.

Állítás. Ha p prímszám és $p \mid a_1 a_2 \cdots a_m$, akkor $p \mid a_i$ valamilyen $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Jelölje $P(m)$ azt az állítást, hogy ha p prímszám és $p \mid a_1 a_2 \cdots a_m$, akkor $p \mid a_i$ valamilyen $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén.

Alapeset. $P(1)$ triviálisan igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamely m pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(m+1)$ is igaz.

Legyen p prímszám, és tegyük fel, hogy $p \mid a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}$. Csoportosítsuk az utóbbi szorzatot $a_1(a_2 \cdots a_m a_{m+1})$ módon. Megmutatjuk, hogy $p \mid a_1$ vagy $p \mid a_2 \cdots a_m a_{m+1}$. Mivel p-nek egyen és önmagán kívül nincs más pozitív osztója, ezért $\mathrm{lnko}(p, a_1) = 1$ vagy $\mathrm{lnko}(p, a_1) = p$. Ha $\mathrm{lnko}(p, a_1) = p$, akkor $p \mid a_1$ triviális módon. Ha pedig $\mathrm{lnko}(p, a_1) = 1$, akkor a legnagyobb közös osztó tulajdonságait összefoglaló állítás (4) pontja szerint $p \mid a_2 \cdots a_m a_{m+1}$. Ha az első lehetőség áll fenn, akkor kész vagyunk. A második esetben pedig alkalmazzuk az indukciós feltevést; ekkor $p \mid a_i$ valamilyen $2 \leqslant i \leqslant m+1$ esetén. Így $P(m+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(m)$ igaz minden m pozitív egész számra.

A számelmélet alaptételének bizonyítása. Két dolgot kell belátni:

(1) Minden pozitív egész szám felírható prímszámok szorzataként.

(2) Ez a felírás a prímszámok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

(1) A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n szám felírható prímszámok szorzataként.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz az 1 szám prímszámok "üres" szorzata.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Azt kell tehát megmutatni, hogy $n+1$ felírható prímszámok szorzataként. Ha $n+1$ prímszám, akkor ez triviálisan teljesül. Tegyük fel ezután, hogy $n+1$ összetett szám. Ekkor $n+1 = a \cdot b$ alkalmas $a, b < n+1$ pozitív egészekkel. Az indukciós feltevés szerint a és b felírható prímszámok szorzataként, ezért $n+1 = a \cdot b$ is természetesen előáll a kívánt módon. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

(2) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan pozitív egész szám, amely egynél többféle módon írható fel prímszámok szorzataként úgy, hogy ezek a felírások nem csak a bennük szereplő prímszámok sorrendjében különböznek. Tekintsük a legkisebb ilyen tulajdonságú pozitív egész számot. Jelölje ezt a számot n, és legyen ennek kétféle felírása

$$p_1 p_2 \cdots p_s \qquad \text{és} \qquad q_1 q_2 \cdots q_t.$$

Most $p_1 \mid n$, így $p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_t$. Azonban ekkor az előző állítás szerint $p_1 \mid q_i$ valamilyen $1 \leqslant i \leqslant t$ esetén. Mivel q_i prímszám, ez csak akkor lehetséges, ha $p_1 = q_i$. Kitörölve p_1-et az első, q_i-t pedig a második felírásból, azt látjuk, hogy az n-nél kisebb n/p_1 pozitív egész szám is felírható kétféle módon prímszámok szorzataként, ami viszont ellentmond annak, hogy n a legkisebb ilyen tulajdonságú pozitív egész szám. Ezért az eredeti feltevésünk hamis volt, így nem létezik olyan pozitív egész szám, amely egynél többféle módon írható fel prímszámok szorzataként úgy, hogy ezek a felírások nem csak a bennük szereplő prímszámok sorrendjében különböznek.

Jólrendezés elve

A bizonyítás során felhasználtunk egy magától értetődőnek tűnő, ám erejében a teljes indukció elvével egyenértékű dolgot.

Jólrendezés elve. A természetes számok bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Példa. Mutassuk meg, hogy a pozitív egész számok körében nincs megoldása a

$$4a^3 + 2b^3 = c^3$$

egyenletnek!

Megoldás. Jelölje S azon a pozitív egész számok halmazát, amelyekhez léteznek olyan b és c pozitív egészek, hogy $4a^3 + 2b^3 = c^3$.

Indirekt tegyük fel, hogy $S \neq \emptyset$. Ekkor a jólrendezés elve szerint S tartalmaz minimális elemet, legyen ez a_0. Az S halmaz definíciója szerint most léteznek olyan b_0 és c_0 pozítív egészek, hogy

$$4a_0^3 + 2b_0^3 = c_0^3.$$

Itt $4a_0^3$ és $2b_0^3$ páros, ezért c_0^3 is páros. Ám ekkor c_0 is páros, így $c_0 = 2c_1$ valamilyen c_1 pozitív egésszel. Helyettesítsük be ezt az egyenletbe, majd egyszerűsítsünk 2-vel:

$$2a_0^3 + b_0^3 = 4c_1^3.$$

Itt $2a_0^3$ és $4c_1^3$ páros, ezért b_0^3 is páros. Ám ekkor b_0 is páros, így $b_0 = 2b_1$ valamilyen b_1 pozitív egésszel. Helyettesítsük be ezt az egyenletbe, majd egyszerűsítsünk 2-vel:

$$a_0^3 + 4b_1^3 = 2c_1^3.$$

Itt $4b_1^3$ és $2c_1^3$ páros, ezért a_0^3 is páros. Ám ekkor a_0 is páros, így $a_0 = 2a_1$ valamilyen a_1 pozitív egésszel. Helyettesítsük be ezt az egyenletbe, majd egyszerűsítsünk 2-vel:

$$4a_1^3 + 2b_1^3 = c_1^3.$$

Ez azt jelenti, hogy $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ szintén megoldása az egyenletnek, így $a_1 \in S$. Ám $a_1 < a_0$, ellentmondva annak, hogy S legkisebb eleme a_0.

Ezért az eredeti feltevésünk hamis volt, következésképpen az egyenletnek nem létezik megoldása a pozitív egészek körében.

Híres számelméleti problémák

Nagy Fermat-tétel: Nem léteznek olyan x, y és z pozitív egészek, amelyekre

$$x^n + y^n = z^n$$

fennáll valamely $n > 2$ egész esetén.

Fermat 1630 körül Diophantosz Arithmetica című könyvének tanulmányozása közben az egyik margóra a következő megjegyzést írta: "Lehetetlen egy köbszámot felírni két köbszám összegeként, vagy egy negyedik hatványt felírni két negyedik hatvány összegeként; általában lehetetlen bármely magasabb hatványt felírni két ugyanolyan hatvány összegeként. Egy igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre, de ez a margó túl keskeny, semhogy ideírhatnám." A tételt végül Andrew Wiles angol matematikus bizonyította be 1994-ben, házának tetőterében titokban és elszigetelten végzett 7 év kutatómunkával.

Goldbach-sejtés: Minden kettőnél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként.

Például $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 5+3$ stb. A sejtés teljesülését 10^{16}-ig minden páros számra ellenőrizték. Schnirelmann 1939-ben bebizonyította, hogy minden páros szám felírható nem több, mint 300000 prímszám összegeként. Napjainkban a rekord: minden páros szám felírható legfeljebb 6 prímszám összegeként.

Iker-prím sejtés: Végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p + 2$ is prímszám.

Chennek 1966-ban sikerült belátnia, hogy végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p+2$ legfeljebb két prímszám szorzata. Így a sejtés "majdnem" igaz.

Prím-tesztelés: Létezik-e hatékony eljárás annak eldöntésére, hogy egy n egész szám prím vagy összetett?

Agrawal, Kayal és Saxena 2002-ben egy meglepően egyszerű algoritmust találtak a feladat megoldására. Az algoritmus lépésszáma $(\log n)^{12}$ nagyságrendű. A közlemény egy Gauss idézettel kezdődik, amely a probléma fontosságát és antik gyökereit hangsúlyozza — 200 évvel ezelőtt.

Faktorizáció: Adott két nagy prímszám szorzata; legyen ez n. Létezik-e hatékony eljárás a prímszámok meghatározására?

Az ismert leggyorsabb algoritmus lépésszáma

$$e^{1.9(\ln n)^{1/3}(\ln \ln n)^{2/3}}$$

nagyságrendű, ami már néhányszáz jegyű n esetén is használhatatlan.

Egy álláshirdetés

2004 végén számos helyen feltűnt a következő hirdetés:

{az első tízjegyű prímszám az e egymás utáni számjegyeiből}.com

A kapcsos zárójelbe a helyes számot helyettesítve a GOOGLE állásajánlat honlapjának az URL-jét kaptuk meg. A GOOGLE éppen akkor olyan alkalmazottakat keresett, akik ilyen problémákat képesek megoldani.

Milyen nehéz ez a probléma? Az e számjegyeinek millióit, milliárdjait kell végignézni, hogy találjunk egy 10 jegyű prímszámot?

Prímszámtétel

Jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímszámok számát. Például $\pi(10) = 4$, hisz a 10-nél nem nagyobb prímek 2, 3, 5 és 7. A prímszámok nagyon szabálytalanul követik egymást, így a π függvény növekedése is hasonlóan szeszélyes. A prímszámtétel mindezek ellenére egy meglepő közelítő eredményt ad.

Prímszámtétel.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1.$$

Vagyis a prímek fokozatosan ritkulnak. Hozzávetőlegesen x szomszédságában minden egymás után következő $\ln x$ szám között van egy prímszám.

A prímszámtételt 1798-ban mondta ki sejtésként Legendre, majd közel egy évszázaddal később, 1896-ban bizonyította be egymástól függetlenül de la Vallee Poussin és Hadamard. Matematikatörténeti érdekesség, hogy halála után Gauss egyik jegyzetfüzetében is megtalálták ugyanezt a sejtést, amelyet ő 1791-ben, 15 éves korában fogalmazott meg (nem volt szerencsés dolog Gauss kortársának lenni).

Egy álláshirdetés (folytatás)

Segít valamit a prímszámtétel az álláskeresésben? A prímszámtétel szerint hozzávetőlegesen minden $\ln 10^{10}\approx 23$ egymás utáni 10 jegyű szám között van egy prímszám. Ez azt sugallja, hogy a probléma talán nem is olyan nehéz. És valóban, az első 10 jegyű prímszám viszonylag hamar meg is jelenik; a tizedespont utáni 99-edik jegynél kezdődik.

$$\begin{aligned} e =\,&2.718281828459045235360287471352662497\\ &7572470936999595749669676277240766303\\ &535475945713821785251664\underline{2742746639}193\ldots \end{aligned}$$

Titkosítás I.

Már a II. világháború kitörése előtt felmerült annak gondolata, hogy a számelmélet felhasználható lehet a kommunikáció titkosításában. A részletek elég bizonytalanok, mivel magától értetődően semmi nem került publikálásra. Vizsgáljunk meg néhány kézenfekvő lehetőséget!

Első lépésként alakítsuk át az elküldendő üzenetet egy egész számmá, amelyen majd különböző műveleteket hajtunk végre. Ennek a lépésnek nem célja, hogy az üzenetet nehezebben olvashatóvá tegye, így túl sokat nem szöszmötölünk vele; minden betűt egy kétjegyű számmal helyettesítünk,

$$A=11,\quad B=12,\quad C=13,\quad D=14,\quad \ldots,\quad Z=36,$$

majd ezeket egy hosszú számmá fűzzük össze. Például

$$\begin{array}{ccccccc} V & I & C & T & O & R & Y \\ 32 & 19 & 13 & 30 & 25 & 28 & 35 \end{array}$$

Ha ez a hosszú szám nem prím, akkor még néhány alkalmas számjegyet biggyesszünk a végére, hogy az üzenet egy prímszám legyen. Az előző példánál maradva a szám végére a 77-t biggyesztve az üzenet 3219133025283577 lesz, ami prímszám.

Ezek után lássuk a titkos kommunikáció fázisait. A következőkben u a kódolatlan üzenetet (ezt titokban akarjuk tartani), u^* a kódolt üzenetet (ezt az ellenség elfoghatja), k pedig a titkos kulcsot jelöli.

Előkészület. A küldő és a fogadó előre megegyeznek a k titkos kulcsban, ami egy nagy prímszám.

Kódolás. A küldő kódolja az elküldendő u üzenetet:

$$u^* = u \cdot k.$$

Dekódolás. A fogadó dekódolja a kapott u^* üzenetet:

$$\frac{u^*}{k} = \frac{u \cdot k}{k} = u.$$

Néhány kérdés mindenképp tisztázandó:

(1) A küldő és a fogadó hogyan győződhet meg arról, hogy u és k prímszám?

(2) Mennyire biztonságos az eljárás?

(1) Hatékony prím-tesztek már a II. világháború idején is rendelkezésre álltak. A már említett Agrawal-Kayal-Saxena algoritmus pedig a kérdést végérvényesen a "könnyű" számítási feladatok közé sorolta.
(2) Az ellenség csak az $u^* = u \cdot k$ kódolt üzenetet látja, így az eredeti u üzenet megfejtéséhez faktorizálnia kell u^*-ot. Nagyon komoly erőfeszítések ellenére sem sikerült még hatékony faktorizáló algoritmust találnia senkinek (bár nem kizárt, hogy ez valamikor bekövetkezik). Így ha u és k elég nagy, az ellenségnek nincs sok esélye.

Mindez biztatónak tűnik, azonban van egy nagy probléma. Nézzük, mi történik, ha egy második üzenetet is küldünk ugyanazzal a kulccsal? Ilyenkor az ellenség két kódolt üzenetet lát:

$$u_1^* = u_1 \cdot k \quad \text{és} \quad u_2^* = u_2 \cdot k.$$

Sajnos észre kell vennünk, hogy $\text{lnko}(u_1^*, u_2^*) = k$, és mivel $\text{lnko}(u_1^*, u_2^*)$ hatékonyan számítható, a második kódolt üzenet elfogása után a k titkos kulcs is az ellenség kezére kerül, amivel az összes többi kódolt üzenetet képes elolvasni.

Mielőtt tovább találgatnánk, ismerkedjünk meg egy Gausstól származó egyszerű matematikai jelöléssel.

Kongruenciák

Legyen m tetszőleges pozitív egész szám. Azt mondjuk, hogy az a és b egész számok kongruensek modulo m, ha $m \mid a - b$. Azt, hogy a és b kongruensek modulo m úgy jelöljük, hogy

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Például $29 \equiv 15 \pmod{7}$, mert $7 \mid 29 - 15 = 14$.

Összefoglaljuk a kongruenciák néhány fontos tulajdonságát, ezek egyszerűen igazolhatók az oszthatóság tulajdonságainak felhasználásával.

Állítás.

(1) $a \equiv a \pmod{m}$.

(2) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $b \equiv a \pmod{m}$.

(3) Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $b \equiv c \pmod{m}$, akkor $a \equiv c \pmod{m}$.

(4) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ tetszőleges c egészre.

(5) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $ac \equiv bc \pmod{m}$ tetszőleges c egészre.

(6) Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(7) Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Láthatjuk, hogy a kongruenciák hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az egyenletek (ámbár van néhány különbség is). Szoros kapcsolat van a kongruenciák és a rem operátor között.

Állítás.

(1) $a \equiv \text{rem}(a, m) \pmod{m}$.

(2) $a \equiv b \pmod{m}$ akkor és csak akkor, ha $\text{rem}(a, m) = \text{rem}(b, m)$.

Bizonyítás.
(1) A maradékos osztás tétele szerint egyértelműen léteznek olyan q és r egészek, amelyekre
$$a = qm + r \quad \text{és} \quad 0 \leqslant r < m.$$
Most $\text{rem}(a, m) = r$. Világos módon $m \mid qm$, így $m \mid a - r = a - \text{rem}(a, m)$, ahonnan $a \equiv \text{rem}(a, m) \pmod m$ adódik.
(2) Ismét a maradékos osztás tétele szerint egyértelműen léteznek olyan q_1, r_1 és q_2, r_2 egészek, amelyekre
$$a = q_1 m + r_1 \quad \text{és} \quad 0 \leqslant r_1 < m,$$
$$b = q_2 m + r_2 \quad \text{és} \quad 0 \leqslant r_2 < m.$$
Most $\text{rem}(a, m) = r_1$ és $\text{rem}(b, m) = r_2$. Vonjuk ki egymásból a fenti két egyenletet:
$$a - b = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2) \quad \text{és} \quad -m < r_1 - r_2 < m.$$
Definíció szerint $a \equiv b \pmod m$ akkor és csak akkor, ha $m \mid a - b$. Mivel $m \mid (q_1 - q_2)m$ triviális módon teljesül, így $m \mid a - b$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $m \mid r_1 - r_2$. Azonban $-m < r_1 - r_2 < m$ miatt $m \mid r_1 - r_2$ akkor és csak akkor lehetséges, ha $r_1 = r_2$, vagyis ha $\text{rem}(a, m) = \text{rem}(b, m)$.

Példa. Mutassuk meg, hogy egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal!

Megoldás. Először belátjuk, hogy $10^n \equiv 1 \pmod 3$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $10^n \equiv 1 \pmod 3$.
Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $10^0 \equiv 1 \pmod 3$.
Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Az indukciós feltevés szerint $10^n \equiv 1 \pmod 3$, ezért
$$10^{n+1} \equiv 10 \cdot 10^n \equiv 10 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3.$$
Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezek után lássuk az eredeti állítás bizonyítását. Tekintsük a
$$d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0$$

számot, ahol $1 \leqslant d_k \leqslant 9$ és $0 \leqslant d_{k-1}, \dots, d_1, d_0 \leqslant 9$. Az előbbiek szerint

$$d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_1 \cdot 10 + d_0 \equiv \\ \equiv d_k + d_{k-1} + \dots + d_1 + d_0 \pmod 3,$$

amiből következik, hogy maga a szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Példa. Mutassuk meg, hogy egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel!

Megoldás. Először belátjuk, hogy $10^n \equiv 1 \pmod 9$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $10^n \equiv 1 \pmod 9$.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $10^0 \equiv 1 \pmod 9$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Az indukciós feltevés szerint $10^n \equiv 1 \pmod 9$, ezért

$$10^{n+1} \equiv 10 \cdot 10^n \equiv 10 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 9.$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezek után lássuk az eredeti állítás bizonyítását. Tekintsük a

$$d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_1 \cdot 10 + d_0$$

számot, ahol $1 \leqslant d_k \leqslant 9$ és $0 \leqslant d_{k-1}, \dots, d_1, d_0 \leqslant 9$. Az előbbiek szerint

$$d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_1 \cdot 10 + d_0 \equiv \\ \equiv d_k + d_{k-1} + \dots + d_1 + d_0 \pmod 9,$$

amiből következik, hogy maga a szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Példa. Mutassuk meg, hogy egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeinek váltakozó előjellel vett összege osztható 11-gyel!

Megoldás. Először belátjuk, hogy $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $10^0 \equiv 1 \pmod{11}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

Az indukciós feltevés szerint $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$, ezért

$$10^{n+1} \equiv 10 \cdot 10^n \equiv 10 \cdot (-1)^n \equiv (-1) \cdot (-1)^n \equiv (-1)^{n+1} \pmod{11}.$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezek után lássuk az eredeti állítás bizonyítását. Tekintsük a

$$d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0$$

számot, ahol $1 \leqslant d_k \leqslant 9$ és $0 \leqslant d_{k-1}, \ldots, d_1, d_0 \leqslant 9$. Az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0 \equiv \\ \equiv (-1)^k d_k + (-1)^{k-1} d_{k-1} + \cdots + (-1) d_1 + d_0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy maga a szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeinek váltakozó előjellel vett összege osztható 11-gyel.

Titkosítás II.

Tekintsük az eredeti elképzelés következő változatát. Ismét szorozzuk össze az üzenetet a kulccsal, azonban most a hagyományos aritmetika helyett moduláris aritmetikát használjunk.

Előkészület. A küldő és a fogadó előre megegyeznek egy nagy p prímszámban. Ez lesz a modulus; ezt akár az ellenség is ismerheti. Ezen kívül megegyeznek egy $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ titkos kulcsban, ami most nem feltétlenül prímszám.

Kódolás. A küldő kódolja az elküldendő $u \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ üzenetet, ami szintén nem feltétlenül prímszám:

$$u^* = \operatorname{rem}(uk, p).$$

Dekódolás. ???

Multiplikatív inverz

Állítás. Ha p prím, és k nem többszöröse p-nek, akkor van olyan k' egész, amelyre

$$k' \cdot k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Az állításban szereplő k' számot a k szám modulo p multiplikatív inverzének nevezik.

Bizonyítás. Mivel p prím, ezért csak két pozitív osztója van: 1 és p. Így $\mathrm{lnko}(k, p) = 1$, ellenben k többszöröse lenne p-nek. Viszont ha $\mathrm{lnko}(k, p) = 1$, akkor léteznek olyan s és t egészek, amelyekre

$$sk + tp = 1,$$

illetve átrendezve

$$tp = 1 - sk.$$

Mivel $p \mid tp$ triviálisan teljesül, így $p \mid 1 - sk$, vagyis

$$sk \equiv 1 \pmod{p}.$$

Most $k' = s$ nyilván megfelel a kívánalmaknak.

Ezek után a dekódolás már könnyű. Legyen k' olyan egész, amelyre

$$kk' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ekkor

$$u^* k' \equiv \mathrm{rem}(uk, p)k' \equiv (uk)k' \equiv u(kk') \equiv u \pmod{p}.$$

És mivel $u \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$, így

$$u = \mathrm{rem}(u^* k', p).$$

Fermat-tétel

Fermat-tétel. Ha p prím, és k nem többszöröse p-nek, akkor

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

A bizonyítás némi előkészületet igényel.

Állítás. Legyen p prímszám, és k nem többszöröse p-nek. Most ha

$$ak \equiv bk \pmod{p},$$

akkor $a \equiv b \pmod{p}$.

Bizonyítás. Mivel p prím, és k nem többszöröse p-nek, ezért létezik olyan k' egész, amelyre $kk' \equiv 1 \pmod{p}$. Szorozzuk végig az $ak \equiv bk \pmod{p}$ kongruenciát k'-vel:

$$akk' \equiv bkk' \pmod{p}.$$

Mivel $akk' \equiv a \pmod{p}$ és $bkk' \equiv b \pmod{p}$, így

$$a \equiv b \pmod{p}$$

adódik.

Következmény. Legyen p prímszám, és k nem többszöröse p-nek. Ekkor a

$$(\mathrm{rem}(0 \cdot k, p), \mathrm{rem}(1 \cdot k, p), \mathrm{rem}(2 \cdot k, p), \ldots, \mathrm{rem}((p-1) \cdot k, p))$$

sorozat a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz egy permutációja.

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy a sorozat p számból áll, amelyek mind a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok közül kerülnek ki. Másrészt vegyük észre, hogy a sorozat elemei páronként különbözőek. Valóban, $\mathrm{rem}(ak, p) = \mathrm{rem}(bk, p)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ak \equiv bk \pmod{p}$, ami viszont az előző állítás szerint akkor és csak akkor áll fenn, ha $a \equiv b \pmod{p}$; azonban a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok közül semelyik kettő nem kongruens modulo p. Innen az állítás adódik.

Megjegyezzük, hogy mivel $\mathrm{rem}(0 \cdot k, p) = 0$, ezért a

$$(\mathrm{rem}(1 \cdot k, p), \mathrm{rem}(2 \cdot k, p), \ldots, \mathrm{rem}((p-1) \cdot k, p))$$

sorozat az $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz egy permutációja.

Fermat-tétel bizonyítása. A következőképpen okoskodhatunk:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdots (p-1) &\equiv \mathrm{rem}(k, p) \cdot \mathrm{rem}(2k, p) \cdots \mathrm{rem}((p-1)k, p) \\ &\equiv k \cdot 2k \cdots (p-1)k \\ &\equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \cdot k^{p-1} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Most $1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ nem lehet p többszöröse, hiszen $1, 2, \ldots, p-1$ egyike sem osztható p-vel. Így $1 \cdot 2 \cdots (p-1)$-gyel egyszerűsíthetünk:

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

A Fermat-tétel felhasználásával többek között egyszerűen tudunk multiplikatív inverzet számolni. Legyen p prímszám, és k nem többszöröse p-nek. A Fermat-tétel szerint

$$k^{p-2}k \equiv k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

ami azt jelenti, hogy k^{p-2} modulo p multiplikatív inverze k-nak.

Határozzuk meg például 6 modulo 17 multiplikatív inverzét. Ehhez ki kell számítani $\mathrm{rem}(6^{15}, 17)$-et, amit egymás utáni négyzetre emelésekkel elég egyszerűen megtehetünk:

$$\begin{aligned}
6^2 &\equiv 36 \equiv 2 \pmod{17},\\
6^4 &\equiv (6^2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{17},\\
6^8 &\equiv (6^4)^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{17},
\end{aligned}$$

majd

$$\begin{aligned}
6^{15} &\equiv 6^8 \cdot 6^4 \cdot 6^2 \cdot 6 \equiv 16 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \equiv 64 \cdot 2 \cdot 6\\
&\equiv 13 \cdot 2 \cdot 6 \equiv 26 \cdot 6 \equiv 9 \cdot 6 \equiv 54 \equiv 3 \pmod{17}.
\end{aligned}$$

Így $\mathrm{rem}(6^{15}, 17) = 3$. Ellenőrzésképpen $6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 1 \pmod{17}$.

Titkosítás III.

Megtörténhet, hogy egyszer a kódolt u^* üzenet mellett a kódolatlan u üzenet is az ellenség kezébe kerül. Sajnos ennek végzetes következményei vannak. Most

$$u^{p-2}u^* \equiv u^{p-2}\,\mathrm{rem}(uk, p) \equiv u^{p-2}uk \equiv u^{p-1}k \equiv k \pmod{p}.$$

Így ekkor az ellenség a titkos k kulcsot is képes meghatározni, amivel minden más üzenetet is elolvashat. Ez megengedhetetlen!

RSA

1977-ben Rivest, Shamir és Adleman egy rendkívül biztonságos titkosítási eljárást dolgoztak ki. Évtizedek óta tartó támadások ellenére eddig semmilyen gyenge pontot nem sikerült a rendszeren találni. Ráadásul a rendszernek van egy első hallásra hihetetlennek tűnő sajátossága: a hagyományos titkosítási eljárásoktól eltérően a küldőnek és a fogadónak nem szükséges az üzenetváltás előtt találkozni abból a célból, hogy megegyezzenek egy titkos kulcsban.

A fogadónak most két kulcsa van: egy titkos kulcs, amelyet szigorúan elzárva őriz, valamint egy nyilvános kulcs, amelyet a lehető legszélesebb körben terjeszt. Üzenet úgy küldhető, hogy a kódolást a fogadó nyilvános kulcsával végezzük, aki a dekódolást a szigorúan őrzött titkos kulcsával hajtja végre.

Ilyen nyilvános kulcsú titkosítási rendszerek teszik lehetővé például, hogy biztonságosan vásárolhatunk hitelkártyával az interneten keresztül is.

Előkészület. A fogadó létrehoz egy titkos és egy nyilvános kulcsot a következőképpen:

1. Választ két különböző p és q nagy prímszámot.
2. Legyen $n = pq$.
3. Választ egy olyan $e > 1$ egész számot, amelyre

   $$\operatorname{lnko}(e, (p-1)(q-1)) = 1.$$

   Az (e, n) pár lesz a nyilvános kulcs.
4. Kiszámít egy olyan d pozitív egész számot, amelyre

   $$de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

   A (d, n) pár lesz a titkos kulcs.

Kódolás. A küldő kódolja az elküldendő $u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ üzenetet:

$$u^* = \operatorname{rem}(u^e, n).$$

Dekódolás. A fogadó dekódolja a kapott u^* üzenetet:

$$u = \operatorname{rem}((u^*)^d, n).$$

A kritikus kérdés, hogy egy kódolt üzenetet dekódolva az eredeti üzenetet kapjuk-e vissza. Formálisan,

$$u^{ed} \equiv u \pmod{n}$$

tetszőleges $u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ üzenetre teljesül-e?

Először megmutatjuk, hogy

$$u^{ed} \equiv u \pmod{p} \quad \text{és} \quad u^{ed} \equiv u \pmod{q}.$$

Az első összefüggést látjuk be, a másik hasonlóan intézhető el.

Ha u többszöröse p-nek, akkor az állítás triviális, a kongruencia mindkét oldala nullával kongruens modulo p. Tegyük fel ezután, hogy u nem többszöröse p-nek. Az előkészületek alapján

$$ed = 1 + k(p-1)(q-1)$$

valamilyen k pozitív egésszel, így Fermat tételét alkalmazva

$$u^{ed} \equiv u^{1+k(p-1)(q-1)} \equiv u(u^{p-1})^{k(q-1)} \equiv u \cdot 1^{k(q-1)} \equiv u \pmod{p},$$

amit bizonyítani akartunk.

Kaptuk tehát, hogy

$$p \mid u^{ed} - u \quad \text{és} \quad q \mid u^{ed} - u.$$

Mivel $\text{lnko}(p, q) = 1$, ezért a legnagyobb közös osztó tulajdonságait összefoglaló állítás (5) pontja szerint

$$pq \mid u^{ed} - u$$

is teljesül, vagyis

$$u^{ed} \equiv u \pmod{pq}.$$

Gráfelmélet

Diszkrét matematikai problémák megoldása során gyakran van szükségünk dolgok közötti bináris kapcsolatok ábrázolására, kezelésére. Erre természetes modellt kínálnak a gráfok.

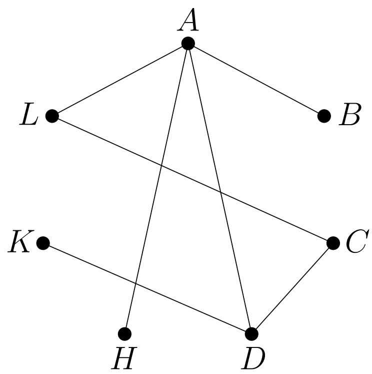
Gráfok

Példa. Mutassuk meg, hogy egy 51 fős társaságban mindig van olyan vendég, akinek páros számú ismerőse van (az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel)!

Ilyen jellegű feladatok megoldásához komoly segítséget nyújthat a következő grafikus illusztráció:

- a vendégeket feleltessük meg a sík egy-egy pontjának,
- két pontot kössünk össze egy vonallal, ha az azoknak megfelelő vendégek ismerik egymást.

Az így kapott rajz a feladat szempontjából minden szükséges információt tartalmaz. Álljon itt egy példa egy héttagú társaságbeli ismeretségekre:



Az ilyen rajzokat gráfoknak nevezzük. Egészen pontosan egy G (egyszerű) gráf egy (V, E) halmazpár, ahol V egy nem üres véges halmaz, E pedig a V halmaz kételemű részhalmazainak egy halmaza. A V halmaz elemeit csúcsoknak, az E halmaz elemeit pedig éleknek nevezzük. Az előbbi példában

$$V = \{A, B, C, D, H, K, L\},$$
$$E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, H\}, \{A, L\}, \{C, D\}, \{C, L\}, \{D, K\}\}.$$

Egy gráf két csúcsát szomszédosnak mondjuk, ha él köti össze őket. Egy gráf valamely csúcsára illeszkedő élek számát a csúcs fokszámának nevezzük. Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ jelöli. Az előbbi példában

$$\begin{aligned} d(A) &= 4, \\ d(B) &= 1, \\ d(C) &= 2, \\ d(D) &= 3, \\ d(H) &= 1, \\ d(K) &= 1, \\ d(L) &= 2. \end{aligned}$$

Állítás. Egy $G = (V, E)$ gráfban

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás. Minden él kettővel járul hozzá a fokszámok összegéhez; mindkét végpontjánál eggyel-eggyel.

Állítás. Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Bizonyítás. Az előző állítással összhangban

$$2|E| = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ páros}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ páratlan}}} d(v).$$

Itt a bal oldal és a jobb oldali első összeg páros szám, ezért a jobb oldali második összeg is szükségképpen páros szám. Mivel a második összeg minden tagja páratlan, ez csak úgy lehetséges, ha a tagok száma, vagyis a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Az utóbbi állításból azonnal adódik, hogy egy 51 csúcsú gráfban nem lehet az összes csúcs páratlan fokszámú. Így egy 51 fős társaságban mindig van olyan vendég, akinek páros számú ismerőse van.

Példa. Mutassuk meg, hogy egy 100 fős társaságban mindig van két olyan vendég, akiknek ugyanannyi ismerőse van!

Megoldás. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: bármely 100 csúcsú gráfban van két azonos fokszámú csúcs.

Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan 100 csúcsú gráf, amelyben a fokszámok mind különbözők. Egy 100 csúcsú gráfban a lehetséges fokszámok $0, 1, \ldots, 99$. Ha a gráfban a fokszámok mind különbözők, akkor ezen értékek mindegyike szükségképpen elő is fordul. Most tekintsük a 99 fokszámú csúcsot. Ez az összes többi csúccsal össze van kötve, speciálisan a 0 fokszámú csúccsal is, ami persze lehetetlen.

Így az eredeti feltevésünk hamis volt, vagyis nem lehetnek a fokszámok mind különbözők. Ebből következik, hogy egy 100 fős társaságban mindig van két olyan vendég, akiknek ugyanannyi ismerőse van.

A gráfok a számítástudomány legfontosabb objektumai közé tartoznak. Megszámlálhatatlanul sok alkalmazásnál előjönnek: ütemezés, optimalizálás, kommunikáció, algoritmusok tervezése és elemzése stb.

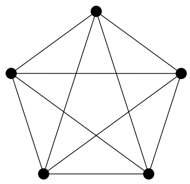
Gyakran az élek halmazának nem a csúcsok kételemű részhalmazainak, hanem a csúcsok rendezett párjainak egy halmazát érdemes választani. Ekkor irányított gráfokról beszélünk. Irányított gráffal tudjuk modellezni például a World Wide Webet: a csúcsok a honlapok, az irányított élek pedig a honlapok közötti hiperhivatkozások. Két stanfordi diák, Larry Page és Sergey Brin ennek a gráfnak a vizsgálata révén vált dollármilliárdossá (GOOGLE).

Szintén elég gyakran érdemes a gráf éleihez számokat rendelni. Ilyenkor súlyozott élű gráfokról beszélünk. Súlyozott élű gráffal tudunk modellezni például egy légiközlekedési hálózatot: a csúcsok a repülőterek, ha létezik közvetlen járat két reptér között, akkor a megfelelő csúcsok között él halad, az élekhez rendelt számok pedig a megfelelő repülési időtartamok.

Speciális gráfok

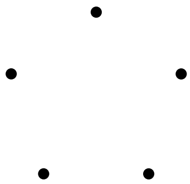
Néhány gráf olyan gyakran merül fel az alkalmazásokban, hogy külön nevet is kaptak.

(1) Egy gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két csúcsa szomszédos. Az n csúcsú teljes gráfot K_n-nel jelöljük.



K_5

(2) Egy gráfot üres gráfnak nevezünk, ha egyetlen éle sincs. Az n csúcsú üres gráfot E_n-nel jelöljük.



E_5

(3) Egy $P = (V, E)$ gráfot, ahol

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \\ E &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\} \end{aligned}$$

útnak nevezünk. Az n csúcsú utat P_n-nel jelöljük.

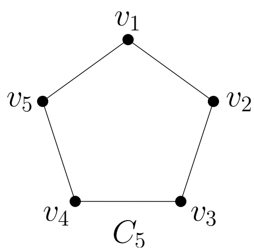
P_6

A v_1 és v_n csúcsok az út végpontjai. Egy út állhat egyetlen csúcsból is, ilyenkor a két végpont ugyanaz. Egy út hosszán az éleinek számát értjük.

(4) Egy $C = (V, E)$ gráfot, ahol

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},\ n \geqslant 3, \\ E &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\} \end{aligned}$$

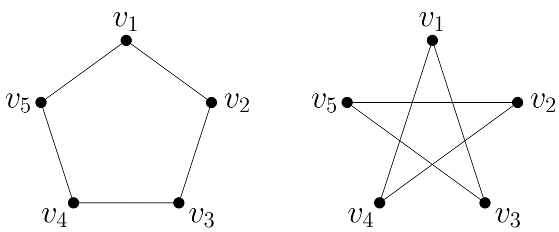
körnek nevezünk. Az n csúcsú kört C_n-nel jelöljük.



C_5

Izomorfizmus

A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokról azt mondjuk, hogy izomorfak, ha létezik olyan $f\colon V \to V'$ bijekció, hogy tetszőleges $u, v \in V$ esetén $\{u, v\} \in E$ akkor és csak akkor, ha $\{f(u), f(v)\} \in E'$.



izomorf gráfok

A számítástudomány egyik fontos megoldatlan problémája, hogy létezik-e hatékony algoritmus két gráf izomorfiájának eldöntésére.

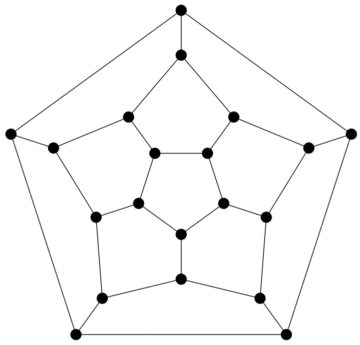
Részgráf

Egy $G' = (V', E')$ gráfot a $G = (V, E)$ gráf részgráfjának nevezünk, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$. Mivel a részgráf maga is gráf, ezért $V' \neq \emptyset$, továbbá az E' élhalmaz a V' csúcshalmaz kételemű részhalmazainak egy halmaza.

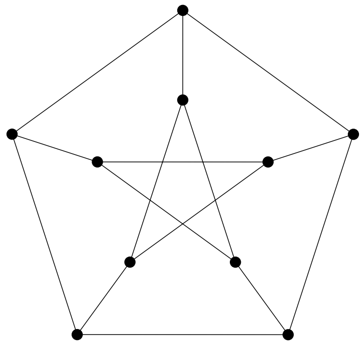
Hamilton-kör

A számítástudomány szintén fontos megoldatlan problémája a következő: létezik-e hatékony algoritmus annak eldöntésére, hogy egy adott gráf tartalmaz-e olyan kört, amely az összes csúcson áthalad. Egy ilyen kört Hamilton-körnek nevezünk.

Például a következő ábrán a bal oldali gráfnak van Hamilton-köre, a jobb oldalinak viszont nincs!



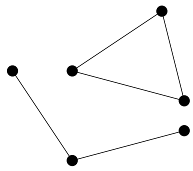
Dodekaéder-gráf



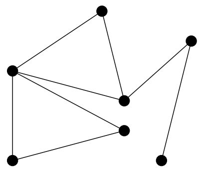
Petersen-gráf

Összefüggőség

Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsához található a gráfban azokat összekötő út.



nem összefüggő gráf



összefüggő gráf

Egy gráf egy maximális összefüggő részgráfját a gráf egy összefüggő komponensének nevezzük. Más szavakkal, a G gráf egy H részgráfja a G egy összefüggő komponense, ha H összefüggő, továbbá G-nek nem létezik olyan H' összefüggő részgráfja, amelynek H valódi részgráfja lenne.

Az előző példában a bal oldali gráfnak két összefüggő komponense van, a jobb oldalinak pedig egy (önmaga).

Példa. Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$ csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább n, akkor a gráf összefüggő!

Megoldás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a gráf nem összefüggő. Tekintsük a gráf legkevesebb csúcsból álló összefüggő komponensét. Ebben a csúcsok száma legfeljebb n, következésképpen a csúcsok fokszáma legfeljebb $n-1$, ami ellentmond a feltételnek.

Így az indirekt feltevés hamis, vagyis a gráf összefüggő.

Állítás. Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf összefüggő komponenseinek száma legalább $|V| - |E|$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(m)$ az az állítás, hogy bármely m élű $G = (V, E)$ gráf összefüggő komponenseinek száma legalább $|V| - m$.

Alapeset. $P(0)$ triviálisan igaz, hiszen egy üres gráf összefüggő komponenseinek száma megegyezik a gráf csúcsainak a számával.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamely m természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(m + 1)$ is igaz.

Tekintsünk egy $m + 1$ élű $G = (V, E)$ gráfot. Távolítsuk el G valamelyik élét, legyen ez mondjuk az $\{u, v\}$ él, a megmaradt gráfot pedig jelölje G'. Az indukciós feltevés szerint G' összefüggő komponenseinek száma legalább $|V| - m$. Helyezzük most vissza az előbb eltávolított $\{u, v\}$ élt.

Ha u és v ugyanabban az összefüggő komponensében volt G'-nek, akkor G összefüggő komponenseinek száma nyilván ugyanannyi lesz, mint G'-é volt, vagyis legalább $|V| - m > |V| - (m + 1)$. Így $P(m + 1)$ ebben az esetben igaz.

Ha viszont u és v különböző összefüggő komponenseiben volt G'-nek, akkor ezeket az $\{u, v\}$ él egyetlen összefüggő komponenssé egyesíti, így G összefüggő komponenseinek száma eggyel kevesebb lesz, mint G'-é volt, vagyis legalább $|V| - m - 1 = |V| - (m + 1)$. Így $P(m + 1)$ ebben az esetben is igaz.

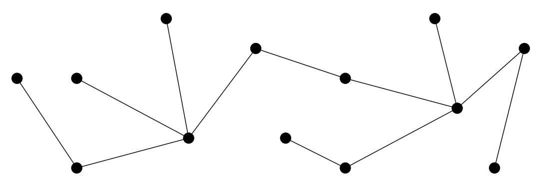
A teljes indukció elve szerint $P(m)$ igaz minden m természetes számra.

Következmény. Tetszőleges $G = (V, E)$ összefüggő gráf éleinek száma legalább $|V| - 1$.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a G gráf összefüggő komponenseinek száma legalább $|V| - |E|$. Mivel G összefüggő, így összefüggő komponenseinek száma 1, következésképpen $|V| - |E| \leqslant 1$, vagyis $|E| \geqslant |V| - 1$.

Fák

Egy $T = (V, E)$ összefüggő és körmentes gráfot fának nevezünk. Íme egy példa:



Állítás. Tetszőleges $T = (V, E)$ fára teljesülnek a következők:

(1) Bármely két csúcsot pontosan egy út köt össze.

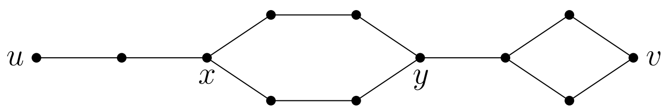
(2) Bármely két szomszédos csúcs közötti élt törölve a gráf nem marad összefüggő.

(3) Bármely két nem szomszédos csúcs között egy élt behúzva a gráfban kör keletkezik.

(4) Ha van legalább két csúcs, akkor van két elsőfokú csúcs.

(5) $|V| = |E| + 1$.

Bizonyítás.
(1) Mivel a gráf összefüggő, ezért bármely két csúcsához található a gráfban azokat összekötő út. Indirekt tegyük fel, hogy van két olyan u és v csúcs a gráfban, amelyeket két különböző út is összeköt. Az u csúcsból elindulva legyen x az első olyan csúcs, ahol a két út szétválik, y pedig az a csúcs ahol az utak legközelebb ismét összetalálkoznak.



Most két, a végpontjaiktól eltekintve diszjunkt út köti össze az x és y csúcsokat, amelyek együtt nyilván egy kört alkotnak. Ez viszont ellentmond annak, hogy a gráf körmentes. Így az indirekt feltevés hamis, következésképpen a gráf bármely két csúcsát pontosan egy út köti össze.

(2) Tekintsük a gráf egy tetszőleges $\{u, v\}$ élét. Mivel a gráfban az u és v csúcsokat egyetlen út köti össze, ez az út szükségképpen az $\{u, v\}$ él. Ezt törölve a gráfban nem marad u-t és v-t összekötő út, vagyis a gráf nem lesz összefüggő.

(3) Tekintsük a gráf két nem szomszédos u és v csúcsát. A gráfban található u-t és v-t összekötő út. Ha most behúzzuk az $\{u, v\}$ élt, akkor ez az él az előbbi úttal együtt nyilván egy kört alkot.

(4) Legyen $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ egy T-beli leghosszabb út egymás utáni csúcsainak sorozata. Itt $m \geqslant 2$, hisz egy legalább két csúcsú összefüggő gráfban mindenképp van egy él.

Állítjuk, hogy v_1 és v_m elsőfokú csúcsok. A v_1 csúcs semelyik $3 \leqslant i \leqslant m$ esetén nem lehet szomszédos a v_i csúccsal, ellenkező esetben a leghosszabb út

v_1-től v_i-ig tartó szakasza a $\{v_1, v_i\}$ éllel együtt egy kört alkotna. Másrészt v_1 nem lehet szomszédos egyetlen olyan csúccsal sem, amely nincs a leghosszabb úton, ellenkező esetben a leghosszabb út bővíthető lenne. Így v_1 csak a v_2 csúccsal szomszédos, ezért fokszáma 1. Hasonlóan igazolható, hogy v_m fokszáma is 1.

(5) Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy bármely n csúcsú $T = (V, E)$ fában $|V| = |E| + 1$.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hiszen egy 1 csúcsú fában $|E| + 1 = 0 + 1 = 1$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n + 1)$ is igaz.

Tekintsünk egy $n + 1$ csúcsú $T = (V, E)$ fát. Legyen v a T egy elsőfokú csúcsa. Távolítsuk el v-t a rá illeszkedő éllel együtt T-ből; a megmaradt gráfot jelölje $T' = (V', E')$. A T' gráf nyilván körmentes. Továbbá T' összefüggő is. Valóban, T összefüggősége miatt bármely két T'-beli csúcs összeköthető úttal T-ben, ám ez az út nyilván nem mehet át az elsőfokú v csúcson, így teljes egészében T'-ben halad. Mindezekből következik, hogy T' fa.

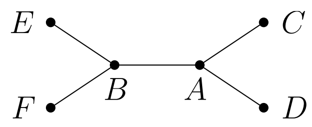
Mivel T' csúcsszáma eggyel kevesebb, mint T-é, az indukciós feltevés szerint T'-re $|V'| = |E'| + 1$ teljesül. Visszahelyezve a törölt v csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, a csúcsok és az élek száma is eggyel nő, következésképpen $|V| = |E| + 1$ a T fára szintén teljesül. Így $P(n + 1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Fákkal lépten-nyomon összetalálkozunk a számítástudományban: az információt gyakran tároljuk fa struktúrájú adatszerkezetben, és számos rekurzív program végrehajtása egy fa bejárásának tekinthető. Néhány speciális fa olyan gyakran merül fel az alkalmazásokban, hogy külön nevet is kaptak.

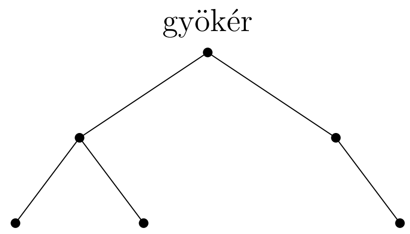
(1) Egy gyökeres fa olyan fa, amelynek egyik csúcsát kitüntettük, ez a gyökér. Legyen $\{u, v\}$ egy gyökeres fa tetszőleges éle. Most vagy a gyökértől u-ig vezető út utolsó előtti csúcsa v, vagy a gyökértől v-ig vezető út utolsó előtti csúcsa u. Tegyük fel, hogy az első eset áll fenn. Ekkor a v csúcsot az u csúcs szülőjének, az u csúcsot pedig a v csúcs gyerekének nevezzük. A gyökéren kívül minden csúcsnak pontosan egy szülője van, a gyökértől hozzá vezető út utolsó előtti csúcsa.

Az alábbi gyökeres fában legyen A a gyökér:



Többek között ekkor E és F a B gyerekei, A pedig B, C és D szülője.

(2) Egy bináris fa olyan gyökeres fa, amelyben minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van. Íme egy példa:



(3) Egy rendezett bináris fában a csúcsok gyermekeit megkülönböztetjük, az egyiket bal gyereknek, a másikat jobb gyereknek nevezzük.

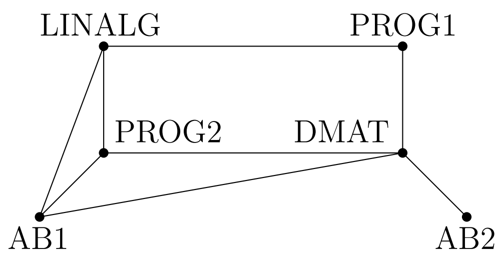
Gráfok színezése

Egyik informatikus szakon minden félév elején elkészítik az arra a félévre vonatkozó zh-rendet. Ez nem is annyira egyszerű feladat, ugyanis a hallgatóknak a félév során számos zh-t kell írni, és egy hallgató egy adott időpontban nyilván legfeljebb egy zh-n tud megjelenni. Kézenfekvő megoldás, hogy az összes zh-t különböző időpontokra tűzzük ki, azonban a tantárgyak nagy száma miatt így az egész szorgalmi időszak sem lenne elég az összes zh-hoz. Olyan megoldást keresünk tehát, amelyben a zh-kat viszonylag kevés időpontra osszuk be, ügyelve arra, hogy semelyik hallgatónak ne legyen két zh-ja ugyanabban az időpontban.

A problémát modellezhetjük gráffal.

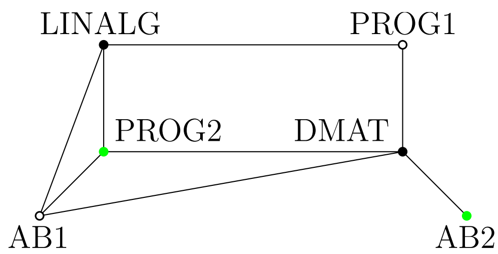
- A gráf csúcsai feleljenek meg a zárthelyiknek.
- Két csúcsot akkor kössünk össze egy éllel, ha van olyan hallgató, akinek a csúcsoknak megfelelő mindkét zh-t meg kell írni.

Például:



Ezzel azonban nem vagyunk még kész. Rendeljünk hozzá minden lehetséges zh időponthoz egy színt, különböző időpontokhoz különböző színeket. Ezek után egy adott zh-t úgy rendelünk hozzá egy adott időponthoz, hogy a gráf megfelelő csúcsát beszínezzük az adott időponthoz tartozó színnel. Az egyetlen megkötés, hogy szomszédos csúcsok színének különbözőnek kell lenni, különben lennének hallgatók, akiknek egy időben két zh-n is meg kellene jelenni. Ezen kívül természetesen szeretnénk minél kevesebb színt használni, hogy az összes zh beférjen a szorgalmi időszakba.

Az előző példánál maradva:



Itt három szín mindenképp szükséges, hisz a gráfban van háromszög. És ennyi elég is, mint az ábrán látható.

Kromatikus szám

Azt mondjuk, hogy egy G gráf k-színezhető, ha a csúcsaihoz hozzá tudunk rendelni k színt úgy, hogy bármely két szomszédos csúcshoz különböző színek tartoznak. A legkisebb olyan k értéket, amelyre egy G gráf k-színezhető, a gráf kromatikus számának nevezzük, és $\chi(G)$-vel jelöljük. A számítástudomány fontos megoldatlan problémája, hogy létezik-e hatékony algoritmus egy gráf kromatikus számának meghatározására. Azt sejtjük, hogy nincs ilyen algoritmus.

Állítás. Ha egy gráfban a maximális fokszám legfeljebb k, akkor a gráf $(k+1)$-színezhető.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy bármely olyan n csúcsú gráf $(k+1)$-színezhető, amelyben a maximális fokszám legfeljebb k.

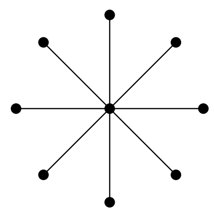
Alapeset. $P(1)$ triviálisan igaz, hiszen egy 1 csúcsú gráfban a maximális fokszám 0, és a gráf természetesen 1-színezhető.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

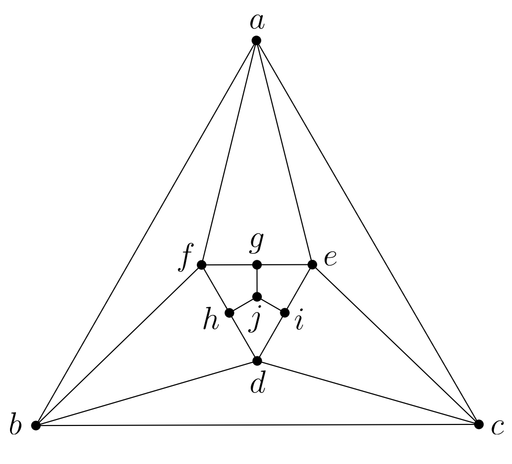
Tekintsünk egy olyan $n+1$ csúcsú G gráfot, amelyben a maximális fokszám legfeljebb k. Távolítsuk el G egy tetszőleges v csúcsát a rá illeszkedő élekkel együtt, a megmaradt gráfot pedig jelölje G'. Most G' egy n csúcsú gráf, amelyben a maximális fokszám legfeljebb k, így az indukciós feltevés szerint $(k+1)$-színezhető. Helyezzük vissza az előbb eltávolított v csúcsot a rá illeszkedő élekkel együtt. A v csúcsot nyilván ki tudjuk színezni olyan színnel, amely különbözik a szomszédjainak színétől, hiszen v foka legfeljebb k és $k+1$ szín áll rendelkezésünkre. Ennélfogva G szintén $(k+1)$-színezhető, következésképpen $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Előfordul, hogy $k+1$ színnél kevesebb nem elég. Valóban, ha G egy $k+1$ csúcsú teljes gráf, akkor G-ben a maximális fokszám k és G kiszínezéséhez $(k+1)$-nél kevesebb szín nyilván nem elég. Mindazonáltal a $k+1$ szín általában messze több, mint amennyire tényleg szükség van. Például a következő csillag alakú gráfban a középső csúcs fokszáma 8, a színezéshez pedig elég 2 szín.



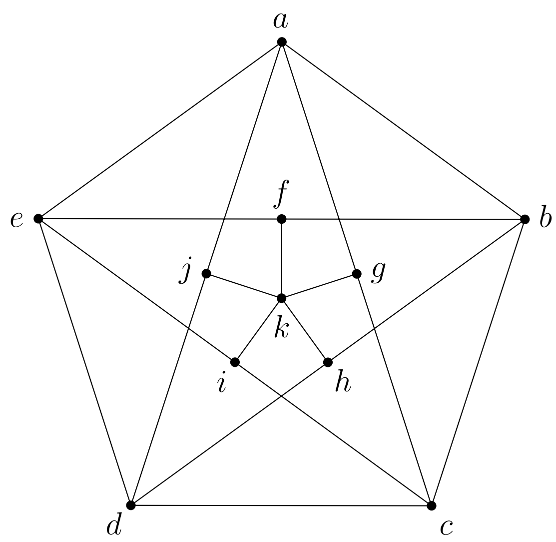
Példa. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a gráf nem 3-színezhető. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a gráf 3-színezhető. Egy ilyen színezésben az a, b és c csúcsok nyilván különböző színűek; legyen mondjuk a színe piros, b színe kék, c színe pedig sárga. Ekkor d csak piros, e csak kék, f pedig csak sárga lehet, mert a másik két szín már szerepel a szomszédságukban. Ugyanígy g csak piros, h csak kék, i pedig csak sárga lehet. Tekintsük most a j csúcsot. Ennek három szomszédja három különböző színű, ezért j-t nem színezhettük a három szín egyikére sem. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

Világos, hogy ha j-t színezhetjük zöldre is, akkor az előbbi gondolatmenet a gráf egy 4-színezéséhez vezet. Ezért a gráf kromatikus száma 4.

Példa. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?

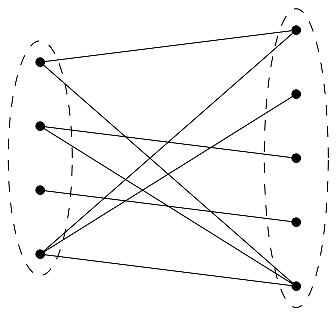


Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a gráf nem 3-színezhető. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a gráf 3-színezhető. Egy ilyen színezésben a külső öt hosszúságú kör színezése lényegében egyértelmű; egy színt egyszer használunk, a másik kettőt pedig kétszer felváltva. Legyen mondjuk a színe sárga, b színe piros, c színe kék, d színe ismét piros, e színe pedig ismét kék. Ekkor f csak sárga, g csak piros, j pedig csak kék lehet, mert a másik két szín már szerepel a szomszédságukban. Tekintsük most a k csúcsot. Ennek f, g és j három különböző színű szomszédja, ezért k-t nem színezhettük a három szín egyikére sem. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

Világos, hogy ha k-t színezhetjük zöldre is, akkor (h-t és i-t sárgára színezve) az előbbi gondolatmenet a gráf egy 4-színezéséhez vezet. Ezért a gráf kromatikus száma 4.

Páros gráfok

A 2-színezhető gráfok olyan gyakran fordulnak elő az alkalmazásokban, hogy külön nevet is kaptak: ezeket páros gráfoknak nevezik. Tekintsünk egy G páros gráfot. Most G csúcsait kiszínezhetjük mondjuk fehérrel és feketével úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű. Csoportosítsuk a fekete csúcsokat egy kupacba a bal oldalon, a fehér csúcsokat meg egy másik kupacba a jobb oldalon. Mivel minden él különböző színű csúcsokat köt össze, ezért élek csak a két kupac között haladnak. Ennélfogva minden páros gráf valahogy így néz ki:



A következő tétel a páros gráfok egy érdekes karakterizációját adja.

Tétel. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört.

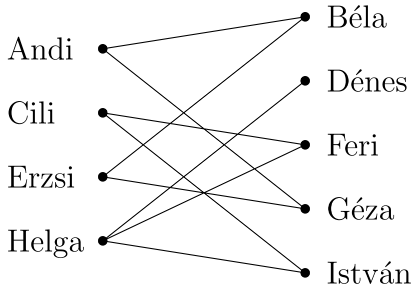
Párosítások

A tánciskolában minden egyes lánynak bizonyos fiúk tetszenek, mások meg nem. Milyen feltételek mellett tud az összes lány partnert találni magának, ha a lányok csak olyan fiúkkal hajlandók táncolni, akik tetszenek nekik?

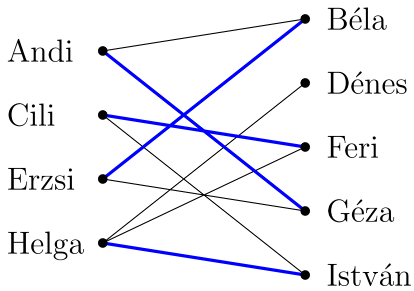
A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden lánynak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden fiúnak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy lánynak tetszik egy fiú, akkor a megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Egy ilyen módon kapott gráf például a következő:



Feladatunk ezek után a lányok számára egy párosítást megadni; az éleknek egy olyan részhalmazát, hogy minden lány pontosan egy, míg minden fiú legfeljebb egy élre illeszkedjen. Az előbbi példában a lányok számára egy párosítás a következő:



Hall-tétel

Tekintsük lányok egy tetszőleges L és fiúk egy tetszőleges F halmazát. Lányok valamely $L' \subseteq L$ részhalmazára azon fiúk halmazát, akik legalább egy L'-beli lánynak tetszenek, az L'-beli lányoknak tetsző fiúk halmazának fogjuk nevezni. Az előző példában a Cilinek és Helgának tetsző fiúk halmaza {Dénes, Feri, István}.

Nyilván csak akkor van esélyünk az L-beli lányok számára egy párosítást megadni, ha a következő teljesül.

Hall-feltétel. Lányok bármely $L' \subseteq L$ részhalmaza esetén az L'-beli lányoknak tetsző fiúk $F' \subseteq F$ halmazára $|L'| \leqslant |F'|$.

Valóban, ha mondjuk négy lánynak csak három fiú tetszik összesen, akkor már ezen négy lány számára sem lehet egy párosítást megadni.

Hall-tétel. Tekintsük lányok egy tetszőleges L és fiúk egy tetszőleges F halmazát. Akkor és csak akkor tudunk a lányok számára egy párosítást megadni, ha a Hall-feltétel teljesül.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy meg tudunk adni a lányok számára egy párosítást. Belátjuk, hogy ekkor a Hall-feltétel teljesül. Tekintsük a lányoknak egy tetszőleges L' részhalmazát. Minden L'-beli lánynak tetszik legalább az a fiú, akivel összepárosítottuk, ezért az L'-beli lányoknak tetsző fiúk F' halmazára $|L'| \leqslant |F'|$. Így a Hall-feltétel teljesül.

Ezek után tegyük fel, hogy teljesül a Hall-feltétel. Megmutatjuk, hogy ekkor megadható a lányok számára egy párosítás. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy ha $|L| = n$ és teljesül a Hall feltétel, akkor megadható a lányok számára egy párosítás.

Alapeset. A $P(1)$ állítás nyilván igaz. Ilyenkor egyetlen lány van, akinek a Hall-feltétel szerint tetszik legalább egy fiú. Ezzel a fiúval párosítva a lányt egy alkalmas párosítást kapunk.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egészre. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Tekintsük lányoknak egy $n+1$ elemű L, és fiúknak egy tetszőleges F halmazát, amelyekre teljesül a Hall-feltétel. Két esetet különböztetünk meg.

(1) Lányok bármely $L' \subset L$ valódi részhalmaza esetén az L'-beli lányoknak tetsző fiúk $F' \subseteq F$ halmazára $|F'| > |L'|$. Válasszunk egy tetszőleges $\ell \in L$ lányt, és párosítsuk össze valamelyik neki tetsző f fiúval (a Hall-feltétel miatt létezik ilyen fiú).

Tekintsük ezután az $L \setminus \{\ell\}$ és $F \setminus \{f\}$ halmazokat. Feltételünk szerint lányok bármely $L' \subseteq L \setminus \{\ell\}$ részhalmaza esetén az L'-beli lányoknak tetsző fiúk $F' \subseteq F$ halmazára $|F'| > |L'|$, így az L'-beli lányoknak tetsző fiúk $F'' \subseteq F \setminus \{f\}$ halmazára $|F''| \geqslant |L'|$.

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az $L \setminus \{\ell\}$ és $F \setminus \{f\}$ halmazokra teljesül a Hall-feltétel. Továbbá $|L \setminus \{\ell\}| = n$, ezért az indukciós feltevés szerint megadható az $L \setminus \{\ell\}$-beli lányok számára egy párosítás itt. Ezt kiegészítve az $\{\ell, f\}$ párral egy párosításhoz jutunk az L-beli lányok számára is. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben.

(2) Lányok valamely $L' \subset L$ valódi részhalmaza esetén az L'-beli lányoknak tetsző fiúk $F' \subseteq F$ halmazára $|F'| = |L'|$. Az L' és F' halmazokra nyilván teljesül a Hall-feltétel, továbbá $|L'| \leqslant n$, ezért az indukciós feltevés szerint megadható itt az L'-beli lányok számára egy párosítás.

Tekintsük ezután az $L \setminus L'$ és $F \setminus F'$ halmazokat. Megmutatjuk, hogy ezekre is teljesül a Hall-feltétel. Legyen $L'' \subseteq L \setminus L'$ lányok tetszőleges halmaza, és legyen az L''-beli lányoknak tetsző $F \setminus F'$-beli fiúk halmaza F''.

Belátjuk, hogy $|F''| \geqslant |L''|$. Az $L' \cup L''$-beli lányoknak tetsző F-beli fiúk halmaza nyilvánvaló módon $F' \cup F''$. Mivel az L és F halmazokra teljesül a Hall-feltétel, így $|F' \cup F''| \geqslant |L' \cup L''|$. Feltételünk szerint $|F'| = |L'|$, ezért $|F''| \geqslant |L''|$ szükségképpen fennáll. Ebből következik, hogy a Hall-feltétel teljesül az $L \setminus L'$ és $F \setminus F'$ halmazokra is.

Most $|L \setminus L'| \leqslant n$, ezért az indukciós feltevés szerint itt is megadható az $L \setminus L'$-beli lányok számára egy párosítás. Ezt egyesítve az L'-beli lányok számára adott párosítással egy párosításhoz jutunk az L-beli lányok számára is. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

A Hall-tétel olyan sokszor alkalmazható, hogy érdemes absztrakt formában is megfogalmazni. Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges páros gráf. Jelölje a bal oldali kupacban levő csúcsok halmazát L, a jobb oldali kupacban levőkét pedig F.

Hall-feltétel. Bármely $L' \subseteq L$ esetén azon $F' \subseteq F$ csúcsok halmazára, amelyek szomszédosak legalább egy L'-beli csúccsal, $|L'| \leqslant |F'|$ teljesül.

Hall-tétel. A G páros gráfban akkor és csak akkor tudunk az L-beli csúcsok számára egy párosítást megadni, ha a Hall-feltétel teljesül.

Álláshirdetés

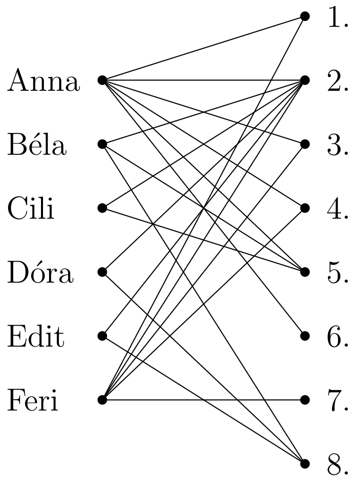
Példa. Egy munkahelyen nyolc állásra hatan jelentkeztek. Anna az 1., 2., 3., 4., 5. és 6. állásra, Béla a 2., 5. és 8. állásra, Cili a 2. és 5. állásra, Dóra és Edit a 2. és 8. állásra, Feri pedig az 1., 2., 3., 4. és 7. állásra jöhet szóba. Fel tudjuk-e venni az összes jelentkezőt, ha minden állásra egy ember kell?

Megoldás. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

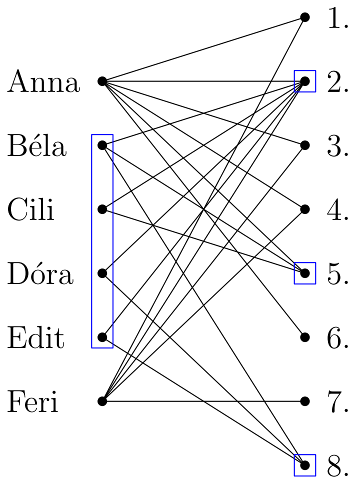
- Feleljen meg minden jelentkezőnek egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden munkakörnek egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy jelentkező alkalmas egy munkakör betöltésére, akkor a megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a jelentkezők számára egy párosítást megadni (már ha van egyáltalán).

A feladatnak megfelelő páros gráf a következő:



Látható, hogy Béla, Cili, Dóra és Edit csak a 2., 5. és 8. állásra jöhetnek szóba, így a Hall-feltétel nem teljesül, következésképpen nem létezik párosítás az összes jelentkező számára.



Példa. Egy munkahelyen hat állásra heten jelentkeztek. Anna az 1. állásra, Béla az 1. és 6. állásra, Cili a 2., 3. és 4. állásra, Dóra a 2. és 5. állásra, Edit a 4. és 5. állásra, Feri az 1. és 6. állásra, Géza pedig csak a 6. állásra jöhet szóba. Be lehet-e tölteni az összes állást?

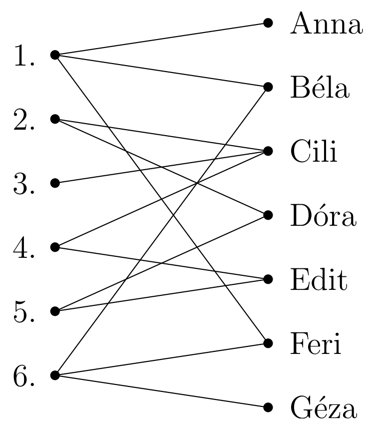
Megoldás. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden munkakörnek egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden jelentkezőnek egy csúcs a jobb oldali kupacban.

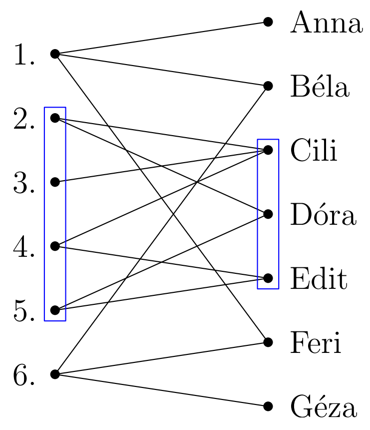
- Ha egy jelentkező alkalmas egy munkakör betöltésére, akkor a megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a munkakörök számára egy párosítást megadni (már ha van egyáltalán).

A feladatnak megfelelő páros gráf a következő:



Látható, hogy a 2., 3., 4., és 5. állásra csak Cili, Dóra és Edit jöhetnek szóba, így a Hall-feltétel nem teljesül, következésképpen nem létezik párosítás az összes munkakör számára.



Táncmulatság

Példa. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenkinek legalább 6 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy amikor elkezdődik a tánc, minden lány talál magának partnert akkor is, ha a lányok csak ismerős fiúkkal hajlandók táncolni!

Megoldás. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden lánynak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden fiúnak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy lány és egy fiú ismeri egymást, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a lányok számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a lányok számára. Jelölje a lányok halmazát L, a fiúkét pedig F. Tekintsük L egy tetszőleges L' részhalmazát, és legyen $F' \subseteq F$ az L'-beli lányok által ismert összes fiú halmaza.

Mivel minden lánynak van legalább 6 fiú ismerőse, ezért $|F'| \geqslant 6$ mindig fennáll. Így ha $|L'| \leqslant 6$, akkor $|F'| \geqslant |L'|$ automatikusan teljesül. Másrészt ha $|L'| \geqslant 7$, akkor vegyük észre, hogy nem létezhet olyan fiú, akit egyik L'-beli lány sem ismer. Valóban, egy ilyen fiú legfeljebb $12 - |L'| \leqslant 5$ lányt ismerhet, ami ellentmond a feltételnek. Ezért ebben az esetben $|F'| = 12$, így $|F'| \geqslant |L'|$ most is teljesül.

Példa. Egy 50 fős társaságban minden lány pontosan 15 fiút, és minden fiú pontosan 15 lányt ismer (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy amikor elkezdődik a tánc, minden lány talál magának partnert akkor is, ha a lányok csak ismerős fiúkkal hajlandók táncolni!

Megoldás. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden lánynak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden fiúnak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy lány és egy fiú ismeri egymást, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a lányok számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a lányok számára. Jelölje a lányok halmazát L, a fiúkét pedig F. Tekintsük L egy tetszőleges L' részhalmazát, és legyen $F' \subseteq F$ az L'-beli lányok által ismert összes fiú halmaza.

Az L'-beli csúcsokból induló élek mind F'-beli csúcsokba érkeznek, számuk pedig magától értetődően az L'-beli csúcsok fokszámainak összege. Ebből azonnal következik, hogy az F'-beli csúcsok fokszámainak összege legalább akkora, mint az L'-beli csúcsok fokszámainak összege. Felhasználva, hogy a fokszámok mind egyenlők, ez csak úgy lehetséges, ha F'-ben legalább annyi csúcs van, mint L'-ben. A Hall-feltétel pontosan ezt fogalmazza meg.

Megjegyzés. Az L-beli csúcsokból $15|L|$ él indul ki, az F-beli csúcsokba pedig $15|F|$ él érkezik be. Mivel ez a két érték egyaránt a gráf éleinek száma, ezért $15|L| = 15|F|$, következésképpen $|L| = |F|$. Ez azt jelenti, hogy a társaságban ugyanannyi lány van, mint fiú.

Törzsek és totemek

Példa. Egy szigeten 6 törzs él. Minden törzs vadászterülete 100 km^2, a sziget teljes területe 600 km^2. A vadászterületek között nincs átfedés, így a sziget minden szeglete hozzátartozik valamelyik törzs vadászterületéhez. Ugyanezen a szigeten él 6 teknősbékafaj is. Minden teknősbékafaj élőhelye 100 km^2. Az élőhelyek között nincs átfedés, így a sziget minden szeglete hozzátartozik valamelyik teknősbékafaj élőhelyéhez.

A törzsek elhatározzák, hogy totemállatot választanak maguknak; mindegyik törzs totemállata a szigeten élő valamelyik teknősbékafaj lesz, különböző törzseknek különböző teknősbékafajok. Lehetséges-e a totemállat választás ha azt is kikötjük, hogy egy törzs csak olyan teknősbékafajt választhat, amely előfordul a vadászterületén?

Megoldás. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden törzsnek egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden teknősbékafajnak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy törzs vadászterületén előfordul valamelyik teknősbékafaj, akkor a megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a törzsek számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a törzsek számára. Nyilván nem lehetséges, hogy valamelyik törzs vadászterületén egyetlen teknősbékafaj se forduljon elő, hiszen a sziget minden szeglete hozzátartozik valamelyik teknősbékafaj élőhelyéhez. Az sem lehetséges, hogy két törzs vadászterületén legfeljebb egy teknősbékafaj forduljon elő, hiszen akkor ennek a teknősbékafajnak az élőhelye legalább 200 km^2 volna. Nem lehetséges, hogy három törzs vadászterületén legfeljebb két teknősbékafaj forduljon elő, hiszen akkor ezek együttes élőhelye legalább 300 km^2 volna.

Ez a gondolatmenet általában is érvényes: semmilyen $2 \leqslant k \leqslant 6$ esetén nem lehetséges, hogy k törzs vadászterületén legfeljebb $k-1$ teknősbékafaj forduljon elő, hiszen akkor ezek együttes élőhelye legalább $k \cdot 100$ km^2 volna. Ez azt jelenti, hogy a feladatot modellező páros gráfban tetszőleges $1 \leqslant k \leqslant 6$ esetén, akárhogy is választunk ki k csúcsot a bal oldali kupacból, ezeknek összességében legalább k szomszédjuk van a jobb oldali kupacban. A Hall-feltétel pontosan ezt fogalmazza meg.

Összeszámlálási feladatok

Összeszámlálni dolgokat elég egyszerű feladatnak tűnik: egy, kettő, három, négy stb. És a módszer tényleg tökéletesen működik, ha például arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány ceruza van a tolltartónkban, vagy hány papírszalvéta a szalvétagyűjteményünkben. Miképpen járjunk el azonban a következő esetekben?

- A sarki pékségben ötféle fánkot árulnak. Hányféleképpen lehet ezekből egy 12 darabos csomagot összeállítani?
- Hány olyan 16 jegyű bináris szám van, amelyben az egyesek száma pontosan négy?

Látni fogjuk, hogy azért itt sem reménytelen a helyzet; néhány egyszerű szabály (tétel) alkalmazásával ezek a kérdések is könnyen megválaszolhatók.

Bijekció

Egy $f\colon A \to B$ függvényt bijekciónak nevezünk, ha

- injektív, azaz minden $x_1, x_2 \in A$ és $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- szürjektív, azaz minden $y \in B$ esetén létezik olyan $x \in A$, amelyre $f(x) = y$.

1. szabály (bijekció).
Legyenek A és B tetszőleges (véges) halmazok. Ha létezik $f\colon A \to B$ bijekció, akkor $|A| = |B|$.

Az 1. szabály jelentősége abban áll, hogy ha sikerült meghatározni egy halmaz elemszámát, akkor bijekció segítségével számos más halmaz elemszámát is azonnal tudni fogjuk.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

A : 12 darabos fánkcsomagok ötféle fánkból válogatva.

B : 16 bites sorozatok pontosan 4 egyessel.

Megoldás. Tekintsük az A halmaz egy tetszőleges elemét, legyen ez mondjuk

$$\underbrace{00}_{\text{sima}} \quad \underbrace{}_{\text{lekváros}} \quad \underbrace{00000}_{\text{vaníliás}} \quad \underbrace{000}_{\text{csokis}} \quad \underbrace{00}_{\text{nutellás}}$$

Itt minden fánkot egy 0 jelöl, és a különböző ízű fánkok között hagytunk egy kis hézagot. Írjunk a négy hézagba egy-egy 1 jelet:

$$\underbrace{00}_{\text{sima}}\ 1\ \underbrace{}_{\text{lekváros}}\ 1\ \underbrace{00000}_{\text{vaníliás}}\ 1\ \underbrace{000}_{\text{csokis}}\ 1\ \underbrace{00}_{\text{nutellás}}$$

Ezzel egy 16 bites sorozatot kaptunk, amelyben pontosan 4 egyes szerepel.

Ezek után definiálhatunk egy $f \colon A \to B$ függvényt a következőképpen: az s sima, l lekváros, v vaníliás, c csokis és n nutellás fánkból álló 12 darabos csomagnak feleltessük meg a

$$\underbrace{0\cdots0}_{s}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{l}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{v}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{c}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{n}$$

16 bites sorozatot. Nem nehéz belátni, hogy az f függvény bijekció. Valóban, nyilvánvaló módon

- különböző fánkcsomagokhoz különböző bitsorozatok tartoznak,
- minden bitsorozat megfelel egy fánkcsomagnak.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

A : 30 bites sorozatok 10 nullával és 20 egyessel.

B : a koordináta-rendszer $(0, 0)$ pontjából a $(10, 20)$ pontba menő olyan utak, amelyek kizárólag jobbra lépésből (vagyis amikor az első koordinátát növeljük eggyel) és felfelé lépésből (vagyis amikor a második koordinátát növeljük eggyel) áll.

Megoldás. Rendeljük hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{30})$ sorozathoz azt az utat, amelyben az i-edik lépés *jobbra* ha $b_i = 0$ és *fel* ha $b_i = 1$.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 13 egyforma tábla csoki elosztási lehetőségei két gyerek, András és Béla között.

$B:$ 14 bites sorozatok 1 egyessel.

Megoldás. Ahhoz az elosztáshoz, amikor András k, Béla pedig l csokit kap, rendeljük hozzá a

$$\underbrace{0\cdots 0}_{k}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{l}$$

sorozatot.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 13 egyforma tábla csoki elosztási lehetőségei három gyerek, András, Béla és Cili között.

$B:$ 15 bites sorozatok 2 egyessel.

Megoldás. Ahhoz az elosztáshoz, amikor András k, Béla l, Cili pedig m csokit kap, rendeljük hozzá a

$$\underbrace{0\cdots 0}_{k}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{l}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{m}$$

sorozatot.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 13 egyforma tábla csoki elosztási lehetőségei három gyerek, András, Béla és Cili között úgy, hogy mindenki legalább 2 tábla csokit kap.

$B:$ 9 bites sorozatok 2 egyessel.

Megoldás. Ahhoz az elosztáshoz, amikor András $k \geqslant 2$, Béla $l \geqslant 2$, Cili pedig $m \geqslant 2$ csokit kap, rendeljük hozzá a

$$\underbrace{0\cdots 0}_{k-2}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{l-2}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{m-2}$$

sorozatot.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 13 egyforma tábla csoki elosztási lehetőségei három gyerek, András, Béla és Cili között úgy, hogy a fiúk legalább 2 tábla csokit kapnak.

$B:$ 11 bites sorozatok 2 egyessel.

Megoldás. Ahhoz az elosztáshoz, amikor András $k \geqslant 2$, Béla $l \geqslant 2$, Cili pedig m csokit kap, rendeljük hozzá a

$$\underbrace{0\cdots 0}_{k-2}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{l-2}\ 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{m}$$

sorozatot.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 8 egyforma tábla csoki elosztási lehetőségei öt gyerek, András, Béla, Cili, Dénes és Erzsi között úgy, hogy Béla, Cili és Dénes legalább 1 tábla csokit kapnak.

$B:$ egy könyvespolcon egymás mellett levő 12 könyv közül 4 kiválasztásának a lehetőségei úgy, hogy szomszédos könyveket nem választhatunk.

Megoldás. Ahhoz az elosztáshoz, amikor András h, Béla $i \geqslant 1$, Cili $j \geqslant 1$, Dénes $k \geqslant 1$, Erzsi pedig l csokit kap, rendeljük hozzá a

$$\underbrace{\square\ldots\square}_{h}\ \blacksquare\ \underbrace{\square\ldots\square}_{i\geqslant 1}\ \blacksquare\ \underbrace{\square\ldots\square}_{j\geqslant 1}\ \blacksquare\ \underbrace{\square\ldots\square}_{k\geqslant 1}\ \blacksquare\ \underbrace{\square\ldots\square}_{l}$$

könyvválasztást.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 109 bites sorozatok 9 egyessel.

$B:$ az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$ egyenlet megoldásai a természetes számok halmazán.

Megoldás. Rendeljük hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{109})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, $\ldots$, x_9 a nyolcadik és a kilencedik egyes közötti nullák száma, x_{10} pedig a kilencedik egyes utáni nullák száma.

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 110 bites sorozatok 10 egyessel.

$B:$ az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \leqslant 100$ egyenlőtlenség megoldásai a természetes számok halmazán.

Megoldás. Rendeljük hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{110})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, ..., x_9 a nyolcadik és a kilencedik egyes közötti nullák száma, x_{10} pedig a kilencedik és a tizedik egyes közötti nullák száma.

Jegyezzük meg, hogy a tizedik egyes utáni nullák száma nincs hatással az $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ értékekre (egyenlőtlenségről van szó).

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \leqslant 100$ egyenlőtlenség megoldásai a természetes számok halmazán.

$B:$ 0 és 100 közötti egészek tíz elemű monoton növekvő sorozatai (vagyis olyan $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ sorozatok, ahol $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{10} \leqslant 100$).

Megoldás. Rendeljük hozzá az $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ megoldáshoz azt az $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ sorozatot amelyben

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_1 + x_2, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ y_{10} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}. \end{aligned}$$

Példa. Keressünk bijekciót a következő halmazok között:

$A:$ 1 és 100 közötti egészek tíz elemű szigorúan monoton növekvő sorozatai (vagyis olyan $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ sorozatok, ahol $1 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_{10} \leqslant 100$).

$B:$ 100 bites sorozatok 10 egyessel.

Megoldás. Rendeljük hozzá az $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ szigorúan monoton növekvő sorozathoz azt a 100 bites sorozatot, amelynek pontosan az y_1-edik, az y_2-edik, ..., és az y_{10}-edik tagja egyes.

Összeszámlálási feladatok megoldásánál az lesz az általános stratégiánk, hogy megpróbáljuk a feladatot először bijekció segítségével egy sorozatszámlálási feladatra visszavezetni, majd a (jobban átlátható) sorozatszámlálási feladatot valamilyen módon megoldani.

Unió

2. szabály (unió).
Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként diszjunkt halmazok, akkor

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Descartes-szorzat

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem üres halmazok. Ekkor az

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

halmazt az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok Descartes-szorzatának nevezzük. Ez a halmaz azokból a sorozatokból áll, amelyek első tagja A_1, második tagja A_2, ..., n-edik tagja pedig A_n valamelyik eleme.

3. szabály (Descartes-szorzat).
Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem üres halmazok esetén

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Napi étrend

Tegyük fel, hogy a napi étrendünk összeállításakor a reggelit ételek egy R, az ebédet ételek egy E, a vacsorát pedig ételek egy V halmazából válogathatjuk össze, ahol

$$\begin{aligned} R &= \{\text{virsli, rántotta, szendvics, fánk}\}, \\ E &= \{\text{hamburger, pizza, saláta}\}, \\ V &= \{\text{spagetti, pizza, szendvics, fánk}\}. \end{aligned}$$

Ekkor $R \times E \times V$ az összes napi étrend halmaza. Íme néhány példa a napi étrendre:

$$\begin{gathered} (\text{szendvics, pizza, szendvics}), \\ (\text{rántotta, hamburger, fánk}), \\ (\text{virsli, saláta, spagetti}). \end{gathered}$$

A 3. szabály szerint az összes lehetséges napi étrend száma

$$|R \times E \times V| = |R| \cdot |E| \cdot |V| = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48.$$

Egy összeszámlálási feladat elég ritkán oldható meg egyetlen szabály alkalmazásával, általában több szabályt kell kombinálni.

Rendszámok

Példa. Egy rendszám állhat 3 betűből és 3 számból, vagy 5 betűből és 1 számból. Hányféle rendszám van?

Megoldás. Definiáljunk két halmazt:

$$\mathcal{B} = \{A, B, \ldots, Z\},$$
$$\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Itt $\mathcal{B}$ a (nagy)betűk halmaza, $\mathcal{S}$ pedig a számjegyeké. A rendszámok halmaza ezek után

$$(\mathcal{B}^3 \times \mathcal{S}^3) \cup (\mathcal{B}^5 \times \mathcal{S}).$$

Itt az első tag a 3 betűből és 3 számból álló, a második tag pedig az 5 betűből és 1 számból álló rendszámok halmaza. Ezek nyilván diszjunkt halmazok, ezért a 2. szabály szerint

$$|(\mathcal{B}^3 \times \mathcal{S}^3) \cup (\mathcal{B}^5 \times \mathcal{S})| = |\mathcal{B}^3 \times \mathcal{S}^3| + |\mathcal{B}^5 \times \mathcal{S}|.$$

Most alkalmazzuk a 3. szabályt:

$$|\mathcal{B}^3 \times \mathcal{S}^3| = |\mathcal{B}|^3 \cdot |\mathcal{S}|^3,$$
$$|\mathcal{B}^5 \times \mathcal{S}| = |\mathcal{B}|^5 \cdot |\mathcal{S}|.$$

Mivel $|\mathcal{B}| = 26$ és $|\mathcal{S}| = 10$, így a rendszámok száma

$$26^3 \cdot 10^3 + 26^5 \cdot 10 \approx 1,36 \cdot 10^8.$$

Jelszavak

Példa. Egy számítógépes rendszer egy jelszót akkor fogad el érvényesnek, ha a karakterek száma 6 és 8 között van, az első karakter betű (nagy vagy kicsi), a többi karakter pedig betű vagy szám. Hány érvényes jelszó van?

Megoldás. Definiáljunk két halmazt:

$$\mathcal{E} = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\},$$
$$\mathcal{H} = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, 0, 1, \ldots, 9\}.$$

Itt $\mathcal{E}$ az érvényes első karakterek halmaza, $\mathcal{H}$ pedig az érvényes hátrébb lévőké. Az érvényes jelszavak halmaza ezek után

$$(\mathcal{E} \times \mathcal{H}^5) \cup (\mathcal{E} \times \mathcal{H}^6) \cup (\mathcal{E} \times \mathcal{H}^7).$$

Itt az első tag a 6 karakterből álló, a második tag a 7 karakterből álló, a harmadik tag pedig a 8 karakterből álló érvényes jelszavak halmaza. Ezek nyilván diszjunkt halmazok, ezért a 2. szabály szerint

$$|(\mathcal{E} \times \mathcal{H}^5) \cup (\mathcal{E} \times \mathcal{H}^6) \cup (\mathcal{E} \times \mathcal{H}^7)| = |\mathcal{E} \times \mathcal{H}^5| + |\mathcal{E} \times \mathcal{H}^6| + |\mathcal{E} \times \mathcal{H}^7|.$$

Most alkalmazzuk a 3. szabályt:

$$|\mathcal{E} \times \mathcal{H}^5| = |\mathcal{E}| \cdot |\mathcal{H}|^5,$$
$$|\mathcal{E} \times \mathcal{H}^6| = |\mathcal{E}| \cdot |\mathcal{H}|^6,$$
$$|\mathcal{E} \times \mathcal{H}^7| = |\mathcal{E}| \cdot |\mathcal{H}|^7.$$

Mivel $|\mathcal{E}| = 52$ és $|\mathcal{H}| = 62$, így az érvényes jelszavak száma

$$52 \cdot 62^5 + 52 \cdot 62^6 + 52 \cdot 62^7 \approx 1,86 \cdot 10^{14}.$$

Részhalmazok

Példa. Hány különböző részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Például a három elemű $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz részhalmazai

$$\emptyset,\ \{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_1, x_2\},\ \{x_1, x_3\},\ \{x_2, x_3\},\ \{x_1, x_2, x_3\},$$

összesen 8 darab.

Megoldás. Tekintsünk egy n elemű $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazt. Az X halmaz egy Y részhalmazához természetes módon hozzárendelhetünk egy n bites $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sorozatot olyan módon, hogy $b_i = 1$ ha $x_i \in Y$, és $b_i = 0$ ha $x_i \notin Y$. Például, ha $n = 10$ és $Y = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_{10}\}$, akkor az Y-hoz rendelt sorozat $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$. Ez a leképezés (függvény) bijekció, így az 1. szabály szerint a részhalmazok száma megegyezik az n bites sorozatok számával. Az n bites sorozatok száma pedig a 3. szabállyal összhangban

$$|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n.$$

Különdíjak

Egy versenyen n ember vesz részt. A versenyen három különdíjat osztanak ki. Hányféleképpen részesülhetnek a díjakban a résztvevők?

Próbáljuk meg a feladatot bijekció segítségével visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Jelölje P a résztvevők halmazát. A díjazások és a $P \times P \times P$ halmaz között természetes módon megadható egy bijekció: az "x nyeri az első különdíjat, y nyeri a második különdíjat, z nyeri a harmadik különdíjat" díjazáshoz rendeljük hozzá az $(x, y, z) \in P^3$ sorozatot. Ezen sorozatok száma a 3. szabály szerint

$$|P \times P \times P| = |P|^3 = n^3.$$

Mi történik, ha a különdíjakat különböző embereknek akarjuk adni? Most is tekinthetjük az előző függvényt: az "x nyeri az első különdíjat, y nyeri a második különdíjat, z nyeri a harmadik különdíjat" díjazáshoz rendeljük hozzá az $(x, y, z) \in P^3$ sorozatot. Ám ez a függvény most nem bijekció; például az (András, András, Enikő) sorozat nem felel meg egyetlen díjazásnak sem hiszen András nem kaphat két különdíjat. Bijekció létesíthető viszont a díjazások és a következő halmaz között:

$$S = \{(x, y, z) \in P^3 \mid x,\ y \text{ és } z \text{ különböző emberek}\}.$$

Az S halmaz elemszámának meghatározására nem használható a 3. szabály mivel a hármasok komponensei nem függetlenek egymástól. Mindazonáltal igaz, hogy

- x megválasztására n lehetőségünk van,
- x minden egyes megválasztásához y megválasztására $n-1$ lehetőségünk van; x-en kívül bárkit választhatunk.
- x és y minden egyes megválasztásához z megválasztására $n-2$ lehetőségünk van; x-en és y-on kívül bárkit választhatunk.

4. szabály (Deascartes-szorzat általánosítása).
Ha k tagú sorozatok egy S halmazára teljesül, hogy

- a lehetséges első komponensek száma n_1,
- bármely első komponenshez a lehetséges második komponensek száma n_2,

- az első két komponens bármely kombinációjához a lehetséges harmadik komponensek száma n_3, és így tovább,

akkor $|S| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

A különdíjas példánkban így a 4. szabály szerint

$$|S| = n(n-1)(n-2)$$

a lehetséges díjazások száma.

Gyanús ötszázasok

Példa. Egy ötszázas sorozatszáma 2 betűből és 7 számból áll. Egy ötszázast nevezzünk gyanúsnak, ha a hét számjegy között van legalább két azonos. Ha megnézünk néhány ötszázast azt tapasztaljuk, hogy a gyanús ötszázasok elég gyakoriak. És milyen gyakoriak a nem gyanús ötszázasok?

Megoldás. Feltéve, hogy a számjegyek egyforma gyakorisággal fordulnak elő, a következő hányados értéke a válasz:

$$\frac{\text{különböző számjegyekből álló sorozatszámok}}{\text{összes sorozatszám}}.$$

A nevezőben levő sorozatok tagjaira nincs semmi megkötés. Az első számjegy tízféle lehet, a második is, és így tovább. Így a 4. szabály szerint a nevező 10^7.

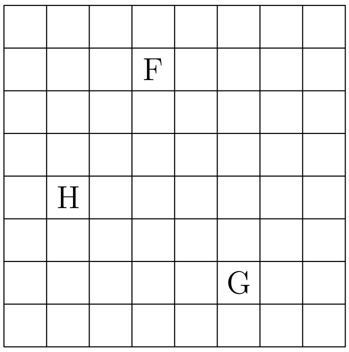
A számlálóban levő sorozatok tagjaira már nem mondható el ugyanez, itt minden számjegy egyszer fordulhat csak elő. Az első számjegy tízféle lehet, a második számjegy az első számjegy minden egyes választásához kilencféle lehet, a harmadik számjegy az első két számjegy minden egyes kombinációjához nyolcféle lehet, és így tovább. Így a 4. szabály szerint a számláló $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Ennélfogva a nem gyanús ötszázasok gyakorisága

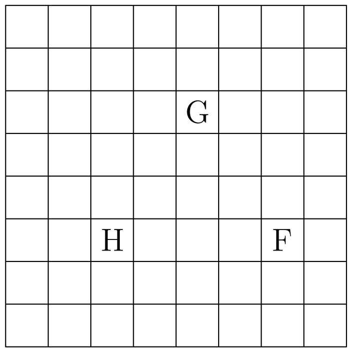
$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^7} = \frac{604800}{10000000} = 6.048\%.$$

Sakktábla

Példa. Hányféleképpen helyezhetünk el egy gyalogot, egy huszárt és egy futót a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy a bábuk közül semelyik kettő ne legyen se ugyanabban a sorban, se ugyanabban az oszlopban?



jó elrendezés



rossz elrendezés

Megoldás. Miféle sorozatszámlálási feladatra lehetne visszavezetni a kérdést? Természetes módon megadható egy bijekció a jó elrendezések és az

$$(s_G, o_G, s_H, o_H, s_F, o_F)$$

sorozatok között, ahol s_G, s_H, s_F páronként különböző sorok, o_G, o_H, o_F pedig páronként különböző oszlopok. Egy adott elrendezéshez rendelt sorozatban s_G a gyalog sora, o_G a gyalog oszlopa, s_H a huszár sora, o_H a huszár oszlopa, s_F a futó sora és o_F a futó oszlopa.

A sorozatok számát a 4. szabály felhasználásával határozhatjuk meg:

- s_G nyolc sor valamelyike,
- o_G nyolc oszlop valamelyike,
- s_H hét sor valamelyike (bármelyik sor s_G-n kívül),
- o_H hét oszlop valamelyike (bármelyik oszlop o_G-n kívül),
- s_F hat sor valamelyike (bármelyik sor s_G-n és s_H kívül),
- o_F hat oszlop valamelyike (bármelyik oszlop o_G-n és o_H-n kívül),

így a jó elrendezések száma $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 = 112896$.

Permutációk

Legyen S tetszőleges nem üres halmaz. Az S halmaz egy permutációja egy olyan sorozat, amely S elemeiből áll, és minden elem pontosan egyszer fordul elő benne. Például az $\{a, b, c\}$ halmaz permutációi

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Hány permutációja van egy n elemű halmaznak? Az első elemre n lehetőség van. Ezek mindegyikéhez a második elem a maradék $n-1$ elem bármelyike lehet. Az első két elem bármely kombinációjához a harmadik elem a maradék $n-2$ elem bármelyike lehet, és így tovább. Így a permutációk száma $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$. Ezt a mennyiséget röviden $n!$ jelöli (n "faktoriális"). Például az $\{a,b,c\}$ halmaz permutációinak száma $3!=6$, ahogy ezt már láttuk.

A következő zárt formula nagyon jó közelítést ad $n!$ értékére.

Stirling-formula. Tetszőleges n pozitív egész számra

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\epsilon(n)},$$

ahol

$$\frac{1}{12n+1} \leqslant \epsilon(n) \leqslant \frac{1}{12n}.$$

Mivel $\epsilon(n) > 0$, ezért

$$n! > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

tetszőleges n pozitív egész számra, illetve

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$$

miatt

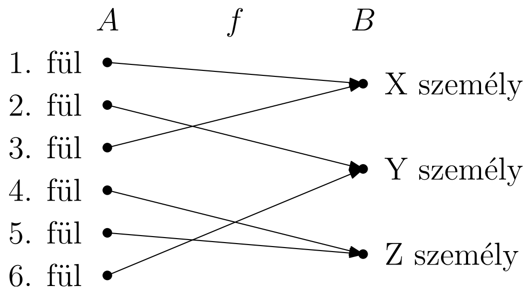
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

További összeszámlálási feladatok

Egy szobában levő emberek számát meghatározhatjuk úgy is, hogy megszámláljuk a füleket, és a kapott értéket elosztjuk kettővel (az egy és három fülűektől most eltekintünk). Emberek megszámlálásának ez egy elég szokatlan módja, azonban az elv gyakran használható összeszámlálási feladatok megoldásánál.

5. szabály.
Ha egy $f\colon A \to B$ függvény B minden elemét A pontosan k eleméhez rendeli hozzá, akkor $|A| = k\cdot|B|$.

Az előző példánál maradva



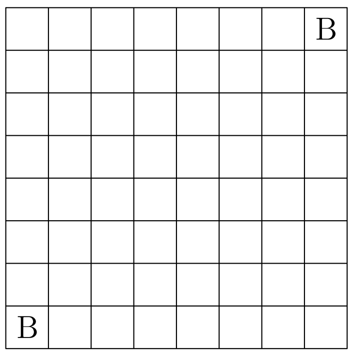
Itt az f függvény minden fülhöz hozzárendeli a tulajdonosát; ez egy 2-höz-1 típusú függvény, így $|A| = 2 \cdot |B|$, vagyis $|B| = |A|/2$.

Bástyák a sakktáblán

Példa. Hányféleképpen helyezhetünk el két egyforma bástyát a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy ne üssék egymást?

Megoldás. Legyen A azon (s_1, o_1, s_2, o_2) sorozatok halmaza, ahol s_1 és s_2 különböző sorok, o_1 és o_2 pedig különböző oszlopok, B pedig a jó elrendezések halmaza. Rendelje hozzá az f függvény az (s_1, o_1, s_2, o_2) sorozathoz azt az elrendezést, amelyben s_1 és o_1 az egyik bástya sora és oszlopa, s_2 és o_2 pedig a másik bástya sora és oszlopa.

Azonban most van egy kis probléma. Tekintsük például az $(1, 1, 8, 8)$ és $(8, 8, 1, 1)$ sorozatokat. Ezekhez ugyanaz a bástyaelrendezés tartozik, hisz a bástyák megkülönböztethetetlenek!

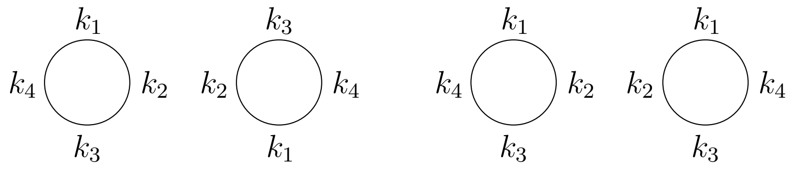


Általában is, az f függvény minden bástyaelrendezést pontosan két sorozathoz rendeli hozzá, vagyis 2-höz-1 típusú. Alkalmazzuk az 5. szabályt: $|A| = 2 \cdot |B|$. Így

$$|B| = \frac{|A|}{2} = \frac{8^2 \cdot 7^2}{2} = 1568.$$

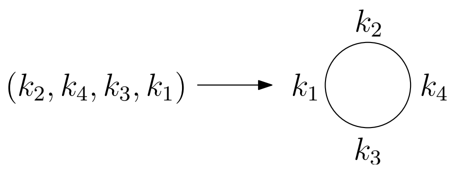
Artúr király és a kerekasztal lovagjai

Példa. Hányféleképpen ültetheti le Artúr király n lovagját a híres kerekasztal körül? Két ültetést azonosnak tekintünk ha az egyikből forgatással megkapható a másik.

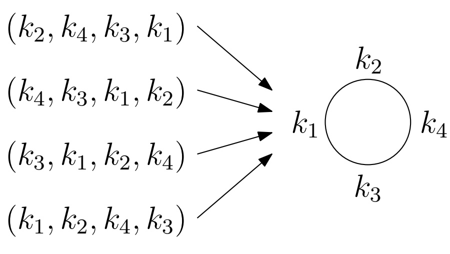


azonos ültetések　　　　különböző ültetések

Megoldás. Legyen A a lovagok permutációinak halmaza, B pedig a különböző ültetések halmaza. Rendelje hozzá az f függvény egy A-beli permutációhoz a következő ültetést: az első lovag akárhova ülhet, tőle balra üljön a második, attól balra a harmadik, és így tovább.



Az f függvény minden ültetést pontosan n permutációhoz rendeli hozzá, amelyek egymás ciklikus eltoltjai. Így az f függvény n-hez-1 típusú.



Alkalmazzuk az 5. szabályt: $|A| = n \cdot |B|$. Így

$$|B| = \frac{|A|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Anagrammák

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $SAJT$ szó betűit?

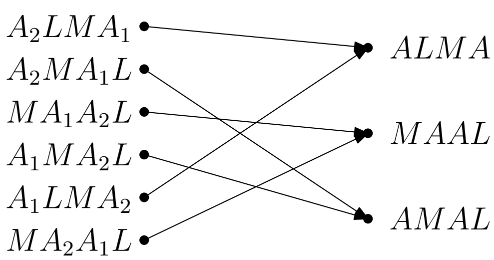
Megoldás. 4! elrendezés van; ezek megfelelnek az $\{S, A, J, T\}$ halmaz permutációinak.

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el az A_1LMA_2 szó betűit? Itt az A betűkhöz indexeket rendeltünk, hogy megkülönböztethetővé tegyük őket.

Megoldás. 4! elrendezés van; ezek megfelelnek az $\{A_1, L, M, A_2\}$ halmaz permutációinak.

Példa. Tekintsük azt a függvényt, amely az A_1LMA_2 szó betűiből álló elrendezésekhez az $ALMA$ szó betűiből álló elrendezéseket rendeli oly módon, hogy az indexeket elhagyjuk. Milyen típusú hozzárendelés ez?

Megoldás. 2-höz-1 típusú hozzárendelés:



Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el az $ALMA$ szó betűit?

Megoldás. Az 5. szabály szerint az elrendezések száma

$$\frac{4!}{2}.$$

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $BA_1RA_2CKFA_3$ szó betűit? Itt is indexeket rendeltünk az A betűkhöz, hogy megkülönböztethetővé tegyük őket.

Megoldás. 8! elrendezés van.

Példa. Tekintsük azt a függvényt, amely a $BA_1RA_2CKFA_3$ szó betűiből álló elrendezésekhez a $BARACKFA$ szó betűiből álló elrendezéseket rendeli oly módon, hogy az indexeket elhagyjuk. Soroljuk fel a $BA_1RA_2CKFA_3$ szó betűiből álló összes olyan elrendezést, amelyhez a függvény a $CAFKARAB$ elrendezést rendeli!

Megoldás.

$$CA_1FKA_2RA_3B, CA_1FKA_3RA_2B,$$
$$CA_2FKA_1RA_3B, CA_2FKA_3RA_1B,$$
$$CA_3FKA_1RA_2B, CA_3FKA_2RA_1B.$$

Példa. Milyen típusú hozzárendelés ez?

Megoldás. 3!-hoz-1 típusú.

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $BARACKFA$ szó betűit?

Megoldás. Az 5. szabály szerint az elrendezések száma

$$\frac{8!}{3!}.$$

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $M_1A_1T_1EM_2A_2T_2IKA_3$ szó betűit?

Megoldás. Az elrendezések száma 10!.

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $MA_1T_1EMA_2T_2IKA_3$ szó betűit?

Megoldás. Az elrendezések száma

$$\frac{10!}{2!}.$$

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a MAT_1EMAT_2IKA szó betűit?

Megoldás. Az elrendezések száma

$$\frac{10!}{2! \cdot 3!}.$$

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $MATEMATIKA$ szó betűit?

Megoldás. Az elrendezések száma

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Példa. Hányféleképpen rendezhetjük el a $KOMBINATORIKA$ szó betűit?

Megoldás. Az elrendezések száma

$$\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

6. szabály.
Legyenek $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ páronként különböző szimbólumok és $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egész számok. Ekkor azon $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ tagú sorozatok száma, amelyek az ℓ_1 szimbólumból n_1 darabot, az ℓ_2 szimbólumból n_2 darabot, $\ldots$, az ℓ_k szimbólumból n_k darabot tartalmaznak

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Koordináta-rendszer

Példa. Hányféleképpen juthatunk el a koordináta-rendszer $(0,0,0)$ pontjából a $(10,20,30)$ pontba, ha egy lépésben egy koordinátát növelhetünk eggyel?

Megoldás. Jelölje A azon sorozatok halmazát, amelyek 10 darab "X", 20 darab "Y" és 30 darab "Z" szimbólumból állnak, valamint jelölje B a feladatban szereplő utak halmazát. Rendelje hozzá az f függvény egy A-beli sorozathoz a következő utat: vegyük sorra a sorozat tagjait balról jobbra; ha egy "X" szimbólummal találkozunk, akkor ennek feleljen meg az a lépés, amely az első koordinátát növeli eggyel, ha egy "Y" szimbólummal találkozunk, akkor ennek feleljen meg az a lépés, amely a második koordinátát növeli eggyel, és ha egy "Z" szimbólummal találkozunk, akkor ennek feleljen meg az a lépés, amely a harmadik koordinátát növeli eggyel.

Az f függvény bijekció, így az 1. szabály szerint $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\frac{60!}{10! \cdot 20! \cdot 30!},$$

így az utak száma is ugyanennyi.

Házimunka

Példa. Nyolc egyetemista — András, Béla, Csaba, Dénes, Ernő, Ferenc, Géza és Henrik — kivesz egy lakást, és megállapodnak, hogy a házimunkát a következőképpen osztják be maguk között. Minden héten ketten mosogatnak, ketten takarítják a konyhát, egy valaki a fürdőszobát, ketten gondoskodnak a vacsoráról, és egy valaki a reggeliről. Hányféle beosztás lehetséges?

Megoldás. Jelölje A azon sorozatok halmazát, amelyek két darab "M", két darab "K", egy darab "F", két darab "V" és egy darab "R" szimbólumból állnak, valamint jelölje B a beosztások halmazát.

Tekintsük azt az $f\colon A \to B$ függvényt, amely a $(t_1, t_2, \ldots, t_8)$ sorozathoz a következő beosztást rendeli. András mosogat, ha $t_1 =$ "M", konyhát takarít, ha $t_1 =$ "K", fürdőt takarít, ha $t_1 =$ "F", gondoskodik a vacsoráról, ha $t_1 =$ "V", illetve gondoskodik a reggeliről, ha $t_1 =$ "R". Analóg módon, Béla mosogat, ha $t_2 =$ "M", konyhát takarít, ha $t_2 =$ "K", fürdőt takarít, ha $t_2 =$ "F", gondoskodik a vacsoráról, ha $t_2 =$ "V", illetve gondoskodik a reggeliről, ha $t_2 =$ "R". És így tovább.

Az f függvény bijekció, ezért az 1. szabály szerint $|A| = |B|$. A sorozatok száma

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{8!}{(2!)^3},$$

így a beosztásoké is ennyi.

Csoportbeosztás

Példa. Hányféleképpen oszthatunk be 90 embert 5 fős csoportokba? Két beosztást azonosnak tekintünk, ha bennük mindenki ugyanazokkal van egy csoportban.

Megoldás. A beosztásokat leírhatjuk olyan sorozatokkal, amelyek öt darab 1-est, öt darab 2-est, ..., öt darab 18-ast tartalmaznak. Egy ilyen $(t_1, t_2, \ldots, t_{90})$ sorozatban t_i azt jelenti, hogy az E_i embert melyik csoportba osztottuk.

Most tekintsük azt a függvényt, amely egy ilyen sorozathoz azt a halmazcsaládot rendeli, melynek halmazai az egy csoportba rendelt emberekből állnak. Ez egy 18!-hoz-1 típusú leképezés, hisz a csoportszámok permutálása nem változtat a halmazokon. A sorozatok száma

$$\frac{90!}{(5!)^{18}},$$

így az 5. szabály szerint a beosztásoké

$$\frac{90!}{(5!)^{18} \cdot 18!}.$$

Binomiális együtthatók

Példa. Hány olyan n bites sorozat van, amelyben pontosan k egyes szerepel?

Megoldás. Egy ilyen sorozatban a k darab egyes mellett $n-k$ darab nulla szerepel. Így a sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Példa. Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Megoldás. Tekintsünk egy n elemű $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazt. Természetes módon megadható egy bijekció az X halmaz k elemű részhalmazai és azon n bites sorozatok között, amelyekben pontosan k darab egyes van: egy k elemű Y részhalmazhoz rendeljük hozzá azt az n bites $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sorozatot k egyessel, amelyben $b_i = 1$ ha $x_i \in Y$ és $b_i = 0$ ha $x_i \notin Y$. Például $n = 8$ és $k = 3$ esetén

$$\{x_1, x_4, x_5\} \longrightarrow (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

A sorozatok száma az előző példa szerint

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

így a k elemű részhalmazok száma is ugyanennyi.

7. szabály.
Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A jobb oldalon álló szimbólumot binomiális együtthatónak nevezzük ("n alatt a k").

A 7. szabályhoz más úton is eljuthatunk. Egy n elemű halmazból képezhető azon sorozatok száma, amelyek k különböző tagból állnak, a 4. szabály szerint

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Most tekintsük azt a függvényt, amely minden ilyen sorozathoz hozzárendeli a benne előforduló elemek halmazát. Például

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Ez egy $k!$-hoz-1 típusú függvény, hisz minden k elemű részhalmaz annak $k!$ darab permutációjához rendelődik hozzá. Így az 5. szabály szerint a k elemű részhalmazok száma

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomiális tétel

Az eddig kifejlesztett technikáinkat megpróbálhatjuk alkalmazni például az algebrában. A két tagból álló $a+b$ kifejezést binomnak nevezik. Vizsgáljuk meg az $(a+b)^n$ pozitív egész kitevős hatványokat!

Tegyük fel, hogy teljesen felbontottuk a zárójeleket; például $n=4$ esetén

$$\begin{aligned}(a+b)^4 = {} & aaaa + baaa + abaa + aaba + aaab + \\ & + bbaa + baba + baab + abba + abab + aabb + \\ & + bbba + bbab + babb + abbb + bbbb.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon az összes olyan n karakterből álló sztring előfordul, amelyeket az "a" és "b" szimbólumokból készíthetünk. Azon tagok száma, amelyekben k darab "b" és $n-k$ darab "a" szerepel a 6. szabály szerint

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Vonjuk össze az ilyen értelemben ekvivalens tagokat; ezután $a^{n-k}b^k$ együtthatója $\binom{n}{k}$ lesz.

Például $n=4$ esetén

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4.$$

Binomiális tétel.
Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

E tételbeli előfordulása miatt nevezzük az $\binom{n}{k}$ mennyiségeket binomiális együtthatóknak.

Póker

A pókert 52 lapos kártyával játsszák. Van négy szín: $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$. Minden színből 13 érték van: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$. Kezdetben mindenkinek öt lapot osztanak (ezután kezdődik a játék, ennek szabályaival azonban itt nem foglalkozunk). Egy ilyen ötöst osztásnak fogunk nevezni. A különböző osztások száma nyilván megegyezik egy 52 elemű halmaz 5 elemű részhalmazainak a számával: $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Példa. Ha egy osztásban négy egyforma érték szerepel, azt pókernek nevezzük. Például

$$\{\spadesuit 8, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit 8\}$$

póker. Hány póker osztás van?

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy póker osztást egyértelműen leír a következő hármas.

1. A négy egyforma lap értéke.
2. Az ötödik lap értéke.
3. Az ötödik lap színe.

Így a póker osztások és azon három tagú sorozatok között, amelyek első két tagja két különböző érték, a harmadik pedig egy szín, bijekció van. Például

$$(8, Q, \heartsuit) \longleftrightarrow \{\heartsuit 8, \diamondsuit 8, \spadesuit 8, \clubsuit 8, \heartsuit Q\}.$$

Számoljuk meg a sorozatokat! Van 13 lehetőség az első tag megválasztására, 12 lehetőség a másodikéra és 4 lehetőség a színre. Így a 4. szabály szerint a sorozatok száma $13 \cdot 12 \cdot 4 = 624$, és persze a póker osztásoké is ugyanennyi.

Példa. Ha egy osztásban van három egyforma lap egy értékből és két egyforma lap egy másik értékből, azt fullnak nevezzük. Például

$$\{\spadesuit 8, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit Q\}$$

full. Hány full osztás van?

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy full osztást egyértelműen leír a következő négyes.

1. A három egyforma lap értéke; ennek megválasztására 13 lehetőség van.
2. A három egyforma lap színei; ezek megválasztására $\binom{4}{3}$ lehetőség van.
3. A két egyforma lap értéke; ennek megválasztására 12 lehetőség van.
4. A két egyforma lap színei; ezek megválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van.

Így a full osztások és azon négy tagú sorozatok között, amelyek első és harmadik tagja két különböző érték, második és negyedik tagja pedig színek egy három illetve két elemű halmaza, bijekció van. Például

$$(8, \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}, Q, \{\heartsuit, \clubsuit\}) \longleftrightarrow \{\spadesuit 8, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit Q\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2},$$

és persze a full osztásoké is ugyanennyi.

Példa. Ha egy osztásban van két egyforma lap egy értékből, két egyforma lap egy másik értékből és egy lap egy harmadik értékből, azt két párnak nevezzük. Például

$$\{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit Q\}$$

két pár. Hány két pár osztás van?

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy két pár osztást egyértelműen leír a következő ötös.

1. A párok értékei; ezek megválasztására $\binom{13}{2}$ lehetőség van.
2. A kisebb értékű pár színei; ezek megválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van.

3. A nagyobb értékű pár színei; ezek megválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van.

4. Az ötödik lap értéke; ennek megválasztására 11 lehetőség van.

5. Az ötödik lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

Így a két pár osztások és azon öt tagú sorozatok között, amelyek első tagja két különböző érték halmaza, negyedik tagja egy ezektől különböző harmadik érték, második és harmadik tagja színek egy-egy két elemű halmaza, ötödik tagja pedig egy szín, bijekció van. Például

$$(\{8, Q\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}, 5, \spadesuit) \longleftrightarrow \{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit Q\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4,$$

és persze a két pár osztásoké is ugyanennyi.

Példa. Ha egy osztásban van három egyforma lap egy értékből, egy lap egy másik értékből, és egy lap egy harmadik értékből, azt drillnek nevezzük. Például

$$\{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit 8\}$$

drill. Hány drill osztás van?

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy drill osztást egyértelműen leír a következő ötös.

1. A három egyforma lap értéke; ennek megválasztására 13 lehetőség van.

2. A három egyforma lap színei; ezek megválasztására $\binom{4}{3}$ lehetőség van.

3. A másik két lap értékei; ezek megválasztására $\binom{12}{2}$ lehetőség van.

4. A kisebb értékű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

5. A nagyobb értékű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

Így a drill osztások és azon öt tagú sorozatok között, amelyek első tagja egy érték, harmadik tagja két ettől különböző érték halmaza, második tagja színek egy három elemű halmaza, negyedik és ötödik tagja pedig egy-egy szín, bijekció van. Például

$$(8, \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \{5, Q\}, \spadesuit, \heartsuit) \longleftrightarrow \{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit 8\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2,$$

és persze a drill osztásoké is ugyanennyi.

Példa. Ha egy osztásban van két egyforma lap egy értékből, egy lap egy másik értékből, egy lap egy harmadik értékből, és egy lap egy negyedik értékből, azt egy párnak nevezzük. Például

$$\{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit 7\}$$

egy pár. Hány egy pár osztás van?

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy egy pár osztást egyértelműen leír a következő hatos.

1. A két egyforma lap értéke; ezek megválasztására 13 lehetőség van.
2. A két egyforma lap színei; ezek megválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van.
3. A másik három lap értékei; ezek megválasztására $\binom{12}{3}$ lehetőség van.
4. A legkisebb értékű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.
5. A középső értékű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.
6. A legnagyobb értékű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

Így az egy pár osztások és azon hat tagú sorozatok között, amelyek első tagja egy érték, harmadik tagja három ettől különböző érték halmaza, második tagja színek egy két elemű halmaza, negyedik, ötödik és hatodik tagja pedig egy-egy szín, bijekció van. Például

$$(8, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{5, Q, 7\}, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit) \longleftrightarrow \{\spadesuit 5, \heartsuit 8, \heartsuit Q, \diamondsuit 8, \clubsuit 7\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3,$$

és persze a két pár osztásoké is ugyanennyi.

Színes dobókockák

Van hét különböző színű dobókockánk — a szivárvány színeiből. A kockák egyébként közönségesek: hat lapjuk van, 1-től 6-ig megszámozva. Egy dobást azonosíthatunk egy hét elemű számsorozattal, amelynek tagjai a kockák felső lapján látható számok, a szivárvány színeinek sorrendjében. Például a $(3, 1, 6, 1, 4, 5, 2)$ sorozat annak a dobásnak felel meg, amikor a piros kockán 3, a narancssárga kockán 1, a sárga kockán 6, a zöld kockán 1, a világoskék kockán 4, a sötétkék kockán 5 és a lila kockán 2 látható.

Példa. Hány olyan dobás van, amikor négy kockán ugyanaz a szám, és a másik három kockán is ugyanaz, de az előbbitől különböző szám látható? Például $(4, 4, 2, 2, 4, 2, 4)$ egy ilyen dobás.

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy a feladatban szereplő dobást egyértelműen leír a következő hármas.

1. A kockákon látható két érték; ezek megválasztására $\binom{6}{2}$ lehetőség van.
2. Az a szám, ahányszor a dobott értékek közül a kisebb látható; ez 3 vagy 4, így ennek megválasztására 2 lehetőség van.
3. A három egyforma értéket mutató kockák színei; ezek megválasztására $\binom{7}{3}$ lehetőség van.

Így a feladatban szereplő dobások és azon három tagú sorozatok között, amelyek első tagja értékek egy két elemű halmaza, második tagja a 3 és a 4 szám egyike, harmadik tagja pedig színek egy három elemű halmaza, bijekció van. Például

$$(\{2, 4\}, 3, \{\text{sárga}, \text{zöld}, \text{sötétkék}\}) \longleftrightarrow (4, 4, 2, 2, 4, 2, 4).$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$\binom{6}{2} \cdot 2 \cdot \binom{7}{3},$$

és persze a feladatban szereplő dobásoké is ugyanennyi.

Példa. Hány olyan dobás van, amikor pontosan két kockával dobtunk hatost, a többi öt kockán pedig öt különböző (nem hatos) szám látható? Például $(6, 2, 6, 1, 3, 4, 5)$ egy ilyen dobás, míg $(1, 1, 2, 6, 3, 4, 5)$ vagy $(6, 6, 1, 2, 4, 3, 4)$ nem.

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy a feladatban szereplő dobást egyértelműen leír a következő páros.

1. A hatost mutató kockák színei; ezek megválasztására $\binom{7}{2}$ lehetőség van.

2. Azon értékek, amelyek a fennmaradó öt kockán láthatók, a szivárvány színeinek sorrendjében; ezek megválasztására 5! lehetőség van.

Így a feladatban szereplő dobások és azon két tagú sorozatok között, amelyek első tagja színek egy két elemű halmaza, második tagja pedig az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz egy permutációja, bijekció van. Például

$$(\{\text{piros}, \text{sárga}\}, (2, 1, 3, 4, 5)) \longleftrightarrow (6, 2, 6, 1, 3, 4, 5).$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$\binom{7}{2} \cdot 5!$$

és persze a feladatban szereplő dobásoké is ugyanennyi.

Példa. Hány olyan dobás van, amikor két kockán ugyanaz a szám, a többi öt kockán pedig öt különböző, de a dupla számmal nem azonos szám látható? Például $(4, 2, 4, 1, 3, 6, 5)$ egy ilyen dobás.

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy a feladatban szereplő dobást egyértelműen leír a következő hármas.

1. A kockák által mutatott két egyforma érték; ennek megválasztására 6 lehetőség van.

2. A két egyforma értéket mutató kockák színei; ezek megválasztására $\binom{7}{2}$ lehetőség van.

3. Azon értékek, amelyek a fennmaradó öt kockán láthatók, a szivárvány színeinek sorrendjében; ezek megválasztására 5! lehetőség van.

Így a feladatban szereplő dobások és azon három tagú sorozatok között, amelyek első tagja egy érték, második tagja színek egy két elemű halmaza, harmadik tagja pedig az első tagban szereplő értéken kívüli értékek egy permutációja, bijekció van. Például

$$(4, \{\text{piros}, \text{sárga}\}, (2, 1, 3, 6, 5)) \longleftrightarrow (4, 2, 4, 1, 3, 6, 5).$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!$$

és persze a feladatban szereplő dobásoké is ugyanennyi.

Példa. Hány olyan dobás van, amikor két kockán ugyanaz a szám, másik két kockán is ugyanaz, de az előbbitől különböző szám, és a maradék három kockán is ugyanaz, de mindkét előzőtől különböző szám látható? Például $(1, 6, 2, 1, 6, 6, 2)$ egy ilyen dobás, míg $(5, 5, 5, 6, 6, 1, 2)$ nem.

Megoldás. Próbáljuk meg a feladatot visszavezetni egy sorozatszámlálási feladatra. Világos, hogy egy a feladatban szereplő dobást egyértelműen leír a következő négyes.

1. Az a két érték, amelyek a kockákon két-két alkalommal láthatók; ezek megválasztására $\binom{6}{2}$ lehetőség van.
2. Azoknak a kockáknak a színe, amelyeken az előbbi két érték közül a kisebbik látható; ezek megválasztására $\binom{7}{2}$ lehetőség van.
3. Azoknak a kockáknak a színe, amelyeken az előbbi két érték közül a nagyobbik látható; ezek megválasztására $\binom{5}{2}$ lehetőség van.
4. A megmaradt három kockán látható érték; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

Így a feladatban szereplő dobások és azon négy tagú sorozatok között, amelyek első tagja értékek egy két elemű halmaza, második tagja színek egy két elemű halmaza, harmadik tagja az előző tagban szereplő színektől különböző színek egy két elemű halmaza, negyedik tagja pedig egy ez első tagban szereplő értékektől különböző érték, bijekció van. Például

$$(\{1, 2\}, \{\text{piros}, \text{zöld}\}, \{\text{sárga}, \text{lila}\}, 6) \longleftrightarrow (1, 6, 2, 1, 6, 6, 2).$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4,$$

és persze a feladatban szereplő dobásoké is ugyanennyi.

Szita-formula

Egy tanárképző főiskola matematika tanszéke 60 matematika, 200 informatika és 40 fizika szakos hallgatót oktat (más szakosoknak más tanszékek oktatják a matematikát). Hány hallgatót oktat a matematika tanszék? Jelölje M, I és F rendre a matematika, az informatika és a fizika szakos hallgatók halmazát. Feladatunk tehát $|M \cup I \cup F|$ meghatározása. Ha a halmazok diszjunktak, akkor a 2. szabály szerint

$$|M \cup I \cup F| = |M| + |I| + |F|.$$

Azonban az M, I és F halmazok nem feltétlenül diszjunktak. Valóban, lehetnek például matematika-fizika szakos hallgatók. Őket a jobb oldalon kétszer vesszük számításba, egyszer M-nél és egyszer F-nél. Sőt lehetnek matematika-informatika-fizika szakosak is. Őket a jobb oldalon háromszor vesszük számításba.

Két halmaz uniójának az elemszámát a következő formulával számolhatjuk ki:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

A formula helyessége nyilvánvaló. Az A_1 halmaz elemeit a jobb oldal első tagjánál vesszük számba, az A_2 halmaz elemeit pedig a második tagnál. Azokat az elemeket, amelyek A_1-hez és A_2-höz is hozzátartoznak, az első két tagnál kétszer vesszük számításba, de ezt a hibát a harmadik tag korrigálja.

A három halmaz uniójának elemszámára vonatkozó formula kicsit bonyolultabb:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -& \\ - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|&.\end{aligned}$$

A formula helyességét most sem nehéz belátni. Elég megmutatni, hogy a jobb oldalon $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ minden elemét pontosan egyszer vesszük számításba.

Tekintsünk például egy olyan x elemet, amelyik mindhárom halmazhoz hozzátartozik. Ekkor x-et háromszor vesszük számításba az első három tagnál. A következő három tagnál ismét háromszor vesszük számításba x-et, de ott negatív előjellel. Végül az utolsó tagnál ismét számításba vesszük x-et, pozitív előjellel. Összességében tehát egyszer vesszük számításba x-et a jobb oldalon. A többi eset hasonlóan intézhető el.

A formulával összhangban a matematika tanszék által oktatott hallgatók számának meghatározásához további információk szükségések. Azon hallgatók száma, akik matematika és informatika szakosak is legyen 34, akik matematika és fizika szakosak is legyen 16, és akik informatika és fizika szakosak is legyen 8. A három szakos hallgatók száma pedig legyen 4. Így

$$\begin{aligned}|M \cup I \cup F| &= |M| + |I| + |F| - |M \cap I| - |M \cap F| - |I \cap F| + |M \cap I \cap F| \\ &= 60 + 200 + 40 - 34 - 16 - 8 + 4 = 246.\end{aligned}$$

Példa. Hány olyan permutációja van a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaznak, ahol vagy a 4 és a 2, vagy a 0 és a 4, vagy a 6 és a 0 egymás után jelenik meg (ebben a sorrendben)? Itt

$$(7, 2, 9, 5, 4, 1, 3, 8, 0, 6)$$

egy rossz permutáció (a 0 és a 6 rossz sorrendben van), míg

$$(7, 2, 5, \underline{6}, \underline{0}, \underline{4}, 3, 8, 1, 9)$$

egy jó permutáció.

Megoldás. Legyen P_{42} azon permutációk halmaza, ahol a 4 és a 2 egymás után jelenik meg. Legyen P_{04} azon permutációk halmaza, ahol a 0 és a 4 egymás után jelenik meg. Legyen P_{60} azon permutációk halmaza, ahol a 6 és a 0 egymás után jelenik meg. Feladatunk tehát $|P_{42} \cup P_{04} \cup P_{60}|$ meghatározása.

Először határozzuk meg az egyes halmazok elemszámát, mondjuk elsőnek a P_{42} halmazét. A következő trükköt alkalmazzuk: egyesítsük a "4" és "2" szimbólumokat egy új "42" szimbólummá. Vegyük észre, hogy a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaz azon permutációi, amelyben a 4 és a 2 egymás után jelenik meg valamint a $\{42, 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz permutációi között természetes módon bijektív megfeleltetés létesíthető, például

$$(7, 0, 9, 5, 6, \underline{4}, \underline{2}, 3, 8, 1) \longleftrightarrow (7, 0, 9, 5, 6, 42, 3, 8, 1).$$

Az utóbbi halmaz permutációinak száma 9!, így az 1. szabály szerint $|P_{42}| = 9!$. Hasonlóan $|P_{04}| = 9!$ és $|P_{60}| = 9!$.

Ezután a halmazpár-metszetek elemszámát határozzuk meg, elsőnek a $P_{42} \cap P_{60}$ halmazpár-metszetét. Ugyanazt a trükköt alkalmazzuk mint az előbb: $P_{42} \cap P_{60}$ elemei és a $\{42, 60, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ halmaz permutációi között természetes módon bijektív megfeleltetés létesíthető, így $|P_{42} \cap P_{60}| = 8!$. Hasonlóan $|P_{60} \cap P_{04}| = 8!$ és $|P_{04} \cap P_{42}| = 8!$. Az első esetben $P_{60} \cap P_{04}$ elemei és a $\{604, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ halmaz permutációi között létesíthető természetes módon bijektív megfeleltetés, míg a második esetben $P_{04} \cap P_{42}$ elemei és a $\{042, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz permutációi között.

Végül $|P_{42} \cap P_{04} \cap P_{60}| = 7!$; itt $P_{60} \cap P_{04} \cap P_{42}$ elemei és a $\{6042, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ halmaz permutációi között létesíthető természetes módon bijektív megfeleltetés.

Ennélfogva

$$\begin{aligned}|P_{42} \cup P_{04} \cup P_{60}| = |P_{42}| + |P_{04}| + |P_{60}| - \\ &- |P_{42} \cap P_{04}| - |P_{42} \cap P_{60}| - |P_{04} \cap P_{60}| + \\ &+ |P_{42} \cap P_{04} \cap P_{60}| \\ &= 3 \cdot 9! - 3 \cdot 8! + 7! = 972720.\end{aligned}$$

Példa. Hány olyan 10 karakterből álló sztring készíthető az angol ábécé 26 (kis)betűjéből, amelyben az "a", a "b" és a "c" betűk mindegyike legalább egyszer előfordul?

Megoldás. A 10 karakterből álló sztringek száma összesen 26^{10}, ebből kell kivonni a feltételnek nem megfelelő sztringek számát.

Legyen A azon sztringek halmaza, amelyekben nincs "a" betű. Legyen B azon sztringek halmaza, amelyekben nincs "b" betű. Legyen C azon sztringek halmaza, amelyekben nincs "c" betű. Most a feltételnek nem megfelelő sztringek halmaza $A \cup B \cup C$. A szita-formulát alkalmazzuk:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Itt

$$\begin{gathered}|A| = |B| = |C| = 25^{10}, \\ |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 24^{10}, \\ |A \cap B \cap C| = 23^{10}.\end{gathered}$$

Ennélfogva

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 25^{10} - 3 \cdot 24^{10} + 23^{10},$$

így a feltételnek megfelelő sztringek száma

$$26^{10} - 3 \cdot 25^{10} + 3 \cdot 24^{10} - 23^{10}.$$

Példa. Hányféleképpen juthatunk el a koordináta-rendszer $(0, 0)$ pontjából az $(50, 50)$ pontba, ha minden lépésben az egyik koordinátát növelhetjük eggyel, továbbá a $(10, 10)$ valamint a $(20, 20)$ ponton nem haladhatunk át?

Megoldás. Az összes lehetséges út száma $\binom{100}{50}$, ebből ki kell vonni azon utak számát, amelyek átmennek a $(10, 10)$ valamint a $(20, 20)$ pontok legalább egyikén. Ez utóbbi utak számát a szita-formula segítségével határozhatjuk meg.

A $(10,10)$ ponton átmenő utak száma $\binom{20}{10}\binom{80}{40}$, hisz a $(0,0)$ pontból a $(10,10)$ pontba menő utak száma $\binom{20}{10}$, a $(10,10)$ pontból a $(50,50)$ pontba menő utak száma pedig $\binom{80}{40}$.

A $(20,20)$ ponton átmenő utak száma $\binom{40}{20}\binom{60}{30}$, hisz a $(0,0)$ pontból a $(20,20)$ pontba menő utak száma $\binom{40}{20}$, a $(20,20)$ pontból a $(50,50)$ pontba menő utak száma pedig $\binom{60}{30}$.

A $(10,10)$ és a $(20,20)$ ponton is átmenő utak száma $\binom{20}{10}\binom{20}{10}\binom{60}{30}$, hisz a $(0,0)$ pontból a $(10,10)$ pontba menő utak száma $\binom{20}{10}$, a $(10,10)$ pontból a $(20,20)$ pontba menő utak száma is $\binom{20}{10}$, a $(20,20)$ pontból a $(50,50)$ pontba menő utak száma pedig $\binom{60}{30}$.

Így a $(10,10)$ valamint a $(20,20)$ pontok legalább egyikén átmenő utak száma a szita-formula szerint

$$\binom{20}{10}\binom{80}{40}+\binom{40}{20}\binom{60}{30}-\binom{20}{10}\binom{20}{10}\binom{60}{30},$$

a mindkét pontot elkerülőké pedig

$$\binom{100}{50}-\binom{20}{10}\binom{80}{40}-\binom{40}{20}\binom{60}{30}+\binom{20}{10}\binom{20}{10}\binom{60}{30}.$$

Az n halmaz uniójának elemszámára vonatkozó formula a következő:

8. szabály (szita-formula).

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i \cap A_j| +$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|.$$

Tehát az unió elemszáma az egyes halmazok elemszámának összege mínusz az összes lehetséges halmazpár-metszet elemszámának összege plusz az összes lehetséges halmazhármas-metszet elemszámának összege mínusz az összes lehetséges halmaznégyes-metszet elemszámának összege plusz az összes lehetséges halmazötös-metszet elemszámának összege, és így tovább.

Elcserélt felöltők

Példa. A színházi ruhatár friss alkalmazottja elfelejtette rátűzni a beadott ruhákra a ruhatárjegyek másodpéldányát. Az előadás végén így emlékezetből próbálja meg visszaadni a ruhákat. Mekkora az esélye annak, hogy senki nem a saját ruháját kapja vissza?

Megoldás. Feltéve, hogy a ruhatárosnak fogalma sincs, melyik ruha kié volt, a válasz annak a törtnek az értéke, amelynek számlálója azon ruhavisszaadások száma, amelyeknél senki nem a saját ruháját kapja vissza, nevezője pedig az összes lehetséges ruhavisszaadások száma.

Jelölje a ruhatárba beadott ruhákat $R_1, R_2, \dots, R_n$, tulajdonosaikat pedig $E_1, E_2, \dots, E_n$, megfelelően. Most egy ruhavisszaadást egyértelműen leírhatunk az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ permutációjával: az R_i ruhát E_{p_i} kapja vissza minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Feladatunk így meghatározni annak a törtnek az értékét, amelynek számlálója azon $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ permutációk száma, ahol tetszőleges $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $p_i \neq i$, nevezője pedig az összes $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ permutációk száma.

Az összes $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ permutációk száma $n!$. A számlálóban levő permutációk helyett tekintsük inkább azokat, amelyek nem rendelkeznek az adott tulajdonsággal, ezek számát könnyebb meghatározni. Jelölje S_i azon $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ permutációk számát, ahol $p_i = i$. Keressük tehát az $|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n|$ mennyiséget. A szita formulát alkalmazzuk:

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |S_i \cap S_j| + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \dots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|.$$

A jobb oldalon $|S_i|$ azon permutációk száma, amelyeknél $p_i = i$. Ezen permutációk és az $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ halmaz permutációi között természetes módon bijektív megfeleltetés létesíthető, így $|S_i| = (n-1)!$. Hasonlóan, $|S_i \cap S_j|$ azon permutációk száma, amelyeknél $p_i = i$ és $p_j = j$. Ezen permutációk és az $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ halmaz permutációi között természetes módon bijektív megfeleltetés létesíthető, így $|S_i \cap S_j| = (n-2)!$. Általában is, $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m}|$ azon permutációk száma, amelyeknél $p_{i_1} = i_1$, $p_{i_2} = i_2$, …, $p_{i_m} = i_m$. Ezen permutációk és az $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ halmaz permutációi között természetes módon bijektív megfeleltetés létesíthető, így $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m}| = (n-m)!$. Hány $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m}$ alakú tag van a szita-formulában? Nyilván amennyi m elemű részhalmaza van az

$\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, vagyis $\binom{n}{m}$. Mindezeket összevetve

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \\ &\quad + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}0! \\ &= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Így a számlálóbeli permutációk száma

$$\begin{aligned}n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right) &= \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right),\end{aligned}$$

a hányados pedig

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!} \sim \frac{1}{e}.$$

Összeszámlálási feladatok megoldása

Összeszámlálási feladatok megoldásánál a következő általános séma szerint járjunk el.

1. Amit csak lehet vezessünk vissza sorozatszámlálási feladatra.
   - 1. szabály.
   - 5. szabály.
2. Sorozatszámítási feladatok megoldásához használjuk a tanult módszereket.
   - 4. szabály.
   - 6. szabály.
3. Halmazok uniójának elemszámának meghatározásához használjuk a szita-formulát.

Kombinatorikai módszer

Tegyük fel, hogy a szekrény aljából előkerül a kisiskolás szalvétagyűjteményünk n szalvétával. Elhatározzuk, hogy csak k szalvétát tartunk meg emlékbe, a többit rokon gyerekeknek ajándékozzuk. Magától értetődően mindegy, hogy azt a k szalvétát választjuk ki, amelyeket meg akarunk őrizni, vagy azt az $n-k$ darabot (a kiegészítő halmazt), amelyeket elajándékozunk. Ezért azon lehetőségek száma, ahányféleképp kiválaszthatunk k szalvétát n-ből szükségképpen ugyanannyi, mint ahányféleképp $n-k$ szalvétát választhatunk ki n-ből. Így

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ezt persze könnyű belátni algebrai úton is, hiszen mindkét oldal

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Azonban figyeljünk fel rá, hogy az előbbi gondolatmenet során nem vettünk igénybe semmi algebrát, csak a tanult összeszámlálási technikáinkat alkalmaztuk.

Példa. Egy szabadon választható tantárgyra n hallgató szeretne járni, de az órát sajnos olyan terembe írták ki, ahol csak k hely van. A hallgatók sorsolással döntik el, hogy kik járjanak. Hányféle eredmény születhet?

Megoldás. Az egyik jelentkező — nevezzük Andreának — a következőképpen gondolkodik. Két eset van:

(1) Andrea a kiválasztottak között van. Ekkor $k-1$ társát az Andreán kívüli $n-1$ jelentkező közül választják ki, ami $\binom{n-1}{k-1}$ lehetőség.

(2) Andrea nincs a kiválasztottak között. Ekkor mind a k hallgatót az Andreán kívüli $n-1$ jelentkező közül választják ki, ami $\binom{n-1}{k}$ lehetőség.

Az (1) típusú csoportokban benne van Andrea, a (2) típusúakban viszont nincs, így a csoportok e két halmaza diszjunkt. Ezért a 2. szabály szerint a lehetséges csoportok száma

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Egy másik jelentkező — nevezzük Bélának — ettől eltérően gondolkodik. Bélát is beleértve n jelentkező közül kell kiválasztani azt a k-t, akik járhatnak. Így a lehetséges csoportok száma

$$\binom{n}{k}.$$

Andrea és Béla gondolatmenete is hibátlan, így a két eredménynek meg kell egyezni:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Ezt az összefüggést Pascal azonosságnak nevezik.

Ismét figyeljünk fel rá, hogy az összefüggés belátásához nem vettünk igénybe semmi algebrát, csak a tanult összeszámlálási technikáinkat alkalmaztuk.

A kombinatorikai módszer olyan eljárás melynek során összeszámlálási technikák felhasználásával igazolunk algebrai azonosságokat. A bizonyítások legtöbbször az alábbi sémát követik:

1. Definiálunk egy alkalmas S halmazt.
2. Belátjuk valamilyen módon, hogy $|S| = n$.
3. Belátjuk valamilyen más módon, hogy $|S| = m$.
4. Megállapítjuk, hogy $n = m$.

Példa.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{n-k} = \binom{3n}{n}.$$

Megoldás. Tekintsünk egy olyan kártyacsomagot, amelyben n egymástól megkülönböztethető piros valamint $2n$ egymástól megkülönböztethető kék lap van, és legyen S az n lapból álló osztások halmaza ebből a kártyacsomagból.

Először is jegyezzük meg, hogy tetszőleges $3n$ elemű halmaznak

$$|S| = \binom{3n}{n}$$

darab n elemű részhalmaza van. Másrészt minden n lapból álló osztásban a piros lapok száma 0 és n között van. Azon n lapból álló osztások száma, amelyben pontosan k piros lap van

$$\binom{n}{k}\binom{2n}{n-k},$$

hiszen a k piros lap $\binom{n}{k}$-féleképpen, a maradék $n-k$ kék lap pedig $\binom{2n}{n-k}$-féleképpen választható ki. Így a 2. szabály szerint

$$|S| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{n-k}.$$

Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

Példa.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Megoldás. Legyen S azon $\{0,1,*\}^n$-beli sorozatok halmaza, amelyek pontosan egy $*$-ot tartalmaznak.

Egyrészt $|S| = n2^{n-1}$, hiszen az n tag bármelyike lehet a $*$, a többi tagra pedig 2^{n-1} lehetőség van. Másrészt minden S-beli sorozatban a nem nulla szimbólumok száma 1 és n között van (a $*$ szimbólum nem nulla). Azon S-beli sorozatok száma, amelyekben pontosan k nem nulla szimbólum van

$$k\binom{n}{k},$$

hiszen $\binom{n}{k}$ lehetőség van a nem nulla tagok megválasztására, majd minden ilyen választáshoz k lehetőség a $*$ kijelölésére. Így a 2. szabály szerint

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

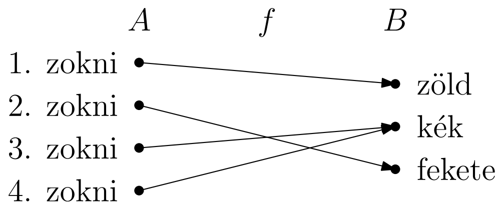
Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

Skatulya elv

Egy fiókban zöld, kék és fekete zoknik vannak. Legalább hány zoknit kell kihúzni a fiókból, hogy biztosan legyen közöttük két azonos színű? Három zokni nyilván nem elég, ezek lehetnek mind különböző színűek. A megoldáshoz a kulcsot a következő észrevétel szolgáltatja: ha $|A| > |B|$, akkor semmilyen $f\colon A \to B$ függvény nem lehet injektív. Más szavakkal:

9. szabály (skatulya elv).
Ha $|A| > |B|$, akkor tetszőleges $f\colon A \to B$ függvény esetén létezik legalább két olyan eleme A-nak, amelyekhez f ugyanazt a B-beli elemet rendeli.

Első pillantásra talán nem teljesen nyilvánvaló, hogyan is alkalmazható a skatulya elv a zoknis feladatra. Azonban legyen A a fiókból kihúzott zoknik halmaza, B a zoknik színének halmaza, és f rendelje hozzá minden kihúzott zoknihoz a színét. Ha most $|A| > |B| = 3$, akkor a skatulya elv szerint van két olyan A-beli elem (azaz két kihúzott zokni), amelyekhez f ugyanazt a B-beli elemet rendeli (azaz azonos színűek). Például:



Így négy zoknit elég kihúzni!

A skatulya elv elnevezés abból a szemléletes tényből származik, hogy ha $n+1$ tárgyat szeretnénk elhelyezni n skatulyában, akkor mindenképpen lesz olyan skatulya, amelybe legalább két tárgy kerül.

A skatulya elvnek számos nagyon trükkös alkalmazása van. Sajnos általános receptet senki nem ismer, mindazonáltal ha skatulya elvvel akarunk bizonyítani egy állítást, három dolgot mindenképpen világosan azonosítanunk kell:

1. Az A halmazt (a tárgyakat).

2. A B halmazt (a skatulyákat).

3. Az f hozzárendelést (melyik tárgy melyik skatulyába kerül).

Példa. Mutassuk meg, hogy egy 90 darab 25 jegyű számból álló halmaznak mindig van két olyan különböző részhalmaza, amelyekben a számok összege ugyanannyi!

Megoldás. Legyen A az összes lehetséges részhalmaz halmaza. Tudjuk, hogy $|A| = 2^{90}$. Egy részhalmazban a számok összege nyilván kisebb, mint $90 \cdot 10^{25}$, hisz minden szám kisebb, mint 10^{25}. Legyen $B = \{0, 1, 2, \ldots, 90 \cdot 10^{25}\}$. Ekkor $|B| = 90 \cdot 10^{25} + 1$. Az f függvény rendelje hozzá minden részhalmazhoz a benne szereplő számok összegét. Most

$$\begin{aligned} |A| &= 2^{90} \geqslant 1.237 \cdot 10^{27}, \\ |B| &= 90 \cdot 10^{25} + 1 \leqslant 0.901 \cdot 10^{27}. \end{aligned}$$

Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan részhalmaz, amelyekben a számok összege ugyanannyi. Melyek ezek? Nem tudjuk, de léteznek!

Egy megoldatlan probléma

Hogyan állíthatunk elő olyan n pozitív egész számból álló halmazt, amelynek bármely két részhalmazában a számok összege különböző?

Egy kézenfekvő ötlet a 2 hatványait használni; például $n = 5$ esetén:

$$\{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

Van olyan példa, amelyben a legnagyobb tag kisebb, mint 16? Igen:

$$\{6, 9, 11, 12, 13\}.$$

Erdős Pál, a XX. század egyik legkiemelkedőbb matematikusa 1931-ben azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ha egy n pozitív egész számból álló halmaz bármely két részhalmazában a számok összege különböző, akkor a halmaz legnagyobb eleme legalább $c2^n$, alkalmas c univerzális (n-től független) pozitív konstanssal. Erdős a sejtés bizonyításáért vagy cáfolatáért 500 dollár jutalmat ajánlott, ám a probléma máig megoldatlan.

Skatulya elv (folytatás)

Példa. Egy előadóteremben 500 hallgató van. Mutassuk meg, hogy van közöttük két olyan, akik ugyanaznap tartják a születésnapjukat!

Megoldás. Legyen A az előadóteremben levő hallgatók halmaza, B a születésnapok halmaza, és f rendelje hozzá minden hallgatóhoz a születésnapját. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan hallgató, akik ugyanaznap tartják a születésnapjukat.

Példa. Az adóhivatal ügyfélvárójában 113 ember van. Mutassuk meg, hogy van közöttük két olyan, akik adószámában a számjegyek összege ugyanannyi!

Megoldás. Legyen A az ügyfélváróban tartózkodó emberek halmaza, B az adószámok számjegyeiből képezhető összegek halmaza, és f rendelje hozzá minden emberhez az adószáma számjegyeinek összegét. Egy adószámban a számjegyek összege 0 és $10 \cdot 9 = 90$ között van, ezért $|B| \leqslant 91$. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan ember, akik adószámában a számjegyek összege ugyanannyi.

Példa. Mutassuk meg, hogy bármely 100 egész szám között van két olyan, amelyek különbsége osztható 37-tel!

Megoldás. Legyen A a feladatban szereplő 100 egész szám halmaza, B a 0 és 36 közötti egész számok halmaza, és f rendelje hozzá minden számhoz a 37-tel való osztáskor kapott maradékát. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám, amelyek 37-tel osztva ugyanazt a maradékot adják, ezek különbsége osztható 37-tel.

Példa. Egy $n \times n$-es négyzetben $n^2 + 1$ pont van. Mutassuk meg, hogy van közöttük két olyan, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$.

Megoldás. Legyen A a feladatban szereplő pontok halmaza. Bontsuk fel az $n \times n$-es négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel n^2 darab 1×1-es négyzetre; álljon a B halmaz ezekből a kis négyzetekből. Az f függvény rendelje minden ponthoz azt a kis négyzetet, amelyhez hozzátartozik (ha több ilyen is van, akkor ezek közül valamelyiket). Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan pont, amelyek ugyanabban a kis négyzetben vannak, ezek távolsága nyilván legfeljebb akkora, mint a négyzet átlója, vagyis $\sqrt{2}$.

Példa. Kiválasztottunk 38 darab 1000-nél kisebb pozitív egész számot. Mutassuk meg, hogy van közöttük két olyan, amelyek különbsége legfeljebb 26.

Megoldás. Legyen A a feladatban szereplő 38 egész szám halmaza, B pedig álljon a következő halmazokból:

$$\begin{gathered}\{1, 2, \ldots, 27\},\\ \{28, 29, \ldots, 54\},\\ \{55, 56, \ldots, 81\},\\ \vdots\\ \{973, 974, \ldots, 999\}.\end{gathered}$$

Az f függvény rendelje minden számhoz azt a halmazrendszerbeli halmazt, amelyhez a szám hozzátartozik. Most $|B| = 37$, ezért $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám, amelyek ugyanabban a halmazrendszerbeli halmazban vannak. Ezek különbsége nyilván legfeljebb 26.

A skatulya elvnek számos általánosítása ismert.

10. szabály (skatulya elv általánosítása).
Ha $|A| > k|B|$, akkor tetszőleges $f\colon A \to B$ függvény esetén létezik legalább $k+1$ olyan eleme A-nak, amelyekhez f ugyanazt a B-beli elemet rendeli.

Példa. Kockás papíron 40 kis négyzetet pirosra színeztünk be. Mutassuk meg, hogy ezek között van 10 olyan, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja!

Megoldás. Legyen A a piros négyzetek halmaza, B pedig az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz. Számozzuk meg a papírlapon szereplő összes kis négyzetet az ábrán látható módon:

1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4

Az f függvény rendelje hozzá minden piros négyzethez a benne szereplő számot. Mivel $|A| > 9|B|$, így a skatulya elv általánosítása szerint van 10 olyan piros négyzet, amelyekben ugyanaz a szám szerepel. Most vegyük észre, hogy a papírlapon azonos számmal jelölt kis négyzeteknek nincs közös pontja, ezért ez a 10 piros négyzet megfelel a kívánalmaknak.

Bűvészmutatvány

A bűvész az asszisztensével kilép a színpadra. Az asszisztens lemegy a nézők közé egy 52 lapos kártyával (mint amilyennel a pókert is játsszák), és megkér

5 embert, hogy húzzanak egy-egy lapot. Mikor ez megtörtént, összegyűjti a kihúzott lapokat, majd egyesével felfed a bűvésznek közülük négyet. A bűvész koncentrál, majd megnevezi az ötödik lapot.

Az asszisztens csupán a négy lap felfedésével képes valahogyan a bűvész tudomására hozni az ötödik lapot. Az asszisztens két módon tud információt átadni a bűvésznek:

1. milyen sorrendben fedi fel a négy lapot,

2. melyik négy lapot fedi fel az öt közül.

A trükk magyarázata a következő. Tegyük fel, hogy a nézők a következő lapokat választották:

$$\heartsuit 10, \diamondsuit 9, \heartsuit 3, \spadesuit Q, \diamondsuit J$$

Először is jegyezzük meg, hogy mindig van két olyan lap, amelyek azonos színűek. Az asszisztens is úgy kezdi, hogy választ egy ilyen párost, például itt a $\heartsuit 10$ és $\heartsuit 3$ lapokat. Az asszisztens ezután (virtuálisan) elhelyezi ezt a két lapot a következő körben:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K & A & 2 & & \\
 & Q & & & & \boxed{3} & \\
J & & & & & & 4 \\
\boxed{10} & & & & & & 5 \\
 & 9 & & & & 6 & \\
 & & 8 & & 7 & &
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy bármely két értéket is tekintjük ebben a körben, valamelyiktől legfeljebb 6 lépéssel eljuthatunk a másikhoz az óramutató járása szerint haladva. A példánkban a 10-től 6 lépéssel juthatunk el a 3-hoz. Az előbbi lapot ($\heartsuit 10$) fedi fel elsőként az asszisztens, és az utóbbit ($\heartsuit 3$) találja ki a bűvész. A kitalálandó lap színe tehát megegyezik az elsőként felfedett lap színével, értéke pedig 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 távolságra van az elsőként felfedett lap értékétől a fenti körben az óramutató járása szerint haladva.

A távolságot a maradék három lap felfedésének sorrendjével adja a bűvész tudtára az asszisztens. Ehhez a bűvész és az asszisztens előre megállapodik az 52 lap következő rendezésében:

$$\begin{gathered}
\heartsuit 2, \heartsuit 3, \ldots, \heartsuit K, \heartsuit A, \\
\diamondsuit 2, \diamondsuit 3, \ldots, \diamondsuit K, \diamondsuit A, \\
\spadesuit 2, \spadesuit 3, \ldots, \spadesuit K, \spadesuit A, \\
\clubsuit 2, \clubsuit 3, \ldots, \clubsuit K, \clubsuit A.
\end{gathered}$$

E rendezés szerint a $\heartsuit 2$ lap a legkisebb, a $\clubsuit A$ lap pedig a legnagyobb. A távolságot ezek után a három lap felfedésének sorrendje a következőképpen kódolja:

$$\begin{aligned}
(\text{legkisebb}, \text{középső}, \text{legnagyobb}) &\longrightarrow 1,\\
(\text{legkisebb}, \text{legnagyobb}, \text{középső}) &\longrightarrow 2,\\
(\text{középső}, \text{legkisebb}, \text{legnagyobb}) &\longrightarrow 3,\\
(\text{legnagyobb}, \text{legkisebb}, \text{középső}) &\longrightarrow 4,\\
(\text{középső}, \text{legnagyobb}, \text{legkisebb}) &\longrightarrow 5,\\
(\text{legnagyobb}, \text{középső}, \text{legkisebb}) &\longrightarrow 6.
\end{aligned}$$

A példánkban az asszisztens a 6 távolságértéket akarja az utolsó három lappal a bűvész tudomására hozni, így először a megbeszélt rendezés szerinti legnagyobb ($\spadesuit Q$), utána a középső ($\diamondsuit J$), végül pedig a legkisebb lapot ($\diamondsuit 9$) fedi fel.

Foglaljuk össze az eddigieket. A nézők tehát a

$$\heartsuit 10, \diamondsuit 9, \heartsuit 3, \spadesuit Q, \diamondsuit J$$

lapokat húzták. Ekkor az asszisztens a

$$\heartsuit 10, \spadesuit Q, \diamondsuit J, \diamondsuit 9$$

lapokat fedi fel egymás után a bűvésznek. A bűvésznek ezek után nincs más dolga, mint (virtuálisan) a körben az óramutató járása szerint haladva a $\heartsuit 10$ laptól indulva hatot lépni, és az így elért $\heartsuit 3$ lapot bemondani.

Generátorfüggvények

A generátorfüggvények a diszkrét matematika legmeglepőbb, ugyanakkor leghatékonyabb eszközei közé tartoznak. Generátorfüggvények segítségével sorozatokra vonatkozó problémákat valós függvényekre vonatkozó problémákra tudunk visszavezetni. Ez azért nagyon hasznos, mert valós függvények vizsgálatára számtalan matematikai módszer áll rendelkezésünkre, amelyeket így alkalmazhatunk sorozatokra vonatkozó problémák megoldásában.

Egy $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ végtelen sorozat generátorfüggvényének az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

hatványsort nevezzük.

Hatványsorok és a velük való műveletek kapcsán természetesen felvetődik a konvergencia kérdése. Látni fogjuk azonban, hogy a generátorfüggvényekkel, mint formális hatványsorokkal végzett műveletek egzakt módon megalapozhatók úgy is, hogy a konvergencia kérdésére ügyet sem vetünk.

Formális hatványsorok

Valós számok egy

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

végtelen sorozatát formális hatványsornak nevezzük. Bár az alkalmazásokban a formális hatványsorok általában a közönséges hatványsorokkal megegyező

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

alakban jelennek meg, most egy darabig az előző jelölésmódot fogjuk használni, a különbséget ezzel is hangsúlyozva.

Két formális hatványsor összegét és szorzatát definiáljuk a következőképpen:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots),$$

illetve

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (c_0, c_1, c_2, \ldots),$$

ahol

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Az $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ és $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ formális hatványsorok akkor egyeznek meg, ha $a_i = b_i$ minden $i = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

Jelölje $\mathcal{P}$ a formális hatványsorok halmazát. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\mathcal{P}$-re teljesülnek a következők:

- Tetszőleges $f, g \in \mathcal{P}$ esetén $f + g = g + f$.
- Tetszőleges $f, g, h \in \mathcal{P}$ esetén $(f + g) + h = f + (g + h)$.
- Egyértelműen létezik olyan $z \in \mathcal{P}$, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{P}$ esetén
$$f + z = f.$$
Világos módon $z = (0, 0, 0, \ldots)$.
- Tetszőleges $f \in \mathcal{P}$ esetén egyértelműen létezik olyan $f' \in \mathcal{P}$, hogy
$$f + f' = z.$$
Világos módon $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ esetén $f' = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots)$. Ez utóbbi formális hatványsort a $-f$ szimbólummal fogjuk jelölni.
- Tetszőleges $f, g \in \mathcal{P}$ esetén $fg = gf$.
- Tetszőleges $f, g, h \in \mathcal{P}$ esetén $(fg)h = f(gh)$.
- Tetszőleges $f, g, h \in \mathcal{P}$ esetén $f(g + h) = fg + fh$.
- Egyértelműen létezik olyan $e \in \mathcal{P}$, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{P}$ esetén
$$ef = f.$$
Világos módon $e = (1, 0, 0, \ldots)$.

Állítás. Tetszőleges $f, g \in \mathcal{P}$ esetén $fg = z$ akkor és csak akkor teljesül ha $f = z$ vagy $g = z$.

Bizonyítás. Ha $f = z$ vagy $g = z$, akkor világos módon $fg = z$. Ezek után tegyük fel, hogy $fg = z$. Belátjuk, hogy $f = z$ vagy $g = z$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, vagyis $f \neq z$ és $g \neq z$. Legyen

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \quad \text{és} \quad g = (b_0, b_1, b_2, \ldots),$$

továbbá legyen i az a legkisebb index, amelyre $a_i \neq 0$, valamint j az a legkisebb index, amelyre $b_j \neq 0$. Ekkor az $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ szorzatban

$$c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + a_2 b_{i+j-2} + \cdots + a_{i+j} b_0 = a_i b_j \neq 0,$$

ellentmondva az $fg = z$ feltételnek.

Következmény. Tetszőleges $f, g, h \in \mathcal{P}$ esetén ha $fh = gh$ és $h \neq z$, akkor $f = g$.

Bizonyítás. Mivel $fh = gh$, ezért $fh - gh = (f - g)h = z$. Itt $h \neq z$, így az előző állítás szerint $f - g = z$, következésképpen $f = g$.

Egy g formális hatványsort egy f formális hatványsor multiplikatív inverzének nevezünk, ha $fg = e$.

Állítás. Egy $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ formális hatványsornak akkor és csak akkor létezik multiplikatív inverze, ha $a_0 \neq 0$. Ha létezik f-nek multiplikatív inverze, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik multiplikatív inverze, vagyis létezik olyan $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ formális hatványsor, amelyre $fg = e$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mivel $a_0 b_0 = 1$, ezért $a_0 \neq 0$ nyilvánvaló módon, és

$$b_0 = \frac{1}{a_0}.$$

Továbbá bármely pozitív egész n esetén

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \left(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 \right).$$

Következésképpen a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ értékek egyértelműen meghatározottak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$. Definiáljuk a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ értékeket a fenti módon. Ekkor a $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ formális hatványsor multiplikatív inverze f-nek.

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$(1, 1, 1, 1, \ldots)(1, -1, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots),$$

vagyis az $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ és $(1, -1, 0, 0, \ldots)$ formális hatványsorok egymás multiplikatív inverzei. Hasonlóan,

$$(1, -1, 1, -1, \ldots)(1, 1, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots),$$

vagyis az $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ és $(1, 1, 0, 0, \ldots)$ formális hatványsorok egymás multiplikatív inverzei.

Analóg módon, tetszőleges a valós számra

$$(1, a, a^2, a^3, \ldots)(1, -a, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots),$$

vagyis az $(1, a, a^2, a^3, \ldots)$ és $(1, -a, 0, 0, \ldots)$ formális hatványsorok egymás multiplikatív inverzei. Hasonlóan,

$$(1, -a, a^2, -a^3, \ldots)(1, a, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots),$$

vagyis az $(1, -a, a^2, -a^3, \ldots)$ és $(1, a, 0, 0, \ldots)$ formális hatványsorok egymás multiplikatív inverzei.

Ha egy f formális hatványsornak létezik multiplikatív inverze, azt jelölje f^{-1}. A multiplikatív inverz helyett használni fogjuk a reciprok elnevezést, f^{-1} helyett pedig az $1/f$ jelölést is.

Tegyük fel, hogy egy f formális hatványsornak létezik multiplikatív inverze. Ekkor tetszőleges pozitív egész n esetén

$$f^n (f^{-1})^n = f \cdot f \cdots f \cdot f^{-1} \cdot f^{-1} \cdots f^{-1} = e,$$

vagyis f^n-nek is létezik multiplikatív inverze, és $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $f^{-n} = (f^n)^{-1}$ jelölést.

Formális hatványsorok deriváltja

Egy $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ formális hatványsor formális deriváltját definiáljuk a következőképpen:

$$D(f) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, na_n, \ldots).$$

A magasabbrendű deriváltakat rekurzívan definiáljuk:

$$D^n(f) = D(D^{n-1}(f)), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Legyen továbbá megállapodás szerint $D^0(f) = f$. Bevezetünk még egy jelölést. Az $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ formális hatványsorra legyen

$$S(f) = a_0.$$

A definícióból egyszerűen adódik a következő.

Állítás. Tetszőleges $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ formális hatványsorra

$$a_n = \frac{S(D^n(f))}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Összefoglaljuk a formális deriválás legfontosabb tulajdonságait.

Állítás. Tetszőleges $f, g \in \mathcal{P}$ esetén

- $D(f + g) = D(f) + D(g)$,
- $D(fg) = fD(g) + gD(f)$,
- $D(f^n) = nf^{n-1}D(f)$, tetszőleges $n \geqslant 2$ egész esetén,
- ha létezik f^{-1}, akkor $D(f^{-1}) = -f^{-2}D(f)$,
- ha létezik f^{-1}, akkor $D(f^{-n}) = -nf^{-n-1}D(f)$, tetszőleges $n \geqslant 2$ egész esetén.

Bizonyítás. Az első két összefüggés a bal és a jobb oldal megfelelő tagjainak összevetésével ellenőrizhető. A harmadik a másodikból adódik teljes indukcióval. A negyedik belátásához deriváljuk az $ff^{-1} = e$ összefüggés mindkét oldalát, majd fejezzük ki $D(f^{-1})$-t. Végül

$$D(f^{-n}) = D((f^{-1})^n) = n(f^{-1})^{n-1}D(f^{-1}) = -nf^{-n-1}D(f).$$

Itt először a harmadik, majd a negyedik szabályt alkalmaztuk.

Néhány sorozat generátorfüggvénye

Lássuk néhány egyszerű sorozat generátorfüggvényét:

$$\begin{aligned}
(0,0,0,0,\ldots) &\longleftrightarrow 0+0x+0x^2+0x^3+\cdots = 0,\\
(1,0,0,0,\ldots) &\longleftrightarrow 1+0x+0x^2+0x^3+\cdots = 1,\\
(0,1,0,0,\ldots) &\longleftrightarrow 0+1x+0x^2+0x^3+\cdots = x,\\
(0,0,1,0,\ldots) &\longleftrightarrow 0+0x+1x^2+0x^3+\cdots = x^2,\\
(3,2,1,0,\ldots) &\longleftrightarrow 3+2x+1x^2+0x^3+\cdots = 3+2x+x^2.
\end{aligned}$$

A következő két példával már találkoztunk:

$$\begin{aligned}
(1,1,1,1,\ldots) &\longleftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x},\\
(1,-1,1,-1,\ldots) &\longleftrightarrow 1-x+x^2-x^3+\cdots = \frac{1}{1+x}.
\end{aligned}$$

Adjuk most össze a két generátorfüggvényt:

$$(2,0,2,0,\ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}.$$

Most némi bűvészkedés következik:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Így

$$(2,0,2,0,\ldots) \longleftrightarrow \frac{2}{1-x^2},$$

illetve

$$(1,0,1,0,\ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x^2}.$$

Példa. Határozzuk meg a $(0,1,2,3,\ldots)$ sorozat generátorfüggvényét!

Megoldás. Tekintsük az azonosan 1 sorozat generátorfüggvényét:

$$(1,1,1,1,\ldots) \longleftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Deriváljuk a generátorfüggvényt:

$$(1,2,3,4,\ldots) \longleftrightarrow 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots = D\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Most némi számolás következik (ld. deriválási szabályok):

$$D\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{1}{(1-x)^2}D(1-x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Így

$$(1,2,3,4,\ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2},$$

illetve x-szel szorozva

$$(0,1,2,3,\ldots) \longleftrightarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$

Példa. Határozzuk meg a pozitív páratlan számok $(1,3,5,7,\ldots)$ sorozatának generátorfüggvényét!

Megoldás. Hasonlóan kezdünk, mint az előző esetben:

$$(1,1,1,1,\ldots) \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Ezután deriváljuk a generátorfüggvényt:

$$(1,2,3,4,\ldots) \longleftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

A kapott generátorfüggvényt szorozzuk 2-vel:

$$(2,4,6,8,\ldots) \longleftrightarrow 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots = \frac{2}{(1-x)^2},$$

majd vojuk ki ebből az

$$(1,1,1,1,\ldots) \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

generátorfüggvényt:

$$(1,3,5,7,\ldots) \longleftrightarrow 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

Egy kis számolás következik:

$$\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{2-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Így
$$(1,3,5,7,\ldots) \longleftrightarrow 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Példa. Határozzuk meg a négyzetszámok $(0,1,4,9,16,\ldots)$ sorozatának generátorfüggvényét!

Megoldás. Tekintsük ismét az azonosan 1 sorozat generátorfüggvényét:
$$(1,1,1,1,\ldots) \longleftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}.$$
Deriváljuk a generátorfüggvényt:
$$(1,2,3,4,\ldots) \longleftrightarrow 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$
Szorozzuk meg a kapott generátorfüggvényt x-szel:
$$(0,1,2,3,\ldots) \longleftrightarrow x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
Ismét deriválunk:
$$(1,4,9,16,\ldots) \longleftrightarrow 1+4x+9x^2+16x^3+\cdots = D\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right).$$
Egy kis számolás következik (ld. deriválási szabályok):
$$D\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = 1\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+x\cdot\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$
Így
$$(1,4,9,16,\ldots) \longleftrightarrow 1+4x+9x^2+16x^3+\cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$
Végül ismét szorzunk x-szel:
$$(0,1,4,9,\ldots) \longleftrightarrow x+4x^2+9x^3+\cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Fibonacci sorozat

Alkalmanként bonyolult sorozatokról kiderül, hogy a generátorfüggvényük meglepően egyszerű alakot is ölthet. Tekintsük például a Fibonacci sorozatot:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_2 &= f_1 + f_0, \\ f_3 &= f_2 + f_1, \\ f_4 &= f_3 + f_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jelölje $f(x)$ a Fibonacci sorozat generátorfüggvényét:

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots .$$

Próbáljuk meg felírni a jobb oldalon álló

$$(0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő három generátorfüggvényt:

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) &\longleftrightarrow x, \\ (0, f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) &\longleftrightarrow x f(x), \\ (0, 0, f_0, f_1, f_2, \ldots) &\longleftrightarrow x^2 f(x). \end{aligned}$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(0, 1 + f_0, f_1 + f_0, f_2 + f_1, \ldots) \longleftrightarrow x + x f(x) + x^2 f(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $f_0 = 0$).

Ebből következik, hogy

$$x + x f(x) + x^2 f(x) = f(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

adódik. Nem túl bonyolult!

Miután megtaláltuk egy sorozat generátorfüggvényét, általában már fel tudjuk írni a sorozat tagjait zárt alakban. Mivel a generátorfüggvényünk racionális törtfüggvény (polinomok hányadosa), kínálja magát a parciális törtekre bontás módszere.

Tekintsük tehát a Fibonacci sorozat

$$\frac{x}{1-x-x^2}$$

generátorfüggvényét. Először a nevezőt faktorizáljuk:

$$1-x-x^2=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x),$$

ahol

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{és} \qquad \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A következő lépés olyan A_1 és A_2 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{A_2}{1-\alpha_2 x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{A_2}{1-\alpha_2 x}&=\frac{(1-\alpha_2 x)A_1+(1-\alpha_1 x)A_2}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)}\\&=\frac{(A_1+A_2)-(\alpha_2 A_1+\alpha_1 A_2)x}{1-x-x^2}.\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{(A_1+A_2)-(\alpha_2 A_1+\alpha_1 A_2)x}{1-x-x^2}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}0&=A_1+A_2,\\-1&=\alpha_2 A_1+\alpha_1 A_2.\end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{1}{\sqrt{5}},\\A_2&=\frac{-1}{\alpha_1-\alpha_2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Így

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x}-\frac{1}{1-\alpha_2 x}\right).$$

Íme a Fibonacci sorozat generátorfüggvénye lényegesen használhatóbb alakban.

Most

$$(1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha_1 x},$$
$$(1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha_2 x}.$$

Innen pedig

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

adódik.

Rekurzív sorozatok

Példa. Határozzuk meg a

$$g_0 = 1,$$
$$g_1 = 2,$$
$$g_n = 2g_{n-1} + 3g_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

rekurzív sorozat generátorfüggvényét, majd írjuk fel a sorozat tagjait zárt alakban!

Megoldás. Jelölje $g(x)$ a sorozat generátorfüggvényét:

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots .$$

Az előzőekhez hasonlóan próbáljuk meg felírni az

$$(1, 2, 2g_1 + 3g_0, 2g_2 + 3g_1, 2g_3 + 3g_2, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő három generátorfüggvényt:

$$(1, 0, 0, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow 1,$$
$$(0, 2g_0, 2g_1, 2g_2, 2g_3, \ldots) \longleftrightarrow 2xg(x),$$
$$(0, 0, 3g_0, 3g_1, 3g_2, \ldots) \longleftrightarrow 3x^2 g(x).$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(1, 2g_0, 2g_1 + 3g_0, 2g_2 + 3g_1, \ldots) \longleftrightarrow 1 + 2xg(x) + 3x^2 g(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $g_0 = 1$).

Ebből következik, hogy

$$1 + 2xg(x) + 3x^2 g(x) = g(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$g(x) = \frac{1}{1 - 2x - 3x^2}$$

adódik.

Alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét a $g(x)$ generátorfüggvényre. Először a nevezőt faktorizáljuk:

$$1 - 2x - 3x^2 = (1 + x)(1 - 3x).$$

A következő lépés olyan A_1 és A_2 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{A_1}{1 + x} + \frac{A_2}{1 - 3x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\frac{A_1}{1 + x} + \frac{A_2}{1 - 3x} = \frac{(1 - 3x)A_1 + (1 + x)A_2}{(1 + x)(1 - 3x)} = \frac{(A_1 + A_2) + (-3A_1 + A_2)x}{1 - 2x - 3x^2}.$$

Világos, hogy

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{(A_1 + A_2) + (-3A_1 + A_2)x}{1 - 2x - 3x^2}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1, \\ -3A_1 + A_2 &= 0. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1/4, \\ A_2 &= 3/4. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{1/4}{1 + x} + \frac{3/4}{1 - 3x}.$$

Most

$$\begin{aligned} (1, -1, 1, -1, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1 + x}, \\ (1, 3, 3^2, 3^3, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - 3x}. \end{aligned}$$

Innen

$$g_n = \frac{1}{4} \cdot (-1)^n + \frac{3}{4} \cdot 3^n = \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{4}$$

adódik.

Példa. Határozzuk meg a

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= 6, \\ h_n &= 2h_{n-1} + 3h_{n-2} + 4, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

rekurzív sorozat generátorfüggvényét, majd írjuk fel a sorozat tagjait zárt alakban!

Megoldás. Jelölje $h(x)$ a sorozat generátorfüggvényét:

$$h(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots .$$

Próbáljuk meg felírni az

$$(1, 6, 2h_1 + 3h_0 + 4, 2h_2 + 3h_1 + 4, 2h_3 + 3h_2 + 4, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő négy generátorfüggvényt:

$$\begin{aligned} (-3, 0, 0, 0, 0, \ldots) &\longleftrightarrow -3, \\ (4, 4, 4, 4, 4, \ldots) &\longleftrightarrow \frac{4}{1-x}, \\ (0, 2h_0, 2h_1, 2h_2, 2h_3, \ldots) &\longleftrightarrow 2xh(x), \\ (0, 0, 3h_0, 3h_1, 3h_2, \ldots) &\longleftrightarrow 3x^2 h(x). \end{aligned}$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(1, 2h_0 + 4, 2h_1 + 3h_0 + 4, \ldots) \longleftrightarrow -3 + \frac{4}{1-x} + 2xh(x) + 3x^2 h(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $h_0 = 1$).

Ebből következik, hogy

$$-3 + \frac{4}{1-x} + 2xh(x) + 3x^2 h(x) = h(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$h(x) = \frac{3x+1}{(1-x)(1-2x-3x^2)} = \frac{3x+1}{(1-x)(1+x)(1-3x)}$$

adódik. A következő lépés olyan A_1, A_2 és A_3 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{3x+1}{(1-x)(1+x)(1-3x)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x} + \frac{A_3}{1-3x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x} + \frac{A_3}{1-3x} = \\ &\quad = \frac{A_1(1+x)(1-3x) + A_2(1-x)(1-3x) + A_3(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)(1-3x)} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} &\frac{A_1(1+x)(1-3x) + A_2(1-x)(1-3x) + A_3(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)(1-3x)} = \\ &\quad = \frac{(-3A_1+3A_2-A_3)x^2 + (-2A_1-4A_2)x + (A_1+A_2+A_3)}{(1-x)(1+x)(1-3x)}. \end{aligned}$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{3x+1}{(1-x)(1+x)(1-3x)} = \\ &\quad = \frac{(-3A_1+3A_2-A_3)x^2 + (-2A_1-4A_2)x + (A_1+A_2+A_3)}{(1-x)(1+x)(1-3x)} \end{aligned}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} -3A_1 + 3A_2 - A_3 &= 0, \\ -2A_1 - 4A_2 &= 3, \\ A_1 + A_2 + A_3 &= 1. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= -1, \\ A_2 &= -1/4, \\ A_3 &= 9/4. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{3x+1}{(1-x)(1+x)(1-3x)} = -\frac{1}{1-x} - \frac{1/4}{1+x} + \frac{9/4}{1-3x}.$$

Most

$$(1,1,1,1,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x},$$
$$(1,-1,1,-1,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1+x},$$
$$(1,3,3^2,3^3,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-3x}.$$

Innen

$$h_n = -1 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^n + \frac{9}{4}\cdot 3^n = \frac{(-1)^{n+1}+3^{n+2}}{4} - 1$$

adódik.

Összeszámlálási feladatok

A generátorfüggvények jól használhatók összeszámlálási feladatok megoldásánál is. Általában a következő észrevételt alkalmazzuk.

Állítás. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ diszjunkt halmazok. Jelölje $f(x)$ annak a sorozatnak a generátorfüggvényét, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az $\mathcal{A}$ halmazból. Jelölje $g(x)$ annak a sorozatnak a generátorfüggvényét, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk a $\mathcal{B}$ halmazból. Ekkor annak a sorozatnak a generátorfüggvénye, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ halmazból $f(x)g(x)$.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra néhány megjegyzést teszünk. Először is, az állítás nem fogalmaz túlságosan pontosan az elemek kiválasztásának tekintetében. Ennek az az oka, hogy az állítás a kiválasztás számos interpretációja mellett érvényes. Például megkövetelhetjük, hogy különböző elemeket kell választani. Vagy megengedhetjük, hogy ugyanazt az elemet többször is lehet választani. Ráadásul a többszöri választás lehet korlátos vagy korlátlan számú. Két fontos megszorítás van.

- Az elemek választásának sorrendje nem számíthat.
- Az elemek $\mathcal{A}$ illetve $\mathcal{B}$ halmazból történő választására vonatkozó szabályoknak érvényesnek kell lenni az elemek $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ halmazból történő választásánál is. (Formálisan, az $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ halmazból történő k elemű választások, valamint az $\mathcal{A}$ illetve a $\mathcal{B}$ halmazból történő, összességében k elemű választás "párok" között bijekciónak kell fennállni.)

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots.$$

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ halmazból úgy választhatunk k elemet, hogy az $\mathcal{A}$ halmazból i elemet, a $\mathcal{B}$ halmazból pedig $k - i$ elemet választunk, ahol i valamilyen 0 és k közötti egész. Az $\mathcal{A}$ halmazból i elemet és a $\mathcal{B}$ halmazból $k - i$ elemet nyilván a_ib_{k-i}-féleképpen lehet választani. Ezeket összegezve minden lehetséges i-re

$$a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0$$

adódik az $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ halmazból történő k elemű választások számára. Ez viszont nem más, mint az $f(x)g(x)$ generátorfüggvény k-adik tagja (x^k együtthatója).

Példa. Hányféleképpen választhatunk ki egy n elemű halmazból k elemet, ha ugyanazt az elemet csak egyszer választhatjuk?

Megoldás. Legyen a választható elemek halmaza

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}.$$

Bármely egyelemű $\{s_i\}$ halmazból nyilván egyféleképpen választhatunk 0 elemet, egyféleképpen választhatunk 1 elemet, és nullaféleképpen választhatunk egynél több elemet. Ezért annak a sorozatnak a generátorfüggvénye, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az $\{s_i\}$ halmazból:

$$(1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow 1 + x.$$

Mivel az $\{s_1\}$, $\{s_2\}$, ..., $\{s_n\}$ halmazok diszjunktak, ezért annak a sorozatnak a generátorfüggvénye, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az

$$\{s_1\} \cup \{s_2\} \cup \cdots \cup \{s_n\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

halmazból

$$(1 + x)^n.$$

Határozzuk meg a generátorfüggvény k-adik tagját (x^k együtthatóját). Idézzük fel, hogy egy $f(x)$ generátorfüggvény k-edik tagja

$$\frac{S(D^k(f(x)))}{k!}.$$

Itt

$$\begin{aligned}
D^0((1+x)^n) &= (1+x)^n,\\
D^1((1+x)^n) &= n(1+x)^{n-1},\\
D^2((1+x)^n) &= n(n-1)(1+x)^{n-2},\\
D^3((1+x)^n) &= n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3},\\
&\vdots\\
D^k((1+x)^n) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Így a generátorfüggvény k-adik tagja (x^k együtthatója)

$$\frac{S(D^k((1+x)^n))}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Példa. Hányféleképpen választhatunk ki egy n elemű halmazból k elemet, ha ugyanazt az elemet többször is választhatjuk?

Megoldás. Legyen a választható elemek halmaza

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}.$$

Bármely egyelemű $\{s_i\}$ halmazból nyilván egyféleképpen választhatunk 0 elemet, egyféleképpen választhatunk 1 elemet, egyféleképpen választhatunk 2 elemet, és így tovább. Ezért annak a sorozatnak a generátorfüggvénye, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az $\{s_i\}$ halmazból:

$$(1,1,1,1,1,\ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Mivel az $\{s_1\}$, $\{s_2\}$, …, $\{s_n\}$ halmazok diszjunktak, ezért annak a sorozatnak a generátorfüggvénye, amelynek k-adik tagja azon lehetőségek száma, ahányféleképpen k elemet kiválaszthatunk az

$$\{s_1\} \cup \{s_2\} \cup \cdots \cup \{s_n\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

halmazból

$$\frac{1}{(1-x)^n}.$$

Határozzuk meg a generátorfüggvény k-adik tagját (x^k együtthatóját). Idézzük fel, hogy egy $f(x)$ generátorfüggvény k-edik tagja

$$\frac{S(D^k(f(x)))}{k!}.$$

Itt

$$
\begin{aligned}
D^0((1-x)^{-n}) &= (1-x)^{-n}, \\
D^1((1-x)^{-n}) &= n(1-x)^{-(n+1)}, \\
D^2((1-x)^{-n}) &= n(n+1)(1-x)^{-(n+2)}, \\
D^3((1-x)^{-n}) &= n(n+1)(n+2)(1-x)^{-(n+3)}, \\
&\vdots \\
D^k((1-x)^{-n}) &= n(n+1)\cdots(n+k-1)(1-x)^{-(n+k)}.
\end{aligned}
$$

Így a generátorfüggvény k-adik tagja (x^k együtthatója)

$$\frac{S(D^k((1-x)^{-n}))}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Gyümölcsös tál

Példa. Hányféleképpen állíthatunk össze almából, körtéből, banánból és narancsból egy k gyümölcsöt tartalmazó tálat, ha

- az almák számának párosnak kell lenni,
- a banánok számának 5 többszörösének kell lenni,
- legfeljebb négy narancs lehet a tálban,
- legfeljebb egy körte lehet a tálban.

Megoldás. Almából egyféleképpen választhatunk 0 darabot, nullaféleképpen 1 darabot, egyféleképpen 2 darabot, nullaféleképpen 3 darabot, és így tovább. Így az almák választásához tartozó generátorfüggvény

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Hasonlóan, a banánok választásához tartozó generátorfüggvény

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}.$$

Narancsból egyféleképpen választhatunk 0 darabot, egyféleképpen 1 darabot, egyféleképpen 2 darabot, egyféleképpen 3 darabot, egyféleképpen 4 darabot, és nullaféleképpen négynél több darabot. Így a narancsok választásához tartozó generátorfüggvény

$$N(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

Végül körtéből egyféleképpen választhatunk 0 darabot, egyféleképpen választhatunk 1 darabot, és nullaféleképpen választhatunk egynél több darabot. Így a körték választásához tartozó generátorfüggvény

$$K(x) = 1 + x.$$

Ezek után a gyümölcsök adott feltételeknek megfelelő választásához tartozó generátorfüggvény

$$A(x)B(x)N(x)K(x) = \frac{(1 - x^5)(1 + x)}{(1 - x^2)(1 - x^5)(1 - x)} = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

Igen ám, de

$$(1, 2, 3, 4, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1 - x)^2},$$

következésképpen k gyümölcs a feltételeknek megfelelően $k + 1$ különböző módon választható ki.

Fánkok

Példa. Hányféleképpen állíthatunk össze sima, lekváros, csokis és vaníliás fánkból egy k fánkot tartalmazó csomagot, ha

- a sima fánkok számának 4 többszörösének kell lenni,
- a lekváros fánkok száma 0 vagy 2 lehet,
- legalább három csokis fánknak kell lenni a csomagban,
- legfeljebb két vaníliás fánk lehet a csomagban.

Megoldás. Az előbbiekhez hasonló módon a sima fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots = \frac{1}{1 - x^4}.$$

A lekváros fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$1 + x^2.$$

A csokis fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots = \frac{x^3}{1-x}.$$

Végül a vaníliás fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$1 + x + x^2.$$

Így a fánkok adott feltételeknek megfelelő választásához tartozó generátorfüggvény

$$\frac{x^3(1+x^2)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^4)} = \frac{x^3(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1+x)}.$$

A generátorfüggvény együtthatóinak meghatározásához először alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét az

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

formális hatványsorra. Olyan A_1, A_2 és A_3 valós számokat keresünk tehát, amelyekkel

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{A_3}{1+x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{A_3}{1+x} = \\ = \frac{A_1(1-x)(1+x) + A_2(1+x) + A_3(1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

és

$$\frac{A_1(1-x)(1+x) + A_2(1+x) + A_3(1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)} = \\ = \frac{(A_1 + A_2 + A_3) + (A_2 - 2A_3)x + (-A_1 + A_3)x^2}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Világos, hogy

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{(A_1 + A_2 + A_3) + (A_2 - 2A_3)x + (-A_1 + A_3)x^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 1, \\ A_2 - 2A_3 &= 1, \\ -A_1 + A_3 &= 1. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= -3/4, \\ A_2 &= 3/2, \\ A_3 &= 1/4. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{1 + x + x^2}{(1-x)^2(1+x)} = -\frac{3/4}{1-x} + \frac{3/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1+x}.$$

Most

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x}, \\ (1, 2, 3, 4, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}, \\ (1, -1, 1, -1, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Ennélfogva az

$$\frac{1 + x + x^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

formális hatványsor k-adik tagja

$$-\frac{3}{4} + \frac{3(k+1)}{2} + \frac{(-1)^k}{4} = \frac{6k + 3 + (-1)^k}{4}.$$

Következésképpen az

$$\frac{x^3(1 + x + x^2)}{(1-x)^2(1+x)}$$

generátorfüggvény k-adik tagja (x^k együtthatója), vagyis azon lehetőségek száma, ahányféleképpen a feltételeknek megfelelő k fánkból álló csomag összeállítható

$$\frac{6(k-3) + 3 + (-1)^{k-3}}{4} = \frac{6k - 15 + (-1)^{k-1}}{4}$$

ha $k \geqslant 3$, és 0 ha $k < 3$.

Elemi valószínűségszámítás

A valószínűségszámítás egyike a számítástudományban leggyakrabban alkalmazott módszereknek. Kulcsszerepet játszik az algoritmustervezésben, az információtömörítésben, a kriptográfiában, hogy csak néhány példát említsünk.

Monty Hall probléma

Az Amerikai Egyesült Államokban hetente több tízmillió példányban megjelenő Parade magazin 1990. szeptember 9-i számában az "Ask Marylin" rovat vezetője, Marylin vos Savant a következő olvasói levelet tette közzé:

Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött egy autó van, a másik kettő mögött kecskék. Tegyük fel, hogy Ön az 1. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi található, kinyitja a 3. ajtót, megmutatva, hogy amögött kecske van. Ezután Önhöz fordul, és megkérdezi: "Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani?" Vajon előnyére válik, ha vált?

Ezzel a helyzettel az 1970-es évek egyik népszerű, Monty Hall és Carol Merrill vezette televíziós vetélkedőjében találkozhattak a játékosok. Marylin a válaszában kifejtette, hogy a játékosnak előnyére válik a váltás, ugyanis ha az autó nem a kiválasztott ajtó mögött van — ami kétszer olyan valószínű, mint az ellenkezője —, akkor a játékos megnyeri az autót a váltással. Meglepetésre, Marylint hamarosan levelek ezrei árasztották el, nem egy neves matematikusoktól, azt állítva, hogy Marylin ezúttal téved. A feladat Monty Hall problémaként vált ismertté, és váltott ki heves vitákat laikusok és szakemberek között egyaránt.

Az eset jól mutatja, hogy a valószínűségszámítás területén az intuíciója bárkit könnyen megcsalhat. A következőkben megismerkedünk egy négy lépésből álló módszerrel, amelynek használatával könnyen és biztonsággal válaszolhatunk meg számos "Mennyi a valószínűsége annak, hogy ... " kezdetű kérdést.

A Monty Hall probléma megoldásánál élni fogunk az alábbi feltételezésekkel (jegyezzük meg, hogy ezek explicit módon nem szerepelnek a levélben; valójában másfajta interpretáció is elképzelhető):

- Az autó ugyanakkora eséllyel található a három ajtó bármelyike mögött.
- A játékos ugyanakkora eséllyel választja a három ajtó bármelyikét, függetlenül attól, hogy melyik mögött található az autó.
- Miután a játékos választott, a játékvezetőnek ki kell nyitnia egy olyan ajtót, amely mögött kecske van, és fel kell ajánlania a játékosnak a változatás lehetőségét.
- Ha a játékvezetőnek lehetősége van megválasztani, hogy melyik ajtót nyissa ki, akkor ugyanakkora eséllyel választja a két ajtó bármelyikét.

Feladatunk ezek után a következő kérdés megválaszolása: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a játékos, aki változtat az eredeti választásán, megnyeri az autót?

A valószínűségszámítás feladatok legtöbbször valamilyen véletlen jelenségről, folyamatról, gyakran játékról szólnak. A feladatok megoldása kétszeres kihívás:

(1) Hogyan modellezzük matematikailag a feladatot?

(2) Hogyan oldjuk meg a kapott matematika feladatot?

Az alábbiakban vázolunk egy szisztematikus módszert a "Mennyi a valószínűsége annak, hogy ... " kezdetű kérdések megválaszolására, magába foglalva a modell alkotást is.

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

Egy tipikus kísérletnél általában több, véletlenszerűen alakuló körülmény, döntés játszik szerepet. A Monty Hall problémánál három ilyen van:

(1) Az autó melyik ajtó mögött található.

(2) A játékos melyik ajtót választja először.

(3) A játékvezető melyik ajtót ajtót nyitja ki a játékosnak azok közül, amely mögött kecske van, és amelyet a játékos nem választott.

Ezen véletlenszerűen alakuló körülmények, döntések lehetséges kombinációit a kísérlet kimeneteleinek nevezzük, a kimenetelek által alkotott halmazt pedig eseménytérnek.

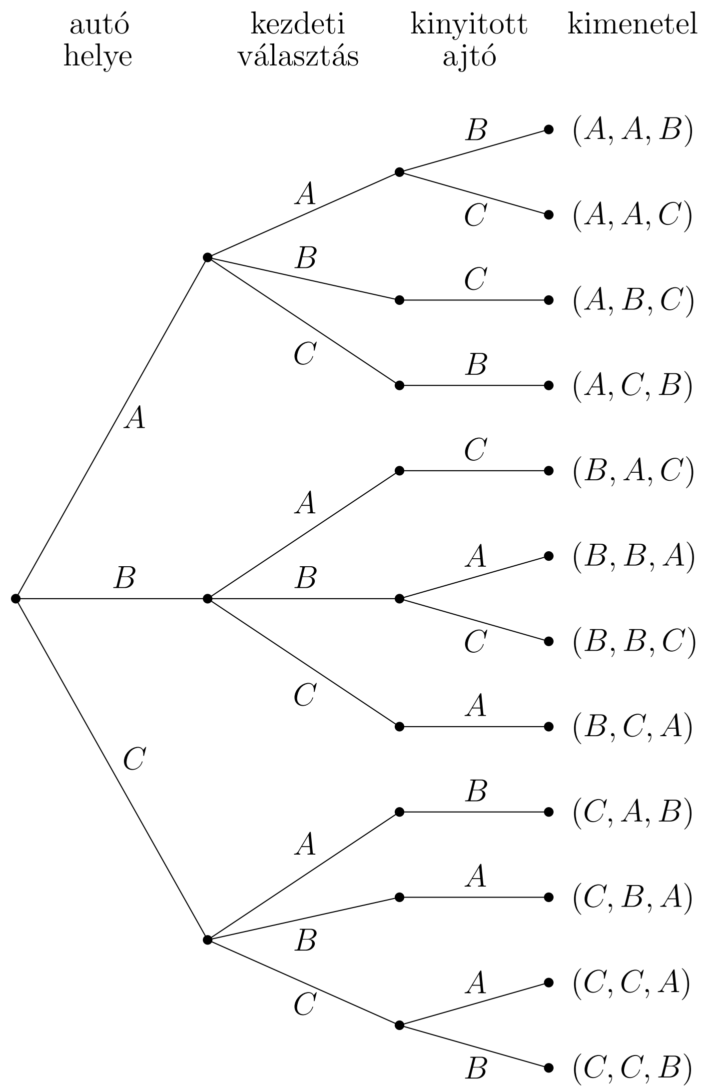
Az eseményteret egy gyökeres fával fogjuk modellezni. A fa gyökeréből három él indul, annak megfelelően, hogy az autó melyik ajtó mögött található. A három él kapja az A, B és C címkéket (ezek felelnek meg a már említett 1., 2. és 3. ajtónak). Akármelyik ajtó mögött található az autó, a játékos először a három ajtó bármelyikét választhatja. Ezt a fának a második szintjén jelenítjük meg. Végül a harmadik szint mutatja, hogy a játékvezető melyik ajtót nyitja ki a játékosnak, mögötte a kecskével.

Jegyezzük meg, hogy a harmadik szinten megszűnik a szimmetria. Például ha az autó az A ajtó mögött van, a játékos pedig a B ajtót választja, akkor a játékvezetőnek mindenképp a C ajtót kell kinyitnia. Ellenben ha például az autó az A ajtó mögött van, és a játékos ezt az ajtót választja, akkor a játékvezetőnek két lehetősége van, a B és a C ajtó bármelyikét kinyithatja.

Ebben a modellben a kísérlet kimeneteleinek a fa gyökerétől a levelekig vezető utak felelnek meg (amelyeket persze azonosíthatunk a levelekkel, hisz egy fában a gyökérből bármely levélhez egyetlen út vezet). Így a Monty Hall problémánál 12 kimenetel van, amelyekre (autót rejtő ajtó, játékos által választott ajtó, játékvezető által kinyitott ajtó) alakú hármasokkal hivatkozhatunk. Az eseménytér ennek megfelelően az

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{llll} (A,A,B), & (A,A,C), & (A,B,C), & (A,C,B), \\ (B,A,C), & (B,B,A), & (B,B,C), & (B,C,A), \\ (C,A,B), & (C,B,A), & (C,C,A), & (C,C,B) \end{array} \right\}$$

halmaz.



2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Feladatunk a "Mennyi a valószínűsége annak, hogy ... " kérdés megválaszolása, ahol a hiányzó rész "a játékos nyer a váltással", de lehetne akár "a játékos éppen azt az ajtót választja, amelyik mögött az autó van" vagy "az autó a C ajtó mögött található". Minden ilyen kitétel kimenetelek egy halmazát írja körül, pédául "az autó a C ajtó mögött található" a következőt:

$$\{(C, A, B),\ (C, B, A),\ (C, C, A),\ (C, C, B)\}$$

Kimenetelek egy halmazát eseménynek nevezzük; másképpen fogalmazva egy esemény az eseménytér egy részhalmaza. Az az esemény, hogy a játékos éppen azt az ajtót választja, amelyik mögött az autó van:

$$\{(A,A,B),\ (A,A,C),(B,B,A),\ (B,B,C),\ (C,C,A),\ (C,C,B)\}$$

És ami minket igazán érdekel, hogy a játékos a váltással nyer:

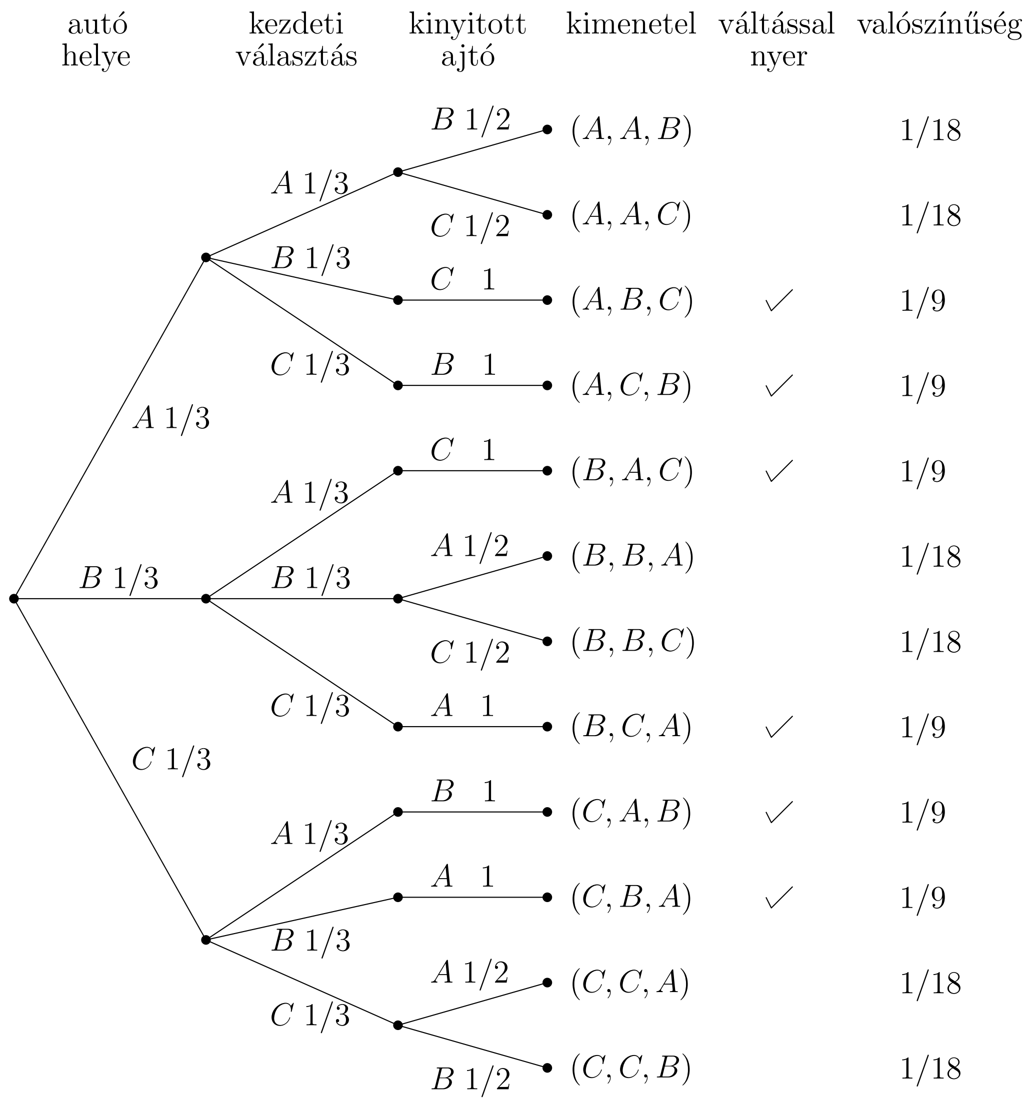
$$\{(A,B,C),\ (A,C,B),(B,A,C),\ (B,C,A),\ (C,A,B),\ (C,B,A)\}.$$

3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

Miután feltérképeztük a lehetséges kimeneteleket, a következő lépés annak megállapítása, hogy ezek mekkora eséllyel következnek be.

Modellünkben először a fa éleihez rendelünk valószínűségeket. Ezeket a kezdetben tett feltételezések határozzák meg: az autó ugyanakkora eséllyel található a három ajtó bármelyike mögött, a játékos ugyanakkora eséllyel választja a három ajtó bármelyikét, ha a játékvezetőnek lehetősége van megválasztani, hogy melyik ajtót nyissa ki, akkor ugyanakkora eséllyel választja a két ajtó bármelyikét. Jegyezzük meg, hogy ha a játékvezetőnek nincs választása az ajtó kinyitásának tekintetében, akkor az ottani egyetlen élhez 1 valószínűséget rendelünk.

Ezek után a kimenetelek valószínűségének megállapítása a következő egyszerű szabály szerint történik: egy kimenetel valószínűsége legyen a megfelelő, gyökértől levélig vezető úton található élekhez rendelt valószínűségek szorzata (erre még visszatérünk a feltételes valószínűség fogalmának tárgyalásánál).



A fenti eljárással egy függvényt definiáltunk, amely minden kimenetelhez egy valószínűséget rendel. Ezt a függvényt általában Pr jelöli. Ennek megfelelően

$$\begin{aligned}
\Pr[(A, A, B)] &= \frac{1}{18} \\
\Pr[(A, A, C)] &= \frac{1}{18} \\
\Pr[(A, B, C)] &= \frac{1}{9} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

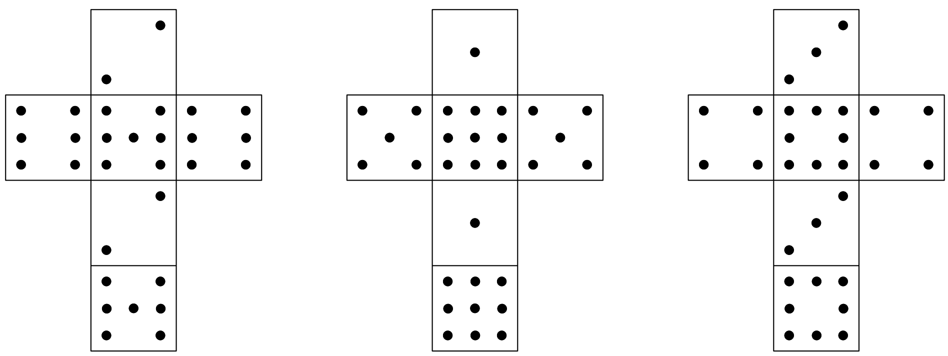
Most már rendelkezésünkre állnak az egyes kimenetelek valószínűségei, de amire mi igazán kíváncsiak vagyunk, az annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a játékos a váltással nyer. Egy esemény valószínűségét az eseményt alkotó kimenetelek valószínűségeinek összegeként definiáljuk. Így

$$\begin{aligned}
\text{Pr(játékos nyer a váltással)} &= \Pr[(A,B,C)] + \Pr[(A,C,B)] + \\
&\quad \Pr[(B,A,C)] + \Pr[(B,C,A)] + \\
&\quad \Pr[(C,A,B)] + \Pr[(C,B,A)] \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy Marylinnek igaza volt! Annak a valószínűsége, hogy a játékos, aki változtat a kezedeti választásán, megnyeri az autót 2/3.

Furcsa kockák

Feketeszakáll és Rőtszakáll, a két elvetemült kalóz, azon vitatkoznak, hogyan osszák el egymás között az elrabolt aranyakat. Már-már a fegyverek is előkerülnek amikor Feketeszakáll kitesz az asztalra három kockát, és azt javasolja, hogy minden aranyról döntsön a szerencse! Mindketten választanak egy-egy kockát, és aki nagyobbat dob, az kapja a soron következő aranyat. Rőtszakáll gyanakvóan vizsgálja az asztalra kitett kockákat. Gyanakvása nem alaptalan, a kockák oldalain a pöttyök száma eltér a szokásostól:



(A) (B) (C)

Rőtszakáll gyanakvása azonban rögtön szertefoszlik, amint Feketeszakáll felajánlja, hogy mindig Rőtszakáll választhat kockát először. Ez igazán előnyösen hangzik. Vajon melyik kockát válassza Rőtszakáll? A B kocka igen csábító, ezen van két kilences, ami ha kijön, biztos nyerő. Ugyanakkor az A kockán van négy viszonylag nagy szám, a C kockán pedig két nyolcas, és egyetlen igazán kis szám se. Rőtszakáll rövid tanakodás után a B kockát választja. Feketeszakáll erre az A kockát veszi el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Rőtszakáll nyer? A kérdés megválaszolására használjuk az előző szakaszban megismert módszert!

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

A kísérletnek 9 kimenetele van, amelyekre

$$(\text{az } A \text{ kockával dobott érték, a } B \text{ kockával dobott érték})$$

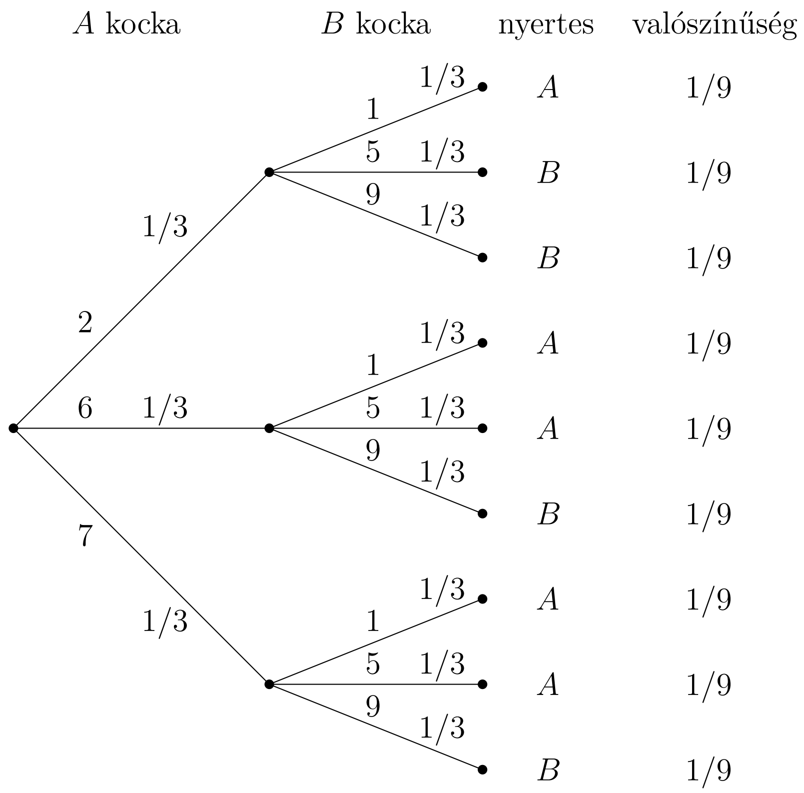
alakú párokkal hivatkozhatunk. Az eseménytér ennek megfelelően

$$\mathcal{S} = \{(2,1),(2,5),(2,9),(6,1),(6,5),(6,9),(7,1),(7,5),(7,9)\}.$$

2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Arra az E eseményre vagyunk kiváncsiak, hogy a B kockával dobott érték nagyobb, mint az A kockával dobott érték. Ez az esemény négy kimenetelből áll:

$$E = \{(2,5),(2,9),(6,9),(7,9)\}.$$



3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

A kimenetelek valószínűségének meghatározásához először a fa éleihez rendelünk valószínűségeket. Minden kockán minden érték 1/3 valószínűséggel jön ki, függetlenül a másik kockával dobott értéktől. Ezért minden élhez rendeljük hozzá az 1/3 valószínűséget. Egy kimenetel valószínűsége ezek után a megfelelő, gyökértől levélig vezető úton található élekhez rendelt valószínűségek szorzata. Így minden kimenetel valószínűsége 1/9.

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

Egy esemény valószínűsége az eseményt alkotó kimenetelek valószínűségeinek összege. Így az E esemény, vagyis annak a valószínűsége, hogy a B kockával dobott érték nagyobb, mint az A kockával dobott érték

$$\Pr(E) = \Pr[(2,5)] + \Pr[(2,9)] + \Pr[(6,9)] + \Pr[(7,9)] = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

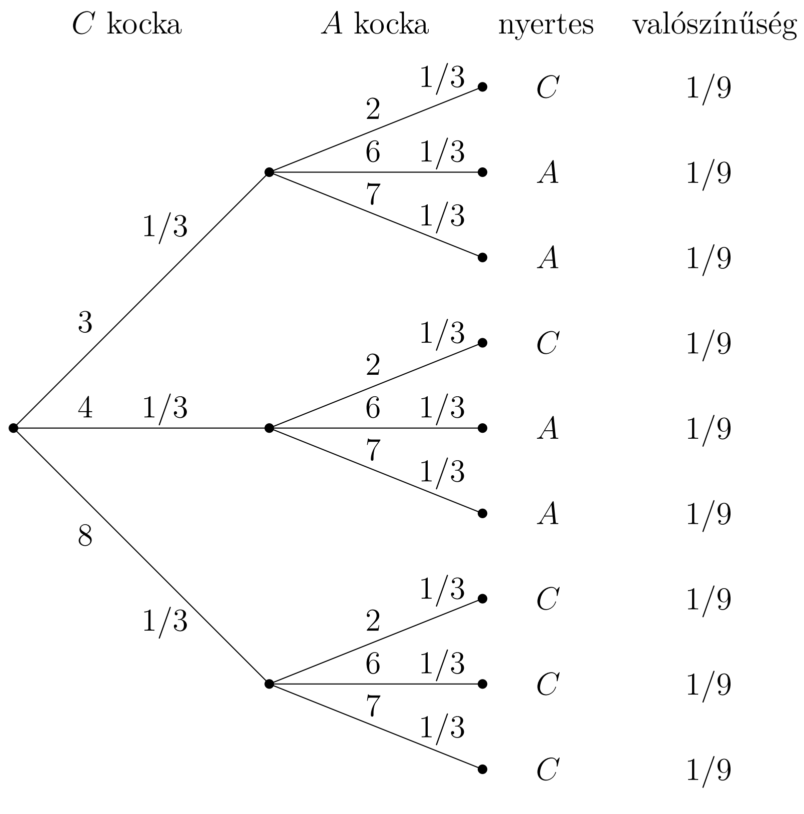
Nem túl jó kilátás Rőtszakállnak!

Lássuk mi történik ha Rőtszakáll az A kockát választja. Ekkor Feketeszakáll a C kockát veszi el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Rőtszakáll nyer? A kísérletnek ismét 9 kimenetele van, az eseménytér

$$\mathcal{S}' = \{(3,2),(3,6),(3,7),(4,2),(4,6),(4,7),(8,2),(8,6),(8,7)\}$$

(a párok első eleme itt a C kockával, míg a második az A kockával dobott érték). Arra az E' eseményre vagyunk kiváncsiak, hogy az A kockával dobott érték nagyobb, mint a C kockával dobott érték. Ez az esemény négy kimenetelből áll:

$$E' = \{(3,6),(3,7),(4,6),(4,7)\}.$$



Most is minden kimenetel valószínűsége $1/9$, így az E' esemény, vagyis annak a valószínűsége, hogy az A kockával dobott érték nagyobb, mint a C kockával dobott érték

$$\Pr(E') = \Pr[(3,6)] + \Pr[(3,7)] + \Pr[(4,6)] + \Pr[(4,7)] = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

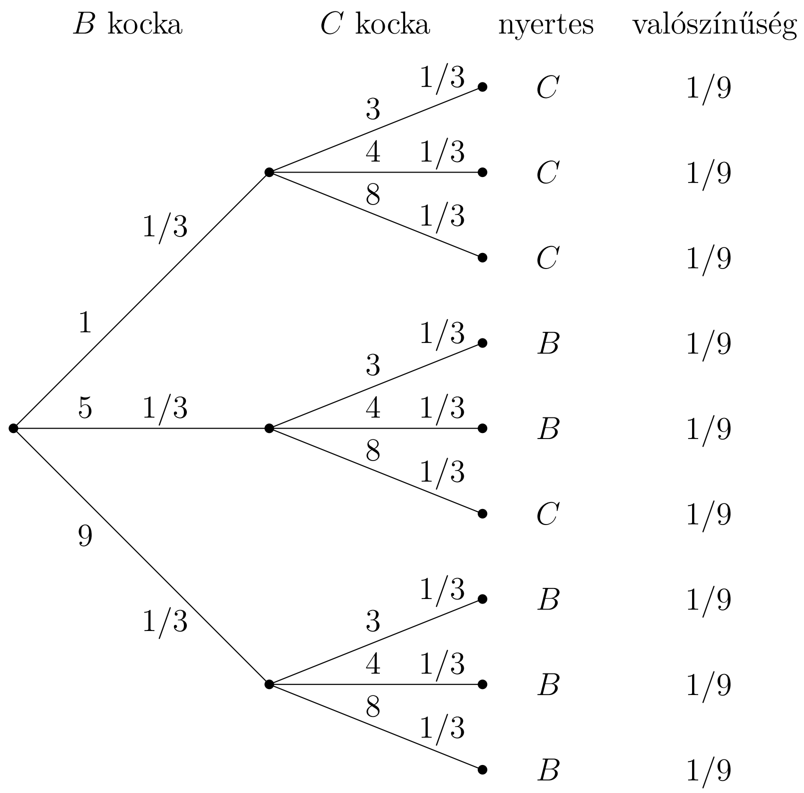
Szintén nem túl jó kilátás Rőtszakállnak!

Végül lássuk mi történik ha Rőtszakáll a C kockát választja. Ekkor Feketeszakáll az B kockát veszi el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Rőtszakáll nyer? A kísérletnek megint 9 kimenetele van, az eseménytér

$$\mathcal{S}'' = \{(1,3),(1,4),(1,8),(5,3),(5,4),(5,8),(9,3),(9,4),(9,8)\}$$

(a párok első eleme itt a B kockával, míg a második az C kockával dobott érték). Arra az E'' eseményre vagyunk kiváncsiak, hogy a C kockával dobott érték nagyobb, mint a B kockával dobott érték. Ez az esemény négy kimenetelből áll:

$$E'' = \{(1,3),(1,4),(1,8),(5,8)\}.$$



Ekkor is minden kimenetel valószínűsége 1/9, így az E'' esemény, vagyis annak a valószínűsége, hogy a C kockával dobott érték nagyobb, mint a B kockával dobott érték

$$\Pr(E'') = \Pr[(1,3)] + \Pr[(1,4)] + \Pr[(1,8)] + \Pr[(5,8)] = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ismét nem túl jó kilátás Rőtszakállnak!

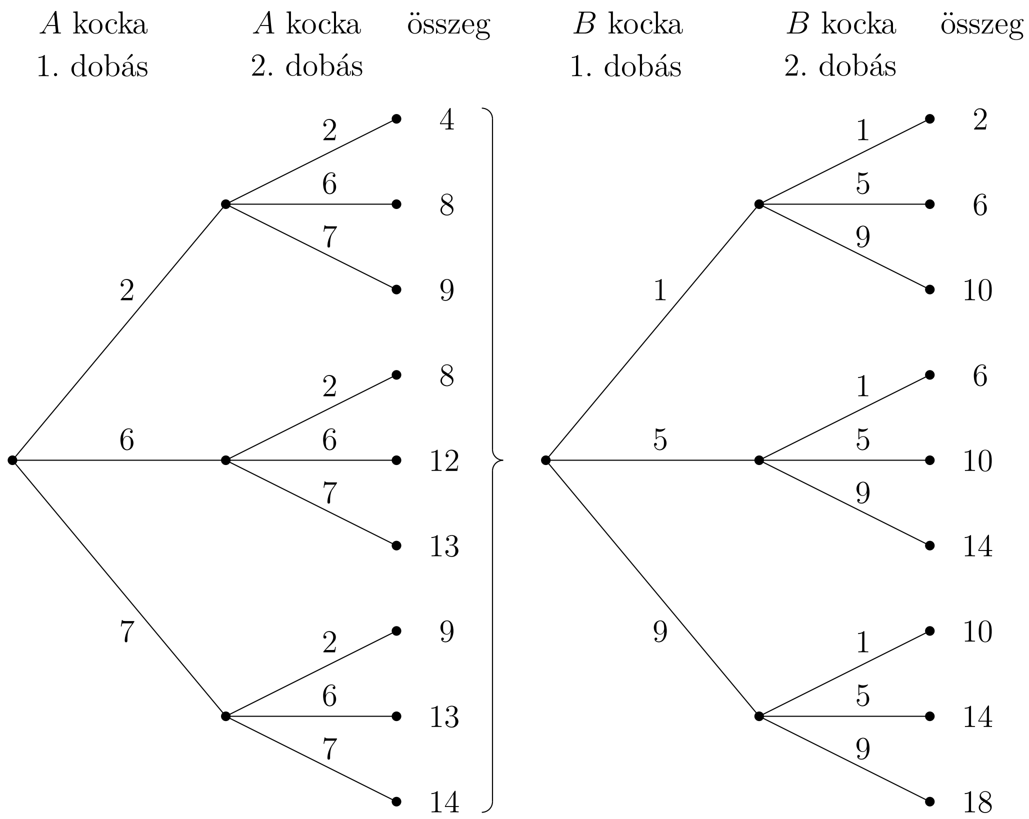
Álljunk meg egy pillanatra! Lehetséges, hogy az A kockával dobott érték 5/9 valószínűséggel nagyobb, mint a B kockával dobott érték, a C kockával dobott érték 5/9 valószínűséggel nagyobb, mint az A kockával dobott érték, és a B kockával dobott érték 5/9 valószínűséggel nagyobb, mint a C kockával dobott érték? Miért ne? Csupán az intuíciónk súgja, hogy ha az A kockát választó játékos kedvezőbb helyzetben van a B kockát választóval szemben, és a C kockát választó játékos kedvezőbb helyzetben van az A kockát választóval szemben, akkor a C kockát választó játékos kedvezőbb helyzetben van a B kockát választóval szemben is. Matematikailag ezt semmi nem támasztja alá!

Azok kedvéért, akiknek az intuíciójukba vetett bizalma töretlen maradt, vizsgáljuk még meg mi történik, ha a kockákkal nem egyszer, hanem kétszer dobunk! Természetesen az győz, akinél a dobott értékek összege nagyobb. Nyilván azt várjuk, hogy továbbra is kedvezőbb helyzetben van az A kockát választó játékos a B kockát választóval szemben, a C kockát választó játékos az A kockát választóval szemben, és a B kockát választó játékos a C kockát választóval szemben. Bármennyire meglepő, de az igazság ennek épp az ellenkezője!

Ha minden játékos kétszer dob, akkor a fa diagram négy szintből áll, és összesen $3^4 = 81$ kimenetel van. Most az egész diagram lerajzolása kicsit hosszadalmas lenne. Azonban erre nincs is igazán szükség: miután lerajzoltuk az első két szintet, elég arra hivatkozni, hogy a következő két szinten ugyanaz a részfa jelenik meg kilenc példányban. Az eddigiekkel összhangban minden egyes kimenetel valószínűsége $(1/3)^4 = 1/81$.

A kockával a *B* kocka ellen

Nézzük először azt az esetet, amikor az egyik játékos az A kockát, a másik pedig a B kockát választja:



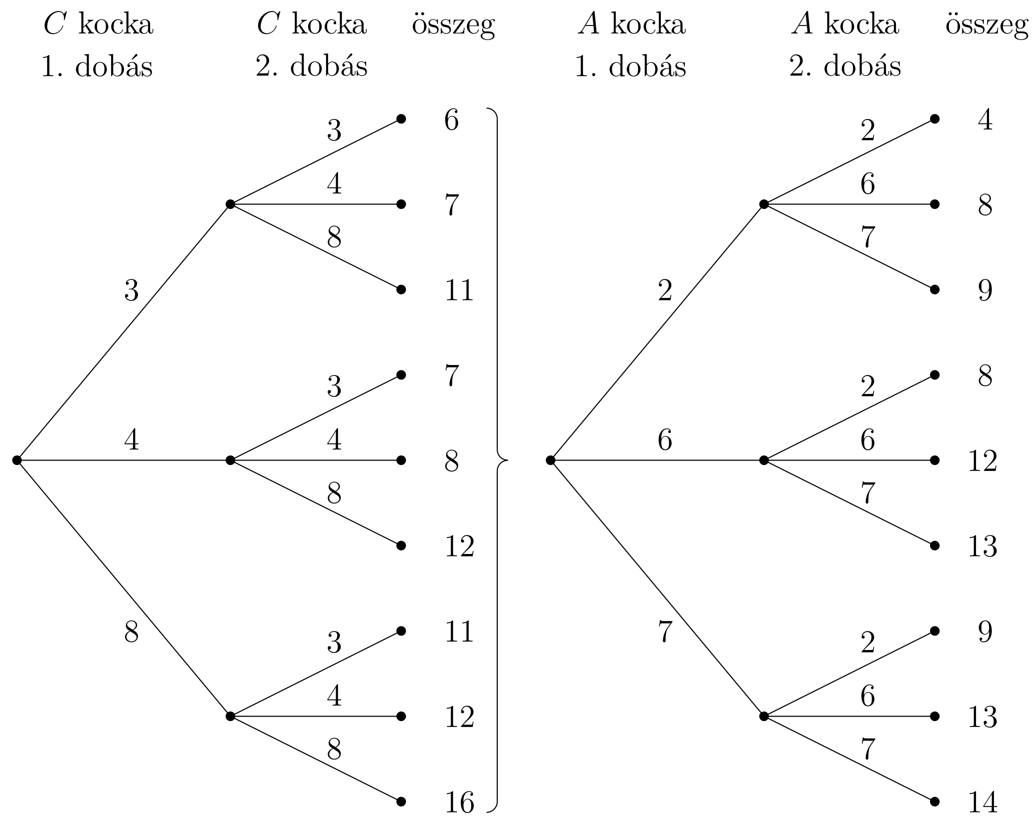
Azon kimenetelek száma, ahol a B kockával dobott két érték összege nagyobb, mint az A kockával dobott két érték összege

$$8 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 3 + 3 = 42.$$

Így annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a B kockával dobott két érték összege nagyobb, mint az A kockával dobott két érték összege $42/81 > 1/2$. Megjegyezzük, hogy döntetlen is előfordulhat, ennek valószínűsége $2/81$.

C kockával az *A* kocka ellen

Nézzük ezután azt az esetet, amikor az egyik játékos a C kockát, a másik pedig az A kockát választja:



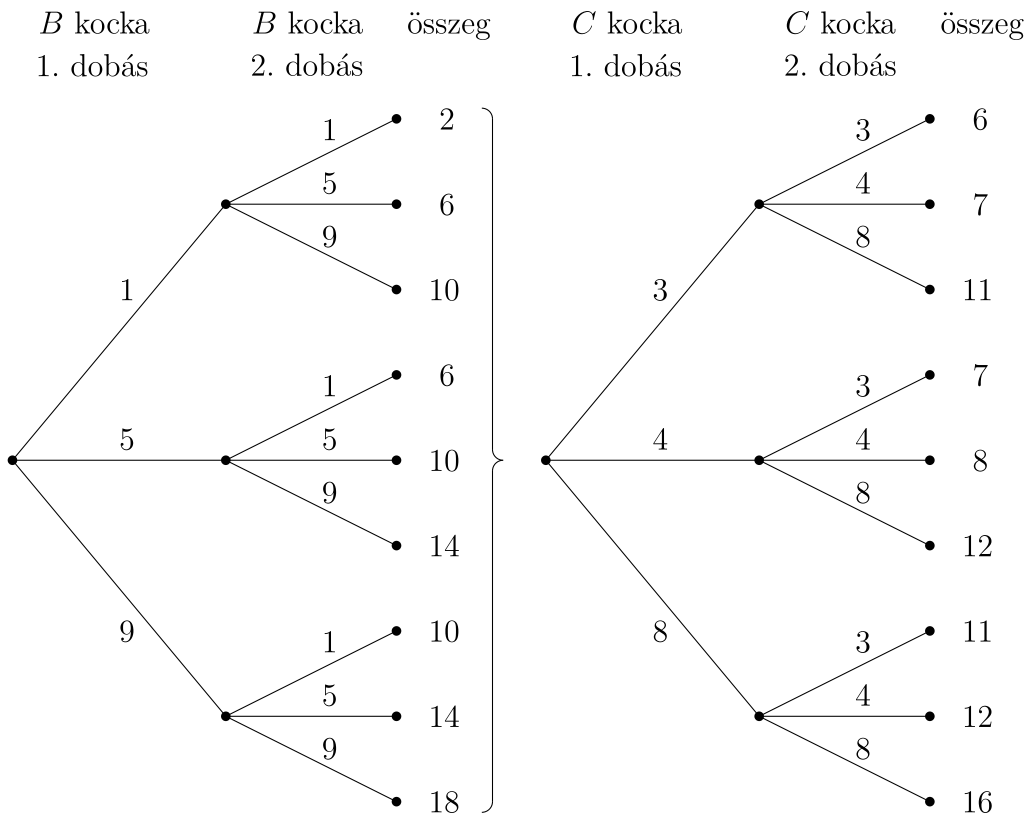
Azon kimenetelek száma, ahol az A kockával dobott két érték összege nagyobb, mint a C kockával dobott két érték összege

$$8 + 8 + 4 + 8 + 6 + 3 + 4 + 3 + 0 = 44.$$

Így annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az A kockával dobott két érték összege nagyobb, mint a C kockával dobott két érték összege $44/81 > 1/2$. Megjegyezzük, hogy döntetlen itt is előfordulhat, ennek valószínűsége $4/81$.

B kockával a *C* kocka ellen

Végül nézzük azt az esetet, amikor az egyik játékos a B kockát, a másik pedig a C kockát választja:



Azon kimenetelek száma, ahol a C kockával dobott két érték összege nagyobb, mint a B kockával dobott két érték összege

$$9 + 8 + 5 + 8 + 5 + 1 + 5 + 1 + 0 = 42.$$

Így annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a C kockával dobott két érték összege nagyobb, mint a B kockával dobott két érték összege $42/81 > 1/2$. Megjegyezzük, hogy döntetlen ismét csak előfordulhat, ennek valószínűsége $2/81$.

Valószínűségi mező

A valószínűségszámítás véletlen kimenetelű kísérletekkel foglalkozik. A lehetséges kimeneteleket egy halmazzal modellezzük, amelyet eseménytérnek nevezünk. Az eseménytér részhalmazait eseményeknek mondjuk. Ebben a fejezetben csak olyan véletlen kísérletekkel foglalkozunk, amelyeket modellező eseménytér véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Egy $\mathcal{S}$ véges vagy megszámlálhatóan végetelen eseménytéren értelmezett Pr függvényt valószínűségnek nevezünk, ha

- $\Pr(\omega) \geqslant 0$ minden $\omega \in \mathcal{S}$ esetén,
- $\sum_{\omega \in \mathcal{S}} \Pr(\omega) = 1$.

Az $\mathcal{S}$ valószínűségi mezőt a Pr valószínűség függvénnyel együtt valószínűségi mezőnek nevezzük. Tetszőleges $A \subseteq \mathcal{S}$ eseményre legyen

$$\Pr(A) = \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega).$$

A definícióból azonnal adódik a következő.

Állítás. Legyenek $A_1, A_2, \dots$ egymást páronként kizáró események (véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Ekkor

$$\Pr\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \Pr(A_i).$$

Állítás. Tetszőleges A eseményre

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A).$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{S}$ az eseményteret. Ekkor $A \cap \overline{A} = \emptyset$ és $A \cup \overline{A} = \mathcal{S}$, így

$$1 = \Pr(A \cup \overline{A}) = \Pr(A) + \Pr(\overline{A}),$$

illetve átrendezve

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A).$$

Állítás. Tetszőleges A és B eseményekre

$$\Pr(A \setminus B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B).$$

Bizonyítás. Mivel

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

így

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \overline{B}),$$

illetve átrendezve

$$\Pr(A \cap \overline{B}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B).$$

Innen $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ felhasználásával az állítás adódik.

Állítás. Tetszőleges $A \subseteq B$ eseményekre $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$.

Bizonyítás. Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$ így az előző állítás szerint

$$\Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A),$$

amiből következik, hogy

$$\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$$

hiszen $\Pr(B \setminus A) \geqslant 0$.

Állítás. Tetszőleges A és B eseményekre

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Bizonyítás. Kicsit bűvészkedünk:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap (B \cup \overline{B})) \cup (B \cap (A \cup \overline{A})) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B) &= \Pr((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \\ &= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \overline{B}) + \Pr(B \cap \overline{A}) \\ &= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \setminus B) + \Pr(B \setminus A) \\ &= \Pr(A \cap B) + \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B) - \Pr(B \cap A) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B). \end{aligned}$$

(a második lépésnél felhasználtuk, hogy $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ és $B \cap \overline{A}$ diszjunkt események).

Mivel $\Pr(A \cap B) \geqslant 0$, ebből többek között azonnal következik, hogy

$$\Pr(A \cup B) \leqslant \Pr(A) + \Pr(B).$$

Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy ez az egyenlőtlenség kettőnél több eseményre is fennáll:

Állítás. Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \cdots + \Pr(A_n).$$

Talán nem túlságosan meglepő, hogy itt is létezik szita-formula:

Állítás. Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Pr(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Pr(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Véges valószínűségi mezők között gyakran találkozunk olyanokkal, amelyekben minden kimenetel valószínűsége ugyanannyi. Ezeket klasszikus valószínűségi mezőknek nevezzük. Ekkor egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményben szereplő kimenetelek és az összes kimenetel számának hányadosával. Ilyenkor a valószínűség kiszámítása valamilyen kombinatorikai feladattal egyenértékű, hiszen bizonyos halmazok elemszámát kell csupán megállapitani (ami persze alkalmanként igen bonyolult is lehet).

Példa. Mennyi a valószínűsége a póker kártyajátékban a full osztásnak?

Megoldás. Az $\mathcal{S}$ eseménytér az összes lehetséges osztás halmaza. Az osztások a kártyalapok 52 elemű halmazának az 5 elemű részhalmazai, így

$$|\mathcal{S}| = \binom{52}{5}.$$

Jelölje E azt az eseményt, hogy full osztás történt. Az összeszámlálási feladatokról szóló fejezetben láttuk, hogy

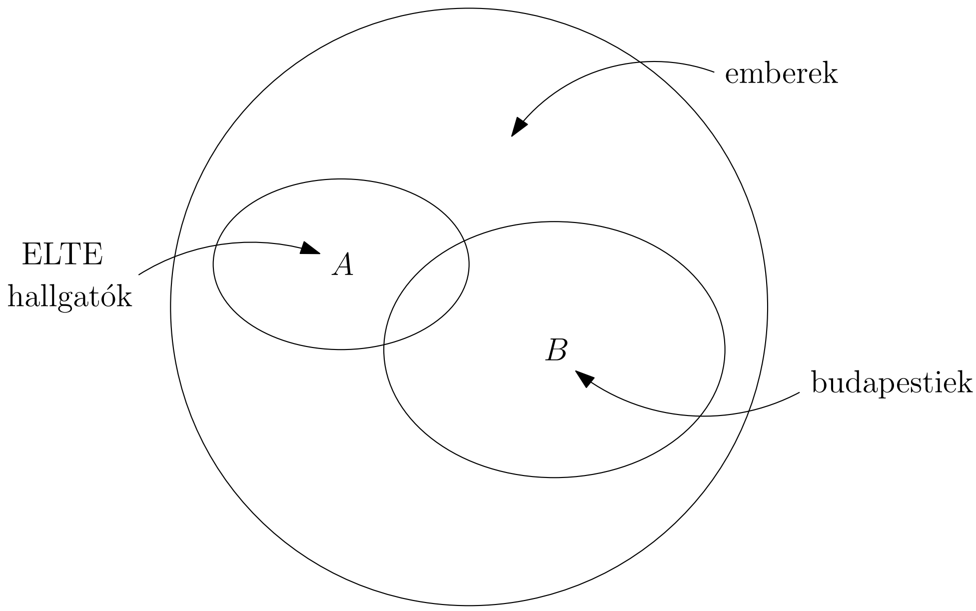
$$|E| = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}.$$

Mivel minden osztás egyformán valószínű, ezért

$$\Pr(E) = \frac{|E|}{|\mathcal{S}|} = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} =$$
$$= \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{6}{4165} \approx 0.00144.$$

Feltételes valószínűség

Tegyük fel, hogy véletlenszerűen kiválasztunk valakit a Földön élő összes ember közül; mindenkit ugyanakkora eséllyel. Legyen A az az esemény, hogy az illető ELTE hallgató, B pedig az az esemény, hogy az illető budapesti lakos. Mennyi a valószínűsége ezeknek az eseményeknek?



Az emberek nagy része se nem ELTE hallgató, se nem budapesti lakos, így az A és a B esemény valószínűsége meglehetősen kicsi. Mit mondhatunk azonban annak a valószínűségéről, hogy valaki ELTE hallgató azon feltevés mellett, hogy az illető budapesti lakos. Ez nyilván lényegesen nagyobb, de pontosan mennyi? Amire itt kíváncsiak vagyunk az az A eseménynek a B eseményre vonatkozó ún. feltételes valószínűsége.

Legyen B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor egy tetszőleges A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségén a

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

mennyiséget értjük. Ha $\Pr(B) = 0$, akkor a $\Pr(A|B)$ feltételes valószínűség nem definiált.

Térjünk vissza kicsit a fa diagramon alapuló feladatmegoldási módszerünkhöz. Nem nehéz belátni, hogy a fa éleihez rendelt valószínűségek valójában feltételes valószínűségek. Tekintsük például a Monty Hall problémánál a fa diagramon a legfelső, gyökértől levélig vezető utat, amely az (A, A, B) kimenetelnek felel meg. Az első élhez rendelt valószínűség $1/3$, ami annak a valószínűsége, hogy az autó az A ajtó mögött van. A második élhez rendelt valószínűség $1/3$, ami annak a valószínűsége, hogy a játékos az A ajtót választja azon feltevés mellett, hogy az autó az A ajtó mögött van. Végül a harmadik élhez rendelt valószínűség $1/2$, ami annak a valószínűsége, hogy Monty a B ajtót nyitja ki, azon feltevés mellett, hogy az autó az A ajtó mögött van, és a játékos az A ajtót választja. Általában, a fa diagram minden éléhez annak a valószínűségét rendeljük, hogy a kísérlet az adott él mentén folyik le azon feltevés mellett, hogy elérte a szülő csúcsot.

De miért lesz egyenlő a kimenetelek valószínűsége, a gyökértől a levelekig vezető utakon levő élekhez rendelt valószínűségek szorzatával? A választ a következő állítás adja meg, amely a feltételes valószínűség definícióját felhasználva teljes indukcióval egyszerűen igazolható.

Állítás. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges olyan események, amelyekre

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = {} & \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1) \\ & \Pr(A_3|(A_1 \cap A_2)) \cdots \Pr(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})).\end{aligned}$$

Példánknál maradva, annak a valószínűsége, hogy az autó az A ajtó mögött van, és a játékos az A ajtót választja, és Monty a B ajtót nyitja ki egyenlő annak a valószínűsége, hogy az autó az A ajtó mögött van szorozva annak a valószínűsége, hogy a játékos az A ajtót választja azon feltevés mellett, hogy az autó az A ajtó mögött van szorozva annak a valószínűsége, hogy Monty a B ajtót nyitja ki, azon feltevés mellett, hogy az autó az A ajtó mögött van, és a játékos az A ajtót választja.

Tenisz

Egy teniszbajnokságon minden mérkőzésen az győz, aki előbb nyer két játszmát. Kedvencünk minden mérkőzésének az első játszmáját 1/2 valószínűséggel nyeri meg. A következő játszmák megnyerésének valószínűsége azonban már nagyban függ az előző játszma eredményétől. Ha kedvencünk az előző játszmát megnyerte, akkor a győzelemtől fel van dobva, és a soron következő játszmát 2/3 valószínűséggel nyeri meg. Ha viszont kedvencünk az előző játszmát elvesztette, akkor a vereségtől demoralizálva a soron következő játszmát csak 1/3 valószínűséggel nyeri meg. Mennyi a valószínűsége annak, hogy kedvencünk megnyeri a mérkőzést azon feltevés mellett, hogy megnyeri az első játszmát?

Ez egy feltételes valószínűségre vonatkozó kérdés. Legyen A az az esemény, hogy kedvencünk megnyeri a mérkőzést, B pedig az, hogy megnyeri az első játszmát. Célunk a $\Pr(A|B)$ feltételes valószínűség meghatározása. Itt is használhatjuk a már megismert négy lépésből álló módszerünket.

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

A fa diagram minden belső csúcsának két gyereke van, a hozzájuk vezető élek közül egyik annak felel meg, hogy kedvencünk megnyeri a soron következő játszmát (ekkor az él az NY címkét kapja), a másik pedig annak, hogy elveszti (ekkor az él a V címkét kapja). Ennek megfelelően az eseménytér

$$\mathcal{S} = \{(\mathrm{NY},\mathrm{NY}), (\mathrm{NY},\mathrm{V},\mathrm{NY}), (\mathrm{NY},\mathrm{V},\mathrm{V}), (\mathrm{V},\mathrm{NY},\mathrm{NY}), (\mathrm{V},\mathrm{NY},\mathrm{V}), (\mathrm{V},\mathrm{V})\}.$$

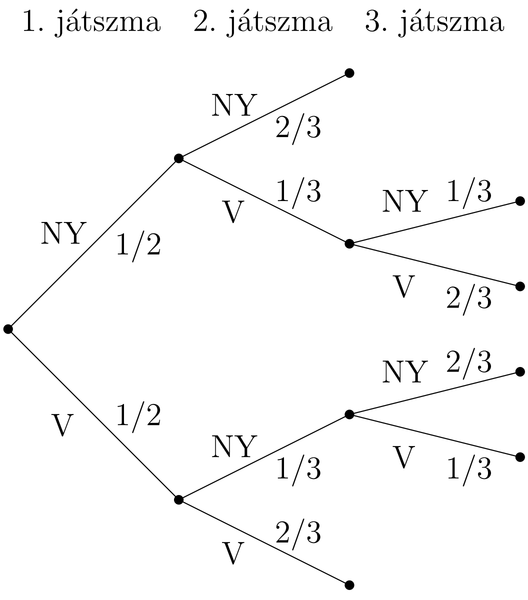
2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Egyrészt arra az A eseményre vagyunk kíváncsiak, hogy kedvencünk megnyeri a mérkőzést. Ez az esemény három kimenetelből áll:

$$A = \{(\mathrm{NY},\mathrm{NY}), (\mathrm{NY},\mathrm{V},\mathrm{NY}), (\mathrm{V},\mathrm{NY},\mathrm{NY})\}.$$

Másrészt arra a B eseményre vagyunk kíváncsiak, hogy kedvencünk megnyeri az első játszmát. Ez az esemény szintén három kimenetelből áll:

$$B = \{(\mathrm{NY},\mathrm{NY}), (\mathrm{NY},\mathrm{V},\mathrm{NY}), (\mathrm{NY},\mathrm{V},\mathrm{V})\}.$$



kimenetel	A	B	valószínűség
(NY,NY)	✓	✓	1/3
(NY,V,NY)	✓	✓	1/18
(NY,V,V)		✓	1/9
(V,NY,NY)	✓		1/9
(V,NY,V)			1/18
(V,V)			1/3

3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

A kimenetelek valószínűségének meghatározásához először a fa éleihez rendelünk valószínűségeket. Kedvencünk 1/2 valószínűséggel nyeri meg az első játszmát, ezért a gyökérből induló mindkét élhez 1/2 valószínűséget rendelünk. A többi élhez rendelt valószínűségek 1/3 illetve 2/3, az előző játszma eredményétől függően. Egy kimenetel valószínűsége ezek után a megfelelő, gyökértől levélig vezető úton található élekhez rendelt valószínűségek szorzata. Például az $(\mathrm{NY}, \mathrm{V}, \mathrm{V})$ kimenetel vaószínűsége

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

Végül kiszámoljuk annak a valószínűségét, hogy kedvencünk megnyeri a mérkőzést azon feltevés mellett, hogy megnyeri az első játszmát:

$$\begin{aligned}
\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(\{(\mathrm{NY}, \mathrm{NY}), (\mathrm{NY}, \mathrm{V}, \mathrm{NY})\})}{\Pr(\{(\mathrm{NY}, \mathrm{NY}), (\mathrm{NY}, \mathrm{V}, \mathrm{NY}), (\mathrm{NY}, \mathrm{V}, \mathrm{V})\})} \\
&= \frac{1/3 + 1/8}{1/3 + 1/18 + 1/9} \\
&= \frac{7}{9}.
\end{aligned}$$

Orvosi diagnózis

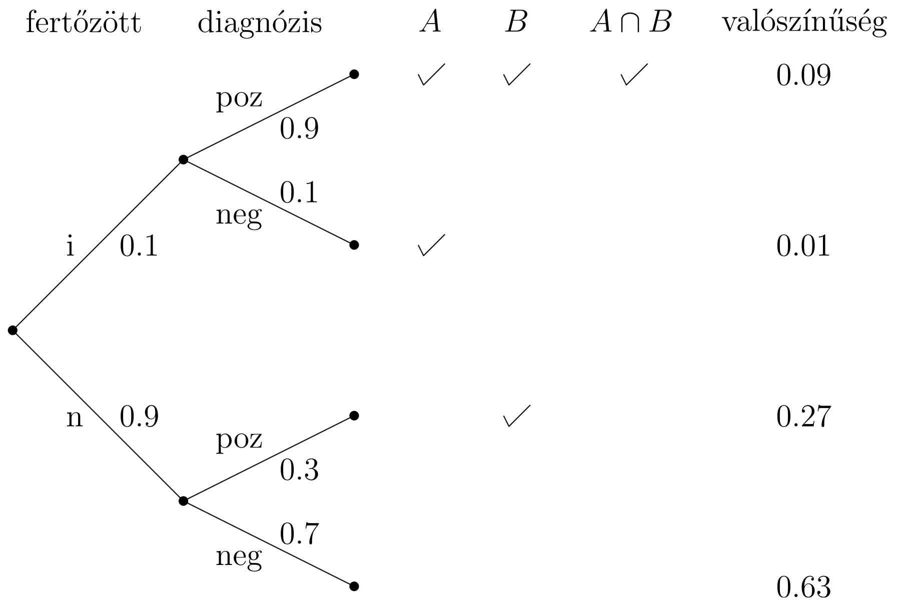
Létezik egy igen kellemetlen betegség, amelytől a népesség tíz százaléka szenved. Aki megkapja a betegséget egyszer csak rendkívül rossz szagot kezd árasztani. Szerencsére van egy módszer, amellyel a betegség még tünetmentes állapotban kimutatható. A módszer sajnos nem tökéletes:

- a módszer tíz százalék eséllyel diagnosztizál egy beteget egészségesnek,
- a módszer harminc százalék eséllyel diagnosztizál egy egészségest betegnek.

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személyt betegnek diagnosztizálnak. Mennyi a valószínűsége, hogy az illető tényleg az?

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

Az eseményteret a következő fa diagram segítségével térképezhetjük fel:



2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Legyen A az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy beteg, B pedig az, hogy az illetőt betegnek diagnosztizálják. Az eseményekhez tartozó kimeneteleket az ábrán megjelöltük. Amire kíváncsiak vagyunk, a $\Pr(A|B)$ feltételes valószínűség.

3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

Először a fa éleihez rendelünk valószínűségeket. Ezek a feladat szövegéből adódnak. Egy kimenetel valószínűsége ezek után a megfelelő, gyökértől levélig vezető úton található élekhez rendelt valószínűségek szorzata. A valószínűségeket az ábrán feltüntettük.

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{0.09}{0.09 + 0.27} = \frac{1}{4}.$$

Vagyis a betegség diagnosztizálása esetén csupán 25% eséllyel beteg a páciens. Nem hangzik túl biztatóan!

A válasz első látásra elég meglepő, azonban a körülményeket alaposabban megvizsgálva rájöhetünk a dolog nyitjára. Két lehetőség van arra nézve, hogy a módszer betegnek diagnosztizál valakit. Egyrészt ha egy beteg embert helyesen diagnosztizál betegnek, másrészt ha egy egészséges embert helytelenül diagnosztizál betegnek. A buktató ott van, hogy majdnem mindenki egészséges, így a pozitív eredmények nagy része hamisan diagnosztizált egészséges emberektől származik.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a módszer egy véletlenszerűen kiválasztott személy esetén helyes diagnózist ad. Ez az esemény két kimenetelből áll: az illető beteg, és a módszer is annak diagnosztizálja (ennek a valószínűsége 0.09), illetve az illető egészséges és a módszer is annak diagnosztizálja (ennek a valószínűsége 0.63). Így a helyes diagnózis valószínűsége $0.09 + 0.63 = 0.72$. Ez azért valamennyire megnyugtató.

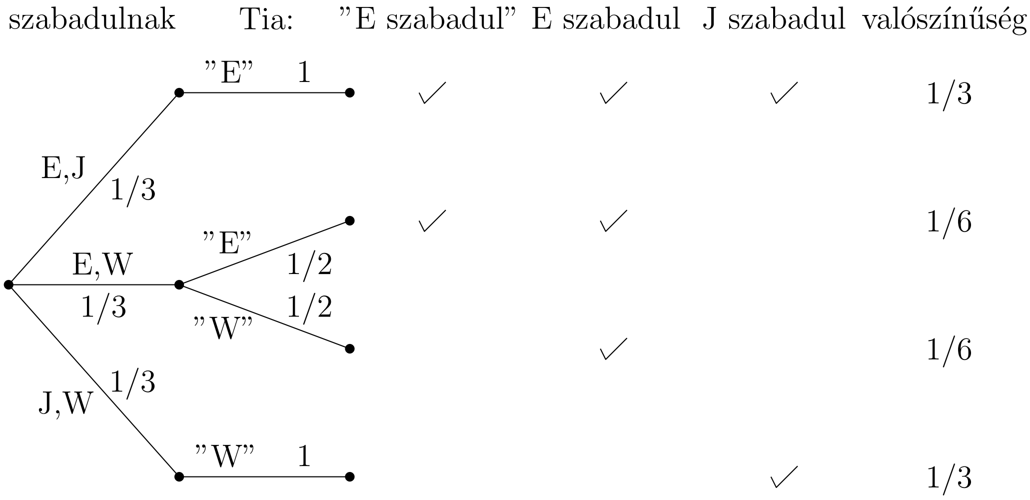
Egy pillanat! Van egy egyszerű módszer, amely 90% eséllyel ad helyes diagnózist: mindenkit egészségesnek diagnosztizálunk! Ez a "módszer" minden egészséges embert helyesen diagnosztizál, és minden beteget hamisan. Azonban a betegek aránya csupán 10%.

Davy Jones foglyai

Jack Sparrow, Will Turner és Elisabeth Swann az elátkozott Davy Jones hajóján, a Bolygó Hollandin raboskodnak. Tia Dalma közbenjárására Davy Jones úgy dönt, hogy közülük kettőt szabadon bocsát, mindenkit ugyanakkora valószínűséggel. Azonban a foglyoknak csak közvetlenül a szabadon bocsátásuk előtt árulja el, hogy hármuk közül melyik kettő szabadul. Jack Sparrow rögtön kiszámolja, hogy az ő szabadon bocsátásának a valószínűsége 2/3.

Tia Dalma, aki látnoki képessége miatt tudja, melyik két foglyot bocsátják szabadon, éjszaka meglátogatja Jack Sparrowt, és felajánlja neki, hogy elárulja a nevét a másik két fogoly közül az egyik olyannak, akit szabadon engednek (ha mindkettőjüket szabadon bocsátják, akkor bármelyik nevet ugyanakkora valószínűséggel mondja). Jack Sparrow visszautasítja az ajánlatot, mert úgy okoskodik, hogy ha Tia Dalma például azt mondja, hogy Elisabeth Swannt szabadon engedik, akkor az ő szabadon bocsátásának valószínűsége 1/2-re csökken, hiszen a másik szabadon bocsátott fogoly ekkor vagy ő vagy Will Turner, mindkettőjük ugyanakkora eséllyel. Helyesen okoskodik Jack Sparrow?

A feladat megoldásában a következő fa diagram lesz segítségünkre:



Legyen A az az esemény, hogy Jack Sparrowt szabadon engedik, B az az esemény, hogy Elisabeth Swannt szabadon engedik, C pedig az az esemény, hogy Tia Dalma azt árulja el Jack Sparrownak, hogy Elisabeth Swannt szabadon engedik. A diagramról leolvasható, hogy Jack Sparrow első számítása helyes:

$$\Pr(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Jack Sparrow azt is helyesen látja, hogy ha a C esemény bekövetkezik, akkor ugyanez fennáll a B eseményre is, és hibátlanul adja meg a szabadon bocsátásának valószínűségét, azon feltevés mellet, hogy a B esemény bekövetkezik:

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \\
\Pr(A \cap B) &= \frac{1}{3}, \\
\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Jack Sparrow akkor hibázik, amikor nem veszi észre, hogy a B és a C események különbözőek, ahogy ez világos kiderül a fa diagramból. Jack Sparrow szabadon bocsátásának valószínűsége azon feltevés mellett, hogy Tia Dalma Elizabeth Swann szabadon engedését árulja el neki nem a $\Pr(A|B)$ feltételes valószínűség, hanem a $\Pr(A|C)$ feltételes valószínűség:

$$\begin{aligned}\Pr(C) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},\\ \Pr(A \cap C) &= \frac{1}{3},\\ \Pr(A|C) &= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Így Jack Sparrow szabadon bocsátásának esélye nem változik azzal, ha Tia Dalma elárulja neki a nevét a másik két fogoly közül az egyik olyannak, akit szabadon engednek.

Diszkrimináció

Számos korábban bizonyított, eseményekből halmazműveletekkel származó új események valószínűségére vonatkozó állítás kiterjeszthető feltételes valószínűségekre is. Például a két esemény uniójáról szóló állítás a következő módon.

Állítás. Tetszőleges A, B és C eseményekre, ahol $\Pr(C) > 0$

$$\Pr((A \cup B)|C) = \Pr(A|C) + \Pr(B|C) - \Pr((A \cap B)|C).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\Pr((A \cup B)|C) &= \frac{\Pr((A \cup B) \cap C)}{\Pr(C)}\\ &= \frac{\Pr((A \cap C) \cup (B \cap C)}{\Pr(C)}\\ &= \frac{\Pr(A \cap C) + \Pr(B \cap C) - \Pr(A \cap B \cap C)}{\Pr(C)}\\ &= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} + \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} - \frac{\Pr(A \cap B \cap C)}{\Pr(C)}\\ &= \Pr(A|C) + \Pr(B|C) - \Pr((A \cap B)|C).\end{aligned}$$

Fontos, hogy ne cseréljük fel a feltételes valószínűséget jelző függőleges vonal két oldalát. Például a

$$\Pr(A|(B \cup C)) = \Pr(A|B) + \Pr(A|C) - \Pr(A|(B \cap C))$$

összefüggés általában nem teljesül!

Néhány évvel ezelőtt egy matematika tanárnő polgári pert indított egy híres egyetem ellen, ahol a vezető oktatói pályázatát elutasították, állítólag azért mert nő volt. Azzal érvelt, hogy a férfi jelöltek pályázatait az egyetem mind a 22 intézeténél nagyobb százalékban bírálták el pozitívan, mint a női jelöltekét. Ez így tényleg elég gyanús! Válaszul az egyetem jogászai kimutatták, hogy a férfi jelöltek pályázatait összességében (egyetemi szinten) kisebb százalékban bírálták el pozitívan, mint a női jelöltekét. Így ha történt is diszkrimináció, az nem a nőket érintette hátrányosan. Itt valaki biztosan hazudik! Vagy mégsem?

Próbáljuk meg mindkét gondolatmenetet részletesen megvizsgálni. Ehhez a feltételes valószínűség fogalmát fogjuk segítségül hívni. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak két intézet van, a Matematikai Intézet és az Informatikai Intézet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen választunk egy jelöltet, mindenkit ugyanakkora eséllyel. Definiáljuk a következő eseményeket:

- legyen A az az esemény, hogy a jelölt pályázatát pozitívan bírálták el,
- legyen B az az esemény, hogy a jelölt a Matematikai Intézethez pályázatot benyújtó nő,
- legyen C az az esemény, hogy a jelölt az Informatikai Intézethez pályázatot benyújtó nő,
- legyen D az az esemény, hogy a jelölt a Matematikai Intézethez pályázatot benyújtó férfi,
- legyen E az az esemény, hogy a jelölt az Informatikai Intézethez pályázatot benyújtó férfi.

Tegyük fel, hogy semelyik jelölt nem nyújtott be pályázatot mindkét intézethez; ekkor a B, C, D és E események páronként diszjunktak.

Valószínűségszámítási terminológiával élve a felperes arra hivatkozott, hogy

$$\Pr(A|B) < \Pr(A|D) \quad \text{és} \quad \Pr(A|C) < \Pr(A|E),$$

mire az egyetem azzal vágott vissza, hogy

$$\Pr(A|(B \cup C)) > \Pr(A|(D \cup E)).$$

Összeadva a felperes két egyenlőtlenségét

$$\Pr(A|B) + \Pr(A|C) < \Pr(A|D) + \Pr(A|E)$$

adódik, amiből elég csábító az egyetem megállapításával ellentétes

$$\Pr(A|(B \cup C)) < \Pr(A|(D \cup E))$$

egyenlőtlenségre következtetni. Azonban ez az érvelés hibás, mivel amint arra már fentebb rámutattunk

$$\Pr(A|(B \cup C)) = \Pr(A|B) + \Pr(A|C) \text{ és } \Pr(A|(D \cup E)) = \Pr(A|D) + \Pr(A|E)$$

általában nem teljesül.

A következő példa mutatja, hogy a két fél érvelése egymástól függetlenül helytálló lehet. Képzeljük el, hogy a Matematikai Intézethez egyetlen női jelölt nyújtott be pályázatot, amelyet elutasítottak, míg az Informatikai Intézethez 100 női jelölt nyújtott be pályázatot, amelyből 70-et bíráltak el pozitívan. Ugyancsak képzeljük el, hogy a Matematikai Intézethez 100 férfi jelölt nyújtott be pályázatot, amelyből 50-et bíráltak el pozitívan, míg az Informatikai Intézethez egyetlen férfi jelölt nyújtott be pályázatot, amelyet pozitívan bíráltak el. Ekkor mindkét intézetnél a férfi jelöltek pályázatait nagyobb százalékban bírálták el pozitívan, mint a női jelöltekét. Ugyankkor összességében a 101 női jelölt által benyújtott pályázat közül 70-et bíráltak el pozitívan, míg a 101 férfi jelölt által benyújtott pályázat közül csupán 51-et!

Teljes valószínűség tétel

Az esetszétválasztás módszere események valószínűségének kiszámításánál is gyakran segítségünkre van.

Teljes valószínűség tétel. Legyenek $B_1, B_2, \ldots$ egymást páronként kizáró, pozitív valószínűségű események (véges vagy megszámlálhatóan végtelen), amelyekre

$$\sum_i \Pr(B_i) = 1,$$

továbbá A egy tetszőleges esemény. Ekkor

$$\Pr(A) = \sum_i \Pr(A|B_i) \Pr(B_i).$$

Bizonyítás. Legyen

$$B = \bigcup_i B_i.$$

Mivel $\Pr(B) = 1$, ezért $\Pr(\overline{B}) = 0$, így

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cup (B \cap \overline{B})) \\
&= \Pr((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \\
&= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \overline{B}) \\
&= \Pr(A \cap B),
\end{aligned}$$

hiszen $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$ miatt $\Pr(A \cap \overline{B}) \leqslant \Pr(\overline{B}) = 0$. Ezek után

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cap B) &= \Pr\left(A \cap \left(\bigcup_i B_i\right)\right) \\
&= \Pr\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right) \\
&= \sum_i \Pr(A \cap B_i) \\
&= \sum_i \Pr(A|B_i)\Pr(B_i).
\end{aligned}$$

Példa. Korábban szó volt egy kellemetlen betegségről, amelytől a népesség tíz százaléka szenved, illetve egy módszerről, amellyel a betegség diagnosztizálható. A módszer sajnos nem volt tökéletes:

- tíz százalék eséllyel diagnosztizált egy beteget egészségesnek,
- harminc százalék eséllyel diagnosztizált egy egészségest betegnek.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a módszer egy véletlenszerűen kiválasztott személy esetén hamis diagnózist ad.

Megoldás. Legyen E az az esemény, hogy egy véletlenszerően kiválasztott személyt a módszer hamisan diagnosztizál. Legyen továbbá A az az esemény, hogy egy véletlenszerően kiválasztott személy beteg. A teljes valószínűség tétele szerint

$$\Pr(E) = \Pr(E|A)\Pr(A) + \Pr(E|\overline{A})\Pr(\overline{A}) = 0.1 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.28.$$

Bayes tétel

Egy kisváros meteorológiai állomásának vezetője minden reggel gyalog megy a munkahelyére. Vannak napok, amikor esik az eső, ennek a valószínűsége

0.3. Időnként a meteorológus esernyővel indul el otthonról, általában akkor, amikor esőt jósol aznapra, de előfordul, hogy a biztonság kedvéért ragyogó napsütésben is. Annak a valószínűsége, hogy a meteorológus magával viszi az esernyőjét reggel, 0.4. Mint meteorológus, ritkán történik meg vele, hogy az eső esernyő nélkül lepi meg: ha aznap esik az eső, akkor annak a valószínűsége, hogy a meteorológus esernyővel indul el otthonról, 0.8. Tegyük fel, hogy reggel esernyővel látjuk a meteorológust munkába menni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy aznap eső lesz?

Jelölje A azt az eseményt, hogy egy adott nap esik az eső, B pedig azt, hogy a meteorológus esernyővel indul el otthonról. Ekkor

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= 0.3,\\ \Pr(B) &= 0.4,\\ \Pr(B|A) &= 0.8.\end{aligned}$$

Amire kíváncsiak vagyunk, az a $\Pr(A|B)$ feltételes valószínűség. Ennek meghatározásához a következőképpen okoskodhatunk:

$$\begin{aligned}\Pr(A\cap B) &= \Pr(A\cap B),\\ \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}\cdot\Pr(B) &= \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(A)}\cdot\Pr(A),\\ \Pr(A|B)\cdot\Pr(B) &= \Pr(B|A)\cdot\Pr(A).\end{aligned}$$

Így a keresett feltételes valószínűség

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\cdot\Pr(A)}{\Pr(B)} = \frac{0.8\cdot 0.3}{0.4} = 0.6.$$

A megoldásban használt gondolatmenetet általánosítja a következő

Bayes tétel. Legyenek $B_1, B_2, \ldots$ egymást páronként kizáró, pozitív valószínűségű események (véges vagy megszámlálhatóan végtelen), amelyekre

$$\sum_i \Pr(B_i) = 1,$$

továbbá A egy tetszőleges esemény. Ekkor minden j természetes számra

$$\Pr(B_j|A) = \frac{\Pr(A|B_j)\Pr(B_j)}{\sum\limits_i \Pr(A|B_i)\Pr(B_i)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\Pr(B_j|A) = \frac{\Pr(B_j \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A|B_j)\Pr(B_j)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A|B_j)\Pr(B_j)}{\sum_i \Pr(A|B_i)\Pr(B_i)}$$

(az utolsó lépésnél a teljes valószínűség tételt alkalmaztuk).

Függetlenség

Tegyük fel, hogy egy szoba két szemben lévő sarkában feldobunk egy-egy szabályos érmét. Intuíciónk azt súgja, hogy az egyik érme feldobásának a kimenetele semmilyen befolyással nem bír a másik érme feldobásának a kimenetelére. Matematikailag a következőképpen fogalmazhatjuk ezt meg.

Legyen $n \geqslant 2$. Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események (teljesen) függetlenek, ha tetszőleges $1 \leqslant h \leqslant n$ esetén az $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{h\}$ indexhalmaz bármely nem üres $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ részhalmazára

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = 0 \text{ vagy } \Pr(A_h|(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})) = \Pr(A_h).$$

Annak eldöntése, hogy egy adott szituációban élhetünk-e az események függetlenségének a feltételezésével nem mindig egyszerű feladat. Számos fontos összefüggés csak független eseményekre érvényes, így erős a kísértés, hogy akkor is függetlennek tekintsenek eseményeket, amikor azt szinte semmi nem támasztja alá. Aki nem elég körültekintő könnyen hamis következtetésre juthat.

Állítás. Legyen $n \geqslant 2$. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz bármely legalább két elemű $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ részhalmaza esetén

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})\cdots\Pr(A_{j_l}).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz bármely legalább két elemű $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ részhalmaza esetén

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})\cdots\Pr(A_{j_l}).$$

Legyen $1 \leqslant h \leqslant n$, és tekintsük az $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{h\}$ indexhalmaz valamely nem üres $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ részhalmazát. Ha most $\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\Pr(A_h|(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})) &= \frac{\Pr(A_h\cap A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})}{\Pr(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})}\\ &= \frac{\Pr(A_h)\Pr(A_{i_1})\Pr(A_{i_2})\cdots\Pr(A_{i_k})}{\Pr(A_{i_1})\Pr(A_{i_2})\cdots\Pr(A_{i_k})}\\ &= \Pr(A_h).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenek.

Tegyük fel ezek után, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenek. Tekintsük az $\{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmaz valamely legalább két elemű $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ részhalmazát. Megmutatjuk, hogy

$$\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})\cdots\Pr(A_{j_l}).$$

Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(l)$ az az állítás, hogy ha az $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_l}$ események függetlenek, akkor

$$\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})\cdots\Pr(A_{j_l}).$$

Alapeset. $P(2)$ igaz, hiszen $\Pr(A_{j_1}) \neq 0$ esetén

$$\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2}|A_{j_1}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})$$

a függetlenség miatt, különben pedig

$$\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2}),$$

hiszen ekkor mindkét oldal 0.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(l)$ igaz valamely $l \geqslant 2$ egész számra. Belátjuk, hogy $P(l+1)$ is igaz. Ha $\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l}) \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}&\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_{l+1}}) =\\ &\qquad = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2}|A_{j_1})\cdots\Pr(A_{j_{l+1}}|(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l}))\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2}|A_{j_1})\cdots\Pr(A_{j_{l+1}}|(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l})) =\\ &\qquad = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2})\cdots\Pr(A_{j_{l+1}})\end{aligned}$$

a függetlenség miatt. Ellenkező esetben

$$\Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_{l+1}}) = \Pr(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_l})\Pr(A_{j_{l+1}})$$

hiszen itt mindkét oldal 0. Ám az indukciós feltevés szerint

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1}) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}),$$

(az $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_l}$ események is függetlenek!), következésképpen

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_{l+1}}) = \Pr(A_{j_1}) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_{l+1}}).$$

ismét teljesül. Így a $P(l+1)$ állítás is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(l)$ igaz minden $l \geqslant 2$ egész számra.

Az állítással összhangban n esemény (teljes) függetlensége $2^n - n - 1$ összefüggés fennállását jelenti. Még egy állítást igazolunk.

Állítás. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ független események. Ekkor az események közül akárhányat az ellentettjükre cserélve továbbra is független eseményeket kapunk.

Bizonyítás. Nyilván elég megmutatni, hogy ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenek, akkor az $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ események is azok, hiszen az $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményektől lépésenként egy eseményt az ellentettjére cserélve az összes szóba jövő esemény n-eshez eljuthatunk. Az előző állítás szerint az $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha a $\{2, 3, \dots, n\}$ indexhalmaz bármely legalább két elemű $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ részhalmaza esetén

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_1}) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}),$$

illetve bármely nem üres $\{j_2, j_3, \dots, j_l\}$ részhalmaza esetén

$$\Pr(\overline{A_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) = \Pr(\overline{A_1}) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}).$$

Az első rész az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenségéből adódik. A második rész igazolásához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l} &= (A_1 \cup \overline{A_1}) \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l} \\ &= (A_1 \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) \cup (\overline{A_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}). \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\Pr(A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_1 \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) + \Pr(\overline{A_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}),$$

illetve átrendezve

$$\Pr(\overline{A_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) = \Pr(A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}) - \Pr(A_1 \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_l}).$$

Végül felhasználva, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_l}) &= \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}) - \Pr(A_1) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}) \\
&= (1 - \Pr(A_1)) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}) \\
&= \Pr(\overline{A_1}) \Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_l}).
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy feldobunk három szabályos érmét. A kísérletnek 8 kimenetele van, amelyekre olyan hármasokkal hivatkozhatunk, amelyek i-edik tagja az i-edik érme feldobásának az eredménye ($i = 1, 2, 3$). Az eseménytér ennek megfelelően

$$\{(F, F, F), (F, F, I), (F, I, F), (I, F, F), (F, I, I), (I, F, I), (I, I, F), (I, I, I)\}.$$

Minden kimenetel valószínűséga $(1/2)^3 = 1/8$.

Legyen most A_1 az az esemény, hogy a második és a harmadik érme feldobásának az eredménye ugyanaz, A_2 az az esemény, hogy az első és a harmadik érme feldobásának az eredménye ugyanaz, A_3 pedig az az esemény, hogy az első és a második érme feldobásának az eredménye ugyanaz. Határozzuk meg először az A_1, A_2 és A_3 események valószínűségét.

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1) &= \Pr[(F, F, F)] + \Pr[(I, F, F)] + \Pr[(F, I, I)] + \Pr[(I, I, I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}, \\
\Pr(A_2) &= \Pr[(F, F, F)] + \Pr[(F, I, F)] + \Pr[(I, F, I)] + \Pr[(I, I, I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}, \\
\Pr(A_3) &= \Pr[(F, F, F)] + \Pr[(F, F, I)] + \Pr[(I, I, F)] + \Pr[(I, I, I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Határozzuk meg ezután az $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ és $A_2 \cap A_3$ esemény valószínűségét.

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cap A_2) &= \Pr[(F, F, F)] + \Pr[(I, I, I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cap A_3) &= \Pr[(F,F,F)] + \Pr[(I,I,I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}, \\
\Pr(A_2 \cap A_3) &= \Pr[(F,F,F)] + \Pr[(I,I,I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Határozzuk meg végül az $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ esemény valószínűségét.

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr[(F,F,F)] + \Pr[(I,I,I)] \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Mindezekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cap A_2) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2), \\
\Pr(A_1 \cap A_3) &= \Pr(A_1)\Pr(A_3), \\
\Pr(A_1 \cap A_3) &= \Pr(A_2)\Pr(A_3),
\end{aligned}$$

miközben

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3).$$

Ez indokolja a következő definíciót.

Legyen $n \geqslant m \geqslant 2$. Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események m-enként függetlenek, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz bármely m elemű $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ részhalmaza esetén az $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$ események függetlenek. Speciálisan, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeket páronként függetleneknek mondjuk, ha tetszőleges $1 \leqslant i < j \leqslant n$ indexekre az A_i és A_j események függetlenek.

Születésnap paradoxon

Egy előadóteremben 85 hallgató ül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van közöttük két olyan, akiknek ugyanaznap van a születésnapjuk? Összevetve a 85 hallgatót a lehetséges 365 születésnappal 1/4-nél többre nemigen tippelnénk. Ezúttal megbízhatunk az intuíciónkban?

A probléma megoldásánál élni fogunk azzal a feltételezéssel, hogy a születésnapok egymástól függetlenül, ugyanakkora valószínűséggel esnek az év bármely napjára. A feladatban szereplő specifikus értékek helyett legyen a teremben ülő hallgatók száma m, és álljon az év N napból. Alkalmazzuk a már többször bevált négy lépésből álló módszert!

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

Számozzuk meg a teremben ülő hallgatókat 1-től m-ig, például névsor szerint. Ezután a kísérlet kimeteleire

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

alakú sorozatokkal hivatkozhatunk, ahol b_i az i-edik hallgató születésnapja minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén. Az eseménytér ennek megfelelően:

$$\mathcal{S} = \{(b_1, b_2, \ldots, b_m) \mid b_i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}.$$

2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Arra az A eseményre vagyunk kíváncsiak, hogy a hallgatók között van két olyan, akiknek ugyanaznap van a születésnapjuk. Kényelmesebb lesz ennek az eseménynek az ellentettjét vizsgálni, vagyis azt az eseményt, hogy a hallgatók születésnapjai mind különbözők:

$$\overline{A} = \{(b_1, b_2, \ldots, b_m) \mid \text{minden } b_i \text{ különböző}\}.$$

Ha sikerül a $\Pr(\overline{A})$ valószínűséget meghatározni, abból a

$$\Pr(A) + \Pr(\overline{A}) = 1$$

összefüggés felhasználásával a $\Pr(A)$ valószínűség is adódik.

3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy bizonyos $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ sorozat a teremben ülő hallgatók születésnap sorozata? Mivel a születésnapok egymástól függetlenül, ugyanakkora valószínűséggel esnek az év bármely napjára, ezért annak a valószínűsége, hogy az i-edik hallgatónak b_i a születésnapja $1/N$, következésképpen annak a valószínűsége, hogy az első hallgatónak b_1 a születésnapja, a második hallgatónak b_2 a születésnapja, ..., az m-edik hallgatónak b_m a születésnapja $(1/N)^m$.

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

Lássuk mennyi az

$$\overline{A} = \{(b_1, b_2, \ldots, b_m) \mid \text{minden } b_i \text{ különböző}\}.$$

esemény valószínűsége! Ez egy gigantikus méretű halmaz: a lehetséges első komponensek (b_1 értékek) száma N, bármely első komponenshez a lehetséges második komponensek (b_2 értékek) száma $N-1$, az első két komponens bármely kombinációjához a lehetséges harmadik komponensek (b_3 értékek) száma $N-2$, és így tovább, következésképpen

$$|\overline{A}| = N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}.$$

Ennélfogva

$$\Pr(\overline{A}) = \frac{N!}{(N-m)!} \cdot \frac{1}{N^m} = \frac{N!}{N^m(N-m)!}$$

és így

$$\Pr(A) = 1 - \frac{N!}{N^m(N-m)!}.$$

A $\Pr(A)$ valószínűségre kapott formula elég komplikált, azonban vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{N!}{N^m(N-m)!} &= \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-(m-1))}{N^m} \\
&= \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdots \frac{N-(m-1)}{N} \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{N}\right) \\
&< e^{-1/N} \cdot e^{-2/N} \cdots e^{-(m-1)/N} \\
&= e^{-(1+2+\cdots+(m-1))/N} \\
&= e^{-m(m-1)/2N}
\end{aligned}$$

(a negyedik lépésnél felhasználtuk az $e^x \geqslant 1 + x$ egyenlőtlenséget, amely minden x valós számra teljesül).

Ha $m = 85$ és $N = 365$, akkor ez az érték kisebb, mint $1/17000$, így annak a valószínűsége, hogy az előadóteremben ül két olyan hallgató, akiknek ugyanaznap van a születésnapjuk nagyobb, mint $1 - 1/17000 > 0.9999$. Intuíciónk ismét megcsalt!

Két boríték

Egy televíziós vetélkedőben a műsorvezető elővesz két borítékot, amelyekben egy-egy 0 és 10 közötti egész szám van. A számok különbözők. A játékosnak nincs más dolga, mint kitalálni, melyik borítékban van a nagyobb szám. Az izgalom fokozása érdekében a műsorvezető felajánlja, hogy a játékos a tippelés előtt belekukkanthat valamelyik általa választott borítékba. Tud-e a játékos ebből előnyt kovácsolni?

Akármilyen hihetetlenül hangzik, de van olyan stratégia, amely a játékos számára nagyobb, mint 50% nyerési esélyt biztosít. Az algoritmust arra az általános esetre írjuk le, amikor a borítékokban levő számok a $\{0, 1, \ldots, n\}$ halmazból kerülnek ki. Jelölje a borítékokban levő kisebb számot L, a nagyobbat pedig H.

Válasszon a játékos véletlenszerűen egy x számot az

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}\right\}$$

halmazból, minden elemet ugyanakkora valószínűséggel. Ezután kukkantson bele valamelyik borítékba. Ha a borítékban látott T szám nagyobb, mint x, akkor tippeljen arra, hogy ebben a borítékban van a nagyobb szám, ellenkező esetben pedig arra, hogy a másik borítékban.

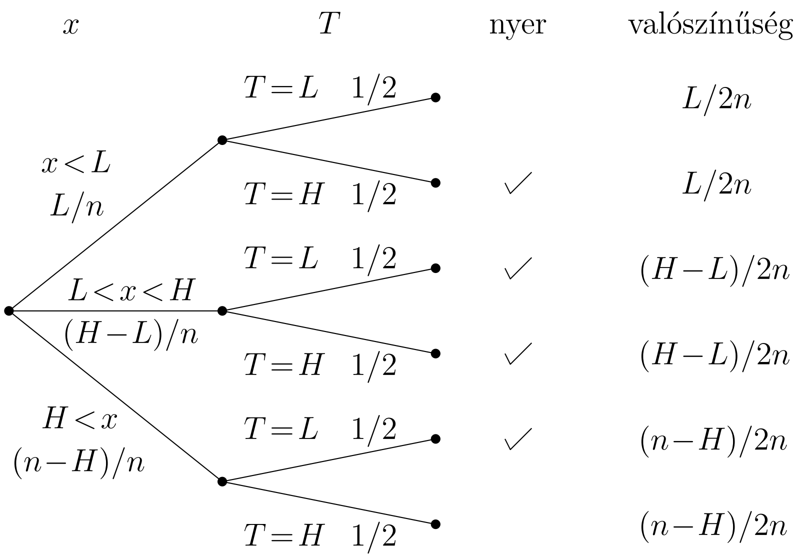
Lássuk mennyi a valószínűsége annak, hogy a játékos eltalálta, melyik borítékban van a nagyobb szám! Alkalmazzuk a már jól bevált négy lépésből álló módszert!

1. lépés: vegyük számba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!

A játékos vagy olyan x számot választott, amely kisebb, mint L, vagy olyant, amely L és H között van, vagy olyant, amely nagyobb, mint H. Ezután vagy abba a borítékba kukkantott bele, amelyik a kisebb számot tartalmazza, vagy abba, amelyik a nagyobbat. Így a kísérletnek összesen 6 kimenetele van.

2. lépés: határozzuk meg a kedvező kimeneteleket!

Arra az eseményre vagyunk kíváncsiak, hogy a játékos eltalálta, melyik borítékban van a nagyobb szám. Ez az esemény, ahogy a diagram is mutatja, négy kimenetelből áll



3. lépés: határozzuk meg a kimenetelek valószínűségét!

A kimenetelek valószínűségének meghatározásához először a fa éleihez rendelünk valószínűségeket. Annak a valószínűsége, hogy $x < L$ teljesül L/n, annak a valószínűsége, hogy $L < x < H$ teljesül $(H - L)/n$, míg annak a valószínűsége, hogy $x > H$ teljesül $(n - H)/n$. Annak a valószínűsége pedig, hogy a játékos a kisebb, illetve a nagyobb számot tartalmazó borítékba kukkantott bele egyaránt $1/2$. Egy kimenetel valószínűsége ezek után a megfelelő, gyökértől levélig vezető úton található élekhez rendelt valószínűségek szorzata.

4. lépés: határozzuk meg az események valószínűségét!

Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a játékos eltalálta, melyik borítékban van a nagyobb szám az eseményt alkotó kimenetelek valószínűségeinek összege:

$$\frac{L}{2n} + \frac{H-L}{2n} + \frac{H-L}{2n} + \frac{n-H}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{H-L}{2n} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

(az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy a borítékokban különböző számok vannak).

Ha $n = 10$, akkor ez az érték $\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = 0.55$, így a játékos nyerési esélye legalább 55%, akármilyen számok is vannak a borítékokban.

Valószínűségi változók

Legyen $\mathcal{S}$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen eseménytér. Ekkor egy $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ függvényt valószínűségi változónak nevezünk.

Tegyük fel, hogy feldobunk három szabályos érmét. A kísérletnek 8 kimenetele van, amelyekre olyan hármasokkal hivatkozhatunk, amelyek i-edik tagja az i-edik érme feldobásának az eredménye ($i = 1, 2, 3$). Az eseménytér ennek megfelelően

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{llll} (F,F,F), & (F,F,I), & (F,I,F), & (I,F,F), \\ (F,I,I), & (I,F,I), & (I,I,F), & (I,I,I) \end{array} \right\}$$

Minden kimenetel valószínűséga 1/8.

Definiáljuk az $\mathcal{S}$ eseménytéren a C és az M valószínűségi változókat a következőképpen:

$$\begin{array}{ll} C\,[\,(F,F,F)\,] = 3 & C\,[\,(F,I,I)\,] = 1 \\ C\,[\,(F,F,I)\,] = 2 & C\,[\,(I,F,I)\,] = 1 \\ C\,[\,(F,I,F)\,] = 2 & C\,[\,(I,I,F)\,] = 1 \\ C\,[\,(F,F,I)\,] = 2 & C\,[\,(I,I,I)\,] = 0\,, \end{array}$$

illetve

$$\begin{array}{ll} M\,[\,(F,F,F)\,] = 1 & M\,[\,(F,I,I)\,] = 0 \\ M\,[\,(F,F,I)\,] = 0 & M\,[\,(I,F,I)\,] = 0 \\ M\,[\,(F,I,F)\,] = 0 & M\,[\,(I,I,F)\,] = 0 \\ M\,[\,(F,F,I)\,] = 0 & M\,[\,(I,I,I)\,] = 1\,. \end{array}$$

A C valószínűségi változó értéke a dobott fejek száma, az M valószínűségi változó pedig azt mutatja meg, hogy mindhárom érmével ugyanazt dobtuk-e.

Egy valószínűségi változót indikátor valószínűségi változónak nevezünk, ha minden kimenetelhez 0 vagy 1 értéket rendel. Például M egy indikátor valószínűségi változó. Szoros kapcsolat áll fenn az indikátor valószínűségi változók és az események között. Egy indikátor valószínűségi változó két részre osztja az eseményteret: az egyik részbe azok a kimenetelek tartoznak, amelyekhez a valószínűségi változó egyet rendel, a másik részbe azok, amelyekhez nullát. Például az $\mathcal{S}$ eseménytérnek az M indikátor valószínűségi változó által meghatározott partíciója a következő:

$$\underbrace{(F,F,F) \quad (I,I,I)}_{M=1}$$
$$\underbrace{(F,F,I) \quad (F,I,F) \quad (I,F,F) \quad (F,I,I) \quad (I,F,I) \quad (I,I,F)}_{M=0}.$$

Ugyanígy, egy E esemény két részre osztja az eseményteret: az egyik részben azok a kimenetelek vannak, amelyek hozzátartoznak E-hez, a másik részben azok, amelyek nem. Ennélfogva az E eseményre természetes módon hivatkozhatunk azzal az I_E indikátor valószínűségi változóval, amelyre $I_E(w) = 1$, ha $w \in E$ és $I_E(w) = 0$, ha $w \notin E$. Példánkban $M = I_E$, ahol E az az esemény, hogy mindhárom érmével ugyanazt dobjuk.

Valójában bármely valószínűségi változó a fentiekhez hasonló módon particionálja az eseményteret: a partíció egy tagja azokból a kimenetelekből áll, amelyekhez a valószínűségi változó ugyanazt az értéket rendeli. Például az $\mathcal{S}$ eseménytérnek a C valószínűségi változó által meghatározott partíciója a következő:

$$\begin{gathered}
\underbrace{(I,I,I)}_{C=0} \\
\underbrace{(F,I,I) \quad (I,F,I) \quad (I,I,F)}_{C=1} \\
\underbrace{(F,F,I) \quad (F,I,F) \quad (I,F,F)}_{C=2} \\
\underbrace{(F,F,F)}_{C=3}.
\end{gathered}$$

A partíció minden tagja az eseménytér egy részhalmaza, így egy esemény. Ennek megfelelően a $C = 2$ összefüggésre eseményként is tekinthetünk, amely az

$$(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F)$$

kimenetelekből áll. Ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\Pr(C = 2) = \Pr[(F,F,I)] + \Pr[(F,I,F)] + \Pr[(I,F,F)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Továbbmenve, valószínűségi változókra vonatkozó tetszőleges összefüggésre tekinthetünk eseményként. Például a $C \leqslant 1$ egyenlőtlenség, mint esemény, az

$$(F,I,I),(I,F,I),(I,I,F),(I,I,I)$$

kimenetelekből áll, és ennek az eseménynek a valószónűsége

$$\begin{aligned}
\Pr(C \leqslant 1) = \Pr[(F,I,I)] + \Pr[(I,F,I)] + \Pr[(I,I,F)] + \Pr[(I,I,I)] = \\
= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ugyanazon eseménytéren értelmezett valószínűségi változókból a szokásos műveletek felhasználásával újabb valószínűségi változókat képezhetünk.

Például tegyük fel, hogy két szabályos kockával dobunk. A D_1 valószínűségi változó értéke legyen az első kockával dobott szám, a D_2 valószínűségi változó értéke pedig legyen a második kockával dobott szám. Legyen most

$$T = D_1 + D_2.$$

Ez szintén egy valószínűségi vátozó, amelynek értéke a két kockával dobott számok összege. Itt

$$\Pr(T = 2) = \frac{1}{36}$$

és

$$\Pr(T = 7) = \frac{1}{6}.$$

Ennél bonyolultabb módon is képezhetünk valószínűségi változókból újabb valószínűségi változókat. Például

$$Y = e^T$$

szintén egy valószínűségi változó. Ebben az esetben

$$\Pr(Y = e^2) = \frac{1}{36}$$

és

$$\Pr(Y = e^7) = \frac{1}{6}.$$

Végül a függetlenség fogalma a következőképpen vihető át eseményekről valószínűségi változókra. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ugyanazon eseménytéren értelmezett valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók (teljesen) függetlenek, ha az értékkészleteik tetszőleges $r_1, r_2, \ldots, r_n$ elemeire az $X_1 = r_1$, $X_2 = r_2$, $\ldots$, $X_n = r_n$ események (teljesen) függetlenek. Legyen továbbá $2 \leqslant m \leqslant n$. Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók m-enként függetlenek, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz bármely m elemű $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ részhalmaza esetén az $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_m}$ valószínűségi változók függetlenek.

Például C és M független valószínűségi változók? Intuíciónk azt súgja, hogy nem, hiszen a dobott fejek száma egyértelműen meghatározza, hogy mindhárom érmével ugyanazt dobtuk-e. A precíz bizonyításhoz találnunk kell olyan $x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ és $x_2 \in \{0, 1\}$ számokat, amelyekre

$$\Pr((C = x_1) \cap (M = x_2)) \neq \Pr(C = x_1) \Pr(M = x_2).$$

Egy alkalmas választás $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$. Ekkor

$$\Pr((C = 2) \cap (M = 1)) = 0$$

míg

$$\Pr(C = 2)\Pr(M = 1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \neq 0.$$

Szoros kapcsolat áll fenn események és indikátor valószínűségi változóik függetlensége között.

Állítás. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha ugyenez fennáll az $I_{A_1}, I_{A_2}, \dots, I_{A_n}$ indikátor valószínűségi változóikra is.

A bizonyításhoz elég arra a korábbi állításra hivatkozni, hogy ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ független események, akkor közülük akárhányat az ellentettjükre cserélve továbbra is független eseményeket kapunk.

Várható érték

Legyen X egy az $\mathcal{S}$ eseménytéren értelmezett valószínűségi változó. Ekkor az

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}} X(\omega)\Pr(\omega)$$

mennyiséget X várható értékének nevezzük. Ha az eseménytér megszámlálhatóan végtelen, akkor természetesen fel kell tennünk, hogy a jobb oldali sor abszolút konvergens.

Például tegyük fel, hogy egy szabályos kockával dobunk. Az X valószínűségi változó értéke legyen a kockával dobott szám. Ekkor

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Ez a számítás mutatja, hogy a várható érték elnevezés kicsit félrevezető; előfordul, hogy a valószínűségi változó ezt az értéket soha nem veszi fel. Egy szabályos kockával sose dobunk $3\frac{1}{2}$-t!

Állítás. Egy A esemény I_A indikátor valószínűségi változójának a várható értéke

$$\mathrm{E}(I_A) = \Pr(A).$$

Bizonyítás.

$$\mathrm{E}(I_A) = 1 \cdot \Pr(I_A = 1) + 0 \cdot \Pr(I_A = 0) = \Pr(I_A = 1) = \Pr(A).$$

Egy valószínűségi változó várható értéke többféle módon is kiszámítható.

Állítás. Legyen X egy az $\mathcal{S}$ eseménytéren értelmezett valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy X-nek létezik várható értéke. Ekkor

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x \Pr(X = x)$$

(az összegzés az X valószínűségi változó értékkészletén történik).

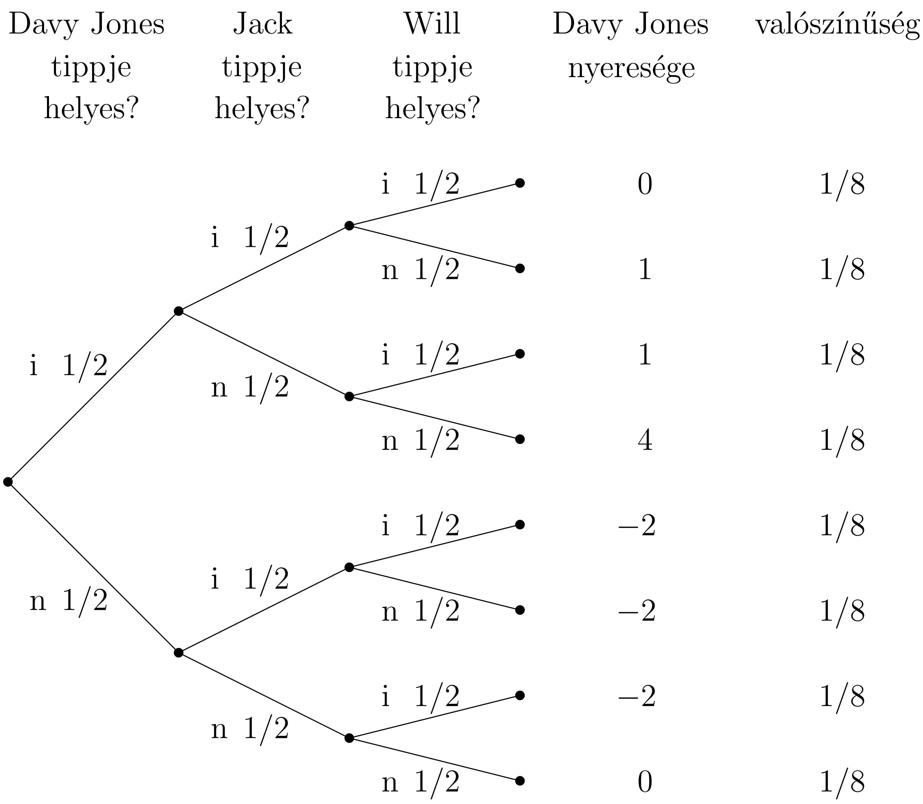
Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{\omega \in \mathcal{S}} X(\omega) \Pr(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{R}_X} \sum_{\omega \in [X=x]} X(\omega) \Pr(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{R}_X} \sum_{\omega \in [X=x]} x \Pr(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x \sum_{\omega \in [X=x]} \Pr(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x \Pr(X = x).
\end{aligned}$$

Igazságos játék?

Davy Jones, Jack Sparrow és Will Turner a következő játékot játsszák. Mindenki kitesz az asztal közepére két aranyat, majd feldobnak egy (szabályos) pénzérmét. Mielőtt az érme leesik, mindenkinek meg kell tippelni, hogy fej vagy írás lesz-e felül. Akik jól tippeltek, igazságosan megosztoznak az asztal közepén lévő hat aranyon. Ha mindhárman tévesen tippeltek, akkor mindenki visszakapja a két aranyát.

A játék lehetséges kimeneteleit a következő fa diagram mutatja:



Igazságos ez a játék abban az értelemben, hogy a résztvevők várható nyeresége 0 arany? Egy résztvevő nyeresége magától értetődően a játék végén az asztal közepéről neki járó aranyak száma mínusz a játék kezdetén az asztal közepére tett aranyainak száma. Például, ha Davy Jones és Jack Sparrow helyesen tippelt, Will Turner viszont nem, akkor Davy Jones nyeresége

$$\frac{6}{2} - 2 = 1$$

arany. Ellenben ha Jack Sparrow és Will Turner tippelt helyesen, Davy Jones pedig nem, akkor Davy Jones nyeresége

$$0 - 2 = -2$$

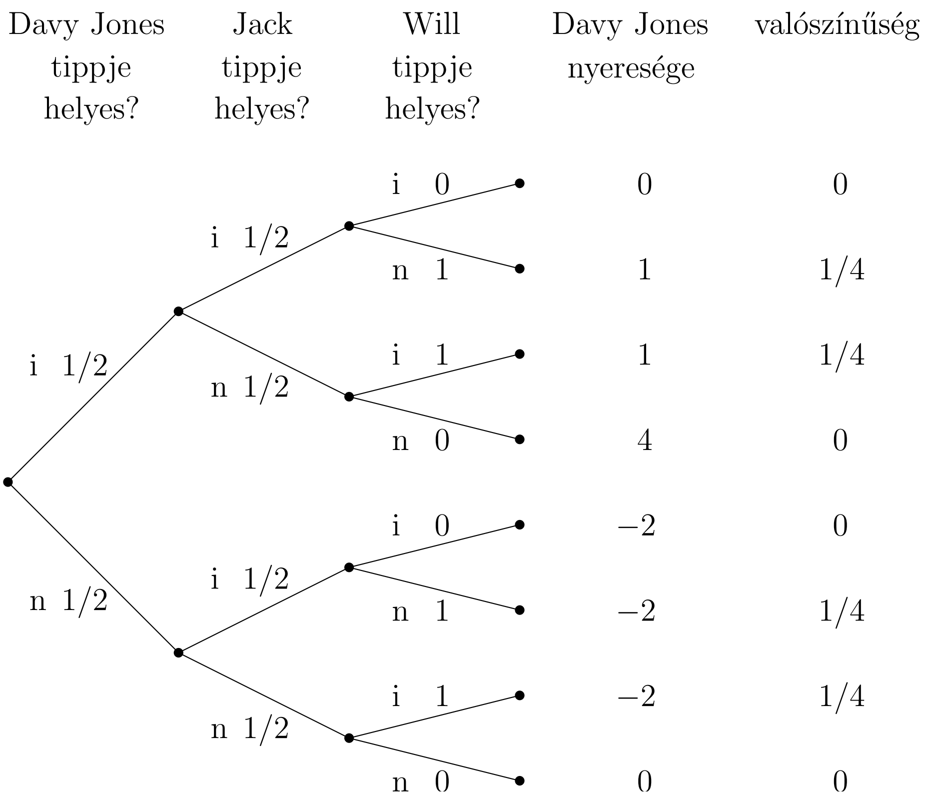
arany. Legyen az X valószínűségi változó értéke Davy Jones nyeresége. A várható érték definíciója szerint

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a játék Davy Jones számára (és szimmetria miatt Jack Sparrow és Will Turner számára is) igazságos.

Mindezek ellenére Davy Jones egy idő után azt veszi észre, hogy az aranyai igen csak megfogyatkoztak. Éktelen haragra gerjed. Jack Sparrow és Will Turner próbálják meggyőzni, hogy ez csak a balszerencse, de Davy Jones meg van győződve róla, hogy két társa összejátszott ellene. Lehetséges ez?

Lássuk, hogyan módosulnak az esélyek, ha Jack Sparrow és Will Turner megegyeznek, hogy mindig ellentétesen tippelnek, azaz ha Jack Sparrow fejet mond, akkor Will Turner írást, és fordítva. A játék végén így valamelyikük biztos részesül az asztal közepén levő hat aranyból. A játék lehetséges kimenetelei továbbra is ugyanazok, azonban az egyes kimentelek valószínűségei változnak, ahogy az alábbi fa diagram mutatja:



Davy Jones nyereségének várható értéke is módosul:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-2) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{2}.$$

Davy Jones gyanúja tehát nagyon is megalapozott!

Feltételes várható érték

Legyen X tetszőleges valószínűségi változó és A egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor az

$$\mathrm{E}(X|A) = \sum_{r \in \mathcal{R}_X} r \Pr((X = r)|A))$$

mennyiséget az X valószínűségi változó A eseményre vonatkozó feltételes várható értékének nevezzük. Ha az eseménytér megszámlálhatóan végtelen, akkor természetesen fel kell tennünk, hogy a jobb oldali sor abszolút konvergens. Megjegyezzük, hogy ha $\mathrm{E}(X)$ létezik, akkor $\mathrm{E}(X|A)$ is létezik, ugyanis bármely $r \in \mathcal{R}_X$ esetén

$$\Pr((X = r)|A) = \frac{\Pr((X = r) \cap A)}{\Pr(A)} \leqslant \frac{\Pr(X = r)}{\Pr(A)}.$$

Tegyük fel ismét, hogy egy szabályos kockával dobunk, és határozzuk meg az eredmény várható értékét azon feltevés mellett, hogy legalább négyet dobtunk. Az X valószínűségi változó értéke legyen a kockával dobott szám. Ekkor

$$\mathrm{E}(X|X \geqslant 4) = \sum_{i=1}^{6} i \Pr(X = i|(X \geqslant 4) = 1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{3} = 5.$$

Az esetszétválasztás módszere valószínűségi változók várható értékének kiszámításánál is gyakran segítségünkre van.

Teljes várható érték tétel. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ egymást páronként kizáró, pozitív valószínűségű események (véges vagy megszámlálhatóan végtelen), amelyekre

$$\sum_i \Pr(A_i) = 1,$$

továbbá X egy valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke. Ekkor

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i \mathrm{E}(X|A_i) \Pr(A_i).$$

Bizonyítás. Használjuk a teljes valószínűség tételt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{r\in\mathcal{R}_X} r\,\Pr(X=r)\\
&= \sum_{r\in\mathcal{R}_X} r\left(\sum_i \Pr((X=r)|A_i)\Pr(A_i)\right)\\
&= \sum_{r\in\mathcal{R}_X}\left(\sum_i r\ \Pr((X=r)|A_i)\Pr(A_i)\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_{r\in\mathcal{R}_X} r\ \Pr((X=r)|A_i)\Pr(A_i)\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_{r\in\mathcal{R}_X} r\ \Pr((X=r)|A_i)\right)\Pr(A_i)\\
&= \sum_i \mathrm{E}(X|A_i)\Pr(A_i).
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a Föld népességének 49.8%-a férfi. Azt is tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott férfi magasságának várható értéke 180 cm, míg egy véletlenszerűen választott nő magasságának várható értéke 165 cm. Mennyi lesz ekkor egy véletlenszerűen választott személy magasságának várható értéke?

Az M valószínűségi változó értéke legyen egy véletlenszerűen választott személy magassága, legyen továbbá F az az esemény, hogy a véletlenszerűen választott személy férfi. Ekkor a teljes várható érték tétel szerint

$$\mathrm{E}(M)=\mathrm{E}(M|F)\Pr(F)+\mathrm{E}(M|\overline{F})\Pr(\overline{F})=180\cdot 0.498+165\cdot 0.502=172.47,$$

ami kicsit nagyobb, mint 172 cm.

Meghibásodás

Tegyük fel, hogy egy hálózati eszköz a működésének minden óráját követően p valószínűséggel hibásodik meg, ha korábban még nem hibásodott meg. Várhatóan hány óra elteltével hibásodik meg az eszköz? Jelölje C a meghibásodásig eltelt órák számát; feladatunk $\mathrm{E}(C)$ meghatározása.

A C valószínűségi változó értékkészlete a pozitív egész számok halmaza, ezért

$$\mathrm{E}(C)=\sum_{i=1}^{\infty} i\,\Pr(C=i).$$

A jobb oldalt alaposabban szemügyre véve feltűnhet, hogy figyelmen kívül hagyjuk azt a kimenetelt, amikor az eszköz soha nem hibásodik meg. Ez valóban így van; azonban mi is azt az általánosan elfogadott konvenciót követjük, hogy a várható érték kiszámításánál eltekintünk azoktól a kimenetelektől, amelyek nulla valószínűségűek. És a "soha meg nem hibásodás" valószínűsége

$$\lim_{i\to\infty}(1-p)^i = 0.$$

Visszatérve a formulára a $\Pr(C = i)$ valószínűségeket könnyű kiszámítani: az eszköz akkor és csak akkor hibásodik meg pontosan i óra elteltével, ha nem hibásodik meg az első $i-1$ órában viszont az i-edik órát követően meghibásodik. Ennek valószínűsége nyilván $p(1-p)^{i-1}$, így

$$\mathrm{E}(C) = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}.$$

A hányados kritériumból rögtön adódik, hogy a jobb oldalon álló végtelen sor (abszolút) konvergens:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{(i+1)p(1-p)^i}{ip(1-p)^{i-1}} = (1-p)\lim_{i\to\infty}\frac{i+1}{i} = 1-p < 1.$$

Így a C valószínűségi változónak létezik várható értéke. A várható értéket legegyszerűbben talán a következőképpen határozhatjuk meg. Induljunk ki a

$$\sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}$$

végtelen sorból, szorozzuk meg $(1-p)$-vel, majd a kapott sort vonjuk ki a kiindulási sorból:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} - (1-p)\sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} = \mathrm{E}(C) - (1-p)\,\mathrm{E}(C) = p\,\mathrm{E}(C).$$

Itt a bal oldal

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i} &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)p(1-p)^{i} - \sum_{i=0}^{\infty} ip(1-p)^{i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{i} \\ &= p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} \\ &= p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} \\ &= 1,\end{aligned}$$

ennélfogva

$$p\,\mathrm{E}(C) = 1,$$

ahonnan

$$\mathrm{E}(C) = 1/p.$$

Például ha az eszköz a működésének minden óráját követően 1% eséllyel hibásodik meg, akkor az eszköz várhatóan $1/0.01 = 100$ óra elteltével hibásodik meg.

Családtervezés

Egy fiatal házaspár azt szeretné, ha leendő gyermekeik között kislány is lenne. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a házaspárnak ugyanakkora eséllyel születik kisfia és kislánya, illetve, hogy a leendő gyermekeik neme független egymástól. Ha a házastársak megállapodnak, hogy addig próbálkoznak, amíg nem születik egy kislány, akkor hány kisfiúra számíthatnak a kislány születése előtt?

Meglepő, de matematikailag ugyanazzal a problémával állunk szemben, mint az előbb: ha a házaspár minden megszületett gyermeke $p = 1/2$ valószínűséggel fiú, akkor várhatóan hányadik gyerek megszületése után örülhetnek annak, hogy az újszülött kislány? Az előző gondolatmenet szerint ez várhatóan az $(1/p)$-edik, vagyis a második gyermek megszületésénél fog bekövetkezni, így csupán egyetlen kisfiúra számíthatnak a kislány előtt.

Geometriai eloszlás

Egy X valószínűségi változót p-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változónak nevezünk ($0 \leqslant p \leqslant 1$ tetszőleges valós szám), ha értékkészlete a pozitív egész számok halmaza és minden i pozitív egész számra

$$\Pr(X = i) = p(1-p)^{i-1}.$$

Az előbbiekkel összhangban egy p-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $1/p$.

Hálózati adatátvitel

Tegyük fel, hogy meg akarjuk becsülni egy számítógép hálózatban a végpontok közötti átlagos késleltetést. Ehhez ezer alkalommal lemérjük, hogy egy csomag mennyi idő alatt jut el a hálózat egy végpontjából egy másikba. Ha ezen értékek átlaga mondjuk 8.3 ms, akkor következtethetünk-e ebből arra, hogy az átlagos késleltetés 8-10 ms körül van?

Legyen a D valószínűségi változó értéke az az idő (milliszekundumra kerekítve), amely alatt egy csomag eljut a hálózat egy végpontjából egy másikba. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények a következő eloszlást mutatják:

$$\Pr(D = i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0, \\ \frac{1}{i(i+1)} & \text{ha } i > 0. \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pr(D = i) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1.$$

Intuíciónk azt súgja, hogy D várható értéke nem lehet túl nagy, azonban ennek éppen az ellenkezője igaz:

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr(D = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{i(i+1)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \infty.$$

Hogyan lehetséges, hogy a várható érték ilyen messze van a mérési eredmények átlagától? Annak a valószínűsége, hogy egy csomag mondjuk 10000 ms-nál hosszabb idő alatt jut el a hálózat egy végpontjából egy másikba rendkívül kicsi, így méréseink során szinte biztos nem találkozunk ilyennel. Számoljuk ki D feltételes várható értékét azon feltevés mellett, hogy $D \leqslant n$ valamely n pozitív egész számra:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D|D \leqslant n) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr(D = i|D \leqslant n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \, \frac{\Pr((D = i) \cap (D \leqslant n))}{\Pr(D \leqslant n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \, \frac{\Pr(D = i)}{\Pr(D \leqslant n)} \\
&= \frac{1}{\Pr(D \leqslant n)} \sum_{i=1}^{n} i \Pr(D = i) \\
&= \frac{1}{\Pr(D \leqslant n)} \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{1}{i(i+1)} \right) \\
&= \frac{1}{\Pr(D \leqslant n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}.
\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}
\Pr(D \leqslant n) &= 1 - \Pr(D > n) \\
&= 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+3} - \cdots \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1},
\end{aligned}$$

így

$$\mathrm{E}(D|D \leqslant n) = \frac{n+1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \sim \frac{n+1}{n} (\ln(n+1) - 1).$$

Ha $n = 10000$, akkor ez az érték körülbelül 8.2.

Feladatok

Teljes indukció

Igazoljuk teljes indukcióval a következőket!

1. Minden n természetes számra

$$3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}.$$

2. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

3. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

4. Minden n pozitív egész számra

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. Minden n természetes számra

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

6. Minden n természetes számra

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1).$$

7. Minden n pozitív egész számra

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

8. Minden n pozitív egész számra

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

9. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

10. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

11. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

12. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

13. Minden n pozitív egész számra

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \cdots + (4n-1) = 3n^2.$$

14. Minden $n \geqslant 2$ egész számra

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

15. Minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}.$$

16. Minden $n \geqslant 2$ egész számra

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

17. Minden $n \geqslant 2$ egész számra

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

18. Minden n természetes számra

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

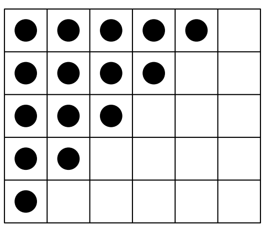
19. Minden n pozitív egész számra

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

20. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg a színűket. Lehetséges-e, hogy egy idő után minden kaméleon azonos színű lesz?

21. A bergengóciai sárkánynak 77 feje van, a királyfinak pedig olyan varázskardja, amellyel egy csapásra 7, 9 vagy 13 fejét tudja levágni a sárkánynak (már ha van legalább ennyi feje). Igen ám, de az első esetben a sárkánynak 13 új feje nő ki, a másodikban 18, a harmadik esetben pedig 10. Ha a sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Le tudja-e vágni a királyfi a varázskarddal a sárkány összes fejét?

22. Egy játéktáblán 15 érme helyezkedik el az ábrán látható módon. Az a célunk, hogy valamennyi érme átkerüljön az üres mezőkre.



Egy lépésben bármely érmével vízszintesen vagy függőlegesen átugorhatunk egy szomszédos érmét, ha annak túloldalán üres mező van. Lehetséges az érmék áthelyezése a kívánt módon?

23. Egy kezdetben $n \geqslant 1$ gyufaszálból álló kupacból két játékos felváltva vesz el egy, kettő vagy három szál gyufát. Az a játékos veszít, aki az utolsó szál gyufát kénytelen elvenni. Mutassuk meg, hogy $n = 4k + 1$ esetén, ahol $k \in \mathbb{N}$, a második, egyébként pedig a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája!

24. Tekintsük az előző játék következő változatát. Az asztalon két azonos számú gyufát tartalmazó kupac van. Két játékos felváltva kiválasztja valamelyik kupacot, és abból elvesz tetszés szerinti számú gyufát. Az nyer, akinek az utolsó gyufát sikerül elvenni. Mutassuk meg, hogy a másodiknak jövő játékosnak van nyerő stratégiája ebben a játékban!

25. Egy burleszkfilm forgatásán vagyunk. Éppen a habos torta dobáló jelenetet veszik fel. Egy teremben páratlan számú ember áll, mindegyikük kezében egy-egy habos torta. Az emberek egymástól páronként különböző távolságokra vannak. A rendező intésére minden ember a kezében levő tortát eldobja a hozzá legközelebb álló ember felé. Mutassuk meg, hogy ekkor lesz olyan ember, aki felé egyetlen torta sem repül!

26. Mutassuk meg, hogy n általános helyzetű egyenes (semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton) a síkot

$$1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

részre osztja!

27. Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész szám előáll $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$ alakban alkalmasan választott m pozitív egész számmal, illetve $+$ és $-$ jelekkel!

Fibonacci sorozat

Igazoljuk, hogy az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ és $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ minden $n \geqslant 2$ esetén rekurzióval definiált Fibonacci sorozatra teljesülnek a következők!

1. Minden n természetes számra

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

2. Minden n pozitív egész számra

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

3. Minden n természetes számra

$$f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

4. Minden n pozitív egész számra

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = (n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2.$$

5. Minden n pozitív egész számra

$$f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n} = nf_{2n+1} - f_{2n}.$$

6. Minden n pozitív egész számra

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n f_{n-1} - 1.$$

7. Minden n természetes számra

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

8. Minden n pozitív egész számra

$$f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2.$$

9. Minden n pozitív egész számra

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

10. Minden n természetes számra

$$f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n.$$

11. Minden n pozitív egész számra

$$f_n^2 + 2f_{n-1} f_n = f_{2n}.$$

12. Minden n pozitív egész számra

$$f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n}.$$

13. Minden n természetes számra

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}.$$

14. Egy lakótelep házait úgy akarják lefesteni, hogy minden szint vagy kék vagy fehér legyen. Hányféléré festhetnek egy n szintes házat, ha két egymás feletti szint nem lehet kék?

15. A szomszéd kisfiú a lépcsőn egyesével vagy kettesével véve a lépcsőfokokat szokott felugrálni, olykor váltva is ezeket egymással. Hány különböző módon ugrálhat fel így egy n lépcsőfokból álló lépcsőn?

16. Tegyük fel, hogy nyaralásra n euró költőpénzünk van. Minden nap választhatunk, hogy 1 euróért fagyit veszünk vagy 2 euróért gyümölcsöt. Hányféleképpen költhetjük el a pénzünket?

17. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, amelynek elemei között nincs két szomszédos szám?

18. Mutassuk meg, hogy minden természetes szám előáll különböző Fibonacci számok összegeként!

19. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a Fibonacci számokra vonatkozó következő képletet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Lineáris rekurziók

1. Mutassuk meg, hogy ha az s_n sorozatra az

$$s_n = \begin{cases} 2 & \text{ha } n = 0, \\ 3 & \text{ha } n = 1, \\ 3s_{n-1} - 2s_{n-2} & \text{ha } n \geqslant 2, \end{cases}$$

rekurzív összefüggés teljesül, akkor $s_n = 2^n + 1$ minden n természetes számra.

2. Adjunk zárt formulát a következő s_n rekurzív sorozatra:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0, \\ 2 & \text{ha } n = 1, \\ 2s_{n-1} + s_{n-2} & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}$$

3. Adjunk zárt formulát a következő s_n rekurzív sorozatra:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0, \\ 2 & \text{ha } n = 1, \\ 2s_{n-1} + 2s_{n-2} & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}$$

4. Adjunk zárt formulát a következő s_n rekurzív sorozatokra:

$$s_n = \begin{cases} 3 & \text{ha } n = 0, \\ 6 & \text{ha } n = 1, \\ s_{n-1} + 6s_{n-2} & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}$$

5. Adjunk zárt formulát a következő s_n rekurzív sorozatokra:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0, \\ 1 & \text{ha } n = 1, \\ 6s_{n-1} - 9s_{n-2} & \text{ha } n \geqslant 2. \end{cases}$$

6. Adjunk zárt formulát a következő s_n rekurzív sorozatokra:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0, \\ 2 & \text{ha } n = 1, \\ 3 & \text{ha } n = 2, \\ 12s_{n-2} - 16s_{n-3} & \text{ha } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Oszthatóság

1. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra n^3+2n osztható 3-mal!

2. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $n^5 - n$ osztható 5-tel!

3. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ osztható 9-cel!

4. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra $4^{n+1}+5^{2n-1}$ osztható 21-gyel!

5. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra $11^{n+1}+12^{2n-1}$ osztható 133-mal!

6. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra 4^n+7^n+1 osztható 6-tal!

7. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $3^{3n+3}-26n-27$ osztható 169-cel!

8. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra 7^n-6n-1 osztható 36-tal!

9. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $10^n+18n-1$ osztható 27-tel!

10. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $4^n+15n-1$ osztható 9-cel!

11. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $2^{3n+1}+4^{3n+1}+1$ osztható 7-tel!

12. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra $5\cdot 9^{n-1}+2^{4n-3}$ osztható 7-tel!

13. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ osztható 11-gyel!

14. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra $10^{n+2}+11^{2n+1}$ osztható 111-gyel!

15. Mutassuk meg, hogy egy 3^n darab egyforma számjegyből áll szám osztható 3^n-nel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén!

16. Az euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg 294 és 231 legnagyobb közös osztóját! Írjuk fel a legnagyobb közös osztót a két szám egész együtthatós lineáris kombinációjaként is!

17. Az euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg 923 és 728 legnagyobb közös osztóját! Írjuk fel a legnagyobb közös osztót a két szám egész együtthatós lineáris kombinációjaként is!

18. Tekintsük az $ax+by=c$ egyenletet, ahol $a,b,c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(A) Mutassuk meg, hogy az egyenletnek akkor és csak akkor van egész megoldása, ha $\operatorname{lnko}(a, b) \mid c$.

(B) Tegyük fel, hogy $x = x_0$ és $y = y_0$ egész megoldása az egyenletnek. Mutassuk meg, hogy ekkor az egyenlet összes egész megoldása

$$x = x_0 + \frac{bt}{\operatorname{lnko}(a, b)} \quad \text{és} \quad y = y_0 - \frac{at}{\operatorname{lnko}(a, b)},$$

ahol $t \in \mathbb{Z}$.

19. Vizsgáljuk meg, hogy a $33x + 21y = 24$ egyenletnek van-e egész megoldása, és ha igen, akkor adjuk meg az összes megoldást!

20. Vizsgáljuk meg, hogy a $98x - 77y = 14$ egyenletnek van-e egész megoldása, és ha igen, akkor adjuk meg az összes megoldást!

21. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{lnko}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3, n^2 + 2n + 2) = 1$ bármely n természetes számra!

22. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{lnko}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$ bármely n pozitív egész számra!

23. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{lnko}(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1$ bármely n és m különböző természetes számokra!

24. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán! Adjuk meg az egyenlet összes pozitív egész megoldását!

25. Egy pozitív egész számot tökéletesnek nevezünk, ha megegyezik a nála kisebb pozitív osztóinak összegével. Mutassuk meg, hogy egy pozitív páros szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $2^{p-1}(2^p - 1)$ alakú, ahol p és $2^p - 1$ is prím!

Igazoljuk, hogy az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ és $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ minden $n \geqslant 2$ esetén rekurzióval definiált Fibonacci sorozatra teljesülnek a következők!

26. Minden n természetes számra f_{3n} osztható 2-vel.

27. Minden n természetes számra f_{4n} osztható 3-mal.

28. Minden n természetes számra $\operatorname{lnko}(f_n, f_{n+1}) = 1$.

Kongruenciák

1. Határozzuk meg 8 multiplikatív inverzét modulo 17.

2. Határozzuk meg 5 multiplikatív inverzét modulo 19.

3. Mutassuk meg, hogy $n^{13} + 12n$ bármely n természetes számra osztható 13-mal!

4. Mutassuk meg, hogy $n^{20} + 4n^{44} + 8n^{80}$ bármely n természetes számra osztható 13-mal!

5. Állapítsuk meg, hogy mennyi lesz a maradék ha a 173^{163} számot elosztjuk 17-tel!

6. Állapítsuk meg, hogy mennyi lesz a maradék ha a 247^{244} számot elosztjuk 23-mal!

7. Mutassuk meg, hogy $333^{444} + 444^{333}$ osztható 7-tel!

8. Mutassuk meg, hogy $2^{70} + 3^{70}$ osztható 13-mal!

9. Mutassuk meg, hogy az $x^4 + 5y^4 = 4z^4$ egyenletnek az $x = y = z = 0$ megoldáson kívül nincs más megoldása az egész számok halmazán!

10. Legyen p prímszám.

(A) Mutassuk meg, hogy egy k egész számra $k^2 \equiv 1 \pmod{p}$ akkor és csak akkor teljesül ha $k \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

(B) Mutassuk meg, hogy $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

11. Legyenek $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nullától különböző, páronként relatív prím egészek, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig tetszőleges egész számok. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

kongruenciarendszernek van közös megoldása, és bármely két megoldás kongruens modulo $m_1 m_2 \cdots m_n$.

12. RSA módszerrel szeretnénk az üzeneteinket titkosítani. Ehhez a $p = 7$ és $q = 11$ prímeket választjuk kiindulásképp, nyilvános kulcsnak pedig a $(13, 77)$ párt. Mi lesz a titkos kulcs?

Gráfok

1. Van-e olyan (egyszerű) gráf, amelyben a csúcsok fokszámai pontosan a következők?

(A) $3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6$.

(B) $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$.

(C) $0, 2, 2, 2, 4, 4, 6$.

(D) $2, 3, 3, 4, 6, 6, 6$.

(E) $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7$.

(F) $4, 4, 5, 7, 7, 7, 8, 8, 8$.

(G) $5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7$.

2. Egy társaságban semelyik két olyan embernek nincs közös ismerőse, akiknek ugyanannyi ismerőse van. Mutassuk meg, hogy ekkor a társaságban van olyan ember, akinek legfeljebb egy ismerőse van!

3. Egy körmérkőzéses kézilabda bajnokságon n csapat vesz részt. Eddig $n + 1$ mérkőzés zajlott le. Mutassuk meg, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább 3 mérkőzést játszott!

4. Mutassuk meg, hogy egy hat tagú társaságban mindig van három olyan ember, akik vagy kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást!

5. Mutassuk meg, hogy egy tíz tagú társaságban mindig van vagy három olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy négy olyan ember, akik kölcsönösen nem ismerik egymást!

6. Mutassuk meg, hogy egy kilenc tagú társaságban mindig van vagy három olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy négy olyan ember, akik kölcsönösen nem ismerik egymást!

7. Egy körmérkőzéses kézilabda bajnokságon 7 csapat vesz részt. Eddig 13 mérkőzés zajlott le. Mutassuk meg, hogy ekkor van három olyan csapat, akik közül bármely kettő játszott már egymással!

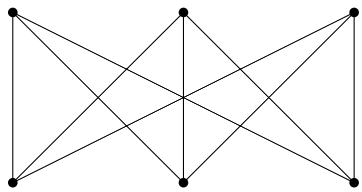
8. Egy 10 csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy ekkor a gráf bármely három csúcsának van közös szomszédja!

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n \geqslant 4$ csúcsú gráf minden csúcsa páratlan fokszámú, akkor van a gráfban három azonos fokszámú csúcs!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú gráfban minden csúcs fokszáma legalább 3, akkor a gráf tartalmaz páros hosszúságú kört!

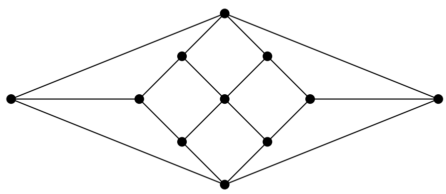
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n \geqslant 3$ csúcsú gráfnak legalább $\binom{n-1}{2} + 1$ éle van, akkor a gráf összefüggő!

12. Próbáljuk meg lerajzolni az alábbi gráfot a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden él mentén pontosan egyszer haladjunk végig! Lehetséges ez?

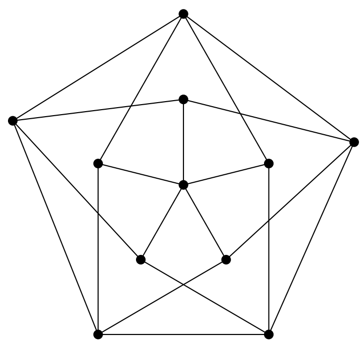


13. Mutassuk meg, hogy páratlan n esetén nem lehet bejárni az $n \times n$ méretű sakktábla összes mezőjét egy huszárral úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer járjunk, és a végén visszatérjünk a kiindulási mezőre!

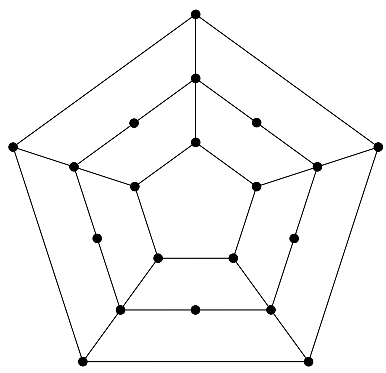
14. Létezik Hamilton-kör a következő gráfban?



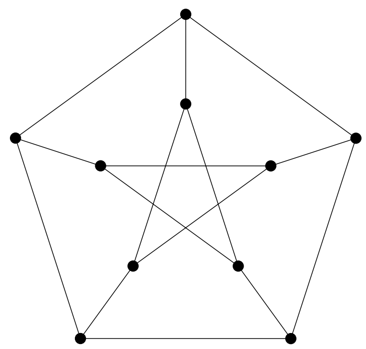
15. Létezik Hamilton-kör a következő gráfban?



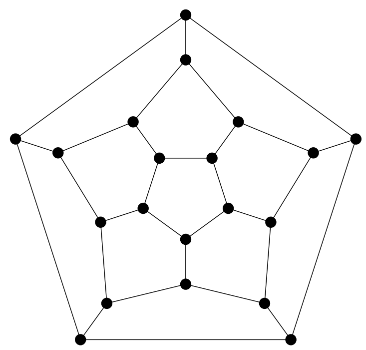
16. Létezik Hamilton-kör a következő gráfban?



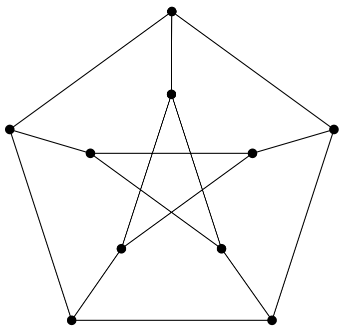
17. Létezik Hamilton-kör a következő gráfban?



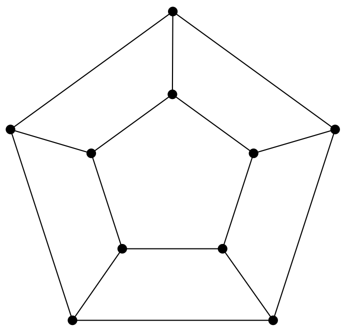
18. Létezik Hamilton-kör a következő gráfban?



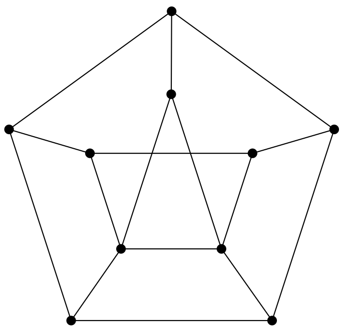
19. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok közül melyek izomorfak és melyek nem!



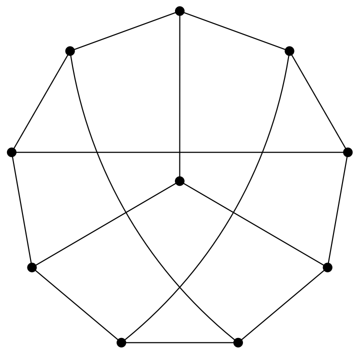
G_1



G_2



G_3



G_4

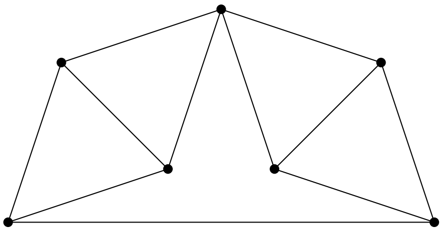
20. Keressük meg az összes olyan 6 csúcsú, összefüggő (nem izomorf) gráfot, amelyekben pontosan 3 elsőfokú csúcs van!

21. Keressük meg az összes 2, 3, 4 és 5 csúcsú (nem izomorf) fát!

22. Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olyan pozitív egész számok, amelyek összege $2n-2$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan n csúcsú fa gráf, amelyben a csúcsok fokszámai rendre a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ értékek!

23. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú gráfban a fokszámok összege legalább $2n$, akkor a gráf tartalmaz kört!

24. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



25. Definiáljuk a $G = (V, E)$ gráfot a következőképpen. Legyen $V = \{1, 2, \ldots, 1024\}$. Tetszőleges $1 \leqslant k < m \leqslant 1024$ esetén a k és m csúcsok akkor és csak akkor legyenek összekötve, ha legnagyobb közös osztójuk nagyobb, mint 1. Határozzuk meg G kromatikus számát!

26. Definiáljuk a $G = (V, E)$ gráfot a következőképpen. Legyen $V = \{1, 2, \ldots, 1023\}$. Tetszőleges $1 \leqslant k < m \leqslant 1023$ esetén a k és m csúcsok akkor és csak akkor legyenek összekötve, ha valamelyikük osztója a másiknak. Határozzuk meg G kromatikus számát!

27. Létezik-e olyan páros gráf, amelyben a csúcsok fokszáma 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6?

Párosítások

1. Tegyük fel, hogy egy G páros gráfban létezik teljes párosítás (ti. amely lefedi G összes csúcsát). Próbáljunk egy ilyet találni a következőképpen. Válasszunk két olyan csúcsot, amelyek össze vannak kötve egy éllel, és jelöljük meg ezt az élt. Ezután válasszunk két másik csúcsot, amelyek szintén össze vannak kötve egy éllel, és jelöljük meg ezt az élt is. Addig folytassuk ezt, amíg lehetséges.

(A) Mutassuk meg, hogy a kapott párosítás nem feltétlenül teljes!

(B) Mutassuk meg, hogy a kapott párosításban szereplő élek lefedik G csúcsainak legalább a felét!

2. Egy nyaraláson résztvevő tíz házaspár ellátogat a helyi könyvtárba, és ott mindenki egy tíz könyvből álló listát ad a könyvtárosnak azzal, hogy az általa felírt könyvek egyikét szeretné megkapni. Egy házaspár két tagja diszjunkt listát ad, azaz egy házaspár együtt összesen húsz könyvet jelöl meg. A könyvtárban a kért könyvek mindegyike megtalálható, de mindegyik csak egy példányban. Mutassuk meg, hogy a könyvtáros mindenkinek tud olyan könyvet adni, amely szerepelt az általa adott listán!

3. Egy kiránduláson a résztvevő tíz házaspár között akarunk szétosztani húsz különböző csokoládét úgy, hogy mindenki kapjon egyet. Mindenki legalább tíz fajtát szeret a csokoládék közül, és minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Mutassuk meg, hogy a csokoládék szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret!

4. Egy 15 fiúból és 15 lányból álló társaságban minden lánynak különböző számú ismerőse van, de minden lány ismer legalább egy fiút. Mutassuk meg, hogy amikor elkezdődik a tánc, minden lány talál magának partnert akkor is, ha a lányok csak ismerős fiúkkal hajlandók táncolni!

5. Egy városban több különböző klub működik. Minden klubnak legalább négy tagja van. A város minden lakója legfeljebb három klubnak tagja. Mutassuk meg, hogy lehet úgy elnököket választani a klubokban, hogy minden klubnak egy a tagjai közül kikerülő vezetője legyen, és senki ne legyen egynél több klub vezetője!

6. Egy népszerű gyorsétteremben minden menühoz a Verdák legújabb részének egyik versenyautóját adják ajándékba. A gyorsétterem közelében lévő iskola 8. osztályában minden tanulónak van már legalább 5 különböző versenyautója, de semelyik versenyautó nincs meg négynél több gyereknek. Mutassuk meg, hogy ekkor minden tanuló ki tud választani egyet a versenyautói közül úgy, hogy a kiválasztott versenyautók mind különbözők legyenek!

7. Egy vállalat minden évben tíz (különböző) továbbképzésre küldi a dolgozóit. Ebben az évben 20 tanfolyam jön szóba. Már sikerült mindenkit kilenc tanfolyamra beosztani, ráadásul úgy, hogy semelyik két dolgozó nem jár pontosan ugyanazokra a tanfolyamokra. Mutassuk meg, hogy ekkor a tizedik tanfolyamra is be lehet úgy osztani mindenkit, hogy továbbra se járjon semelyik két dolgozó pontosan ugyanazokra a tanfolyamokra!

8. Egy 52 lapos francia kártya csomagot 13 darab 4 laposra osztottunk szét (a francia kártyában négy szín van: $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$; minden színből 13 érték: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$). Mutassuk meg, hogy a négyesekből kiválasztható egy-egy lap úgy, hogy az összes érték pontosan egyszer forduljon elő!

9. Egy $n \times n$-es táblázatot, amelynek mezői az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak kitöltve olyan módon, hogy e számok mindegyike minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer fordul elő, latin négyzetnek nevezünk. Valamely $r < n$ esetén egy $r \times n$-es táblázatot, amelynek mezői az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak kitöltve olyan módon, hogy e számok mindegyike minden sorban pontosan egyszer és minden oszlopban legfeljebb egyszer fordul elő, latin téglalapnak nevezünk. Mutassuk meg, hogy bármely $r \times n$-es latin téglalap kiegészíthető $(r + 1) \times n$-es latin téglalappá, következésképpen $n \times n$-es latin négyzetté!

10. Egy szigeten n család lakik. A vadászati bizottság az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre osztja. Ezzel egyidejűleg a mezőgazdasági bizottság az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági körzetre osztja. Mutassuk meg, hogy a vadászati és a mezőgazdasági körzetek szétoszthatók a családok között úgy, hogy minden család egy-egy közös résszel rendelkező vadászati és mezőgazdasági körzetet kapjon!

Összeszámlálási feladatok

1. Hányféleképpen olvasható ki a MATEMATIKA szó az alábbi táblázatból:

$$\begin{matrix} \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{M} \\ \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{M} & \mathrm{A} \\ \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \\ \mathrm{E} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{I} \\ \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{I} & \mathrm{K} \\ \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{I} & \mathrm{K} & \mathrm{A} \end{matrix}$$

2. Hány átlója van egy n oldalú konvex sokszögnek? Hány metszéspontja van ezeknek az átlóknak, ha semelyik 3 nem megy át egy ponton?

3. El akarunk osztani n darab százforintost k fiú és m lány között úgy, hogy minden lánynak kell kapni legalább egy százforintost, a fiúkra vonatkozóan viszont nincs efféle kikötés. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

4. Hány megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4=98$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán?

5. Hány megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4=98$ egyenletnek a pozitív páratlan egész számok halmazán?

6. Egy mozi pénztáránál $2n$ ember áll sorba 1000 Ft-os jegyekért. A sorban állók felének ezrese, a másik felének kétezrese van. A kasszában nincs váltópénz. Hány olyan sorrendje van az embereknek, amikor a sor nem akad el, a pénztáros mindig tud visszaadni?

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \leqslant n$ pozitív egész számokra

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \leqslant n$ pozitív egész számokra

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \leqslant m \leqslant n$ természetes számokra

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

12. Bizonyítsuk be, hogy

$$(n-2k)\binom{n}{k} = n\left[\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right].$$

13. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

14. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{k}.$$

15. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0.$$

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}.$$

17. Bizonyítsuk be, hogy

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

18. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

19. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+3\binom{n}{3}^2+\cdots+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

20. Bizonyítsuk be, hogy

$$1\cdot 2\binom{n}{2}+2\cdot 3\binom{n}{3}+3\cdot 4\binom{n}{4}+\cdots+(n-1)\cdot n\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}.$$

21. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{2}\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\binom{2n}{n-1}.$$

22. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a binomiális tételt:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

minden $n\in\mathbb{Z}^+$ és $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

23. Négy fánkot szeretnénk három zacskóba szétosztani. Hányféleképpen lehetséges ez ha

(A) a fánkok különböző ízűek, és a zacskók különböző színűek?

(B) a fánkok egyformák, és a zacskók is egyformák?

(C) a zacskók egyformák, a fánkok viszont különböző ízűek?

(D) a fánkok egyformák, a zacskók viszont különböző színűek?

24. Hányféleképpen oszthatunk el 10 egyforma tábla csokit négy gyerek — András, Béla, Cili és Dóra — között, ha minden gyerek 1, 2, 3 vagy 4 tábla csokit kaphat?

25. A pókert 52 lapos kártyával játsszák. Van négy szín: $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$. Minden színből 13 érték van: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$. Kezdetben mindenkinek öt lapot osztanak (ezután kezdődik a játék, ennek szabályaival azonban itt nem foglalkozunk). Egy ilyen ötöst osztásnak nevezünk. Hányféle olyan osztás van, amelyben

(A) mind a négy szín előfordul?

(B) egyetlen szín sem fordul elő kettőnél többször?

Szita-formula

1. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a szita-formulát:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazokra.

2. Egy csupa fiúból álló osztályban 18-an sakkoznak, 23-an fociznak, 21-en bicikliznek és 17-en túráznak. Tudjuk, hogy 9 olyan fiú van, aki sakkozik és focizik, 7, aki sakkozik és biciklizik, 6, aki sakkozik és túrázik, 12, aki biciklizik és focizik, 9-en fociznak és túráznak, és 12-en vannak, akik bicikliznek és túráznak is. A sakkot, a focit és a biciklizést 4-en, a sakkot, a focit és a túrázást 3-an, a sakkot, a biciklizést és a túrázást 5-en, a focit, a biciklizést és a túrázást 7-en tekintik kedvenc szabadidős elfoglaltságuknak. Van 3 olyan fiú, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy minden fiú a négy tevékenység közül legalább az egyiket űzi. Hány fiú van az osztályban?

3. Egy osztályba 40 lány jár. Közülük 18-an sakkoznak, 23-an kosaraznak és vannak, akik bicikliznek. Tudjuk, hogy 9 olyan lány van, aki sakkozik és kosarazik, 7 olyan, aki sakkozik és biciklizik, és 12 olyan, aki kosarazik és biciklizik. Van 4 lány, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy minden lány a három tevékenység közül legalább az egyiket űzi. Hány lány biciklizik?

4. Egy osztályba 34 tanuló jár, közülük 20 fiú. Jó vagy jeles tanuló 25 van, közülük 14 fiú. 24 tanuló sportol, közülük 16 fiú. A sportolók közül 15 tanuló jó vagy jeles rendű. 10 fiú sportol és jó vagy jeles rendű. Mutassuk meg, hogy minden nem sportoló lány jó vagy jeles rendű!

5. Hány olyan megoldása van az $x_1+x_2+x_3=11$ egyenletnek a természetes számok halmazán, ahol $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 4$ és $x_3 \leqslant 6$?

6. Hány olyan megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ egyenletnek az egész számok halmazán, ahol $1 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $-2 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 5$ és $3 \leqslant x_4 \leqslant 9$?

7. Mutassuk meg, hogy azon $2n$ hosszú karakterláncok száma, amelyben n különböző karakter szerepel, mindegyik kétszer, továbbá amelyben azonos karakterek nem állnak egymás mellett

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \binom{n}{3}\frac{(2n-3)!}{2^{n-3}} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}n!.$$

8. Legyenek $m \geqslant n$ tetszőleges pozitív egész számok. Mutassuk meg hogy egy m elemű halmazt egy n elemű halmazba képező szürjektív függvények száma

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 1^m.$$

9. Legyenek $m \geqslant n$ tetszőleges pozitív egész számok. Mutassuk meg hogy azon lehetőségek száma, ahányféleképpen szétoszthatunk m különböző ízű fánkot n egyforma zacskóba

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^m.$$

10. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $\varphi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím nem negatív egészek számát. Mutassuk meg, hogy ha $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_m$ különböző prímszámok, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pedig pozitív egészek, akkor

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

11. Számítsuk ki $\varphi(6!)$ értékét!

Skatulya elv

1. Tekintsük az $1, 2, 3, \dots, 2n$ egész számokat ($n \geqslant 1$), és válasszunk ki ezek közül $n+1$ darabot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van két olyan, amelyek relatív prímek!

2. Tekintsük az $1, 2, 3, \dots, 2n$ egész számokat ($n \geqslant 1$), és válasszunk ki ezek közül $n+1$ darabot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van két olyan, amelyek közül az egyik osztója a másiknak!

3. Mutassuk meg, hogy bármely n pozitív egész számnak van olyan pozitív egész számszorosa, amely (tízes számrendszerben felírva) csak 0 és 1 számjegyekből áll!

4. Mutassuk meg, hogy a $7, 77, 777, 7777, 77777, \dots$ egész számok között van olyan, amely osztható 2013-mal!

5. Mutassuk meg, hogy természetes számok bármely n elemű halmazának van olyan nem üres részhalmaza, amelyben a számok összege osztható n-nel!

6. Tekintsük az $1, 2, 3, \dots, 2n-1$ egész számokat ($n \geqslant 2$), és válasszunk ki ezek közül $n+1$ darabot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van három olyan, amelyek közül az egyik megegyezik a másik kettő összegével!

7. Egy biliárd verseny 30 napig tartott. Tudjuk, hogy a győztes minden nap játszott legalább egy partit, és az általa játszott partik száma nem haladta meg a 45-öt. Mutassuk meg, hogy szükségképpen volt egymás utáni napoknak olyan sorozata, amelyeken a győztes összesen 14 partit játszott!

Generátorfüggvények

1. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + 2f_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

rekurzív sorozat generátorfüggvényét, majd írjuk fel a sorozat tagjait zárt alakban!

2. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} f_0 &= 3, \\ f_1 &= 6, \\ f_n &= f_{n-1} + 6f_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

rekurzív sorozat generátorfüggvényét, majd írjuk fel a sorozat tagjait zárt alakban!

3. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} + 1, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

rekurzív sorozat generátorfüggvényét, majd írjuk fel a sorozat tagjait zárt alakban!

4. Generátorfüggvények alkalmazásával írjuk fel zárt alakban az

$$1 + 2 + \cdots + n$$

összeget!

5. Generátorfüggvények alkalmazásával írjuk fel zárt alakban az

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

összeget!

6. Hányféleképpen állíthatunk össze sima, lekváros, csokis és vaníliás fánkból egy k fánkot tartalmazó csomagot, ha

- a sima fánkok számának 4 többszörösének kell lenni,
- a lekváros fánkok száma 0 vagy 2 lehet,
- legalább három csokis fánknak kell lenni a csomagban,
- legfeljebb egy vaníliás fánk lehet a csomagban.

7. A szomszédban lakó idős hölgy minden délután sétálni megy, amelyre a háziállatai közül is magával visz néhányat.

- Énekesmadarat mindig visz magával, mégpedig párokban.
- Frédit, az aligátort vagy magával viszi, vagy nem.
- Mindig magával visz legalább két macskát.
- Mindig magával visz legalább két chihuahuát és labradort egy sorban a pórázaikat egymáshoz kötve.

Hányféleképpen választhatja ki az idős hölgy a magával vitt háziállatokat, ha azt is figyelembe vesszük, hogy a chihuahuák és a labradorok milyen sorrendben vannak egymás után kötve (tehát különböző választásnak tekintjük az elől mennek a labradorok és mögöttük a chihuahuák beosztást attól, amikor a chihuahuák és labradorok felváltva következnek)?

Megoldások

Teljes indukció

1. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 3.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 5^{n+1} = \\ &\qquad = [3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n] + 3 \cdot 5^{n+1}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4},$$

így

$$\begin{aligned} [3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n] + 3 \cdot 5^{n+1} &= \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4} + 3 \cdot 5^{n+1} \\ &= \frac{3(5^{n+1} - 1) + 3 \cdot 4 \cdot 5^{n+1}}{4} \\ &= \frac{3(5^{n+1} - 1 + 4 \cdot 5^{n+1})}{4} \\ &= \frac{3(5 \cdot 5^{n+1} - 1)}{4} \\ &= \frac{3(5^{n+2} - 1)}{4}, \end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

2. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{2}{3}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots+\frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}=\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots+\frac{2}{3^n}\right]+\frac{2}{3^{n+1}}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n},$$

így

$$\begin{aligned}\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots+\frac{2}{3^n}\right]+\frac{2}{3^{n+1}}&=1-\frac{1}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\\&=1-\frac{3-2}{3^{n+1}}\\&=1-\frac{1}{3^{n+1}},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

3. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $\frac{1}{2}$, a jobb oldal pedig

$$2-\frac{1+2}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right]+\frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},$$

így

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right]+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{2(n+2)}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{2n+4}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

4. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2 &=\\ &[1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2]+(-1)^n(n+1)^2.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},$$

így

$$\begin{aligned}[1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2]+(-1)^n(n+1)^2 &=\\ &=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2 &=(-1)^n\frac{(n+1)(2(n+1)-n)}{2}\\ &=(-1)^n\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

5. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = \\ &\qquad = [1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2] + (2n+3)^2.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},$$

így

$$\begin{aligned}&[1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2] + (2n+3)^2 = \\ &\qquad = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 = \\ &\qquad = \frac{(2n+3)((n+1)(2n+1) + 3(2n+3))}{3}.\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}&\frac{(2n+3)((n+1)(2n+1) + 3(2n+3))}{3} = \\ &\qquad = \frac{(2n+3)(2n^2 + 9n + 10))}{3} = \frac{(2n+3)(n+2)(2n+5)}{3},\end{aligned}$$

vagy másképpen

$$\frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

6. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1).$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 + (2n+3)^3 = \\ &\qquad = [1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3] + (2n+3)^3.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1),$$

így

$$\begin{aligned}&[1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3] + (2n+3)^3 = \\ &\qquad = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}(n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 &= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+ \\ &\quad (2n+3)^3 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 + \\ &\quad 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 \\ &= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28 \\ &= (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) \\ &= (n+2)^2(2n^2+8n+7),\end{aligned}$$

vagy másképpen

$$((n+1)+1)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1),$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

7. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, a jobb oldal pedig

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &\quad = [1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)] + (n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

így

$$\begin{aligned} &[1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)] + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &\qquad = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Most a jobb oldalt közös nevezőre hozva, majd kiemelve

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \\ &\qquad = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} \end{aligned}$$

adódik, ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

8. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}+(n+1)\cdot 2^n=\\&\qquad\qquad=[1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}]+(n+1)\cdot 2^n.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1,$$

így

$$\begin{aligned}&[1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}]+(n+1)\cdot 2^n=\\&\qquad\qquad=(n-1)\cdot 2^n+1+(n+1)\cdot 2^n\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot 2^n+1+(n+1)\cdot 2^n&=(n-1+n+1)\cdot 2^n+1\\&=2n\cdot 2^n+1\\&=n\cdot 2^{n+1}+1,\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

9. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{3}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\\&\quad=\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1},$$

így

$$\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}&=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{n+1}{2n+3}\\&=\frac{n+1}{2(n+1)+1},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

10. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{4}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=$$
$$=\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1},$$

így

$$\left[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}= \\ =\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}&=\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}\\&=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}\\&=\frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}\\&=\frac{n+1}{3n+4}\\&=\frac{n+1}{3(n+1)+1},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

11. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{5}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}= \\ =\left[\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right]+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1},$$

így

$$\left[\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right]+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=$$
$$=\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}&=\frac{n(4n+5)+1}{(4n+1)(4n+5)}\\&=\frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)}\\&=\frac{(n+1)(4n+1)}{(4n+1)(4n+5)}\\&=\frac{n+1}{4n+5}\\&=\frac{n+1}{4(n+1)+1},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

12. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $\frac{1}{3}$, a jobb oldal pedig

$$\frac{1\cdot(1+1)}{2(2\cdot 1+1)}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\left[\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)},$$

így

$$\left[\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}&=\frac{n(n+1)(2n+3)+2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(n(2n+3)+2(n+1))}{2(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\\&=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2(2(n+1)+1)},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

13. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(4n-1)=3n^2.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $2\cdot 1+1=3=3\cdot 1^2$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(4n-1)+(4n+1)+(4n+3)=$$
$$=[(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n-1)]-(2n+1)+(4n+1)+(4n+3).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(4n-1)=3n^2,$$

így

$$\begin{aligned}[(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n-1)]-(2n+1)+(4n+1)+(4n+3)=\\=3n^2-(2n+1)+(4n+1)+(4n+3).\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$3n^2-(2n+1)+(4n+1)+(4n+3)=3n^2+6n+3=3(n^2+2n+1)=3(n+1)^2,$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

14. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Alapeset. $P(2)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n\geqslant 2$ egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\\&\quad=\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},$$

így

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>\\>\frac{13}{24}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{13}{24}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}&=\frac{13}{24}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}\\&=\frac{13}{24}-\frac{(2n+1)-(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)}\\&=\frac{13}{24}-\frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}\\&=\frac{13}{24}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\\&>\frac{13}{24},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \geqslant 2$ egész esetén.

15. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{2}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\\&\qquad=\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},$$

így

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right]-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} &= -\frac{2}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\\
&= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\
&= \frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},
\end{aligned}
$$

következésképpen

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\\
&\qquad =\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)},
\end{aligned}
$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

16. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

Alapeset. $P(2)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n\geqslant 2$ egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\\
&\qquad\qquad =\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$$

így

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]+\frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}\\ &> \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \sqrt{n+1},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \geqslant 2$ egész esetén.

17. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}.$$

Alapeset. $P(2)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 2$ egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n},$$

így

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{(n+1)^2} &< 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= 2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\frac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)^2}\\ &< 2-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \geqslant 2$ egész esetén.

18. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! =\\ &\qquad = [1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!] + (n+1)\cdot(n+1)!\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

így

$$\begin{aligned}&[1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!] + (n+1)\cdot(n+1)! =\\ &\qquad = (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)!\end{aligned}$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}(n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)! &= (1+(n+1))\cdot(n+1)!-1\\ &= (n+2)\cdot(n+1)!-1\\ &= (n+2)!-1,\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

19. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4n-2)=\frac{(2n)!}{n!}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal 2, a jobb oldal pedig

$$\frac{(2\cdot 1)!}{1!}=\frac{2!}{1!}=\frac{2}{1}=2.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4n-2)\cdot(4n+2)=[2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4n-2)]\cdot(4n+2).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4n-2)=\frac{(2n)!}{n!},$$

így

$$[2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4n-2)]\cdot(4n+2)=\frac{(2n)!}{n!}\cdot(4n+2).$$

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{n!}\cdot(4n+2) &= \frac{(2n)!\cdot(4n+2)(n+1)}{n!\cdot(n+1)}\\ &= \frac{(2n)!\cdot 2(2n+1)(n+1)}{n!\cdot(n+1)}\\ &= \frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}{n!\cdot(n+1)}\\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\\ &= \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

20. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a különböző színű kaméleonok számának hárommal vett osztási maradékai mindig különbözők lesznek. Ebből következik, hogy soha nem lehet mind a 45 kaméleon azonos színű, hiszen a 0, 0 és 45 számok hárommal osztva mind 0 maradékot adnak.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik találkozás után a különböző színű kaméleonok számának hárommal vett osztási maradékai mind különbözők.

Alapeset. Kezdetben 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon van a szigeten. Ezen számok hárommal vett osztási maradékai 1, 0 és 2, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Legyen az n-edik találkozás után a szigeten lévő szürke kaméleonok száma s, a barna kaméleonok száma b, a zöld kaméleonok száma pedig z. Az indukciós feltevés szerint az s, b és z számok hárommal vett osztási maradékai mind különbözők. Az általánosság megszorítás nélkül feltehetjük, hogy $s = 3k$, $b = 3l + 1$ és $z = 3m + 2$ alkalmas k, l, m természetes számokkal. Tekintsük az $(n+1)$-edik találkozást. A következő esetek lehetségesek:

(1) Két azonos színű kaméleon találkozik. Ekkor a szürke kaméleonok száma s, a barna kaméleonok száma b, a zöld kaméleonok száma pedig z marad. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben.

(2) Egy szürke és egy barna kaméleon találkozik. Ekkor a szürke kaméleonok száma $s - 1 = 3k - 1 = 3(k-1) + 2$, a barna kaméleonok száma $b - 1 = (3l + 1) - 1 = 3l$, a zöld kaméleonok száma pedig $z + 2 = (3m + 2) + 2 = 3(m+1) + 1$ lesz. Ezen számok hárommal vett osztási maradékai 2, 0 és 1, így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

(3) Egy barna és egy zöld kaméleon találkozik. Ekkor a szürke kaméleonok száma $s+2 = 3k+2$, a barna kaméleonok száma $b-1 = (3l+1)-1 = 3l$, a zöld kaméleonok száma pedig $z - 1 = (3m + 2) - 1 = 3m + 1$ lesz. Ezen számok hárommal vett osztási maradékai 2, 0 és 1, így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

(4) Egy zöld és egy szürke kaméleon találkozik. Ekkor a szürke kaméleonok száma $s - 1 = 3k - 1 = 3(k-1) + 2$, a barna kaméleonok száma $b + 2 = (3l + 1) + 2 = 3(l + 1)$, a zöld kaméleonok száma pedig $z - 1 = (3m + 2) - 1 = 3m + 1$ lesz. Ezen számok hárommal vett osztási maradékai 2, 0 és 1, így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

21. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sárkány fejeinek száma hárommal osztva mindig 2 maradékot ad. Ebből következik, hogy a sárkány összes fejét soha nem lehet levágni, hiszen a 0 szám hárommal osztva 0 maradékot ad.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik csapás után a sárkány fejeinek száma hárommal osztva 2 maradékot ad.

Alapeset. Kezdetben a sárkánynak 77 feje van. Mivel $77 = 25 \cdot 3 + 2$, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Legyen az n-edik csapás után a sárkány fejeinek száma s. Az indukciós feltevés szerint az s szám hárommal osztva 2 maradékot ad, azaz $s = 3k + 2$ valamilyen k egész számra. Tekintsük az $(n+1)$-edik csapást. A következő esetek lehetségesek:

(1) A királyfi a sárkány 7 fejét vágja le. Ekkor a sárkánynak 13 új feje nő, így ezután a fejeinek száma $s-7+13 = s+6 = 3k+2+6 = 3(k+2)+2$ lesz. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben.

(2) A királyfi a sárkány 9 fejét vágja le. Ekkor a sárkánynak 18 új feje nő, így ezután a fejeinek száma $s-9+18 = s+9 = 3k+2+9 = 3(k+3)+2$ lesz. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

(3) A királyfi a sárkány 13 fejét vágja le. Ekkor a sárkánynak 10 új feje nő, így ezután a fejeinek száma $s-13+10 = s-3 = 3k+2-3 = 3(k-1)+2$ lesz. Így $P(n+1)$ igaz ebben az esetben is.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

22. Színezzük ki a játéktábla mezőit sakktáblaszerűen (a bal felső sarok fehér). Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a kezdő elrendezésből elérhető elrendezéseknél a fehér színű mezőkön álló érmék száma mindig 9. Ebből következik, hogy a kívánt elrendezés elérhetetlen, hiszen ott a fehér színű mezőkön álló érmék száma csak 6.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n-edik lépés után 9 érme áll fehér színű mezőn.

Alapeset. Kezdetben 9 érme áll fehér színű mezőn, így $P(0)$ igaz.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Az indukciós feltevés szerint az n-edik lépés után 9 érme áll fehér mezőn. Tekintsük az $(n+1)$-edik lépést. Vegyük észre, hogy ha ennek során fehér mezőn álló érmét helyezünk át, akkor az szükségképpen fehér mezőre kerül, illetve ha fekete mezőn álló érmét helyezünk át, akkor az szükségképpen fekete mezőre kerül. Ez azt jelenti, hogy a fehér mezőkön álló érmék száma nem változik, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

23. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $n = 4k+1$ esetén ($k \in \mathbb{N}$) a második, egyébként pedig a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

Alapeset. $P(1)$ triviálisan teljesül; ilyenkor a kezdő játékosnak nincs más választása, mint elvenni az egyetlen szál gyufát, amivel veszít.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Tekintsünk egy $n+1$ gyufaszálból álló kupacot. Most négy eset lehetséges.

(1) $n+1 = 4k$. Mivel $n \geqslant 1$, ezért itt $n+1 \geqslant 4$. A kezdő játékos vegyen el három gyufaszálat. Ekkor a soron következő játékos (most a második) egy $4k-3 = 4(k-1)+1$ gyufaszálból álló kupacot lát. Az indukciós feltevés szerint innen ez a játékos nem tud nyerni (feltéve, hogy az ellenfél soha nem hibázik).

(2) $n+1 = 4k+1$. Mivel $n \geqslant 1$, ezért itt $n+1 \geqslant 5$. A kezdő játékos egy, kettő vagy három szál gyufa elvételével kezdheti a játékot. Ha egyet vesz el, akkor $4k$ gyufaszál marad, ahonnan az indukciós feltevés szerint a soron következő játékos (most a második) nyerni tud. Ha kettőt vesz el, akkor $4k-1 = 4(k-1)+3$ gyufaszál marad, ahonnan az indukciós feltevés szerint a soron következő játékos (most a második) nyerni tud. Ha hármat vesz el, akkor $4k-2 = 4(k-1)+2$ gyufaszál marad, ahonnan az indukciós feltevés szerint a soron következő játékos (most a második) nyerni tud. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben akárhogy is kezd a kezdő játékos, a másik játékos nyerni tud.

(3) $n+1 = 4k+2$. Mivel $n \geqslant 1$, ezért itt $n+1 \geqslant 2$. A kezdő játékos vegyen el egy gyufaszálat. Ekkor a soron következő játékos (most a második) egy $4k+2-1 = 4k+1$ gyufaszálból álló kupacot lát. Az indukciós feltevés szerint innen ez a játékos nem tud nyerni (feltéve, hogy az ellenfél soha nem hibázik).

(4) $n+1 = 4k+3$. Mivel $n \geqslant 1$, ezért itt $n+1 \geqslant 3$. A kezdő játékos vegyen el két gyufaszálat. Ekkor a soron következő játékos (most a második) egy $4k+3-2 = 4k+1$ gyufaszálból álló kupacot lát. Az indukciós feltevés szerint innen ez a játékos nem tud nyerni (feltéve, hogy az ellenfél soha nem hibázik).

Így $P(n+1)$ mind a négy esetben igaz.

A teljes indukció elvének "erősebb" változata szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

24. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy ha mindkét kupacban n gyufaszál van, akkor a másodiknak jövő játékosnak van nyerő stratégiája.

Alapeset. $P(1)$ triviálisan teljesül; ilyenkor a kezdő játékosnak nincs más választása, mint elvenni az egyik kupacból az ottani egyetlen szál gyufát, mire a másodiknak jövő játékos elveszi a másik kupacból az ottani egyetlen szál gyufát és nyer.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Tekintsünk két $n+1$ gyufaszálból álló kupacot. Most két eset lehetséges:

(1) A kezdő játékos valamelyik kupacból elveszi az ottani összes gyufaszálat. Ekkor a másodiknak jövő játékos vegye el a másik kupacból az ottani összes gyufaszálat; így nyer.

(2) A kezdő játékos valamelyik kupacból elvesz $1 \leqslant k \leqslant n$ gyufaszálat. Ekkor a másodiknak jövő játékos vegyen el a másik kupacból szintén k gyufaszálat. Ezután mindkét kupac $n-k+1 < n+1$ gyufaszálból áll, így az indukciós feltevés szerint a másodiknak jövő játékos innen nyerni tud.

Ennélfogva $P(n+1)$ mindkét esetben igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

25. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy ha $2n+1$ ember, kezükben egy-egy habos tortával, egymástól páronként különböző távolságokra áll, és adott jelre mindenki a hozzá legközelebb álló felé dobja a tortáját, akkor lesz olyan ember, aki felé egyetlen torta sem repül.

Alapeset. Megmutatjuk, hogy $P(1)$ igaz. Most $2 \cdot 1 + 1 = 3$ ember vesz részt a jelenetben, jelölje őket A, B és C. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy A és B áll legközelebb egymáshoz. Ekkor A és B egymás felé dobják a tortájukat, C pedig A vagy B felé. Így C felé nem repül torta.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Most $2(n+1)+1 = 2n+3$ ember vesz részt a jelenetben. Jelölje közülük A és B a két legközelebb állót. Világos, hogy A és B egymás felé dobják a tortájukat. Ha a fennmaradó $2n+1$ ember között van legalább egy olyan, aki A vagy B felé dobja a tortáját, akkor a fennmaradó $2n+1$ ember egymás felé legfeljebb $2n$ tortát dob, így szükségképpen van köztük olyan, aki felé nem repül torta. Ha pedig a fennmaradó $2n+1$ ember mind egymás felé dobja a tortáját, akkor az indukciós feltevés szerint lesz közöttük olyan, aki felé nem repül torta. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

26. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy n általános helyzetű egyenes a síkot

$$1+\frac{n(n+1)}{2}$$

részre osztja.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz egy egyenes a síkot valóban $1+\frac{1\cdot(1+1)}{2}=2$ részre osztja.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Tekintsünk egy $n+1$ elemű, általános helyzetű $\mathcal{L}$ egyeneshalmazt, és válasszuk ki $\mathcal{L}$ egy tetszőleges l egyenesét. Hagyjuk el $\mathcal{L}$-ből az l egyenest. Az indukciós feltevés szerint $\mathcal{L}\setminus\{l\}$ egyenesei a síkot

$$1+\frac{n(n+1)}{2}$$

részre osztják. Helyezzük vissza az előbb eltávolított l egyenest. Az l egyenest $\mathcal{L}\setminus\{l\}$ egyenesei $n-1$ szakaszra és két félegyenesre bontják, amely szakaszok és félegyenesek a sík $\mathcal{L}\setminus\{l\}$ által meghatározott felbontásában pontosan $n+1$ tartományt vágnak ketté. Következésképpen $\mathcal{L}$ egyenesei a síkot

$$1+\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=1+\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

részre osztják. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

27. A teljes indukció "erősebb" változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n pozitív egész szám előáll $\pm 1^2\pm 2^2\pm\cdots\pm m^2$ alakban alkalmasan választott m pozitív egész számmal, illetve $+$ és $-$ jelekkel.

Alapeset(ek). $P(n)$ igaz minden $1\leqslant n\leqslant 4$ esetén:

$$\begin{aligned}
1&=1^2,\\
2&=-1^2-2^2-3^2+4^2,\\
3&=-1^2+2^2,\\
4&=-1^2-2^2+3^2.
\end{aligned}$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 4$ egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Az indukciós feltevés szerint az $n-3$ pozitív egész szám előáll $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$ alakban alkalmasan választott m pozitív egész számmal, illetve $+$ és $-$ jelekkel. Most vegyük észre, hogy

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$$

tetszőleges m pozitív egész számra. Ebből következik, hogy $n+1$ is előáll a kívánt alakban. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Fibonacci sorozat

1. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_0 = 0$, a jobb oldal pedig $f_{0+2} - 1 = f_2 - 1 = 1 - 1 = 0$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n + f_{n+1} = [f_0 + f_1 + \cdots + f_n] + f_{n+1}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1,$$

így

$$[f_0 + f_1 + \cdots + f_n] + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+1} + f_{n+2} - 1 = f_{n+3} - 1 = f_{(n+1)+2} - 1,$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

2. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_1 = 1$, a jobb oldal pedig $f_{2\cdot 1} = f_2 = 1$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = [f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1}] + f_{2n+1}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n},$$

így

$$[f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1}] + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2(n+1)},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

3. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_0 = 0$, a jobb oldal pedig $f_{2\cdot 0+1} - 1 = f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} + f_{2n+2} = [f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n}] + f_{2n+2}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1,$$

így

$$[f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n}] + f_{2n+2} = f_{2n+1} - 1 + f_{2n+2}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$f_{2n+1} - 1 + f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 = f_{2n+3} - 1 = f_{2(n+1)+1} - 1,$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

4. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = (n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_1 = 1$, a jobb oldal pedig

$$(1+1)f_{1+2} - f_{1+4} + 2 = 2f_3 - f_5 + 2 = 2 \cdot 2 - 5 + 2 = 1$$

szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$f_1+2f_2+3f_3+\cdots+nf_n+(n+1)f_{n+1} = [f_1+2f_2+3f_3+\cdots+nf_n]+(n+1)f_{n+1}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = (n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2,$$

így

$$[f_1+2f_2+3f_3+\cdots+nf_n]+(n+1)f_{n+1} = (n+1)f_{n+2}-f_{n+4}+2+(n+1)f_{n+1}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (kétszer):

$$\begin{aligned}
(n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2 + (n+1)f_{n+1} &= (n+1)(f_{n+2} + f_{n+1}) - f_{n+4} + 2 \\
&= (n+1)f_{n+3} - f_{n+4} + 2 \\
&= (n+1)f_{n+3} - (f_{n+5} - f_{n+3}) + 2 \\
&= (n+1)f_{n+3} - f_{n+5} + f_{n+3} + 2 \\
&= (n+2)f_{n+3} - f_{n+5} + 2,
\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

5. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n} = nf_{2n+1} - f_{2n}.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_2 = 1$, a jobb oldal pedig $1 \cdot f_{2\cdot 1+1} - f_{2\cdot 1} = f_3 - f_2 = 2 - 1 = 1$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n} + (n+1)f_{2n+2} &= \\ &= [f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n}] + (n+1)f_{2n+2}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n} = nf_{2n+1} - f_{2n},$$

így

$$[f_2 + 2f_4 + 3f_6 + \cdots + nf_{2n}] + (n+1)f_{2n+2} = nf_{2n+1} - f_{2n} + (n+1)f_{2n+2}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (háromszor):

$$\begin{aligned}nf_{2n+1} - f_{2n} + (n+1)f_{2n+2} &= n(f_{2n+3} - f_{2n+2}) - f_{2n} + (n+1)f_{2n+2} \\ &= nf_{2n+3} - nf_{2n+2} - f_{2n} + (n+1)f_{2n+2} \\ &= nf_{2n+3} + f_{2n+2} - f_{2n} \\ &= nf_{2n+3} + (f_{2n+3} - f_{2n+1}) - f_{2n} \\ &= (n+1)f_{2n+3} - f_{2n+1} - f_{2n} \\ &= (n+1)f_{2n+3} - (f_{2n+1} + f_{2n}) \\ &= (n+1)f_{2n+3} - f_{2n+2},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

6. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n f_{n-1} - 1.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_0 - f_1 = -1$, a jobb oldal pedig

$$(-1)^1 f_{1-1} - 1 = -f_0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n + (-1)^{n+1} f_{n+1} &= \\ [f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n] &+ (-1)^{n+1} f_{n+1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n f_{n-1} - 1,$$

így

$$[f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n] + (-1)^{n+1} f_{n+1} = (-1)^n f_{n-1} - 1 + (-1)^{n+1} f_{n+1}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$(-1)^n f_{n-1} - 1 + (-1)^{n+1} f_{n+1} = (-1)^{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) - 1 = (-1)^{n+1} f_n - 1,$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

7. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_0^2 = 0^2 = 0$, a jobb oldal pedig $f_0 f_{0+1} = f_0 f_1 = 0 \cdot 1 = 0$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = [f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2] + f_{n+1}^2.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1},$$

így

$$[f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2] + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

8. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_0f_1+f_1f_2 = 0\cdot1+1\cdot1 = 0+1 = 1$, a jobb oldal pedig $f^2_{2\cdot1} = f^2_2 = 1^2 = 1$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}&f_0f_1 + f_1f_2 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = \\ &\qquad [f_0f_1 + f_1f_2 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n}] + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_0f_1 + f_1f_2 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n} = f^2_{2n},$$

így

$$\begin{aligned}&[f_0f_1 + f_1f_2 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n}] + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = \\ &\qquad = f^2_{2n} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2}.\end{aligned}$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (kétszer):

$$\begin{aligned}f^2_{2n} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} &= f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) + f_{2n+1}f_{2n+2} \\ &= f_{2n}f_{2n+2} + f_{2n+1}f_{2n+2} \\ &= (f_{2n} + f_{2n+1})f_{2n+2} \\ &= f_{2n+2}f_{2n+2} = f^2_{2n+2} = f^2_{2(n+1)},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

9. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f^2_n = (-1)^n.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_{1+1}f_{1-1} - f^2_1 = f_2f_0 - f^2_1 = 1\cdot0 - 1^2 = 0 - 1 = -1$, és a jobb oldal is ugyanennyi.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldala

$$f_{n+2}f_n - f^2_{n+1}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (kétszer):

$$\begin{aligned}f_{n+2}f_n - f^2_{n+1} &= (f_n + f_{n+1})f_n - f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) \\ &= f^2_n + f_{n+1}f_n - f_{n+1}f_{n-1} - f_{n+1}f_n \\ &= f^2_n - f_{n+1}f_{n-1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n,$$

így

$$f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = -(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

10. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $f_{0+1}f_{0+2} - f_0 f_{0+3} = f_1 f_2 - f_0 f_3 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 - 0 = 1$, és a jobb oldal is ugyanennyi.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. A $P(n+1)$ állítás bal oldala

$$f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+4}.$$

Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (kétszer):

$$\begin{aligned} f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+4} &= (f_{n+1} + f_n)f_{n+3} - f_{n+1}(f_{n+3} + f_{n+2}) \\ &= f_{n+1}f_{n+3} + f_n f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} \\ &= f_n f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n,$$

így

$$f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+4} = -(f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

11. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$f_n^2 + 2f_{n-1}f_n = f_{2n}.$$

Alapeset(ek). $P(1)$ és $P(2)$ igaz, mert

$$f_1^2 + 2f_{1-1}f_1 = f_1^2 + 2f_0 f_1 = 1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1 = f_2 = f_{2\cdot 1}$$

és
$$f_2^2 + 2f_{2-1}f_2 = f_2^2 + 2f_1f_2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 = 3 = f_4 = f_{2\cdot 2}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 2$ egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Alkalmazzuk a rekurzív formulát a jobb oldalra:

$$f_{2(n+1)} = f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n} = f_{2n} + f_{2n-1} + f_{2n} = \\ 2f_{2n} + f_{2n-1} = 2f_{2n} + (f_{2n} - f_{2n-2}) = 3f_{2n} - f_{2n-2}.$$

Alkalmazzuk ezután az indukciós feltevést majd ismét a rekurzív formulát:

$$\begin{aligned}
3f_{2n} - f_{2(n-1)} &= 3(f_n^2 + 2f_{n-1}f_n) - (f_{n-1}^2 + 2f_{(n-1)-1}f_{n-1}) \\
&= 3(f_n^2 + 2f_{n-1}f_n) - (f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}f_{n-1}) \\
&= 3f_n^2 + 6f_{n-1}f_n - f_{n-1}^2 - 2f_{n-2}f_{n-1} \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(6f_n - f_{n-1} - 2f_{n-2}) \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(6f_n - (f_{n+1} - f_n) - 2(f_n - f_{n-1})) \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(6f_n - (f_{n+1} - f_n) - 2(f_n - (f_{n+1} - f_n))) \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(6f_n - (f_{n+1} - f_n) - 2(2f_n - f_{n+1})) \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(6f_n - f_{n+1} + f_n - 4f_n + 2f_{n+1}) \\
&= 3f_n^2 + f_{n-1}(3f_n + f_{n+1}) \\
&= 3f_n^2 + (f_{n+1} - f_n)(3f_n + f_{n+1}) \\
&= 3f_n^2 + 3f_{n+1}f_n + f_{n+1}^2 - 3f_n^2 - f_nf_{n+1} \\
&= f_{n+1}^2 + 2f_nf_{n+1},
\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás bal oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

12. Használjuk a rekurzív formulát:

$$f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = (f_n + f_{n-1})^2 - f_{n-1}^2 = f_n^2 + 2f_nf_{n-1} + f_{n-1}^2 - f_{n-1}^2 = f_n^2 + 2f_nf_{n-1}.$$

Ám az előző feladat szerint ez éppen f_{2n}, amit bizonyítani akartunk.

13. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy
$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}.$$

Alapeset(ek). $P(0)$ és $P(1)$ igaz, mert

$$f_{0+1}^2 + f_0^2 = f_1^2 + f_0^2 = 1^2 + 0^2 = 1 = f_1 = f_{2\cdot 0+1}$$

és

$$f_{1+1}^2 + f_1^2 = f_2^2 + f_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = f_3 = f_{2\cdot 1+1}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(0), P(1), \dots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Alkalmazzuk a rekurzív formulát a jobb oldalra:

$$\begin{aligned} f_{2(n+1)+1} = f_{2n+3} = f_{2n+2} + f_{2n+1} = f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1} = \\ 2f_{2n+1} + f_{2n} = 2f_{2n+1} + (f_{2n+1} - f_{2n-1}) = 3f_{2n+1} - f_{2n-1}. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk ezután az indukciós feltevést majd ismét a rekurzív formulát:

$$\begin{aligned} 3f_{2n+1} - f_{2(n-1)+1} &= 3(f_{n+1}^2 + f_n^2) - (f_{(n-1)+1}^2 + f_{n-1}^2) \\ &= 3(f_{n+1}^2 + f_n^2) - (f_n^2 + f_{n-1}^2) \\ &= 3f_{n+1}^2 + 3f_n^2 - f_n^2 - f_{n-1}^2 \\ &= 3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - f_{n-1}^2 \\ &= 3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - (f_{n+1} - f_n)^2 \\ &= 3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - f_{n+1}^2 + 2f_{n+1}f_n - f_n^2 \\ &= 2f_{n+1}^2 + f_n^2 + 2f_{n+1}f_n \\ &= 2f_{n+1}^2 + (f_{n+2} - f_{n+1})^2 + 2f_{n+1}(f_{n+2} - f_{n+1}) \\ &= 2f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - 2f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+1}^2 + 2f_{n+1}f_{n+2} - 2f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2, \end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás bal oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

14. Minden n pozitív egész számra jelölje g_n azon lehetőségek számát, ahányféleképpen lefesthető egy n szintes ház úgy, hogy minden szint kék vagy fehér, és nincs két egymás feletti kék szint. Világos módon $g_1 = 2$ és $g_2 = 3$, hiszen egy egyszintes háznál az egyetlen szint vagy kék vagy fehér, egy kétszintes háznál pedig vagy mindkét szint fehér vagy az egyik fehér és a másik kék (mindegy milyen sorrendben). Legyen ezek után $n \geqslant 3$. Egy n szintes ház megfelelő lefestései két típusba sorolhatók:

(1) Azok a lefestések, amelyeknél az n-edik szint fehér. Ezek éppen egy $n-1$ szintes ház megfelelő lefestései, felül kiegészítve egy fehérre festett n-edik szinttel. Ilyenekből g_{n-1} van.

(2) Azok a lefestések, amelyeknél az n-edik szint kék. Ezeknél az $(n-1)$-edik szint szükségképpen fehér, így ezek éppen egy $n-2$ szintes ház megfelelő lefestései, felül kiegészítve egy fehérre festett $(n-1)$-edik és egy kékre festett n-edik szinttel. Ilyenekből g_{n-2} van.

Így most $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$. Ugyanez a rekurzió érvényes a Fibonacci sorozatra, ezért $g_1 = f_3$ és $g_2 = f_4$ miatt $g_n = f_{n+2}$ minden n pozitív egész számra.

15. Minden n pozitív egész számra jelölje g_n azon lehetőségek számát, ahányféleképpen a kisfiú felugrálhat egy n lépcsőfokból álló lépcsőn úgy, hogy minden ugrásnál vagy egy vagy két lépcsőfokkal jut feljebb. Világos módon $g_1 = 1$ és $g_2 = 2$, hiszen egy egy lépcsőfokból álló lépcsőn egy egyes ugrással lehet feljutni, egy két lépcsőfokból állón pedig vagy egy kettessel, vagy két egyessel. Legyen ezek után $n \geqslant 3$. Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn való felugrálások két típusba sorolhatók:

(1) Az utolsó ugrással egy lépcsőfokkal jut feljebb a kisfiú. Ezek éppen egy $n-1$ lépcsőfokból álló lépcsőn való felugrálások kiegészítve a végén egy egyes ugrással. Ilyenekből g_{n-1} van.

(2) Az utolsó ugrással két lépcsőfokkal jut feljebb a kisfiú. Ezek éppen egy $n-2$ lépcsőfokból álló lépcsőn való felugrálások kiegészítve a végén egy kettes ugrással. Ilyenekből g_{n-2} van.

Így most $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$. Ugyanez a rekurzió érvényes a Fibonacci sorozatra, ezért $g_1 = f_2$ és $g_2 = f_3$ miatt $g_n = f_{n+1}$ minden n pozitív egész számra.

16. Minden n pozitív egész számra jelölje h_n azon lehetőségek számát, ahányféleképpen elkölthetünk n eurót úgy, hogy minden nap vagy 1 euróért fagyit veszünk vagy 2 euróért gyümölcsöt. Világos módon $h_1 = 1$ és $h_2 = 2$, hiszen ha egy eurónk van azért egy nap vehetünk fagyit, ha pedig két eurónk, akkor vagy egy nap vehetünk gyümölcsöt vagy két nap fagyit. Legyen ezek után $n \geqslant 3$. Azon lehetőségek, ahogy n eurót elkölthetünk két típusba sorolhatók:

(1) Utoljára 1 euróért fagyit veszünk. Ezek éppen azon lehetőségek, ahogy $n-1$ eurót elkölthetünk kiegészítve a végén egy fagyi vásárlásával 1 euróért. Ilyenekből h_{n-1} van.

(2) Utoljára 2 euróért gyümölcsöt veszünk. Ezek éppen azon lehetőségek, ahogy $n-2$ eurót elkölthetünk kiegészítve a végén gyümölcs vásárlásával 2 euróért. Ilyenekből h_{n-2} van.

Így most $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$. Ugyanez a rekurzió érvényes a Fibonacci sorozatra, ezért $h_1 = f_2$ és $h_2 = f_3$ miatt $h_n = f_{n+1}$ minden n pozitív egész számra.

17. Minden n pozitív egész számra jelölje h_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát, amelyek elemei között nincs két szomszédos szám. Világos módon $h_1 = 2$ és $h_2 = 3$, hiszen az $\{1\}$ halmaz megfelelő részhalmazai $\emptyset, \{1\}$, az $\{1, 2\}$ halmazé pedig $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. Legyen ezek után $n \geqslant 3$. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz megfelelő részhalmazai két típusba sorolhatók:

(1) Azok a részhalmazok, amelyek nem tartalmazzák az n számot. Ezek éppen az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz azon részhalmazai, amelyek elemei között nincs két szomszédos szám. Ilyen részhalmazból h_{n-1} van.

(2) Azok a részhalmazok, amelyek tartalmazzák az n számot. Ezek nem tartalmazzák az $n-1$ számot, így ezek a részhalmazok éppen az $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ halmaz azon részhalmazai, amelyek elemei között nincs két szomszédos szám, kiegészítve az n számmal. Ilyen részhalmazból h_{n-2} van.

Így most $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$. Ugyanez a rekurzió érvényes a Fibonacci sorozatra, ezért $h_1 = f_3$ és $h_2 = f_4$ miatt $h_n = f_{n+2}$ minden n pozitív egész számra.

18. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy az n természetes szám előáll különböző Fibonacci számok összegeként.

Alapeset(ek). $P(0), P(1), P(2)$ igaz, hiszen $0, 1, 2$ maguk Fibonacci számok.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 2$ egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Ha az $n+1$ szám Fibonacci szám, akkor kész vagyunk. Tegyük fel ezután, hogy $n+1$ nem Fibonacci szám. Legyen k a legnagyobb olyan index, amelyre $f_k < n+1$. Most $n+1-f_k < n+1$, ezért az indukciós feltevés szerint $n+1-f_k$ előáll különböző Fibonacci számok összegeként. Ebben az összegben minden tag kisebb, mint f_k, hiszen

$$n + 1 - f_k < f_{k+1} - f_k = f_{k-1} < f_k$$

(itt felhasználtuk a rekurzív definíciót). Így az összeg tagjait kiegészítve f_k-val az $n+1$ szám egy megfelelő előállítását kapjuk. Ezért $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

19. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Alapeset(ek). $P(0)$ és $P(1)$ igaz, mert

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0=f_0$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1=f_1.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(0), P(1), \dots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. A rekurzív formula szerint

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}.$$

A jobb oldal az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

vagy másképpen

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right),$$

illetve

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

Most egy kis leleményre van szükség. Ez a kifejezés felírható

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right)$$

alakban, amit tovább alakíthatunk a következőképpen:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Lineáris rekurziók

1. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$s_n = 2^n + 1.$$

Alapeset(ek). $P(0)$ és $P(1)$ igaz, mert $s_0 = 2 = 2^0 + 1$ és $s_1 = 3 = 2^1 + 1$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. A rekurzív formula szerint

$$s_{n+1} = 3s_n - 2s_{n-1}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltevést:

$$\begin{aligned}3s_n - 2s_{n-1} &= 3(2^n+1) - 2(2^{n-1}+1)\\ &= 3\cdot 2^n + 3 - 2\cdot 2^{n-1} - 2\\ &= 3\cdot 2^n + 3 - 2^n - 2\\ &= 2\cdot 2^n + 1\\ &= 2^{n+1} + 1.\end{aligned}$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

2. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2},$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = 2x + 1.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

azaz $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ és $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; mindkét gyök egyszeres. Most

$$s_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$\begin{aligned} s_0 &= a(1+\sqrt{2})^0 + b(1-\sqrt{2})^0 = a + b = 0, \\ s_1 &= a(1+\sqrt{2})^1 + b(1-\sqrt{2})^1 = (a+b) + (a-b)\sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $b = -a$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $a \cdot 2\sqrt{2} = 2$ adódik, ahonnan

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

következik. Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n.$$

3. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$s_n = 2s_{n-1} + 2s_{n-2},$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = 2x + 2.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

azaz $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ és $x_2 = 1 - \sqrt{3}$; mindkét gyök egyszeres. Most

$$s_n = a(1+\sqrt{3})^n + b(1-\sqrt{3})^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$\begin{aligned} s_0 &= a(1+\sqrt{3})^0 + b(1-\sqrt{3})^0 = a + b = 0, \\ s_1 &= a(1+\sqrt{3})^1 + b(1-\sqrt{3})^1 = (a+b) + (a-b)\sqrt{3} = 2. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $b = -a$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $a \cdot 2\sqrt{3} = 2$ adódik, ahonnan

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{és} \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

következik. Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n - \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

4. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$s_n = s_{n-1} + 6s_{n-2},$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = x + 6.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

azaz $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$; mindkét gyök egyszeres. Most

$$s_n = a3^n + b(-2)^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$\begin{aligned} s_0 &= a3^0 + b(-2)^0 = a + b = 3, \\ s_1 &= a3^1 + b(-2)^1 = 3a - 2b = 6. \end{aligned}$$

Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz adva $5a = 12$, és így $a = \frac{12}{5}$, majd visszahelyettesítve az első egyenletbe $b = 3 - a = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$ adódik. Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$s_n = \frac{12}{5} \cdot 3^n + \frac{3}{5} \cdot (-2)^n.$$

5. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2},$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^2 = 6x - 9.$$

Mivel $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, ezért a karakterisztikus egyenletnek $x = 3$ az egyetlen gyöke; ez kétszeres. Most

$$s_n = a3^n + bn3^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$\begin{aligned} s_0 &= a3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 = a = 0, \\ s_1 &= a3^1 + b \cdot 1 \cdot 3^1 = 3a + 3b = 1. \end{aligned}$$

Innen $a = 0$ és $b = \frac{1}{3}$ azonnal adódik. Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$s_n = \frac{1}{3} \cdot n3^n.$$

6. A lineáris rekurzió (a kezdeti értékekről egy pillanatra elfeledkezve)

$$s_n = 12s_{n-2} - 16s_{n-3},$$

a karakterisztikus egyenlet pedig

$$x^3 = 12x - 16.$$

Az $x^3 - 12x + 16$ harmadfokú egyenlet gyökeinek meghatározására bár ismert módszer, az meglehetősen bonyolult. Azonban vegyük észre, hogy $x_1 = 2$ gyöke az egyenletnek. Ezek után már egyszerű a dolgunk:

$$x^3 - 12x + 16 = (x-2)(x^2+2x-8) = (x-2)(x-2)(x+4) = (x-2)^2(x+4).$$

Így a karakterisztikus egyenletnek két gyöke van, $x_1 = 2$ kétszeres, $x_2 = -4$ pedig egyszeres. Most

$$s_n = a2^n + bn2^n + c(-4)^n$$

megoldása a rekurziónak tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékekre vonatkozó feltételek

$$\begin{aligned} s_0 &= a2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 + c(-4)^0 = a + c = 1, \\ s_0 &= a2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 + c(-4)^1 = 2a + 2b - 4c = 2, \\ s_0 &= a2^2 + b \cdot 2 \cdot 2^2 + c(-4)^2 = 4a + 8b + 16c = 3. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
a &= 37/36, \\
b &= -1/12, \\
c &= -1/36.
\end{aligned}
$$

Kész is vagyunk, a keresett zárt képlet

$$s_n = \frac{37}{36} \cdot 2^n - \frac{1}{12} \cdot n2^n - \frac{1}{36} \cdot (-4)^n.$$

Oszthatóság

1. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $n^3 + 2n$ osztható 3-mal.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$ osztható 3-mal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\
&= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1).
\end{aligned}
$$

Az indukciós feltevés szerint $3 \mid n^3 + 2n$. Másrészt $3 \mid 3(n^2+n+1)$ triviálisan igaz. Ezért

$$3 \mid n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1) = (n+1)^3 + 2(n+1),$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

2. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $n^5 - n$ osztható 5-tel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $0^5 - 0 = 0$ osztható 5-tel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$
\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\
&= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n).
\end{aligned}
$$

Az indukciós feltevés szerint $5 \mid n^5 - n$. Másrészt $5 \mid 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ triviálisan igaz. Ezért

$$5 \mid n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = (n+1)^5 - (n+1),$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

3. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ osztható 9-cel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $0^3 + 1^3 + 2^3 = 0 + 1 + 8 = 9$ osztható 9-cel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27\\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3).\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. Másrészt $9 \mid 9(n^2 + 3n + 3)$ triviálisan igaz. Ezért

$$9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3) = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

4. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ osztható 21-gyel.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 4^2 + 5^1 = 16 + 5 = 21$ osztható 21-gyel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} &= 4^{n+2} + 5^{2n+1}\\ &= 4 \cdot 4^{n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n-1}\\ &= 4 \cdot 4^{n+1} + 25 \cdot 5^{2n-1}\\ &= 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$. Másrészt $21 \mid 21 \cdot 5^{2n-1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$21 \mid 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1} = 4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

5. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ osztható 133-mal.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$ osztható 133-mal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1}\\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1}\\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1}\\ &= 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Másrészt $133 \mid 133 \cdot 12^{2n-1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$133 \mid 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1} = 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

6. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $4^n + 7^n + 1$ osztható 6-tal.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $4 + 7 + 1 = 12$ osztható 6-tal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}4^{n+1} + 7^{n+1} + 1 &= 4 \cdot 4^n + 7 \cdot 7^n + 1\\ &= 4(4^n + 7^n + 1) + 3 \cdot 7^n - 3\\ &= 4(4^n + 7^n + 1) + 3(7^n - 1).\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $6 \mid 4^n + 7^n + 1$. Másrészt

$$6 \mid 7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 7 + 1).$$

Ezért

$$6 \mid 4(4^n + 7^n + 1) + 3(7^n - 1) = 4^{n+1} + 7^{n+1} + 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

7. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $3^{3n+3} - 26n - 27$ osztható 169-cel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $3^{3\cdot 0+3} - 26 \cdot 0 - 27 = 3^3 - 27 = 27 - 27 = 0$ osztható 169-cel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}
3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 &= 3^{3n+6} - 26n - 26 - 27 \\
&= 3^3 \cdot 3^{3n+3} - 26n - 26 - 27 \\
&= 27 \cdot 3^{3n+3} - 26n - 26 - 27 \\
&= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26 \cdot 26n - 26 + 26 \cdot 27 \\
&= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26 \cdot 26n + 26 \cdot 26 \\
&= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26 \cdot 26(n+1) \\
&= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 169 \cdot 4(n+1).
\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $169 \mid 3^{3n+3}-26n-27$. Másrészt $169 \mid 169\cdot 4(n+1)$ triviálisan igaz. Ezért

$$169 \mid 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 169 \cdot 4(n+1) = 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

8. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy 7^n-6n-1 osztható 36-tal.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $7^0 - 6 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ osztható 36-tal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$7^{n+1}-6(n+1)-1 = 7\cdot 7^n-6n-6-1 = 7\cdot 7^n-6n-7 = 7(7^n-6n-1)+36n.$$

Az indukciós feltevés szerint $36 \mid 7^n - 6n - 1$. Másrészt $36 \mid 36n$ triviálisan igaz. Ezért

$$36 \mid 7(7^n - 6n - 1) + 36n = 7^{n+1} - 6(n+1) - 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

9. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $10^n + 18n - 1$ osztható 27-tel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $10^0 + 18 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ osztható 27-tel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 18(n+1) - 1 &= 10 \cdot 10^n + 18n + 18 - 1 \\ &= 10 \cdot 10^n + 18n + 17 \\ &= 10(10^n + 18n - 1) - 162n + 27. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $27 \mid 10^n + 18n - 1$. Másrészt $27 \mid 162n - 27 = 27(6n-1)$ triviálisan igaz. Ezért

$$27 \mid 10(10^n + 18n - 1) - 162n + 27 = 10^{n+1} + 18(n+1) - 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

10. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $4^n + 15n - 1$ osztható 9-cel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $4^0 + 15 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ osztható 9-cel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\ &= 4 \cdot 4^n + 15n + 14 \\ &= 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $9 \mid 4^n + 15n - 1$. Másrészt $9 \mid 45n - 18 = 9(5n-2)$ triviálisan igaz. Ezért

$$9 \mid 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18 = 4^{n+1} + 15(n+1) - 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

11. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $2^{3n+1} + 4^{3n+1} + 1$ osztható 7-tel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $2^{3\cdot 0+1} + 4^{3\cdot 0+1} + 1 = 2^1 + 4^1 + 1 = 2 + 4 + 1 = 7$ osztható 7-tel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)+1} + 4^{3(n+1)+1} + 1 &= 2^{3n+4} + 4^{3n+4} + 1 \\ &= 8 \cdot 2^{3n+1} + 64 \cdot 4^{3n+1} + 1 \\ &= 8(2^{3n+1} + 4^{3n+1} + 1) + 56 \cdot 4^{3n+1} - 7. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $7 \mid 2^{3n+1}+4^{3n+1}+1$. Másrészt $7 \mid 56\cdot 4^{3n+1}-7 = 7(8 \cdot 4^{3n+1} - 1)$ triviálisan igaz. Ezért

$$7 \mid 8(2^{3n+1} + 4^{3n+1} + 1) + 56 \cdot 4^{3n+1} - 7 = 2^{3(n+1)+1} + 4^{3(n+1)+1} + 1,$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

12. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $5\cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$ osztható 7-tel.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $5 \cdot 9^{1-1} + 2^{4\cdot 1-3} = 5 \cdot 9^0 + 2^1 = 5 + 2 = 7$ osztható 7-tel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 9^{(n+1)-1} + 2^{4(n+1)-3} &= 5 \cdot 9^n + 2^{4n+1} \\ &= 5 \cdot 9 \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 2^{4n-3} \\ &= 9(5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}) + 7 \cdot 2^{4n-3}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $7 \mid 5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$. Másrészt $7 \mid 7 \cdot 2^{4n-3}$ triviálisan igaz. Ezért

$$7 \mid 9(5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}) + 7 \cdot 2^{4n-3} = 5 \cdot 9^{(n+1)-1} + 2^{4(n+1)-3},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n potitív számra.

13. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$ osztható 11-gyel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $3^{5\cdot 0}+4^{5\cdot 0+2}+5^{5\cdot 0+1} = 3^0+4^2+5^1 = 1+16+5 = 22$ osztható 11-gyel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}3^{5(n+1)} + 4^{5(n+1)+2} + 5^{5(n+1)+1} &= 3^{5n+5} + 4^{5n+7} + 5^{5n+6} \\ &= 3^5 \cdot 3^{5n} + 4^5 \cdot 4^{5n+2} + 5^5 \cdot 5^{5n+1} \\ &= 243 \cdot 3^{5n} + 1024 \cdot 4^{5n+2} + 3125 \cdot 5^{5n+1} \\ &= 243(3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}) + \\ &\quad + 781 \cdot 4^{5n+2} + 2882 \cdot 5^{5n+1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $11 \mid 3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$. Másrészt

$$11 \mid 781 \cdot 4^{5n+2} + 2882 \cdot 5^{5n+1} = 11(71 \cdot 4^{5n+2} + 262 \cdot 5^{5n+1})$$

triviálisan igaz. Ezért

$$\begin{aligned}11 \mid 243(3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}) + 781 \cdot 4^{5n+2} + 2882 \cdot 5^{5n+1} = \\ = 3^{5(n+1)} + 4^{5(n+1)+2} + 5^{5(n+1)+1},\end{aligned}$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

14. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy $10^{n+2} + 11^{2n+1}$ osztható 111-gyel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $10^{0+2} + 11^{2\cdot 0+1} = 10^2 + 11^1 = 100 + 11 = 111$ osztható 111-gyel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz.

$$\begin{aligned}10^{(n+1)+2} + 11^{2(n+1)+1} &= 10^{n+3} + 11^{2n+3} \\ &= 10 \cdot 10^{n+2} + 121 \cdot 11^{2n+1} \\ &= 10(10^{n+2} + 11^{2n+1}) + 111 \cdot 11^{2n+1}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $111 \mid 10^{n+2} + 11^{2n+1}$. Másrészt $111 \mid 111 \cdot 11^{2n+1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$111 \mid 10(10^{n+2} + 11^{2n+1}) + 111 \cdot 11^{2n+1} = 10^{(n+1)+2} + 11^{2(n+1)+1},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

15. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy 3^n darab egyforma számjegyből áll szám osztható 3^n-nel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $3^0 = 1$ osztója minden egész számnak.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Tekintsünk egy 3^{n+1} darab egyforma a számjegyből álló N számot. Vegyük észre, hogy az N szám felírható a következőképpen:

$$\underbrace{aa a\cdots aaa}_{3^n \text{ számjegy}}\underbrace{aaa\cdots aaa}_{3^n \text{ számjegy}}\underbrace{aaa\cdots aaa}_{3^n \text{ számjegy}} = \underbrace{aaa\cdots aaa}_{3^n \text{ számjegy}} \cdot 1\underbrace{000\cdots 001}_{3^n \text{ számjegy}}\underbrace{000\cdots 001}_{3^n \text{ számjegy}}$$

Itt a szorzat első tényezője az indukciós feltevés szerint osztható 3^n-nel, míg a második tényező osztható hárommal, hiszen a számjegyeinek összege 3. Így N osztható 3^{n+1}-nel, vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

16.

x	y	$\text{rem}(x, y)$	$=$	$x - qy$
294	231	63	$=$	$294 - 231$
231	63	42	$=$	$231 - 3 \cdot 63$
			$=$	$231 - 3(294 - 231)$
			$=$	$-3 \cdot 294 + 4 \cdot 231$
63	42	21	$=$	$63 - 42$
			$=$	$(294 - 231) - (-3 \cdot 294 + 4 \cdot 231)$
			$=$	$\boxed{4 \cdot 294 - 5 \cdot 231}$
42	21	0		

A legnagyobb közös osztó $21 = 4 \cdot 294 - 5 \cdot 231$.

17.

$$
\begin{array}{ccrcl}
x & y & \mathrm{rem}(x,y) & = & x-qy \\
\hline
923 & 728 & 195 & = & 923-728 \\
728 & 195 & 143 & = & 728-3\cdot 195 \\
 & & & = & 728-3(923-728) \\
 & & & = & -3\cdot 923+4\cdot 728 \\
195 & 143 & 52 & = & 195-143 \\
 & & & = & (923-728)-(-3\cdot 923+4\cdot 728) \\
 & & & = & 4\cdot 923-5\cdot 728 \\
143 & 52 & 39 & = & 143-2\cdot 52 \\
 & & & = & (-3\cdot 923+4\cdot 728)-2(4\cdot 923-5\cdot 728) \\
 & & & = & -11\cdot 923+14\cdot 728 \\
52 & 39 & 13 & = & 52-39 \\
 & & & = & (4\cdot 923-5\cdot 728)-(-11\cdot 923+14\cdot 728) \\
 & & & = & \boxed{15\cdot 923-19\cdot 728} \\
39 & 13 & 0 & &
\end{array}
$$

A legnagyobb közös osztó $13 = 15\cdot 923 - 19\cdot 728$.

18. (A) A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégségesség belátásához idézzük fel, hogy léteznek olyan u és v egész számok, amelyekkel $au+bv = \mathrm{lnko}(a,b)$. Ha $\mathrm{lnko}(a,b) \mid c$, akkor létezik olyan t egész, amelyre $t\cdot\mathrm{lnko}(a,b) = c$, így $x = tu$ és $y = tv$ egész megoldása az egyenletnek.

(B) A felírt egész számok nyilván megoldásai az egyenletnek. Ezek után tegyük fel, hogy $x = x_1$ és $y = y_1$ egész megoldása az egyenletnek. Ekkor $a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1) = 0$, és így

$$\frac{a}{\mathrm{lnko}(a,b)}(x_1-x_0) = \frac{b}{\mathrm{lnko}(a,b)}(y_0-y_1).$$

Mivel

$$\mathrm{lnko}\left(\frac{a}{\mathrm{lnko}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{lnko}(a,b)}\right) = 1,$$

ezért

$$\frac{b}{\mathrm{lnko}(a,b)} \,\Bigg|\, (x_1-x_0).$$

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $t\in\mathbb{Z}$, amelyre

$$x_1 = x_0 + \frac{bt}{\mathrm{lnko}(a,b)}.$$

Innen behelyettesítéssel

$$y_1 = y_0 - \frac{at}{\text{lnko}(a,b)}$$

adódik.

19. Először kiszámoljuk 33 és 21 legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

$$\begin{array}{cc r c l}
x & y & \text{rem}(x,y) & = & x - qy \\
\hline
33 & 21 & 12 & = & 33 - 21 \\
21 & 12 & 9 & = & 21 - 12 = 21 - (33 - 21) \\
 & & & = & -1 \cdot 33 + 2 \cdot 21 \\
12 & 9 & 3 & = & 12 - 9 = (33 - 21) - (-1 \cdot 33 + 2 \cdot 21) \\
 & & & = & \boxed{2 \cdot 33 - 3 \cdot 21} \\
9 & 3 & 0 & &
\end{array}$$

A legnagyobb közös osztó 3. Mivel $3 \mid 24$, ezért az egyenletnek van egész megoldása.

Egy konkrét megoldás meghatározásához először fel kell írni a legnagyobb közös osztót $33u+21v$ alakban, ahol u és v egész számok. Ezt már megtettük az euklideszi algoritmus végrehajtása során: $3 = 2 \cdot 33 - 3 \cdot 21$. Ennélfogva $33 \cdot (2 \cdot 8) + 21 \cdot (-3 \cdot 8) = 24$, vagyis $x = 16$ és $y = -24$ megoldása az egyenletnek. Az összes megoldás

$$x = 16 + 7t \quad \text{és} \quad y = -24 - 11t$$

ahol $t \in \mathbb{Z}$.

20. Először kiszámoljuk 98 és 77 legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

$$\begin{array}{cc r c l}
x & y & \text{rem}(x,y) & = & x - qy \\
\hline
98 & 77 & 21 & = & 98 - 77 \\
77 & 21 & 14 & = & 77 - 3 \cdot 21 = 77 - 3(98 - 77) \\
 & & & = & -3 \cdot 98 + 4 \cdot 77 \\
21 & 14 & 7 & = & 21 - 14 = (98 - 77) - (-3 \cdot 98 + 4 \cdot 77) \\
 & & & = & \boxed{4 \cdot 98 - 5 \cdot 77} \\
14 & 7 & 0 & &
\end{array}$$

A legnagyobb közös osztó 7. Mivel $7 \mid 14$, ezért az egyenletnek van egész megoldása.

Egy konkrét megoldás meghatározásához először fel kell írni a legnagyobb közös osztót $98u-77v$ alakban, ahol u és v egész számok. Ezt már megtettük az euklideszi algoritmus végrehajtása során: $14 = 4 \cdot 98 - 5 \cdot 77$. Ennélfogva $98 \cdot (4 \cdot 2) - 77 \cdot (5 \cdot 2) = 14$, vagyis $x = 8$ és $y = 10$ megoldása az egyenletnek. Az összes megoldás

$$x = 8 - 11t \quad \text{és} \quad y = 10 - 14t$$

ahol $t \in \mathbb{Z}$.

21. Használjuk az $\mathrm{lnko}(a, b) = \mathrm{lnko}(b, a - qb)$ összefüggést:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lnko}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3, n^2 + 2n + 2) &= \mathrm{lnko}(n^2 + 2n + 2, n^3 + 3n^2 + 5n+ \\
&\qquad 3 - (n + 1)(n^2 + 2n + 2)) \\
&= \mathrm{lnko}(n^2 + 2n + 2, n^3 + 3n^2 + 5n+ \\
&\qquad 3 - n^3 - 2n^2 - 2n - n^2- \\
&\qquad 2n - 2), \\
&= \mathrm{lnko}(n^2 + 2n + 2, n^3 + 3n^2+ \\
&\qquad 5n + 3 - n^3 - 3n^2- \\
&\qquad 4n - 2) \\
&= \mathrm{lnko}(n^2 + 2n + 2, n + 1) \\
&= \mathrm{lnko}(n + 1, n^2 + 2n + 2- \\
&\qquad (n + 1)(n + 1)) \\
&= \mathrm{lnko}(n + 1, n^2 + 2n + 2 - n^2- \\
&\qquad 2n - 1) \\
&= \mathrm{lnko}(n + 1, 1) \\
&= \mathrm{lnko}(1, n + 1 - n \cdot 1) \\
&= \mathrm{lnko}(1, 1) = 1.
\end{aligned}$$

22. Legyen $d = \mathrm{lnko}(n! + 1, (n + 1)! + 1)$. Ekkor

$$d \mid (n+1) \cdot (n!+1) - 1 \cdot ((n+1)!+1) = (n+1)! + (n+1) - (n+1)! - 1 = n.$$

Innen következik, hogy

$$d \mid 1 \cdot (n! + 1) - (n - 1)! \cdot n = n! + 1 - n! = 1.$$

Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $d = 1$.

23. Minden k természetes számra legyen $F_k = 2^{2^k} + 1$. Először teljes indukcióval megmutatjuk, hogy bármely n pozitív egész számra

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz $F_0 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3$ és $F_1-2 = (2^{2^1}+1)-2 = (2^2+1)-2 = 5-2 = 3$ szintén.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Az indukciós feltevés szerint

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2,$$

ezért

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = (F_n-2)F_n = (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}}-1 = F_{n+1}-2.$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

Ezek után az állítás bizonyítása már egyszerű. Legyenek $m < n$ tetszőleges természetes számok, és legyen $d = \mathrm{lnko}(F_n, F_m)$. Az előbbiek szerint

$$F_n = (F_0 \cdots F_{m-1}F_{m+1} \cdots F_{n-1})F_m + 2,$$

ezért a legnagyobb közös osztó tulajdonságait összefoglaló állítás utolsó pontjával összhangban $d = \mathrm{lnko}(F_m, 2)$. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $d = 1$ vagy $d = 2$. Ám F_n és F_m páratlan számok, így szükségképpen $d = 1$.

24. Egy megjegyzéssel kezdjük a bizonyítást. Tegyük fel, hogy $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ pozitív egész megoldása az egyenletnek, és legyen $d = \mathrm{lnko}(x_0, y_0, z_0)$. Tekintsük az $x_1 = x_0/d$, $y_1 = y_0/d$, $z_1 = z_0/d$ pozitív egész számokat. Ekkor $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ is pozitív egész megoldása az egyenletnek és $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ pozitív egész megoldása az egyenletnek és $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Ekkor tetszőleges t pozitív egész számra $x = x_1t$, $y = y_1t$, $z = z_1t$ is pozitív egész megoldása az egyenletnek. Ennélfogva elég az egyenlet olyan $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ pozitív egész megoldásainak vizsgálatára szorítkozni, amelyekre $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$.

Tegyük fel először, hogy $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ pozitív egész megoldása az egyenletnek és $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Ekkor $\mathrm{lnko}(x_1, y_1) = 1$, $\mathrm{lnko}(x_1, z_1) = 1$ és

$\mathrm{lnko}(y_1, z_1) = 1$. Valóban, indirekt tegyük fel, hogy valamely p prímszámra például $p \mid x_1$ és $p \mid y_1$. Ekkor $p^2 \mid x_1^2$ és $p^2 \mid y_1^2$, így $p^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, következésképpen $p \mid z_1$ ami ellentmond az $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$ feltételnek.

Innen azonnal következik, hogy az x_1 és y_1 számok közül nem lehet mindkettő páros. De nem lehet mindkettő páratlan sem. Valóban, ha x_1 és y_1 páratlan számok, akkor x_1^2 és y_1^2 néggyel osztva egy maradékot ad, következésképpen $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ néggyel osztva kettő maradékot ad. Ám ez nem lehetséges, hiszen egy négyzetszám néggyel osztva nulla vagy egy maradékot ad.

Kaptuk tehát, hogy x_1 és y_1 közül az egyik páros, a másik páratlan. Mivel szerepük a vizsgált egyenletben szimmetrikus, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy x_1 páros és y_1 páratlan. Ekkor persze z_1 is páratlan.

Az $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ összefüggést átírjuk a következőképpen:

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 = \frac{z_1^2 - y_1^2}{4} = \frac{z_1 + y_1}{2} \cdot \frac{z_1 - y_1}{2}.$$

Itt az előbbiekkel összhangban $x_1/2$, $(z_1 + y_1)/2$ és $(z_1 - y_1)/2$ pozitív egész számok. Vegyük észre továbbá, hogy

$$\mathrm{lnko}\left(\frac{z_1 + y_1}{2}, \frac{z_1 - y_1}{2}\right) = 1.$$

Valóban, ha valamely d pozitív egész szám osztója $(z_1 + y_1)/2$-nek és $(z_1 - y_1)/2$-nek, akkor osztója azok összegének és különbségének is, vagyis d osztója z_1-nek és y_1-nek is. Ám ez $\mathrm{lnko}(y_1, z_1) = 1$ miatt csak akkor lehetséges, ha $d = 1$.

A számelmélet alaptétele értelmében két relatív prím pozitív egész szám szorzata csak akkor lehet négyzetszám, ha azok saját maguk is négyzetszámok. Ennélfogva léteznek olyan m és n pozitív egészek, hogy

$$\frac{z_1 + y_1}{2} = m^2 \qquad \text{és} \qquad \frac{z_1 - y_1}{2} = n^2.$$

Így $z_1 = m^2 + n^2$ és $y_1 = m^2 - n^2$, végül $x_1^2 = 4m^2n^2$ miatt $x_1 = 2mn$. Itt világos módon $\mathrm{lnko}(m, n) = 1$. Továbbá x_1 és y_1 ellentétes paritása miatt m és n is ellentétes paritásúak, valamint nyilvánvalóan $m > n$.

A következő lépésben belátjuk, hogy ha $x_1 = 2mn$, $y_1 = m^2 - n^2$, $z_1 = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ ellentétes paritású, relatív prím pozitív egész számok, akkor $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ pozitív egész megoldása az egyenletnek és $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 &= (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 \\ &= 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 = z_1^2.\end{aligned}$$

Az $\mathrm{lnko}(x_1, y_1, z_1) = 1$ összefüggés belátásához elég igazolni például, hogy $\mathrm{lnko}(x_1, y_1) = 1$. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan p prímszám, amely osztója x_1-nek és y_1-nek is. Mivel m és n ellentétes paritásúak, ezért $y_1 = m^2 - n^2$ páratlan szám, így $p \neq 2$. Ennélfogva $p \mid x_1 = 2nm$ miatt $p \mid m$ vagy $p \mid n$. Az általánosság megszorítás nélkül feltehetjük, hogy $p \mid m$. Ekkor $p \mid m^2$, következésképpen $p \mid m^2 - y_1 = n^2$, és így $p \mid n$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $\mathrm{lnko}(m, n) = 1$.

Összefoglalva az eddigieket, az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán; a megoldások $x = x_1t$, $y = y_1t$, $z = z_1t$, ahol t tetszőleges pozitív egész, továbbá $x_1 = 2mn$, $y_1 = m^2 - n^2$, $z_1 = m^2 + n^2$, ahol $m > n$ ellentétes paritású, relatív prím pozitív egész számok.

25. A számelmélet alaptételével összhangban tetszőleges n pozitív egész szám egyértelműen felírható $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ alakban, ahol $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ prímszámok és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív egészek (ezt a felírást n kanonikus alakjának nevezzük). Világos módon n pozitív osztói éppen a $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ számok, ahol $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Ilyen alakú számból $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k)$ darab van, az összegük pedig

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}).$$

Jelölje $\sigma(n)$ az n pozitív egész pozitív osztóinak összegét. A fenti formulából azonnal adódik, hogy ha az n_1 és n_2 pozitív egészekre $\mathrm{lnko}(n_1, n_2) = 1$, akkor

$$\sigma(n_1 n_2) = \sigma(n_1)\sigma(n_2).$$

E kis kitérő után először azt látjuk be, hogy ha n felírható $2^{p-1}(2^p - 1)$ alakban, ahol p és $2^p - 1$ prím, akkor n tökéletes. Valóban,

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{p-1}(2^p - 1)) \\ &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) \\ &= (1 + 2 + \cdots + 2^{p-1})(1 + 2^p - 1) \\ &= (2^p - 1) \cdot 2^p \\ &= 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) \\ &= 2n.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy 2^{p-1} és $2^p - 1$ nyilvánvaló módon relatív prímek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az n pozitív páros szám tökéletes. Az n szám nyilván egyértelműen felírható $2^m t$ alakban, ahol m pozitív egész, t pedig pozitív páratlan egész. Most egyrészt

$$\sigma(n) = \sigma(2^m t) = \sigma(2^m)\sigma(t) = (2^{m+1} - 1)\sigma(t),$$

másrészt

$$\sigma(n) = 2n = 2^{m+1}t.$$

Ebből következik, hogy

$$(2^{m+1} - 1)\sigma(t) = 2^{m+1}t.$$

Innen többek között rögtön látszik, hogy $t > 1$. Vonjunk ki mindkét oldalból $(2^{m+1} - 1)t$-t:

$$(2^{m+1} - 1)(\sigma(t) - t) = t.$$

Vegyük számba t osztóit. Először is t-nek nyilván osztója önmaga. Másrészt az előbbi összefüggéssel összhangban t-nek osztója $\sigma(t) - t$. Mivel $2^{m+1} - 1 > 1$, ezért $\sigma(t) - t < t$, vagyis $\sigma(t) - t$ és t különböző osztók. Ezek összege $\sigma(t) - t + t = \sigma(t)$, ennélfogva más osztója nem is lehet t-nek. Ez viszont azt jelenti, hogy t prímszám, továbbá $\sigma(t) - t = 1$. Következésképpen $t = 2^{m+1} - 1$, és így $n = 2^m(2^{m+1} - 1)$, ahol $2^{m+1} - 1$ prím.

Ebből rögtön adódik az is, hogy $m + 1$ prím. Valóban, indirekt tegyük fel, hogy $m + 1$ összetett szám, vagyis $m + 1 = ab$, ahol $a, b > 1$ egészek. Ekkor

$$2^{m+1} - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1).$$

Itt $a, b > 1$ miatt mindkét tényező nagyobb, mint 1, azaz $2^{m+1} - 1$ is összetett szám, ellentmondva az előbbieknek.

26. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy f_{3n} osztható 2-vel.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $f_{3\cdot 0} = f_0 = 0$ osztható 2-vel.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (kétszer):

$$f_{3(n+1)} = f_{3n+3} = f_{3n+2} + f_{3n+1} = f_{3n+1} + f_{3n} + f_{3n+1} = 2f_{3n+1} + f_{3n}.$$

Az indukciós feltevés szerint $2 \mid f_{3n}$. Másrészt $2 \mid 2f_{3n+1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$2 \mid 2f_{3n+1} + f_{3n} = f_{3(n+1)},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

27. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy f_{4n} osztható 3-mal.

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $f_{4\cdot 0} = f_0 = 0$ osztható 3-mal.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát (háromszor):

$$f_{4(n+1)} = f_{4n+4} = f_{4n+3} + f_{4n+2} = f_{4n+2} + f_{4n+1} + f_{4n+2} = \\ 2f_{4n+2} + f_{4n+1} = 2f_{4n+1} + 2f_{4n} + f_{4n+1} = 3f_{4n+1} + 2f_{4n}.$$

Az indukciós feltevés szerint $3 \mid f_{4n}$. Másrészt $3 \mid 3f_{4n+1}$ triviálisan igaz. Ezért

$$3 \mid 3f_{4n+1} + 2f_{4n} = f_{4(n+1)},$$

vagyis $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

28. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$\text{lnko}(f_n, f_{n+1}) = 1.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz $\text{lnko}(f_0, f_1) = \text{lnko}(0, 1) = 1$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n természetes számra. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz. Használjuk a Fibonacci sorozatra vonatkozó rekurzív formulát:

$$\text{lnko}(f_{n+1}, f_{n+2}) = \text{lnko}(f_{n+1}, f_{n+1} + f_n).$$

Használjuk ezután az $\text{lnko}(a, b) = \text{lnko}(b, a - qb)$ összefüggést:

$$\text{lnko}(f_{n+1} + f_n, f_{n+1}) = \text{lnko}(f_{n+1}, f_n).$$

Végül használjuk az indukciós feltevés: $\text{lnko}(f_n, f_{n+1}) = 1$. Ebből következik, hogy $\text{lnko}(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n természetes számra.

Kongruenciák

1. Fermat tétele szerint $8^{15} \cdot 8 \equiv 8^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, ezért $\mathrm{rem}(8^{15}, 17)$-et kell kiszámítani, amit egymás utáni négyzetre emelésekkel elég egyszerűen megtehetünk:

$$\begin{aligned} 8^2 &\equiv 64 \equiv 13 \pmod{17}, \\ 8^4 &\equiv (8^2)^2 \equiv 13^2 \equiv 169 \equiv 16 \pmod{17}, \\ 8^8 &\equiv (8^4)^2 \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{17}, \end{aligned}$$

majd

$$8^{15} \equiv 8^8 \cdot 8^4 \cdot 8^2 \cdot 8 \equiv 1 \cdot 16 \cdot 13 \cdot 8 \equiv 208 \cdot 8 \equiv 4 \cdot 8 \equiv 32 \equiv 15 \pmod{17}.$$

Így $\mathrm{rem}(8^{15}, 17) = 15$. Ellenőrzésképpen $8 \cdot 15 \equiv 120 \equiv 1 \pmod{17}$.

2. Fermat tétele szerint $5^{17} \cdot 5 \equiv 5^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, ezért $\mathrm{rem}(5^{17}, 19)$-et kell kiszámítani, amit egymás utáni négyzetre emelésekkel elég egyszerűen megtehetünk:

$$\begin{aligned} 5^2 &\equiv 25 \equiv 6 \pmod{19}, \\ 5^4 &\equiv (5^2)^2 \equiv 6^2 \equiv 36 \equiv 17 \pmod{19}, \\ 5^8 &\equiv (5^4)^2 \equiv 17^2 \equiv 289 \equiv 4 \pmod{19}, \\ 5^{16} &\equiv (5^8)^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{19}, \end{aligned}$$

majd

$$5^{17} \equiv 5^{16} \cdot 5 \equiv 16 \cdot 5 \equiv 80 \equiv 4 \pmod{19}.$$

Így $\mathrm{rem}(5^{17}, 19) = 4$. Ellenőrzésképpen $5 \cdot 4 \equiv 20 \equiv 1 \pmod{19}$.

3. Nyilván $n^{13} + 12n = (n^{13} - n) + 13n$, ezért elég belátni, hogy $n^{13} - n$ osztható 13-mal. Ha $13 \mid n$, akkor ez triviálisan teljesül. Ellenkező esetben $\mathrm{lnko}(13, n) = 1$, így a Fermat tételt alkalmazva $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, ahonnan $n^{13} \equiv n \pmod{13}$, vagyis $13 \mid n^{13} - n$.

4. Ha $13 \mid n$, akkor ez nyilván igaz. Ellenkező esetben $\mathrm{lnko}(13, n) = 1$, így a Fermat tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} n^{20} &\equiv n^{12+8} \equiv n^{12} \cdot n^8 \equiv n^8 \pmod{13}, \\ n^{44} &\equiv n^{12\cdot 3+8} \equiv (n^{12})^3 \cdot n^8 \equiv n^8 \pmod{13}, \\ n^{80} &\equiv n^{12\cdot 6+8} \equiv (n^{12})^6 \cdot n^8 \equiv n^8 \pmod{13}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$n^{20} + 4n^{44} + 8n^{80} \equiv n^8 + 4n^8 + 8n^8 \equiv 13n^8 \equiv 0 \pmod{13},$$

vagyis $13 \mid n^{20} + 4n^{44} + 8n^{80}$.

5. Először is vegyük észre, hogy

$$173^{163} \equiv (17 \cdot 10 + 3)^{163} \equiv 3^{163} \pmod{17}.$$

Mivel $\text{lnko}(3, 17) = 1$, ezért a Fermat tétellel összhangban

$$3^{163} \equiv (3^{16})^{10} \cdot 3^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 10 \pmod{17}.$$

Tehát a keresett maradék 10.

6. Először is vegyük észre, hogy

$$247^{244} \equiv (23 \cdot 10 + 17)^{244} \equiv 17^{244} \pmod{23}.$$

Mivel $\text{lnko}(17, 23) = 1$, ezért a Fermat tétellel összhangban

$$17^{244} \equiv (17^{22})^{11} \cdot 17^2 \equiv 17^2 \equiv 289 \equiv 13 \pmod{23}.$$

Tehát a keresett maradék 13.

7. Először is

$$333^{444} \equiv (7 \cdot 47 + 4)^{444} \equiv 4^{444} \pmod{7},$$

illetve

$$444^{333} \equiv (7 \cdot 63 + 3)^{333} \equiv 3^{333} \pmod{7}.$$

Mivel $\text{lnko}(4, 7) = 1$ és $\text{lnko}(3, 7) = 1$, ezért a Fermat tétellel összhangban

$$4^{444} \equiv 4^{6 \cdot 74} \equiv 1 \pmod{7},$$

illetve

$$3^{333} \equiv 3^{6 \cdot 55 + 3} \equiv 3^3 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Így

$$333^{444} + 444^{333} \equiv 1 + 6 \equiv 0 \pmod{7}.$$

8. Mivel $\text{lnko}(2, 13) = 1$ és $\text{lnko}(3, 13) = 1$, ezért a Fermat tétellel összhangban

$$2^{70} \equiv 2^{5 \cdot 12 + 10} \equiv 2^{10} \pmod{13},$$

illetve

$$3^{70} \equiv 3^{5 \cdot 12 + 10} \equiv 3^{10} \pmod{13}.$$

Azonban

$$2^{10}+3^{10}=(2^2)^5+(3^2)^5=4^5+9^5=(4+9)(4^4-4^3\cdot 9+4^2\cdot 9^2-4\cdot 9^3+9^4),$$

ami triviálisan osztható 13-mal. Innen az állítás adódik.

9. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan megoldás, ahol x, y, z nem mindegyike 0. Legyen $d = \mathrm{lnko}(x, y, z)$. Ekkor $x' = x/d$, $y' = y/d$, $z' = z/d$ szintén megoldás, és erre a megoldásra $\mathrm{lnko}(x', y', z') = 1$. Ebből következik, hogy ha létezik nem triviális megoldás, akkor létezik olyan megoldás is, ahol $\mathrm{lnko}(x, y, z) = 1$. Tekintsünk egy ilyen megoldást. Mivel

$$x^4+5y^4=4z^4,$$

ezért

$$x^4+5y^4\equiv 4z^4 \pmod 5$$

is teljesül. Ha x nem többszöröse 5-nek, akkor a Fermat tétel szerint a kongruencia bal oldala 1-gyel, a jobb oldala pedig 0-val vagy 4-gyel kongruens modulo 5, attól függően, hogy z többszöröse 5-nek vagy sem. Ellentmondásra jutottunk, így szükségképpen x többszöröse 5-nek. Hasonlóan, ha z nem többszöröse 5-nek, akkor a Fermat tétel szerint a kongruencia jobb oldala 4-gyel, a bal oldala pedig 0-val kongruens modulo 5 (hiszen x többszöröse 5-nek). Ismét ellentmondásra jutottunk, így szükségképpen z is többszöröse 5-nek.

Legyen $x = 5x_1$ és $z = 5z_1$. Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$5^4x_1^4+5y^4=4\cdot 5^4 z_1,$$

illetve

$$5^3x_1^4+y^4=4\cdot 5^3 z_1$$

adódik. Ennélfogva y^4 többszöröse 5-nek, és így 5 prím volta miatt y is többszöröse 5-nek. Ez viszont ellentmond az $\mathrm{lnko}(x, y, z) = 1$ feltételnek.

10. (A) A kongruencia ekvivalens a $p \mid k^2-1=(k+1)(k-1)$ oszthatósággal. Ez viszont pontosan akkor teljesül ha $p \mid k+1$ vagy $p \mid k-1$, azaz $k \equiv \pm 1 \pmod p$.

(B) Ha $p = 2$, akkor az állítás triviálisan teljesül. Legyen ezután $p > 2$. Ekkor 1 és $p-1$ különböző tényezői az

$$1\cdot 2\cdots (p-1)$$

szorzatnak, és az előző állítással összhangban a tényezők közül csak ezek multiplikatív inverzei önmaguknak. Következésképpen a többi tényező párosítható a multiplikatív inverzével. Mivel egy szám és annak multiplikatív inverzének szorzata kongruens eggyel, ennélfogva

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

11. Legyen $m = m_1 m_2 \cdots m_n$. Ekkor minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $\frac{m}{m_i}$ egész valamint $\mathrm{lnko}(\frac{m}{m_i}, m_i) = 1$. Ebből következik, hogy minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén létezik olyan b_i egész, hogy

$$\frac{m}{m_i} b_i \equiv 1 \pmod{m_i}.$$

Másrészt ha $1 \leqslant i, j \leqslant n$ és $i \neq j$, akkor $m_i \mid \frac{m}{m_j}$, és így

$$\frac{m}{m_j} b_j \equiv 0 \pmod{m_i}.$$

Definiáljuk a c számot a következőképpen:

$$c = \sum_{j=1}^{n} \frac{m}{m_j} b_j a_j.$$

Ekkor

$$c \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{m}{m_j} b_j a_j \equiv \frac{m}{m_i} b_i a_i \equiv a_i \pmod{m_i}$$

minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén, azaz c megoldása a kongruenciarendszernek.

Ezek után tegyük fel, hogy c és c' is megoldása az

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

kongruenciarendszernek. Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $c \equiv c' \pmod{m_i}$, vagyis $m_i \mid c - c'$. Mivel $\mathrm{lnko}(m_i, m_j) = 1$ bármely $1 \leqslant i, j \leqslant n$ és $i \neq j$ esetén, ennélfogva $m \mid c - c'$, vagyis $c \equiv c' \pmod{m}$.

12. Olyan d pozitív egész számot keresünk, amelyre $13d \equiv 1 \pmod{60}$. Először fejezzük ki az $\mathrm{lnko}(13, 60) = 1$ legnagyobb közös osztót $60u + 13v$

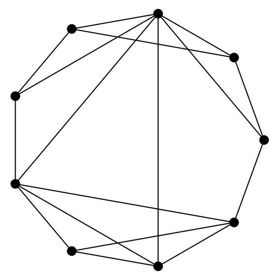
alakban, ahol u és v egész számok:

x	y	$\mathrm{rem}(x,y)$	$=$	$x - qy$
60	13	8	$=$	$60 - 4 \cdot 13$
13	8	5	$=$	$13 - 8$
			$=$	$13 - (60 - 4 \cdot 13)$
			$=$	$-1 \cdot 60 + 5 \cdot 13$
8	5	3	$=$	$8 - 5$
			$=$	$(60 - 4 \cdot 13) - (-1 \cdot 60 + 5 \cdot 13)$
			$=$	$2 \cdot 60 - 9 \cdot 13$
5	3	2	$=$	$5 - 3$
			$=$	$(-1 \cdot 60 + 5 \cdot 13) - (2 \cdot 60 - 9 \cdot 13)$
			$=$	$-3 \cdot 60 + 14 \cdot 13$
3	2	1	$=$	$3 - 2$
			$=$	$(2 \cdot 60 - 9 \cdot 13) - (-3 \cdot 60 + 14 \cdot 13)$
			$=$	$\boxed{5 \cdot 60 - 23 \cdot 13}$
2	1	0		

Ezek után $d = \mathrm{rem}(-23, 60) = 37$, így a titkos kulcs $(37, 77)$.

Gráfok

1. (A) Van:



(B) Nincs. Tetszőleges gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese, így szükségképpen páros szám. Itt viszont a fokszámok összege 29.

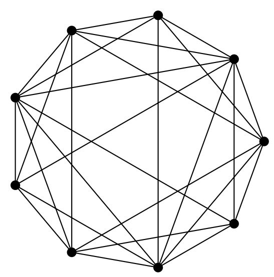
(C) Nincs. Egy hét csúcsú gráfban nem lehet egyszerre hatodfokú és nulladfokú csúcs, azaz olyan, amelyik az összes többivel szomszédos, és olyan, amelyik egyikkel sem.

(D) Nincs. Ha egy hét csúcsú gráfban van három hatodfokú csúcs, azaz olyan, amelyik az összes többivel szomszédos, akkor a gráf összes többi csúcsa legalább harmadfokú. Itt viszont van egy másodfokú csúcs is.

(E) Nincs. Itt az $1, 1, 1, 2, 3$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiból legfeljebb 8 él menne a $4, 5, 7$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiba, míg a $4, 5, 7$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiból legalább $16 - 3 \cdot 2 = 10$ él menne az $1, 1, 1, 2, 3$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiba, ami nyilván lehetetlen.

(F) Nincs. Itt a $4, 4, 5$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiból legfeljebb 13 él menne a $7, 7, 7, 8, 8, 8$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiba, míg a $7, 7, 7, 8, 8, 8$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiból legalább $45 - 6 \cdot 5 = 15$ él menne a $4, 4, 5$ fokszámú csúcsok által feszített részgráf csúcsaiba, ami nyilván lehetetlen.

(G) Van:



2. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: ha egy gráfban semelyik két azonos fokszámú csúcsnak nincs közös szomszédja, akkor a gráfban van olyan csúcs, amelyik legfeljebb elsőfokú. Ha a gráfban van 0 fokszámú csúcs, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel ezért, hogy a gráf minden csúcsa legalább elsőfokú. Legyen v a gráf egy maximális fokszámú csúcsa. Most v szomszédainak lehetséges fokszámai $1, 2, \ldots, d(v)$, és ezen értékek szükségképpen mind elő is fordulnak, hisz v semelyik két szomszédja nem lehet azonos fokszámú a feltétel miatt. Így a gráfban van elsőfokú csúcs.

3. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: bármely n csúcsú és $n+1$ élű gráfban van olyan csúcs, amely legalább harmadfokú. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan n csúcsú és $n + 1$ élű G gráf, amelyben minden csúcs legfeljebb másodfokú. Ekkor az összfokszám legfeljebb $2n$, így G élszáma legfeljebb n, hiszen egy gráfban a fokszámok összege megegyezik az élek számának a kétszeresével. Ellentmondásra jutottunk, következésképpen az állítás igaz.

4. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: bármely 6 csúcsú gráf tartalmaz vagy 3 csúcsú teljes gráfot vagy 3 csúcsú üres gráfot. Tekintsünk egy 6 csúcsú G gráfot. Legyenek G csúcsai a, b, c, d, e, f. Most a b, c, d, e, f csúcsok között vagy van három olyan, amelyek mindegyike szomszédosak a-val, vagy van három olyan, amelyek egyike sem szomszédos a-val.

Tegyük fel először, hogy van három olyan csúcs, amelyek mindegyike szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d ilyenek. Ha b, c, d egyike sem szomszédos a másik kettővel, akkor a b, c, d csúcsok egy 3 csúcsú üres gráfot feszítenek ki G-ben. Ha viszont van közöttük két szomszédos, mondjuk b és c, akkor az a, b, c csúcsok egy 3 csúcsú teljes gráfot feszítenek ki G-ben.

Tegyük fel ezután, hogy van három olyan csúcs, amelyek egyike sem szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d ilyenek ismét. Ha b, c, d mindegyike szomszédos a másik kettővel, akkor a b, c, d csúcsok egy 3 csúcsú teljes gráfot feszítenek ki G-ben. Ha viszont van közöttük két nem szomszédos, mondjuk b és c, akkor az a, b, c csúcsok egy 3 csúcsú üres gráfot feszítenek ki G-ben.

5. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: bármely 10 csúcsú gráf tartalmaz vagy 3 csúcsú teljes gráfot vagy 4 csúcsú üres gráfot. Tekintsünk egy 10 csúcsú G gráfot. Legyenek G csúcsai $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. Most a $b, c, d, e, f, g, h, i, j$ csúcsok között vagy van négy olyan, amelyek mindegyike szomszédosak a-val, vagy van hat olyan, amelyek egyike sem szomszédos a-val.

Tegyük fel először, hogy van négy olyan csúcs, amelyek mindegyike szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d, e ilyenek. Ha b, c, d, e egyike sem szomszédos a másik hárommal, akkor a b, c, d, e csúcsok egy 4 csúcsú üres gráfot feszítenek ki G-ben. Ha viszont van közöttük két szomszédos, mondjuk b és c, akkor az a, b, c csúcsok egy 3 csúcsú teljes gráfot feszítenek ki G-ben.

Tegyük fel ezután, hogy van hat olyan csúcs, amelyek egyike sem szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d, e, f, g ilyenek. A 4. feladat szerint a b, c, d, e, f, g csúcsok által feszített részgráf tartalmaz vagy 3 csúcsú teljes gráfot vagy 3 csúcsú üres gráfot. Ha a részgráf tartalmaz 3 csúcsú teljes gráfot, akkor kész vagyunk. Ha pedig a részgráf tartalmaz 3 csúcsú üres gráfot, akkor az a csúcs ezzel a három csúccsal egy 4 csúcsú üres gráfot feszít ki G-ben.

6. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: bármely 9 csúcsú gráf tartalmaz vagy 3 csúcsú teljes gráfot vagy 4 csúcsú üres gráfot. Tekintsünk egy 9 csúcsú G gráfot. Legyenek G csúcsai $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

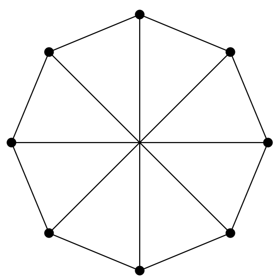
Ha minden csúcs legfeljebb három másik csúccsal szomszédos és legfeljebb öt másik csúccsal nem szomszédos, akkor az összes csúcs szükségképpen harmadfokú, ami nyilván nem lehetséges, hiszen egy gráf páratlan fokú csúcsainak száma páros.

Ezért van olyan csúcs, amelyik legalább négy másik csúccsal szomszédos vagy legalább hat másik csúccsal nem szomszédos. Legyen mondjuk a egy ilyen csúcs.

Tegyük fel először, hogy van négy olyan csúcs, amelyek mindegyike szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d, e ilyenek. Ha b, c, d, e egyike sem szomszédos a másik hárommal, akkor a b, c, d, e csúcsok egy 4 csúcsú üres gráfot feszítenek ki G-ben. Ha viszont van közöttük két szomszédos, mondjuk b és c, akkor az a, b, c csúcsok egy 3 csúcsú teljes gráfot feszítenek ki G-ben.

Tegyük fel ezután, hogy van hat olyan csúcs, amelyek egyike sem szomszédos a-val, legyenek mondjuk b, c, d, e, f, g ilyenek. A 4. feladat szerint a b, c, d, e, f, g csúcsok által feszített részgráf tartalmaz vagy 3 csúcsú teljes gráfot vagy 3 csúcsú üres gráfot. Ha a részgráf tartalmaz 3 csúcsú teljes gráfot, akkor kész vagyunk. Ha pedig a részgráf tartalmaz 3 csúcsú üres gráfot, akkor az a csúcs ezzel a három csúccsal egy 4 csúcsú üres gráfot feszít ki G-ben.

Megjegyezzük, hogy van olyan 8 csúcsú gráf, amely nem tartalmaz sem 3 csúcsú teljes gráfot sem 4 csúcsú üres gráfot:

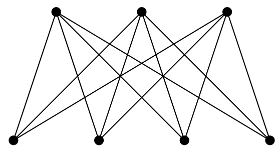


7. Fogalmazzuk át az állítást gráfokra: ha egy 7 csúcsú gráf éleinek száma 13, akkor van a gráfban 3 csúcsú teljes gráf. Tekintsünk egy 7 csúcsú és 13 élű G gráfot. Legyenek G csúcsai a, b, c, d, e, f, g.

Tegyük fel először, hogy van a gráfnak legalább ötödfokú csúcsa. Legyen mondjuk a egy ilyen csúcs, és legyenek mondjuk b, c, d, e, f szomszédosak a-val. Ha a b, c, d, e, f csúcsok között semelyik kettő nem szomszédos, akkor a gráfnak legfeljebb $21 - 10 = 11$ éle lehet, ami ellentmondás. Így a b, c, d, e, f csúcsok között van két szomszédos, ezek a-val együtt egy 3 csúcsú teljes gráfot feszítenek ki G-ben.

Tegyük fel ezután, hogy a gráf minden csúcsa legfeljebb negyedfokú. Mivel a gráfban a fokszámok összege $2 \cdot 13 = 26$, ezért a gráfban legalább 5 negyedfokú csúcs van. Legyenek mondjuk a, b, c, d, e ilyen csúcsok. Ha az a, b, c, d, e csúcsok között semelyik kettő nem szomszédos, akkor a gráfnak legfeljebb $21 - 10 = 11$ éle lehet, ami ellentmondás. Így az a, b, c, d, e csúcsok között van két szomszédos, legyenek mondjuk a és b ilyenek. Az a és b csúcsok mindegyike a c, d, e, f, g csúcsok közül hárommal szomszédos, így a c, d, e, f, g csúcsok között van olyan, amelyik a-val és b-vel is szomszédos, ez a csúcs a-val és b-vel együtt egy 3 csúcsú teljes gráfot feszít ki G-ben.

Megjegyezzük, hogy van olyan 7 csúcsú és 12 élű gráf, amely nem tartalmaz 3 csúcsú teljes gráfot:



8. Legyen a, b és c a gráf három tetszőleges csúcsa. Ezen csúcsok mindegyike a gráf maradék hét csúcsa közül legalább öttel szomszédos, így a maradék hét csúcs között szükségképpen van legalább három, amelyek a-val és b-vel is szomszédosak. Legyen d, e és f három ilyen csúcs. Mivel c-nek is van legalább öt szomszédja a maradék hét csúcs között, ezért d, e és f közül legalább egy szomszédos c-vel is. Innen az állítás adódik.

9. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan G gráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú, és amelynek nincs három azonos fokszámú csúcsa. Mivel egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros, ezért G páros csúcsszámú. Legyen G csúcsszáma $2k$. Ekkor a G-beli fokszámok k érték közül kerülhetnek ki: $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$. Ezek a fokszámértékek szükségképpen elő is fordulnak, mégpedig mindegyik pontosan kétszer, hiszen G-ben nincs három azonos fokszámú csúcs. Azonban ez nem lehetséges, ugyanis ha van két $2k-1$ fokszámú csúcs G-ben, vagyis két olyan, amelyik az összes többi csúccsal össze van kötve, akkor nem lehet G-ben elsőfokú csúcs.

10. Legyen $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ a gráfban egy leghosszabb út egymás utáni csúcsainak sorozata. Most a v_1 csúcs szomszédai világos módon a $v_2, v_3, \ldots, v_m$ csúcsok közül kerülnek ki. Mivel v_1 legalább harmadfokú, ezért léteznek olyan $3 \leqslant i < j \leqslant m$ indexek, amelyekre v_1 szomszédos v_i-vel és v_j-vel. Ha i páros, akkor a leghosszabb út v_1 és v_i közötti részútja, kiegészítve a $\{v_1, v_i\}$ éllel egy páros hosszúságú kör a gráfban. Hasonlóan, ha j páros, akkor a leghosszabb út v_1 és v_j közötti részútja, kiegészítve a $\{v_1, v_j\}$ éllel egy páros hosszúságú kör a gráfban. Végül ha i és j is páratlan, akkor a leghosszabb út v_i és v_j közötti részútja, kiegészítve a $\{v_1, v_i\}$ és a $\{v_1, v_j\}$ élekkel egy páros hosszúságú kör a gráfban.

11. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő. Tekintsük a gráf egy H összefüggő komponensét, legyen ennek csúcsszáma k. Világos, hogy a H komponensben az élek száma legfeljebb $\binom{k}{2}$. Ezeken kívül a gráfnak legfeljebb

$\binom{n-k}{2}$ további éle lehet, így a gráf élszáma összesen legfeljebb

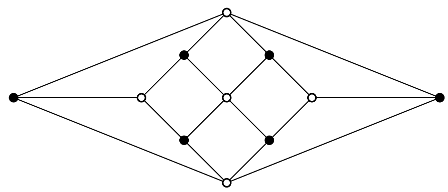
$$\begin{aligned}
\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2} &= \frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\
&= \frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-1-k+1)(n-2-k+1)}{2} \\
&= \frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-1)(k-1)}{2}- \\
&\qquad -\frac{(n-2)(k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k-1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}- \\
&\qquad -\frac{(k-1)((n-1)+(n-2)-k-(k-1))}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(k-1)(2n-2k-2)}{2} \\
&= \binom{n-1}{2}-(k-1)(n-k-1) \\
&\leqslant \binom{n-1}{2}
\end{aligned}$$

(az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy $1 \leqslant k \leqslant n-1$ miatt $k-1$ és $n-k-1$ is nem negatív, így szorzatuk is az). Ez viszont ellentmond az élszámra vonatkozó feltételnek. Ebből következik, hogy a gráf összefüggő.

12. Nem lehetséges. Tegyük fel, hogy egy gráfot le tudunk rajzolni a kívánt módon. Ekkor persze le tudjuk rajzolni úgy is, hogy csúcsból indulunk és csúcsba érkezünk. Nézzünk egy ilyen lerajzolást. Vegyük észre, hogy a lerajzolás során valahányszor egy csúcson áthaladunk, mindig ahhoz illeszkedő két élt járunk végig. Tekintsük ezt a két élt egymással párosítottnak. Ha a lerajzolást nem a kiindulási pontban fejezzük be, akkor az elsőnek és az utolsónak végigjárt élek pár nélkül maradnak, ha pedig végül a kiindulási pontba érkezünk, akkor ezek egymással párosíthatók. Kimondhatjuk tehát, hogy ha egy gráfot le tudunk rajzolni a kívánt módon, akkor vagy a gráf két csúcsának fokszáma páratlan, a többié pedig páros, vagy az összes csúcs fokszáma páros. Itt viszont mind a hat csúcs fokszáma páratlan.

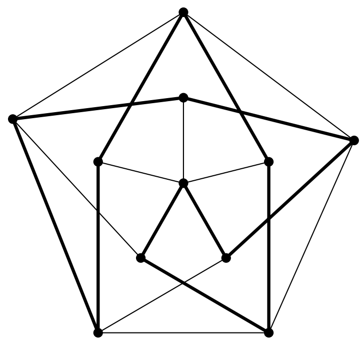
13. A huszár bármely ugrása eltérő színű mezők között történik, ezért egy a kiindulási mezőre visszatérő ugrássorozat szükségképpen ugyanannyi fekete és fehér mezőt érint. Azonban páratlan n esetén a sakktábla fekete és fehér mezőinek száma eltérő (az egyikből eggyel több van, mint a másikból), így a feltételnek megfelelő bejárás nem létezhet.

14. Nincs. Színezzük ki a gráf csúcsait feketére és fehérre az ábrán látható módon:

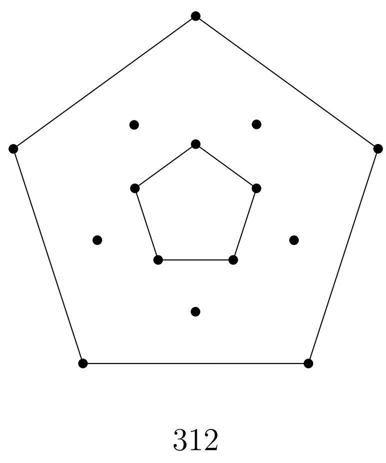


Most a gráf minden egyes éle különböző színű csúcsokat köt össze, ezért ha a gráf tartalmaz Hamilton kört, azon a fekete és a fehér színű csúcsok szükségképpen felváltva helyezkednek el. Ebből következik, hogy ha a gráf tartalmaz Hamilton kört, azon (és így a gráfban) a fekete és a fehér csúcsok száma megegyezik. Itt viszont a fekete csúcsok száma eggyel több, mint a fehér csúcsoké.

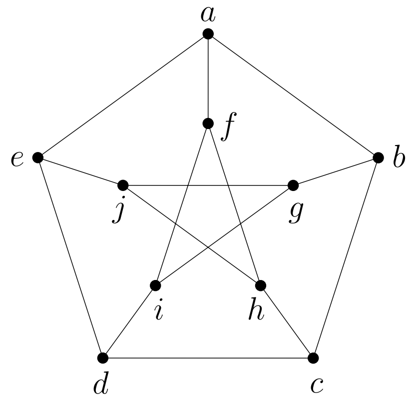
15. Igen:



16. Nincs. Ha egy gráf tartalmaz Hamilton kört, akkor tetszőleges k csúcsát, a rájuk illeszkedő élekkel együtt törölve a Hamilton kör legfeljebb k ívre, következésképpen a gráf legfeljebb k összefüggő komponensre eshet szét. Itt viszont az öt negyedfokú csúcs törlésével a gráf hét komponensre esik szét.



17. Nincs. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf tartalmaz egy C Hamilton-kört. Betűzzük meg a gráf csúcsait az ábrán látható módon:



Tekintsük az $E' = \{\{a, f\}, \{b, g\}, \{c, h\}, \{d, i\}, \{e, j\}\}$ élhalmazt. Ha az E'-beli éleket törölnénk, a gráf két komponensre esne szét, ezért egy Hamilton-kör az E'-beli élek közül pontosan kettő vagy négy darabot tartalmaz.

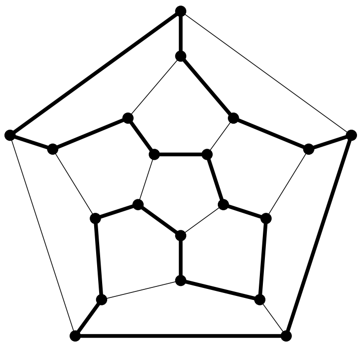
Először tekintsük azt az esetet, amikor a Hamilton kör pontosan kettő darabot tartalmaz az E'-beli élek közül. Itt két lehetőség van: ezek az élek az a, b, c, d, e csúcsok által kifeszített kör szomszédos vagy másodszomszédos csúcsaira illeszkednek.

Az első lehetőségnél az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a két él $\{c, h\}$ és $\{d, i\}$. Mivel az $\{a, f\}, \{b, g\}, \{e, j\}$ éleket nem tartalmazza C, ezért többek között az $\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{i, f\}, \{f, h\}$ élek rajta vannak C-n. Azonban így C-nek része a $\{d, e\}, \{e, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, h\}, \{h, f\}, \{f, i\}, \{i, d\}$ élek által meghatározott nyolc hosszúságú kör, ami nyilván nem lehetséges.

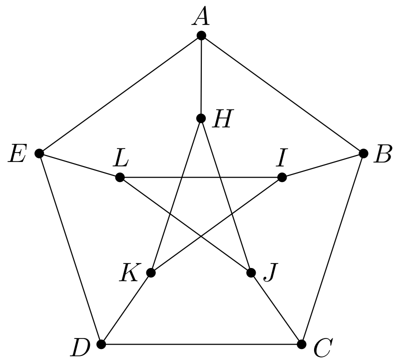
A másiknál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a két él $\{b, g\}$ és $\{e, j\}$. Mivel az $\{a, f\}, \{c, h\}, \{d, i\}$ éleket nem tartalmazza C, ezért többek között az $\{a, b\}, \{e, a\}, \{h, f\}, \{h, j\}, \{i, g\}, \{i, f\}$ élek rajta vannak C-n. Azonban így C-nek része az $\{a, b\}, \{b, g\}, \{g, i\}, \{i, f\}, \{f, h\}, \{h, j\}, \{j, e\}, \{e, a\}$ élek által meghatározott nyolc hosszúságú kör, ami nyilván nem lehetséges.

Ezután tekintsük azt az esetet, amikor a Hamilton kör pontosan négy darabot tartalmaz az E'-beli élek közül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek a $\{b, g\}, \{c, h\}, \{d, i\}, \{e, j\}$ élek. Mivel az $\{a, f\}$ élt nem tartalmazza C, ezért az $\{e, a\}, \{a, b\}, \{i, f\}, \{f, h\}$ élek rajta vannak C-n. Ekkor persze a $\{b, c\}$ és $\{d, e\}$ éleket nem tartalmazza C, következésképpen a $\{c, d\}$ él rajta van C-n. Azonban így C-nek része a $\{c, d\}, \{d, i\}, \{i, f\}, \{f, h\}, \{h, c\}$ élek által meghatározott öt hosszúságú kör, ami nyilván nem lehetséges.

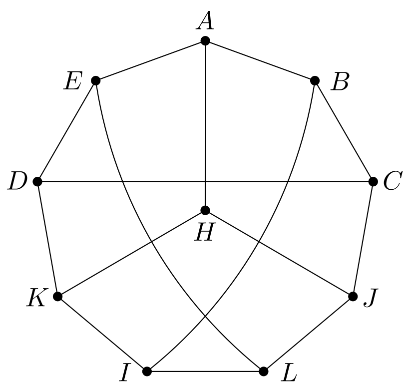
18. Igen:



19. A G_3 gráf nem izomorf a G_1, G_2 és G_4 gráfok egyikével sem, mivel a G_1 gráfban van negyedfokú csúcs, míg a másik háromban az összes csúcs harmadfokú. A G_2 gráf nem izomorf a G_1 és G_4 gráfok egyikével sem, mivel a G_2 gráfban van négy hosszúságú kör, míg a másik kettőben nincs. A G_1 és a G_4 gráfok izomorfak; az egymásnak megfelelő csúcsokat ugyanazzal a betűvel jelöltük meg a két gráfban:

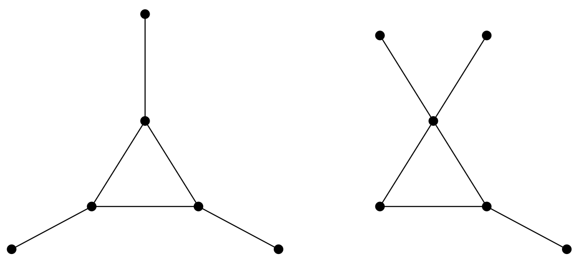


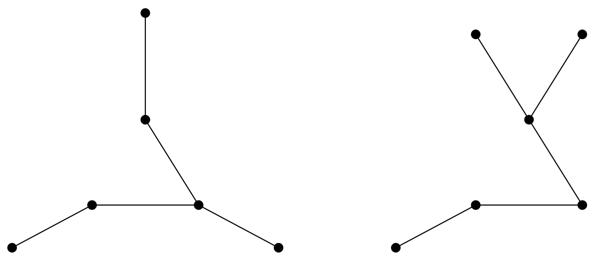
G_1



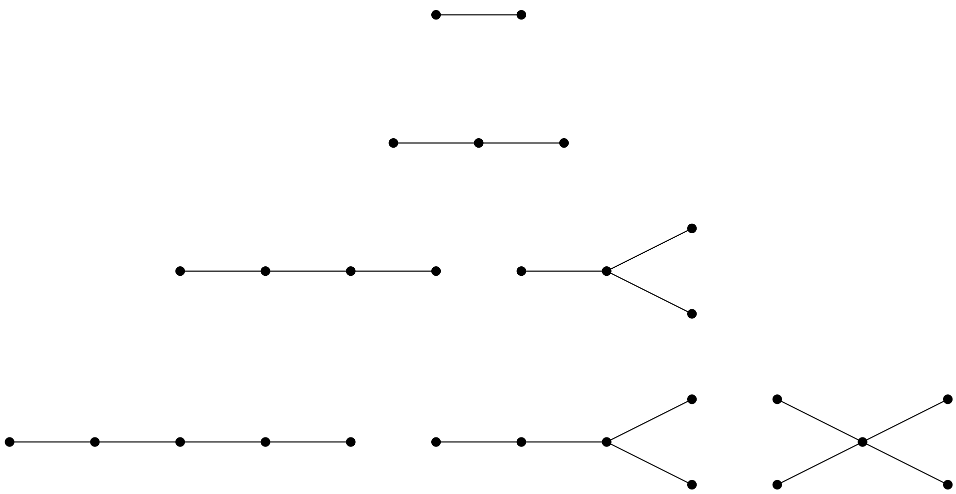
G_4

20. A három elsőfokú csúcson kívül három legalább másodfokú csúcs van a gráfban. Ez utóbbiak egy három hosszúságú kört vagy egy kettő hosszúságú utat feszítenek ki. Ennek megfelelően három, illetve kettő, így összesen öt lehetőség van:





21. Egy darab 2 csúcsú, egy darab 3 csúcsú, két darab 4 csúcsú és három darab 5 csúcsú nem izomorf fa létezik:



22. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy ha $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olyan pozitív egész számok, amelyek összege $2n-2$, akkor létezik olyan n csúcsú fa gráf, amelyben a csúcsok fokszámai rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

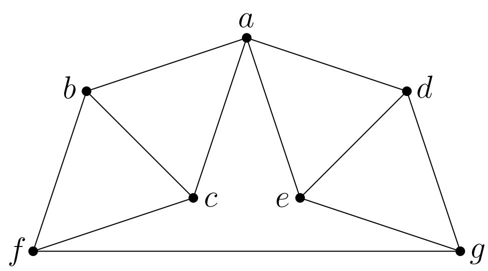
Alapeset. $P(2)$ nyilván igaz, hiszen ekkor $d_1 + d_2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, amiből következik, hogy $d_1 = d_2 = 1$, másrészt egy két csúcsú fa gráfban mindkét csúcs elsőfokú.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 2$ egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$ olyan pozitív egész számok, amelyek összege $2(n+1) - 2 = 2n$. Vegyük észre, hogy a $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$ pozitív egészek között szükségképpen szerepel az 1 szám, különben az összeg legalább $2(n+1)$ lenne, másrészt szerepel 1-nél nagyobb szám is, különben az összeg $n+1 < 2n$ lenne. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $d_{n+1} = 1$ és $d_n > 1$. Tekintsük most a $d_1, d_2, \ldots, d_n - 1$ egészeket. Ezek mind pozitív számok, és az összegük $2n-2$, így az indukciós feltevés szerint van olyan n csúcsú fa gráf, amelyben a fokszámok rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n - 1$. Ezt a fa gráfot kiegészítve egy új csúccsal, és ezt a csúcsot a $d_n - 1$ fokú csúccsal összekötő éllel egy olyan $n+1$ csúcsú fa gráfot kapunk, amelyben a csúcsok fokszámai rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \geqslant 2$ egész számra.

23. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan n csúcsú G gráf, amelyben a fokszámok összege legalább $2n$ és nem tartalmaz kört. Mivel egy gráfban a fokszámok összege megegyezik az élek számának a kétszeresével, ezért G-nek legalább n éle van, vagyis G-nek legalább annyi éle van, mint ahány csúcsa. Vegyük észre ezek után, hogy ugyanez szükségképpen fennáll G legalább egy összefüggő komponensére is; legyen G' egy ilyen összefüggő komponens. A G gráf körmentessége miatt G'-ben sem lehet kör, így G' fa. Azonban egy fa élszáma eggyel kevesebb, mint a csúcsszáma, ellentmondva annak, hogy G'-nek legalább annyi éle van, mint ahány csúcsa.

24. Betűzzük meg a gráf csúcsait az ábrán látható módon:



Először megmutatjuk, hogy a gráf nem 3-színezhető. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a gráf 3-színezhető. Egy ilyen színezésben az a, b és c csúcsok nyilván különböző színűek; legyen mondjuk a színe piros, b színe kék, c színe pedig sárga. Ekkor f színe csak piros lehet, mert a másik két szín már szerepel a szomszédságában. Másrészt d és e színe egymástól és a színétől is különbözik, így egyikük színe kék, a másiké sárga. Tekintsük ezek után a g csúcsot. Ennek három szomszédja három különböző színű, ezért g-t nem színezhettük a három szín egyikére sem. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás igaz.

Világos, hogy ha g-t színezhetjük zöldre is, akkor az előbbi gondolatmenet a gráf egy 4-színezéséhez vezet. Ezért a gráf kromatikus száma 4.

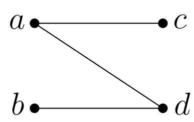
25. A páros számok teljes 512 csúcsú részgráfot feszítenek ki a gráfban, ezért a kromatikus szám legalább 512. Másrészt a gráf 512-színezhető: a páros számokat színezzük csupa különböző színűekre, a páratlan számokat pedig az utánuk következő páros szám színére. Indoklásul elég arra hivatkozni, hogy egymás utáni pozitív egészek relatív prímek. Ebből következik, hogy a kromatikus szám 512.

26. A $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^9$ számok mind osztják egymást, így ezek teljes 10 csúcsú részgráfot feszítenek ki a gráfban. Következésképpen a kromatikus szám legalább 10. Másrészt a gráf 10-színezhető: a $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^9$ számokat színezzük csupa különböző színűekre, a $2^j < k < 2^{j+1}$ számokat pedig 2^j színére minden $0 \leqslant j \leqslant 9$ esetén. Indoklásul elég arra hivatkozni, hogy ha $2^j \leqslant k < m < 2^{j+1}$, akkor m és k hányadosa kisebb, mint 2, így m nem lehet k többszöröse. Ennélfogva a kromatikus szám 10.

27. Egy páros gráf két csúcsosztályában a fokszámok összege szükségképpen megegyezik. Itt viszont akárhogyan is osztjuk szét a csúcsokat, az ötödfokú csúcsot tartalmazó osztályban a fokszámok összege kettővel, míg a másik osztályban nullával lesz kongruens modulo 3. Következésképpen ilyen páros gráf nem létezik.

Párosítások

1. (A) Tekintsük a következő páros gráfot:



A gráfban világos módon $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ egy teljes párosítás. Eközben megtörténhet, hogy a "mohó" algoritmus csupán az $\{a, d\}$ élt választja ki.

(B) Legyen M' egy a "mohó" algoritmussal előállított párosítás, M pedig egy teljes párosítás. Vegyük észre, hogy minden M-beli él legalább egyik végpontját szükségképpen lefedi M' is. Valóban, ha lenne olyan M-beli él, amelynek egyik végpontját sem fedné le M', akkor ezzel az éllel M' bővíthető lenne. Ebből következik, hogy M' lefedi legalább a csúcsok felét, hisz M lefedi az összes csúcsot.

2. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg a nyaralás minden résztvevőjének egy csúcs a bal oldali kupacban, és a listákon szereplő minden könyvnek egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy résztvevő listáján szerepel valamelyik könyv, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a résztvevők számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a résztvevők számára. Jelölje a résztvevők halmazát R, a könyvekét pedig K. Tekintsük R egy tetszőleges R' részhalmazát, és legyen $K' \subseteq K$ azon könyvek halmaza, amelyek az R'-beli résztvevők listáin szerepelnek.

Mivel minden résztvevő listáján tíz könyv szerepel, ezért $|K'| \geqslant 10$ mindig fennáll. Így ha $|R'| \leqslant 10$, akkor $|K'| \geqslant |R'|$ automatikusan teljesül. Másrészt ha $|R'| \geqslant 11$, akkor vegyük észre, hogy az R'-beli résztvevők között szerepel legalább egy házaspár mindkét tagja. Ők ketten együtt 20 könyvet jelöltek meg a listáikon, ezért ebben az esetben $|K'| \geqslant 20$, így $|K'| \geqslant |R'|$ most is teljesül.

3. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg a kirándulás minden résztvevőjének egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden csokoládénak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy résztvevő szereti valamelyik csokoládét, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a résztvevők számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a résztvevők számára. Jelölje a résztvevők halmazát R, a csokoládékét pedig C. Tekintsük R egy tetszőleges R' részhalmazát, és legyen $C' \subseteq C$ azon csokoládék halmaza, amelyeket az R'-beli résztvevők szeretnek (legalább egy valaki).

Mivel minden résztvevő legalább tíz fajta csokoládét szeret, ezért $|C'| \geqslant 10$ mindig fennáll. Így ha $|R'| \leqslant 10$, akkor $|C'| \geqslant |R'|$ automatikusan teljesül. Másrészt ha $|R'| \geqslant 11$, akkor vegyük észre, hogy az R'-beli résztvevők között szerepel legalább egy házaspár mindkét tagja. Ők ketten együtt az összes fajta csokoládét szeretik, ezért ebben az esetben $|C'| = 20$, így $|C'| \geqslant |R'|$ most is teljesül.

4. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden lánynak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden fiúnak egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy lány és egy fiú ismeri egymást, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a lányok számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a lányok számára. Jelölje a lányok halmazát L, a fiúkét pedig F. Tekintsük L egy tetszőleges L' részhalmazát, és legyen $F' \subseteq F$ az L'-beli lányok által ismert összes fiú halmaza.

Mivel minden lánynak van legalább 1 fiú ismerőse, és minden lánynak különböző számú fiú ismerőse van, ezért az L'-beli lányok között szükségképpen van olyan, akinek legalább $|L'|$ fiú ismerőse van. Innen azonnal következik, hogy $|F'| \geqslant |L'|$.

5. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden klubnak egy csúcs a bal oldali kupacban, és a város minden lakójának egy csúcs a jobb oldali kupacban.

- Ha egy klubnak tagja a város egy lakója, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a klubok számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a klubok számára. Jelölje a klubok halmazát K, a város lakóiét pedig L. Tekintsük K egy tetszőleges K' részhalmazát, és legyen $L' \subseteq L$ a K'-beli klubok tagjainak halmaza.

A K'-beli csúcsokból induló élek száma legalább $4|K'|$, hiszen minden klubnak van legalább 4 tagja. A K'-beli csúcsokból induló élek mind L'-beli csúcsokba érkeznek, ezért az L'-beli csúcsok fokszámainak összege is legalább $4|K'|$. Másrészt az L'-beli csúcsok fokszámainak összege legfeljebb $3|L'|$, hiszen a város egy lakója legfeljebb 3 klubnak lehet tagja. Ebből következik, hogy $3|L'| \geqslant 4|K'|$, így L'-ben legalább annyi csúcs van, mint K'-ben. A Hall-feltétel pontosan ezt fogalmazza meg.

6. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden tanulónak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden különböző modellnek egy csúcs a jobb oldali kupacban.

- Ha egy tanulónak megvan egy versenyautó, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a tanulók számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a tanulók számára. Jelölje a tanulók halmazát T, a különböző modellekét pedig M. Tekintsük T egy tetszőleges T' részhalmazát, és legyen $M' \subseteq M$ a T'-beli gyerekeknek meglevő versenyautó modellek halmaza.

A T'-beli csúcsokból induló élek száma legalább $5|T'|$, hiszen minden tanulónak van legalább 5 különböző versenyautója. A T'-beli csúcsokból induló élek mind M'-beli csúcsokba érkeznek, ezért az M'-beli csúcsok fokszámainak összege is legalább $5|T'|$. Másrészt az M'-beli csúcsok fokszámainak összege legfeljebb $4|M'|$, hiszen semelyik versenyautó nincs meg négynél több gyereknek. Ebből következik, hogy $4|M'| \geqslant 5|T'|$, így M'-ben legalább annyi csúcs van, mint T'-ben. A Hall-feltétel pontosan ezt fogalmazza meg.

7. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden dolgozónak egy csúcs a bal oldali kupacban, és a húsz tanfolyam minden tízelemű részhalmazának egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha az a kilenc tanfolyam, amelyekre egy dolgozót már beosztottak hozzátartozik egy tízelemű részhalmazhoz, akkor a dolgozónak és a részhalmaznak megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a dolgozók számára egy párosítást megadni; a dolgozókat ennek megfelelően osszuk be a tizedik tanfolyamra.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a dolgozók számára. Jelölje a dolgozók halmazát D, a tízelemű részhalmazokét pedig T. Tekintsük D egy tetszőleges D' részhalmazát, és legyen $T' \subseteq T$ a húsz tanfolyam azon tízelemű részhalmazainak családja, amelyek legalább egy D'-beli dolgozóra tartalmazzák azt a kilenc tanfolyamot, amelyekre a dolgozót már beosztották.

A D'-beli csúcsokból induló élek száma $11|D'|$, hiszen minden dolgozót 11 tanfolyamra lehet még beosztani. A D'-beli csúcsokból induló élek mind T'-beli csúcsokba érkeznek, ezért a T'-beli csúcsok fokszámainak összege legalább $11|D'|$. Másrészt a T'-beli csúcsok fokszámainak összege legfeljebb $10|T'|$, hiszen tanfolyamok egy 10 elemű részhalmaza legfeljebb 10 dolgozó esetén tartalmazhatja azt a 9 tanfolyamot, amelyekre ezeket a dolgozókat már beosztották. Ebből következik, hogy $10|T'| \geqslant 11|D'|$, így $|T'| \geqslant |D'|$.

8. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden négyes csomagnak egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden értéknek egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy négyes csomagban előfordul egy érték, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a négyes csomagok számára egy párosítást megadni.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a négyes csomagok számára. Jelölje a négyes csomagok halmazát C, az értékekét pedig E. Tekintsük C egy tetszőleges C' részhalmazát, és legyen $E' \subseteq E$ a C'-beli négyes csomagokban előforduló értékek halmaza.

Mivel egy értékből négy szín van, ezért a C'-beli négyesekben szükségképpen előfordul legalább $|C'|$ különböző érték. Innen azonnal következik, hogy $|E'| \geqslant |C'|$.

9. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden oszlopnak egy csúcs a bal oldali kupacban, és az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyikének egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy oszlopban nem fordul elő egy szám, akkor a nekik megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk az oszlopok számára egy párosítást megadni; a latin négyzet következő sorát ennek megfelelően töltsük ki.

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás az oszlopok számára. Jelölje az oszlopok halmazát O, a számokét pedig S. Tekintsük O egy tetszőleges O' részhalmazát, és legyen $S' \subseteq S$ azon számok halmaza, amelyek nem fordulnak elő az O'-beli oszlopok mindegyikében.

Az O'-beli csúcsokból induló élek száma $(n-r)|O'|$, hiszen minden oszlopban r szám fordul elő. Az O'-beli csúcsokból induló élek mind S'-beli csúcsokba érkeznek, ezért az S'-beli csúcsok fokszámainak összege legalább $(n-r)|O'|$. Másrészt az S'-beli csúcsok fokszámainak összege $(n-r)|S'|$, hiszen minden szám r oszlopban fordul elő. Ebből következik, hogy $(n-r)|S'| \geqslant (n-r)|O'|$, így $|S'| \geqslant |O'|$.

10. A feladatot természetes módon modellezhetjük páros gráffal:

- Feleljen meg minden vadászati körzetnek egy csúcs a bal oldali kupacban, és minden mezőgazdasági körzetnek egy csúcs a jobb oldali kupacban.
- Ha egy vadászati és egy mezőgazdasági körzetnek van közös része, akkor a megfelelő csúcsokat kössük össze egy éllel.

Feladatunk a vadászati körzetek számára egy párosítást megadni (a családok ezek után egy-egy összetartozó vadászati és mezőgazdasági körzetet kapnak).

Megmutatjuk, hogy a fent definiált páros gráfra teljesül a Hall-feltétel, következésképpen megadható benne párosítás a vadászati körzetek számára. Jelölje a vadászati körzetek halmazát V, a mezőgazdasági körzetekét pedig M. Tekintsük V egy tetszőleges V' részhalmazát, és legyen $M' \subseteq M$ a V'-beli vadászati körzetek legalább egyikével közös résszel rendelkező mezőgazdasági körzetek halmaza.

A V'-beli vadászati körzetek együtt a sziget $|V'|/n$-edrészét fedik le. A lefedett területnek szükségképpen legalább $|V'|$ darab mezőgazdasági körzettel kell közös részének lenni, hiszen a le nem fedett terület, amely a sziget $(n - |V'|)/n$-edrésze, legfeljebb $n - |V'|$ mezőgazdasági körzetet foglalhat teljesen magába. Innen azonnal következik, hogy $|M'| \geqslant |V'|$.

Összeszámlálási feladatok

1. Jelölje A azon sorozatok halmazát, amelyek 4 darab "V" és 5 darab "F" szimbólumból állnak, valamint jelölje B azon utak halmazát, amelyek mentén lépkedve kiolvasható a MATEMATIKA szó. Rendelje hozzá az f függvény egy A-beli sorozathoz a következő utat: vegyük sorra a sorozat tagjait balról jobbra; ha egy "V" szimbólummal találkozunk, akkor ennek feleljen meg egy lépés vízszintesen jobbra, ha pedig egy "F" szimbólummal találkozunk, akkor ennek feleljen meg egy lépés függőlegesen lefelé. Az f függvény bijekció, így az 1. szabály szerint $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\frac{9!}{4! \cdot 5!},$$

következésképpen az utak száma is ugyanennyi.

2. Tekintsünk egy n oldalú konvex sokszöget. A sokszög minden csúcsából $n-3$ átló indul, önmagán és a két szomszédján kívül az összes többi csúcsba egy-egy. Figyelembe véve, hogy így minden átlót kétszer veszünk számításba, egyszer az egyik, egyszer pedig a másik végpontjánál, az átlók száma összesen $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Az átlómetszéspontok számának meghatározásához legyen M az átlók metszéspontjainak halmaza, Q álljon a sokszög csúcshalmazának négyelemű részhalmazaiból, az f függvény pedig rendelje hozzá minden metszésponthoz az egymást abban a pontban keresztező átlók végpontjainak (négyelemű) halmazát. Feltételünk szerint minden metszéspontban legfeljebb két átló keresztezi egymást, ezért f injektív. Másrészt ha $\{p_i, p_j, p_k, p_l\}$ a sokszög csúcshalmazának tetszőleges négyelemű részhalmaza — az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a p_i, p_j, p_k, p_l csúcsok a sokszög határán az óramutató járása szerint ebben a sorrendben követik egymást —, akkor

p_ip_k és p_jp_l a sokszög egymást metsző átlói; metszéspontjukhoz f éppen a $\{p_i, p_j, p_k, p_l\}$ halmazt rendeli. Ezért f szürjektív is. Ennélfogva az f függvény bijekció, így az 1. szabály szerint $|M| = |Q|$. Egy n elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak száma, vagyis a Q halmaz elemszáma

$$\binom{n}{4},$$

következésképpen az átlómetszéspontok száma is ugyanennyi.

3. Legyenek a fiúk $f_1, f_2, \ldots, f_k$, a lányok pedig $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$. Legyen továbbá A azon $n+m-1$ bites sorozatok halmaza, amelyek $k+m-1$ egyest tartalmaznak, legyen B a feltételeknek megfelelő elosztások halmaza, az $f\colon A \to B$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+m-1})$ sorozathoz azt az elosztást, amelyben f_1 az első egyes előtti nullák száma plusz egy százforintost kap, f_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz egy százforintost kap, $\ldots$, f_k a $(k-1)$-edik és a k-adik egyes közötti nullák száma plusz egy százforintost kap, ℓ_1 annyi százforintost kap, amennyi a k-adik és a $(k+1)$-edik egyes közötti nullák száma, $\ldots$, ℓ_{m-1} annyi százforintost kap, amennyi a $(k+m-2)$-edik és a $(k+m-1)$-edik egyes közötti nullák száma, és ℓ_m annyi százforintost kap, amennyi a $(k+m-1)$-edik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\binom{n+m-1}{k+m-1},$$

következésképpen az elosztások száma is ugyanennyi.

4. Legyen A azon 97 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, legyen B az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ egyenlet megoldásainak halmaza a pozitív egész számok körében, az $f\colon A \to B$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{97})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma plusz egy, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz egy, x_3 a második és harmadik egyes közötti nullák száma plusz egy, és x_4 a harmadik egyes utáni nullák száma plusz egy. Az f függvény bijekció, így $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\binom{97}{3},$$

következésképpen a megoldások száma is ugyanennyi. Jegyezzük meg, hogy szintén ugyanennyi megoldása van az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 94$ egyenletnek a természetes számok halmazán.

5. Legyen A azon 50 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, legyen B az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ egyenlet megoldásainak halmaza a pozitív páratlan egészek körében, az $f\colon A \to B$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{50})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák számának kétszerese plusz egy, x_2 az első és a második egyes közötti nullák számának kétszerese plusz egy, x_3 a második és harmadik egyes közötti nullák számának kétszerese plusz egy, és x_4 a harmadik egyes utáni nullák számának kétszerese plusz egy. Az f függvény bijekció, így $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\binom{50}{3},$$

következésképpen a megoldások száma is ugyanennyi. Jegyezzük meg, hogy szintén ugyanennyi megoldása van az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 47$ egyenletnek a természetes számok halmazán.

6. Állapodjunk meg abban, hogy az embereket csak az alapján különböztetjük meg, hogy ezres vagy kétezres van náluk. Azon $2n$ emberből álló sorok, amelyeknél a pénztáros mindig vissza tud adni leírhatók olyan n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatokkal, amelyekre minden $1 \leqslant i \leqslant 2n$ esetén teljesül, hogy az első i bit között legalább annyi egyes van, mint ahány nulla: az egyesek azoknak az embereknek feleljenek meg, akiknél ezres van, a nullák pedig azoknak, akiknél kétezres. Egyszerűbb lesz azokat az n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatokat számba venni, amelyekre nem teljesül, hogy minden $1 \leqslant i \leqslant 2n$ esetén az első i bit között legalább annyi egyes van, mint ahány nulla; ezek számát kivonva az n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatok számából a feltételt kielégítő n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatok száma adódik.

Lássuk tehát, hány olyan n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozat van, amelyre nem teljesül a feltétel. Jelölje ezen bitsorozatok halmazát T, és legyen t egy tetszőleges T-beli bitsorozat. Mivel t-re nem teljesül a feltétel, ezért létezik olyan $1 \leqslant i \leqslant 2n$ egész szám, hogy t első i bitje között több nulla van, mint ahány egyes. Legyen $e(t)$ a legkisebb ilyen tulajdonságú pozitív egész. Ekkor t első $e(t) - 1$ bitje között a nullák és az egyesek száma ugyanannyi, az $e(t)$-edik bit pedig nulla. Cseréljük fel a t sorozat hátsó $2n - e(t)$ bitjét: az egyesekből legyenek nullák, a nullákból pedig egyesek. Így egy olyan $2n$ hosszú s bitsorozathoz jutunk, amely $n+1$ darab nullából és $n-1$ darab egyesből áll. Jelölje S azon $2n$ hosszó bitsorozatok halmazát, amelyek $n + 1$ darab nullából és $n - 1$ darab egyesből állnak, és legyen $f\colon T \to S$ a fent definiált leképezés.

Megmutatjuk, hogy f szürjetív. Legyen s egy tetszőleges S halmazbeli bitsorozat. Legyen i a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy s első i bitje között több nulla van, mint ahány egyes. Mivel s-ben több nulla van, mint ahány egyes, ilyen i szükségképpen létezik. Cseréljük fel az s sorozat hátsó $2n - i$ bitjét: az egyesekből legyenek nullák, a nullákból pedig egyesek. Jelölje az így kapott bitsorozatot t. Az s sorozatban kettővel több nulla van, mint ahány egyes, továbbá s első i bitje között eggyel több nulla van, mint ahány egyes, így s hátsó $2n - i$ bitje között is eggyel több nulla van, mint ahány egyes. Ennélfogva a t sorozatban ugyanannyi nulla van, mint ahány egyes, t első i bitje között viszont eggyel több nulla van, mint ahány egyes, így $t \in T$.

Ezután megmutatjuk, hogy f injektív. Legyen t' és t'' két különböző T halmazbeli bitsorozat. Legyen i a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy t' és t'' különböznek az i-edik bitjükben. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a t' bitsorozat i-edik bitje egyes, a t'' bitsorozaté pedig nulla. Ekkor $i \neq e(t')$. Ha $e(t') < i$, akkor $e(t') = e(t'')$ hiszen t' és t'' az első $i - 1$ bitjükben megegyeznek. Ezért az $f(t')$ bitsorozat i-edik bitje nulla, az $f(t'')$ bitsorozaté pedig egyes, vagyis $f(t') \neq f(t'')$. Tegyük fel ezután, hogy $e(t') > i$. Ekkor a t' és $f(t')$ bitsorozatok megegyeznek az i-edik bitjükben, ez mindkettőnél egyes. Másrészt mivel t' és t'' az első $i - 1$ bitjükben megegyeznek, ezért $e(t'') \geqslant i$, így a t'' és $f(t'')$ bitsorozatok is megegyeznek az i-edik bitjükben, ez mindkettőnél nulla. Ez viszont ismét azt jelenti, hogy $f(t') \neq f(t'')$.

Ezzel beláttuk, hogy az f függvény bijekció, így az 1. szabály szerint $|T| = |S|$. Itt

$$|S| = \binom{2n}{n-1},$$

következésképpen $|T|$ is ugyanennyi.

Az n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatok száma

$$\binom{2n}{n},$$

így azon n egyest tartalmazó $2n$ hosszú bitsorozatok száma, amelyekre teljesül a feltétel

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}&=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\\&=\frac{(n+1)(2n)!}{(n+1)n!\,n!}-\frac{n(2n)!}{n(n-1)!(n+1)!}\\&=\frac{(n+1)(2n)!}{(n+1)!\,n!}-\frac{n(2n)!}{n!(n+1)!}\\&=\frac{(n+1)(2n)!-n(2n)!}{(n+1)!\,n!}\\&=\frac{(2n)!}{(n+1)n!\,n!}\\&=\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}&=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n}{2}\\&=\frac{n(n-1)+(n+1)n}{2}\\&=\frac{n(n-1+n+1)}{2}\\&=\frac{n\cdot 2n}{2}\\&=n^2.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}k\binom{n}{k}&=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=k\cdot\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}\\&=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\&=n\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

9.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{n!}{(n-m)!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}\\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.
\end{aligned}
$$

11. Használjuk az

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

összefüggést (háromszor):

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\\
&= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}\\
&= \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.
\end{aligned}
$$

12. Használjuk az

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

összefüggést valamint a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

azonosságot (8. feladat):

$$\begin{aligned}
(n-2k)\binom{n}{k} &= n\binom{n}{k} - 2k\binom{n}{k} \\
&= n\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] - 2n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\binom{n-1}{k} + n\binom{n-1}{k-1} - 2n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\binom{n-1}{k} - n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\left[\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right].
\end{aligned}$$

13. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(k)$ az az állítás, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Alapeset. $P(0)$ triviálisan igaz:

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(k)$ igaz valamely k természetes szám esetén. Belátjuk, hogy ekkor $P(k+1)$ is igaz. A $P(k+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \\
&\quad = \left[\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k}\right] + \binom{n+k+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$$

így

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}\right]+\binom{n+k+1}{k+1}=$$
$$=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1},$$

ami éppen a $P(k+1)$ állítás jobb oldala, így $P(k+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(k)$ igaz minden k természetes számra.

14. Használjuk a

$$\binom{p}{q}=\binom{p}{p-q}$$

azonosságot:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}=$$
$$=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}.$$

Azonban az előző feladat szerint

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k},$$

amiből következik az állítás.

15. Használjuk a

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

azonosságot (8. feladat):

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=$$
$$=n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n-1}{n-1}.$$

Kiemelünk:

$$n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n-1}{n-1}=$$
$$=n\left(\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right).$$

A binomiális tétellel összhangban

$$\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\dots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}=(1-1)^{n-1}=0,$$

így

$$n\left(\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\dots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right)=n\cdot 0=0.$$

16. Alakítsuk át kicsit a bal oldalt:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Használjuk ezután a

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

azonosságot (8. feladat):

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}&=\sum_{k=2}^{n}(k-1)n\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\&=n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\&=n\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\&=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

A binomiális tétellel összhangban

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}=(1+1)^{n-2}=2^{n-2},$$

és

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=(1+1)^{n-1}=2^{n-1},$$

így

$$n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=$$
$$=n(n-1)2^{n-2}+n\cdot 2\cdot 2^{n-2}=n(n-1+2)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}.$$

17. Használjuk az

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

azonosságot (9. feladat):

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=$$
$$=1+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{2}+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n+1}.$$

Kiemelünk:

$$1+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{2}+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n+1}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right).$$

A binomiális tétellel összhangban

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}=(1+1)^{n+1}=2^{n+1},$$

így

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}-1,$$

következésképpen

$$\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

18. A feladat

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

miatt ekvivalens az

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

állítással.

Tekintsünk egy olyan kártyacsomagot, amelyben n egymástól megkülönböztethető piros valamint n egymástól megkülönböztethető kék lap van, és legyen S az n lapból álló osztások halmaza ebből a kártyacsomagból. Először is jegyezzük meg, hogy tetszőleges $2n$ elemű halmaznak

$$|S|=\binom{2n}{n}$$

darab n elemű részhalmaza van. Másrészt minden n lapból álló osztásban a piros lapok száma 0 és n között van. Azon n lapból álló osztások száma, amelyben pontosan k piros lap van

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k},$$

hiszen a k piros lap $\binom{n}{k}$-féleképpen, a maradék $n-k$ kék lap pedig $\binom{n}{n-k}$-féleképpen választható ki. Így a 2. szabály szerint

$$|S|=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

19. A feladat

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

miatt ekvivalens az

$$\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+2\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+n\binom{n}{n}\binom{n}{0}=n\binom{2n-1}{n-1}$$

állítással.

Legyen S azon lehetőségek halmaza, ahogy egy n fiúból és n lányból álló évfolyam n fős diákbizottságot választhat lány elnökkel. Egyrészt

$$|S|=n\binom{2n-1}{n-1},$$

hiszen az n lány közül bárki lehet elnök, a bizottság többi tagjának megválasztására pedig $\binom{2n-1}{n-1}$ lehetőség van. Másrészt minden n fős bizottságban a lányok száma 1 és n között van. Azon n fős bizottságok száma, amelyben pontosan k lány van

$$k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k},$$

hiszen $\binom{n}{k}$ lehetőség van a bizottság lány tagjainak megválasztására, majd minden ilyen választáshoz k lehetőség az elnök kijelölésére, ezután pedig $\binom{n}{n-k}$ lehetőség a bizottság fiú tagjainak megválasztására. Így a 2. szabály szerint

$$|S| = \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + 2\binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + n\binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

20. Legyen S azon lehetőségek halmaza, ahogy egy n fős évfolyam diákbizottságot választhat egy elnökkel és egy elnökhelyettessel. Egyrészt

$$|S| = n(n-1)2^{n-2},$$

hiszen az n fő közül bárki lehet elnök, a fennmaradó $n-1$ fő közül bárki lehet elnökhelyettes, a bizottság többi tagjának megválasztására pedig 2^{n-2} lehetőség van. Másrészt minden bizottságban a tagok száma 2 és n között van. A k fős bizottságok száma

$$k(k-1)\binom{n}{k},$$

hiszen $\binom{n}{k}$ lehetőség van a bizottság tagjainak megválasztására, majd minden ilyen választáshoz k lehetőség az elnök, ezután pedig $k-1$ lehetőség az elnökhelyettes kijelölésére. Így a 2. szabály szerint

$$|S| = 1\cdot 2\binom{n}{2} + 2\cdot 3\binom{n}{3} + 3\cdot 4\binom{n}{4} + \cdots + (n-1)\cdot n\binom{n}{n}.$$

Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

21. Legyen S azon lehetőségek halmaza, ahogy n-féle fánkból egy $n+1$ darabos csomag összeállítható (egyféle fánkból természetesen több is kerülhet a csomagba). Egyrészt

$$|S| = \binom{2n}{n-1},$$

hiszen a lehetséges összeállítások és az $n-1$ egyest tartalmazó $2n$ bites sorozatok között bijekció van: minden összeállításnak feleljen meg az a bitsorozat, amelyben az első egyes előtti nullák száma a csomagban levő elsőféle fánkok száma, az első és a második egyes közötti nullák száma a csomagban levő másodikféle fánkok száma, ..., az $(n-1)$-edik egyes utáni nullák száma pedig a csomagban levő n-edikféle fánkok száma. Másrészt minden csomagban vagy egyféle, vagy kétféle, ..., vagy n-féle fánk van. A pontosan k-féle fánkból összeállított $n+1$ darabos csomagok száma

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1},$$

hiszen a k-féle fánkot $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk meg, majd ezekből a csomagok összeállítására $\binom{n}{k-1}$ lehetőség van, ugyanis az összeállítások és a $k-1$ egyest tartalmazó n bites sorozatok között bijekció van: minden összeállításnak feleljen meg az a bitsorozat, amelyben az első egyes előtti nullák száma a csomagban levő elsőféle fánkok száma mínusz egy, az első és a második egyes közötti nullák száma a csomagban levő másodikféle fánkok száma mínusz egy, ..., a $(k-1)$-edik egyes utáni nullák száma pedig a csomagban levő k-adikféle fánkok száma mínusz egy (ne feledjük, mind a k-féle fánkból van legalább egy a csomagban). Így a 2. szabály szerint

$$|S| = \binom{n}{1}\binom{n}{0} + \binom{n}{2}\binom{n}{1} + \binom{n}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n-1}.$$

Az $|S|$-re vonatkozó két kifejezést összevetve az állítás adódik.

22. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Alapeset. $P(1)$ triviálisan igaz, hisz ekkor mindkét oldal $x+y$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra. Belátjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Az indukciós feltevés szerint

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

így

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\ &= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Most használjuk az

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

azonosságot:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1} = \\ &\qquad = \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Figyelembe véve még az

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1} = \\ &\qquad = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

23. (A) Tegyük fel, hogy egy sima, egy lekváros, egy vaníliás és egy csokis fánkunk van. Most három lehetőségünk van annak megválasztására, hogy a sima fánkot melyik zacskóba tegyük, három lehetőségünk van annak megválasztására, hogy a lekváros fánkot melyik zacskóba tegyük, három lehetőségünk van annak megválasztására, hogy a vaníliás fánkot melyik zacskóba tegyük, végül szintén három lehetőségünk van annak megválasztására, hogy a csokis fánkot melyik zacskóba tegyük. A 3. szabály szerint ez összesen $3^4 = 81$ lehetőség.

(B) Összesen 4 lehetőség van:

- mind a négy fánk ugyanabba a zacskóba kerül,
- egy zacskóba kerül három fánk, és egy másik zacskóba a negyedik,
- két zacskóba kerül két-két fánk,
- egy zacskóba kerül két fánk, a másik kettőbe pedig egy-egy.

(C) Az előző pontban láttuk, hogy a fánkok számát tekintve négy lehetőség van, ezeket külön-külön vizsgáljuk.

- Nyilván egyféleképpen kerülhet mind a négy fánk ugyanabba a zacskóba.
- Azt a három fánkot, amelyek egy zacskóba kerülnek $\binom{4}{3}$-féleképpen választhatjuk meg, ezzel az a fánk is egyértelműen meghatározott, amelyik a másik nem üres zacskóba kerül.
- Azt a két fánkot, amelyek egy zacskóba kerülnek $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, ezzel az a két fánk is egyértelműen meghatározott, amelyek a másik nem üres zacskóba kerülnek. Azonban vegyük észre, hogy így minden szétosztást kétszer veszünk számításba, ezért itt a lehetőségek száma $\frac{1}{2}\binom{4}{2}$.
- Azt a két fánkot, amelyek egy zacskóba kerülnek $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, ezzel az a két fánk is egyértelműen meghatározott, amelyek a másik két zacskóba kerülnek, mindegyikbe egy-egy.

Az összes lehetőség száma így

$$1 + \binom{4}{3} + \frac{1}{2}\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 1 + 4 + 3 + 6 = 14.$$

(D) Tegyük fel, hogy egy sárga, egy zöld és egy barna zacskónk van. Legyen A azon 6 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, legyen B a szétosztások halmaza, az $f\colon A \to B$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$ sorozathoz azt a szétosztást, amelynél a sárga zacskóban annyi fánk van, amennyi az első egyes előtti nullák száma, a zöld zacskóban annyi fánk van, amennyi az első és a második egyes közötti nullák száma, és a barna zacskóban annyi fánk van, amennyi a második egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A| = |B|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint

$$\binom{6}{2},$$

így a szétosztásoké is ugyanennyi.

24. Öt esetet különböztetünk meg (ne feledjük, mindenki kap legalább egy tábla csokit).

- Két gyerek négy-négy, a másik kettő pedig egy-egy tábla csokit kap. Azt a két gyereket, akik a négy-négy tábla csokit kapják $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, ezzel a másik két gyerek is egyértelműen meghatározott.
- Egy gyerek négy, egy gyerek három, egy gyerek kettő, egy gyerek pedig egy tábla csokit kap. Itt a lehetőségek száma 4! világos módon.
- Egy gyerek négy, a másik három pedig két-két tábla csopkit kap. Azt a gyereket, aki négy tábla csokit kap négyféleképpen választhatjuk meg, ezzel a másik három gyerek is egyértelműen meghatározott.
- Három gyerek három-három, egy pedig egy tábla csokit kap. Azt a gyereket, aki egy tábla csokit kap négyféleképpen választhatjuk meg, ezzel a másik három gyerek is egyértelműen meghatározott.
- Két gyerek három-három, a másik kettő pedig két-két tábla csokit kap. Azt a két gyereket, akik a három-három tábla csokit kapják $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, ezzel a másik két gyerek is egyértelműen meghatározott.

Az összes lehetőség száma így

$$\binom{4}{2} + 4! + 4 + 4 + \binom{4}{2} = 6 + 24 + 4 + 4 + 6 = 44.$$

25. (A) A feladat azon osztások számbavétele, amelyekben pontosan egy szín szerepel kétszer. Világos, hogy egy ilyen osztást egyértelműen leír a következő hármas.

1. A két egyforma színű lap színe; ennek megválasztására 4 lehetőség van.

2. A két egyforma színű lap értékei; ezek megválasztására $\binom{13}{2}$ lehetőség van.

3. A fennmaradó három egymástól és az előző két lap színétől különböző színű lapok értékei a színek $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$ sorrendjében; ezek megválasztására 13^3 lehetőség van.

Így a feladatban szereplő osztások és azon három tagú sorozatok között, amelyek első tagja egy szín, második tagja két különböző érték halmaza, harmadik tagja pedig értékek egy három elemű sorozata, bijekció van. Például

$$(\diamondsuit, \{5, Q\}, (K, K, 10)) \longleftrightarrow \{\diamondsuit 5, \diamondsuit Q, \heartsuit K, \spadesuit K, \clubsuit 10\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 13^3.$$

és persze a feladatban szereplő osztásoké is ugyanennyi.

(B) A feladat azon osztások számbavétele, amelyekben pontosan egy vagy pontosan két szín szerepel kétszer. Az előző pontban már meghatároztuk azon osztások számát, amelyekben pontosan egy szín szerepel kétszer. Ezek után foglalkozzunk azon osztásokkal, amelyekben pontosan két szín szerepel kétszer. Világos, hogy egy ilyen osztást egyértelműen leír a következő ötös.

1. Az a két szín, amelyek kétszer szerepelnek; ezek megválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van.

2. A színek $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$ sorrendjében előbb szereplő két egyforma színű lap értékei; ezek megválasztására $\binom{13}{2}$ lehetőség van.

3. A színek $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$ sorrendjében később szereplő két egyforma színű lap értékei; ezek megválasztására $\binom{13}{2}$ lehetőség van.

4. Az ötödik lapnak az előző két színtől különböző színe; ennek megválasztására 2 lehetőség van.

5. Az ötödik lap értéke; ennek megválasztására 13 lehetőség van.

Így az ilyen osztások és azon öt tagú sorozatok között, amelyek első tagja színek egy kételemű halmaza, negyedik tagja egy ezektől különböző harmadik szín, második tagja két különböző érték halmaza, harmadik tagja szintén két különböző érték halmaza, ötödik tagja pedig egy érték, bijekció van. Például

$$(\{\diamondsuit, \spadesuit\}, \{5, Q\}, \{2, 10\}, \heartsuit, K) \longleftrightarrow \{\diamondsuit 5, \diamondsuit Q, \spadesuit 2, \spadesuit 10, \heartsuit K\}.$$

A sorozatok száma a 4. szabály szerint

$$\binom{4}{2}\binom{13}{2}^2 \cdot 2 \cdot 13.$$

és persze az osztásoké is ugyanennyi.

Ennélfogva a feladatban szereplő osztások száma

$$4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 13^3 + \binom{4}{2}\binom{13}{2}^2 \cdot 2 \cdot 13.$$

Szita-formula

1. A teljes indukció erősebb változatával bizonyítunk. Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|\end{aligned}$$

tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazokra.

Alapeset(ek). A $P(1)$ állítás szerint $|A_1| = |A_1|$, ami triviálisan igaz. A $P(2)$ állítás szerint $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Ennek helyessége a következőképpen látható be. Az $A_1 \cup A_2$ halmaz felírható a diszjunkt A_1 és $A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ halmazok uniójaként, így a 2. szabály szerint $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)|$. Hasonlóan, az A_2 halmaz felírható a diszjunkt $A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ és $A_1 \cap A_2$ halmazok uniójaként, így a 2. szabály szerint $|A_2| = |A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)| + |A_1 \cap A_2|$, illetve átrendezve $|A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)| = |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Innen az állítás behelyettesítéssel adódik.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \dots, P(n)$ igaz valamely $n \geqslant 2$ egész számra; megmutatjuk, hogy ekkor $P(n+1)$ is igaz. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ tetszőleges halmazok. Az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = \\ = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

Használjuk az

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})$$

halmaz azonosságot. Ennélfogva

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - \\ |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|.\end{aligned}$$

Ismét az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i \cap A_{n+1}| - \\ - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| - \cdots + \\ + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész számra.

2. Jelölje S, F, B, T rendre azon fiúk halmazát, akik sakkoznak, fociznak, bicikliznek illetve túráznak. Feladatunk $|S \cup F \cup B \cup T|$ meghatározása. A szita formula szerint

$$\begin{aligned}|S \cup F \cup B \cup T| = &|S| + |F| + |B| + |T| - \\ &|S \cap F| - |S \cap B| - |S \cap T| - \\ &|F \cap B| - |F \cap T| - |B \cap T| + \\ &|S \cap F \cap B| + |S \cap F \cap T| + |S \cap B \cap T| + |F \cap B \cap T| - \\ &|S \cap F \cap B \cap T|.\end{aligned}$$

Itt

$$|S| = 18,\ |F| = 23,\ |B| = 21,\ |T| = 17,$$
$$|S \cap F| = 9,\ |S \cap B| = 7,\ |S \cap T| = 6,$$
$$|F \cap B| = 12,\ |F \cap T| = 9,\ |B \cap T| = 12,$$
$$|S \cap F \cap B| = 4,\ |S \cap F \cap T| = 3,\ |S \cap B \cap T| = 5,\ |F \cap B \cap T| = 7,$$
$$|S \cap F \cap B \cap T| = 3.$$

Ennélfogva

$$|S \cup F \cup B \cup T| = 18 + 23 + 21 + 17 -$$
$$- 9 - 7 - 6 - 12 - 9 - 12 + 4 + 3 + 5 + 7 - 3 = 40.$$

Mivel mindenki hódol legalább egyik sportnak, ezért az osztálylétszám is ugyanennyi.

3. Jelölje S, K, B rendre azon lányok halmazát, akik sakkoznak, kosaraznak illetve bicikliznek. A szita formula szerint

$$|S \cup K \cup B| = |S| + |K| + |B| - |S \cap K| - |S \cap B| - |K \cap B| + |S \cap K \cap B|,$$

illetve átrendezve

$$|B| = |S \cup K \cup B| - |S| - |K| + |S \cap K| + |S \cap B| + |K \cap B| - |S \cap K \cap B|$$

Mivel mindenki hódol legalább egyik sportnak, ezért $|S \cup K \cup B| = 40$, az osztálylétszám. Továbbá

$$|S| = 18,\ |K| = 23,$$
$$|S \cap K| = 9,\ |S \cap B| = 7,\ |K \cap B| = 12,$$
$$|S \cap K \cap B| = 4.$$

Ennélfogva

$$|B| = 40 - 18 - 23 + 9 + 7 + 12 - 4 = 23.$$

4. Jelölje F, J, S rendre a fiúk, a jó vagy jeles rendűek, illetve a sportolók halmazát. A szita formula szerint

$$|F \cup J \cup S| = |F| + |J| + |S| - |F \cap J| - |F \cap S| - |J \cap S| + |F \cap J \cap S|,$$

Itt

$$|F| = 20,\ |J| = 25,\ |S| = 24,$$
$$|F \cap J| = 14,\ |F \cap S| = 16,\ |J \cap S| = 15,$$
$$|F \cap J \cap S| = 10.$$

Ennélfogva

$$|F \cup J \cup S| = 20 + 25 + 24 - 14 - 16 - 15 + 10 = 34.$$

Mivel az osztálylétszám is ennyi, abből következik, hogy az osztály minden tanulója hozzátartozik az F, J, S halmazok legalább egyikéhez. Így azok a lányok, akik nem sportolnak szükségképpen jó vagy jeles rendűek.

5. Egyszerűbb lesz azon megoldásokat számba venni, amelyekre nem teljesül a feltétel; ezek számát kivonva az összes megoldás számából a feltételt kielégítő megoldások száma adódik.

Lássuk tehát, hogy hány olyan megoldás van a természetes számok körében, amelyre nem teljesül a feltétel. Legyen M_1 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $x_1 > 3$. Legyen M_2 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $x_2 > 4$. Legyen M_3 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $x_3 > 6$. Most a feltételnek nem megfelelő megoldások halmaza a természetes számok körében $M_1 \cup M_2 \cup M_3$. A szita-formulát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - \\ - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.\end{aligned}$$

Legyen A_1 azon 9 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_1 \to M_1$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_9)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma plusz négy, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, és x_3 a második egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_1| = |M_1|$. Most az A_1-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{9}{2} = 36$, következésképpen $|M_1|$ is ugyanennyi.

Legyen A_2 azon 8 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_2 \to M_2$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_8)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz öt, és x_3 a második egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_2| = |M_2|$. Most az A_2-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{8}{2} = 28$, következésképpen $|M_2|$ is ugyanennyi.

Legyen A_3 azon 6 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_3 \to M_3$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, és x_3 a második egyes utáni nullák száma plusz hét. Az f függvény bijekció, így $|A_3| = |M_3|$. Most az A_3-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{6}{2} = 15$, következésképpen $|M_3|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{1,2}$ azon 4 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{1,2} \to M_1 \cap M_2$ függvény a (b_1, b_2, b_3, b_4) sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma plusz négy, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz 5, és x_3 a második egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_{1,2}| = |M_1 \cap M_2|$. Most az $A_{1,2}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{4}{2} = 6$, következésképpen $|M_1 \cap M_2|$ is ugyanennyi.

Végül nyilván egyetlen olyan megoldás van a természetes számok körében, amelyben $x_1 \geqslant 4$ és $x_3 \geqslant 7$, így $|M_1 \cap M_3| = 1$, továbbá egyetlen olyan megoldás sincs, amelyben $x_2 \geqslant 5$ és $x_3 \geqslant 7$, illetve amelyben $x_1 \geqslant 4$, $x_2 \geqslant 5$ és $x_3 \geqslant 7$, így $|M_2 \cap M_3| = 0$ és $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0$.

Ennélfogva

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 36 + 28 + 15 - 6 - 1 - 0 + 0 = 72.$$

Ezután lássuk hány megoldás van összesen a természetes számok körében. Legyen A azon 13 bites sorozatok halmaza, amelyek 2 egyest tartalmaznak, legyen M az egyenlet összes megoldásának halmaza a természetes számok körében, az $f\colon A \to M$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{13})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, és x_3 a második egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A| = |M|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{13}{2} = 78$, következésképpen a megoldások száma is ugyanennyi.

Így azon megoldások száma a természetes számok körében, amelyekre teljesül a feltétel $78 - 72 = 6$.

6. Először is legyen T az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ egyenlet azon megoldásainak halmaza az egész számok körében, amelyekben $1 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $-2 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 5$ és $3 \leqslant x_4 \leqslant 9$, legyen M az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ egyenlet azon megoldásainak halmaza a természetes számok körében, amelyekben $y_1 \leqslant 4$, $y_2 \leqslant 6$, $y_3 \leqslant 5$ és $y_4 \leqslant 6$, valamint rendelje hozzá az $f\colon T \to M$ függvény az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ egyenlet $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, $x_4 = a_4$ megoldásához az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ egyenlet $y_1 = a_1 - 1$, $y_2 = a_2 + 2$, $y_3 = a_3$, $y_4 = a_4 - 3$ megoldását. Az f függvény bijekció, így $|T| = |M|$. Ennélfogva elég számba venni az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ egyenlet azon megoldásait a természetes számok körében, ahol $y_1 \leqslant 4$, $y_2 \leqslant 6$, $y_3 \leqslant 5$ és $y_4 \leqslant 6$.

Egyszerűbb lesz azon megoldásokat számba venni, amelyekre nem teljesül a feltétel; ezek számát kivonva az összes megoldás számából a feltételt kielégítő megoldások száma adódik.

Lássuk tehát, hogy hány olyan megoldás van a természetes számok körében, amelyre nem teljesül a feltétel. Legyen M_1 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $y_1 > 4$. Legyen M_2 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $y_2 > 6$. Legyen M_3 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $y_3 > 5$. Legyen M_4 azon megoldások halmaza a természetes számok körében, amelyekben $y_4 > 6$. Most a feltételnek nem megfelelő megoldások halmaza a természetes számok körében $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$. A szita-formulát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| =& |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| - \\
& |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - \\
& |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4| + \\
& |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + \\
& |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| - \\
& |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|.
\end{aligned}$$

Legyen A_1 azon 14 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_1 \to M_1$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_{14})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma plusz öt, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_1| = |M_1|$. Most az A_1-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{14}{3} = 364$, következésképpen $|M_1|$ is ugyanennyi.

Legyen A_2 azon 12 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_2 \to M_2$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_{12})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz hét, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_2| = |M_2|$. Most az A_2-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{12}{3} = 220$, következésképpen $|M_2|$ is ugyanennyi.

Legyen A_3 azon 13 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_3 \to M_3$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_{13})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma plusz hat, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_3| = |M_3|$. Most az A_3-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{13}{3} = 286$, következésképpen $|M_3|$ is ugyanennyi.

Legyen A_4 azon 12 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_4 \to M_4$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_{12})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma plusz hét. Az f függvény bijekció, így $|A_4| = |M_4|$. Most az A_4-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{12}{3} = 220$, következésképpen $|M_4|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{1,2}$ azon 7 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{1,2} \to M_1 \cap M_2$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_7)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma plusz öt, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz hét, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_{1,2}| = |M_1 \cap M_2|$. Most az $A_{1,2}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{7}{3} = 35$, következésképpen $|M_1 \cap M_2|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{1,3}$ azon 8 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{1,3} \to M_1 \cap M_3$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_8)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma plusz öt, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma plusz hat, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_{1,3}| = |M_1 \cap M_3|$. Most az $A_{1,3}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{8}{3} = 56$, következésképpen $|M_1 \cap M_3|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{1,4}$ azon 7 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{1,4} \to M_1 \cap M_4$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_7)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma plusz öt, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma plusz hét. Az f függvény bijekció, így $|A_{1,4}| = |M_1 \cap M_4|$. Most az $A_{1,4}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{7}{3} = 35$, következésképpen $|M_1 \cap M_4|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{2,3}$ azon 6 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{2,3} \to M_2 \cap M_3$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz hét, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma plusz hat, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A_{2,3}| = |M_2 \cap M_3|$. Most az $A_{2,3}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{6}{3} = 20$, következésképpen $|M_2 \cap M_3|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{2,4}$ azon 5 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{2,4} \to M_2 \cap M_4$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_5)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma plusz hét, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma plusz hét. Az f függvény bijekció, így $|A_{2,4}| = |M_2 \cap M_4|$. Most az $A_{2,4}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{5}{3} = 10$, következésképpen $|M_2 \cap M_4|$ is ugyanennyi.

Legyen $A_{3,4}$ azon 6 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, és rendelje hozzá az $f\colon A_{3,4} \to M_3 \cap M_4$ függvény a $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben y_1 az első egyes előtti nullák száma, y_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, y_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma plusz hat, és y_4 a harmadik egyes utáni nullák száma plusz hét. Az f függvény bijekció, így $|A_{3,4}| = |M_3 \cap M_4|$. Most az $A_{3,4}$-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{6}{3} = 20$, következésképpen $|M_3 \cap M_4|$ is ugyanennyi.

Végül nyilván egyetlen olyan megoldás sincs a természetes számok körében, amelyben $y_1 \geqslant 5$, $y_2 \geqslant 7$ és $y_3 \geqslant 6$, így $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0$, egyetlen olyan megoldás sincs, amelyben $y_1 \geqslant 5$, $y_2 \geqslant 7$ és $y_4 \geqslant 7$, így $|M_1 \cap M_2 \cap M_4| = 0$, egyetlen olyan megoldás sincs, amelyben $y_1 \geqslant 5$, $y_3 \geqslant 6$ és $y_4 \geqslant 7$, így $|M_1 \cap M_3 \cap M_4| = 0$, egyetlen olyan megoldás sincs, amelyben $y_2 \geqslant 7$, $y_3 \geqslant 6$ és $y_4 \geqslant 7$, így $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0$, valamint egyetlen olyan megoldás sincs, amelyben $y_1 \geqslant 5$, $y_2 \geqslant 7$, $y_3 \geqslant 6$ és $y_4 \geqslant 7$, így $|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4| = 0$.

Ennélfogva

$$
\begin{aligned}
|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = 364 + 220 + 286 + 220 - \\
- 35 - 56 - 35 - 20 - 10 - 20 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 914.
\end{aligned}
$$

Ezután lássuk hány megoldás van összesen a természetes számok körében. Legyen A azon 19 bites sorozatok halmaza, amelyek 3 egyest tartalmaznak, legyen M az egyenlet összes megoldásának halmaza a természetes számok körében, az $f\colon A \to M$ függvény pedig rendelje hozzá a $(b_1, b_2, \ldots, b_{19})$ sorozathoz azt a megoldást, amelyben x_1 az első egyes előtti nullák száma, x_2 az első és a második egyes közötti nullák száma, x_3 a második és a harmadik egyes közötti nullák száma, és x_4 a harmadik egyes utáni nullák száma. Az f függvény bijekció, így $|A| = |M|$. Most az A-beli sorozatok száma a 6. szabály szerint $\binom{19}{3} = 969$, következésképpen a megoldások száma is ugyanennyi.

Így az $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ egyenlet azon megoldásainak száma a természetes számok körében, amelyekre teljesül a feltétel $969 - 914 = 55$.

7. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a feladatban szereplő karakterek. Egyszerűbb lesz azon karakterláncokat számba venni, amelyekre nem teljesül az azonos karakterek egymás mellett állását tiltó feltétel; ezek számát kivonva az összes olyan $2n$ hosszú karakterlánc számából, amelyekben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a karakterek mindegyike kétszer fordul elő, az azonos karakterek egymás mellett állását tiltó feltételt kielégítő karakterláncok száma adódik.

Lássuk tehát, hány olyan karakterlánc van, amelyre nem teljesül az azonos karakterek egymás mellett állását tiltó feltétel. Minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén jelölje S_i azon $2n$ hosszú karakterláncok halmazát, amelyekben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ karakterek mindegyike kétszer fordul elő és a két a_i karakter egymás mellett áll. Most azon karakterláncok halmaza, amelyekre nem teljesül az azonos karakterek egymás mellett állását tiltó feltétel $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. A szita-formulát alkalmazzuk:

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |S_i \cap S_j| + \\ + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|$$

A jobb oldalon $|S_i|$ éppen azon $2n$ hosszú karakterláncok száma, amelyekben az a_ia_i karakterkettős egyszer, az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i\}$-beli karakterek pedig kétszer fordulnak elő, így

$$|S_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

a 6. szabállyal összhangban. Hasonlóan, $|S_i \cap S_j|$ éppen azon $2n$ hosszú karakterláncok száma, amelyekben az a_ia_i és a_ja_j karakterkettősök egyszer, az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i, a_j\}$-beli karakterek pedig kétszer fordulnak elő, így

$$|S_i \cap S_j| = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$$

a 6. szabállyal összhangban. Általában is, $|S_{t_1} \cap S_{t_2} \cap \cdots \cap S_{t_r}|$ éppen azon $2n$ hosszú karakterláncok száma, amelyekben az $a_{t_1}a_{t_1}$, $a_{t_2}a_{t_2}$, $\ldots$, $a_{t_r}a_{t_r}$ karakterkettősök egyszer, az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_r}\}$-beli karakterek pedig kétszer fordulnak elő, így

$$|S_{t_1} \cap S_{t_2} \cap \cdots \cap S_{t_r}| = \frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}$$

a 6. szabállyal összhangban. Hány $S_{t_1} \cap S_{t_2} \cap \cdots \cap S_{t_r}$ alakú tag van a szita-formulában? Nyilván amennyi r elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, vagyis $\binom{n}{r}$. Ennélfogva

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} - \binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} + \\ + \binom{n}{3}\frac{(2n-3)!}{2^{n-3}} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n!$$

Az összes olyan $2n$ hosszú karakterlánc száma, amelyekben az $a_1, a_2, \dots, a_n$ karakterek mindegyike kétszer fordul elő szintén a 6. szabállyal összhangban

$$\frac{(2n)!}{2^n},$$

így az azonos karakterek egymás mellett állását tiltó feltételt kielégítő karakterláncoké

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \binom{n}{3}\frac{(2n-3)!}{2^{n-3}} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}n!$$

8. Legyenek $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tetszőleges m illetve n elemű halmazok. Feladatunk azon $f\colon A \to B$ függvények számba vétele, amelyek B minden elemét hozzárendelik legalább egy A-beli elemhez (ezeket a függvényeket nevezzük szürjektívnek). Egyszerűbb lesz a nem szürjektív függvényeket számba venni, ezek számát kivonva az összes $f\colon A \to B$ függvény számából a szürjektív függvények száma adódik.

Lássuk tehát hány nem szürjektív függvény van. Minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén jelölje F_i azon $f\colon A \to B$ függvények halmazát, amelyek a b_i elemet nem rendelik hozzá egyetlen A-beli elemhez sem. Most a nem szürjektív függvények halmaza $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$. A szita formulát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n| &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|F_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|F_i \cap F_j| + \\ &+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|F_i \cap F_j \cap F_k| - \dots + (-1)^{n+1}|F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n|\end{aligned}$$

A jobb oldalon $|F_i|$ éppen az $f\colon A \to B \setminus \{b_i\}$ függvények száma, vagyis $(n-1)^m$. Hasonlóan, $|F_i \cap F_j|$ éppen az $f\colon A \to B \setminus \{b_i, b_j\}$ függvények száma, vagyis $(n-2)^m$. Általában is, $|F_{t_1} \cap F_{t_2} \cap \dots \cap F_{t_r}|$ éppen az

$$f\colon A \to B \setminus \{b_{t_1}, b_{t_2}, \dots, b_{t_r}\}$$

függvények száma, vagyis $(n-r)^m$. Hány $F_{t_1} \cap F_{t_2} \cap \dots \cap F_{t_r}$ alakú tag van a szita-formulában? Nyilván amennyi r elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, vagyis $\binom{n}{r}$. Ennélfogva

$$\begin{aligned}|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n| &= \binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \\ &+ \binom{n}{3}(n-3)^m - \dots + (-1)^n\binom{n}{n-1}\cdot 1^m\end{aligned}$$

Az összes $f\colon A \to B$ függvény száma n^m, így a szürjektíveké

$$n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\binom{n}{3}(n-3)^m+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 1^m.$$

9. Legyen $1 \leqslant i \leqslant n$. A feladatban szereplő m különböző ízű fánk i különböző színű zacskóba történő olyan szétosztásait, amelyeknél minden zacskóba kerül legalább egy fánk leírhatjuk olyan $f\colon A \to B$ szürjektív függvényekkel, amelyeknél A a fánkok, B pedig a zacskók halmaza. Így ezeknek a szétosztásoknak a száma az előző feladattal összhangban

$$\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^m.$$

Most tekintsük azt a függvényt, amely egy a feladatban szereplő m különböző ízű fánk i különböző színű zacskóba történő olyan szétosztásához, amelynél minden zacskóba kerül legalább egy fánk azt a halmazcsaládot rendeli, melynek halmazai az egy zacskóba került fánkokból állnak. Ez egy $i!$-hoz-1 típusú leképezés, hiszen a színek permutálása nem változtat a halmazokon. Ebből következik, hogy a feladatban szereplő m különböző ízű fánk i egyforma zacskóba történő olyan szétosztásainak száma, amelyeknél minden zacskóba kerül legalább egy fánk

$$\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^m.$$

Ezeket minden $1 \leqslant i \leqslant n$ zacskószámra összegezve az állítás adódik.

10. Egyszerűbb lesz azon n-nél kisebb nem negatív egészeket számba venni, amelyek nem relatív prímek n-hez, ezek számát n-ből kivonva az n-nél kisebb, n-hez relatív prím nem negatív egészek száma adódik.

Jelölje S azon n-nél kisebb nem negatív egészek halmazát, amelyek nem relatív prímek n-hez. Nyilvánvaló módon S azon n-nél kisebb nem negatív egészekből áll, amelyek oszthatók a $p_1, p_2, \dots, p_m$ prímek legalább egyikével. Minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén jelölje S_i azon n-nél kisebb nem negatív egészek halmazát, amelyek oszthatók p_i-vel. Ekkor

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m.$$

Alkalmazzuk a szita formulát:

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m| = \sum_{1\leqslant i\leqslant m}|S_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|S_i \cap S_j| +$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|S_i \cap S_j \cap S_k| - \dots + (-1)^{m+1}|S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m|.$$

Most vegyük észre, hogy ha r pozitív osztója n-nek, akkor pontosan n/r olyan n-nél kisebb nem negatív egész van, amelyek oszthatók r-rel, nevezetesen $0, r, 2r, \ldots, ((n/r)-1)r$. Így a jobb oldal

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{n}{p_i}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\frac{n}{p_ip_j}+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}\frac{n}{p_ip_jp_k}-\cdots+(-1)^{m+1}\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m},$$

illetve kis ügyeskedéssel

$$n\left(1-\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\right).$$

Innen

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n-|S|\\&=n-n\left(1-\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\right)\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\end{aligned}$$

adódik.

11. Először is

$$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot2\cdot3\cdot2=2^4\cdot3^2\cdot5.$$

Így az előző feladat szerint

$$\varphi(6!)=6!\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=2^6\cdot3=192.$$

Skatulya elv

1. Legyen A a kiválasztott $n+1$ szám halmaza, B pedig álljon a következő halmazokból:

$$\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{5,6\},\ \ldots,\ \{2n-1,2n\}.$$

Az f függvény rendelje hozzá minden A-beli számhoz azt a halmazrendszerbeli halmazt, amelyhez a szám hozzátartozik. Most $|B|=n$, ezért $|A|>|B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám, amelyek ugyanabban a halmazrendszerbeli halmazban vannak. Erre a két számra nyilván teljesül az állítás.

2. Először is vegyük észre, hogy minden 1 és $2n$ közötti egész szám felírható $2^k m$ alakban, ahol k nem negatív egész szám és m páratlan szám 1 és $2n-1$ között. Ezek után legyen A a kiválasztott $n+1$ szám halmaza, $B = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, és f rendelje hozzá minden A-beli számhoz a fenti módon felírt alakjában szereplő páratlan tényezőt. Most $|B| = n$, ezért $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám A-ban, amelyeknél a fenti alakban a páratlan tényező ugyanaz. Erre a két számra nyilván teljesül az állítás.

3. Tekintsük a következő n számot:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1,\\
c_2 &= 11,\\
c_3 &= 111,\\
&\vdots\\
c_n &= 111\cdots 1
\end{aligned}
$$

(itt az utolsó szám n darab egyes számjegyből áll). Ha a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok közül valamelyik osztható n-nel, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, legyen $B = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, és f rendelje hozzá minden A-beli számhoz az n-nel való osztáskor kapott maradékát. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám A-ban, amelyek n-nel osztva ugyanazt a maradékot adják. Legyen c_i és c_j két ilyen szám, ahol $i < j$. Most egyrészt $c_j - c_i$ nyilván osztható n-nel, másrészt

$$c_j - c_i = 11\cdots 100\cdots 0$$

(itt $j-i$ darab egyest i darab nulla követ). Ezzel a bizonyítás teljes.

4. Tekintsük a következő 2013 darab számot:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 7,\\
c_2 &= 77,\\
c_3 &= 777,\\
&\vdots\\
c_{2013} &= 777\cdots 7
\end{aligned}
$$

(itt az utolsó szám 2013 darab hetes számjegyből áll). Indirekt tegyük fel, hogy a $c_1, c_2, \ldots, c_{2013}$ számok közül egyik sem osztható 2013-mal. Legyen $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_{2013}\}$, legyen $B = \{1, 2, \ldots, 2012\}$, és f rendelje hozzá minden A-beli számhoz a 2013-mal való osztáskor kapott maradékát. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám A-ban, amelyek

2013-mal osztva ugyanazt a maradékot adják. Legyen c_i és c_j két ilyen szám, ahol $i < j$. Most egyrészt $c_j - c_i$ nyilván osztható 2013-mal, másrészt

$$c_j - c_i = 77 \cdots 700 \cdots 0$$

(itt $j-i$ darab hetest i darab nulla követ), azaz $c_j - c_i = c_{j-i}10^i$. Ebből viszont következik, hogy c_{j-i} is osztható 2013-mal, hiszen $\mathrm{lnko}(10^i, 2013) = 1$ minden i pozitív egész számra. Ellentmondásra jutottunk, ezért a $c_1, c_2, \ldots, c_{2013}$ számok között szükségképpen létezik olyan, amelyik osztható 2013-mal.

5. Legyen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ természetes számok egy tetszőleges n elemű halmaza. Tekintsük a következő n természetes számot:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1, \\
b_2 &= a_1 + a_2, \\
b_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
&\vdots \\
b_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.
\end{aligned}$$

Ha a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok közül valamelyik osztható n-nel, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, legyen $B = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, és f rendelje hozzá minden A-beli számhoz az n-nel való osztáskor kapott maradékát. Mivel $|A| > |B|$, így a skatulya elv szerint van két olyan szám A-ban, amelyek n-nel osztva ugyanazt a maradékot adják. Legyen b_i és b_j két ilyen szám, ahol $i < j$. Most egyrészt $b_j - b_i$ nyilván osztható n-nel, másrészt $b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$. Ezzel a bizonyítás teljes.

6. Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ a kiválasztott számokat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$. Tekintsük a következő $2n$ pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1.$$

Ezek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint $2n-1$, így a skatulya elv szerint van közöttük kettő, amelyek megegyeznek. Mivel az $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ számok páronként különbözők, és ugyanez igaz az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számokra is, ezért szükségképpen $a_i = a_j - a_1$ valamilyen $2 \leqslant i, j \leqslant n+1$ és $i \neq j$ indexekre. Ám ez éppen azt jelenti, hogy valamilyen $2 \leqslant i, j \leqslant n+1$ és $i \neq j$ indexekre $a_j = a_i + a_1$.

7. Minden $1 \leqslant i \leqslant 30$ esetén jelölje a_i azon partik számát, amelyet a győztes az i-edik napig játszott, beleértve az i-edik napot is. Ekkor $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$

különböző pozitív egész számok szigorúan monoton növekvő sorozata, ahol $1 \leqslant a_i \leqslant 45$ minden $1 \leqslant i \leqslant 30$ esetén. Hasonlóan, $(a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14)$ is különböző pozitív egész számok szigorúan monoton növekvő sorozata, ahol $15 \leqslant a_i + 14 \leqslant 59$ minden $1 \leqslant i \leqslant 30$ esetén.

A 60 darab $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14$ pozitív egész szám mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint 59, így a skatulya elv szerint van közöttük kettő, amelyek megegyeznek. Mivel az $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ számok páronként különbözők, és ugyanez igaz az $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ számokra is, ezért szükségképpen $a_i = a_j + 14$ valamilyen $i > j$ indexekre. Ám ez éppen azt jelenti, hogy a győztes a $(j+1)$-edik naptól az i-edik napig, beleértve a $(j+1)$-edik és az i-edik napot is, pontosan 14 partit játszott.

Generátorfüggvények

1. Jelölje $f(x)$ a sorozat generátorfüggvényét:

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots .$$

Próbáljuk meg felírni az

$$(1, 1, f_1 + 2f_0, f_2 + 2f_1, f_3 + 2f_2, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő három generátorfüggvényt:

$$\begin{aligned}
(1, 0, 0, 0, 0, \ldots) &\longleftrightarrow 1, \\
(0, f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) &\longleftrightarrow xf(x), \\
(0, 0, 2f_0, 2f_1, 2f_2, \ldots) &\longleftrightarrow 2x^2f(x).
\end{aligned}$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(1, f_0, f_1 + 2f_0, f_2 + 2f_1, \ldots) \longleftrightarrow 1 + xf(x) + 2x^2f(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $f_0 = 1$).

Ebből következik, hogy

$$1 + xf(x) + 2x^2f(x) = f(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

adódik.

Alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét az $f(x)$ generátorfüggvényre. Először a nevezőt faktorizáljuk:

$$1 - x - 2x^2 = (1+x)(1-2x).$$

A következő lépés olyan A_1 és A_2 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{A_1}{1+x} + \frac{A_2}{1-2x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{1+x} + \frac{A_2}{1-2x} &= \frac{(1-2x)A_1 + (1+x)A_2}{(1+x)(1-2x)} \\ &= \frac{(A_1+A_2) + (-2A_1+A_2)x}{1-x-2x^2}.\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$\frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{(A_1+A_2) + (-2A_1+A_2)x}{1-x-2x^2}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 &= 1, \\ -2A_1 + A_2 &= 0.\end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}A_1 &= 1/3, \\ A_2 &= 2/3.\end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{1/3}{1+x} + \frac{2/3}{1-2x}.$$

Most

$$\begin{aligned}(1, -1, 1, -1, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+x}, \\ (1, 2, 2^2, 2^3, \cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-2x}.\end{aligned}$$

Innen

$$f_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$$

adódik.

2. Jelölje $f(x)$ a sorozat generátorfüggvényét:

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots .$$

Próbáljuk meg felírni az

$$(3, 6, f_1 + 6f_0, f_2 + 6f_1, f_3 + 6f_2, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő három generátorfüggvényt:

$$\begin{aligned}(3, 3, 0, 0, 0, \ldots) &\longleftrightarrow 3 + 3x,\\ (0, f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) &\longleftrightarrow xf(x),\\ (0, 0, 6f_0, 6f_1, 6f_2, \ldots) &\longleftrightarrow 6x^2 f(x).\end{aligned}$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(3, 3 + f_0, f_1 + 6f_0, f_2 + 6f_1, \ldots) \longleftrightarrow 3 + 3x + xf(x) + 6x^2 f(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $f_0 = 3$).

Ebből következik, hogy

$$3 + 3x + xf(x) + 6x^2 f(x) = f(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$f(x) = \frac{3 + 3x}{1 - x - 6x^2}$$

adódik.

Alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét az $f(x)$ generátorfüggvényre. Először a nevezőt faktorizáljuk:

$$1 - x - 6x^2 = (1 + 2x)(1 - 3x).$$

A következő lépés olyan A_1 és A_2 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{3 + 3x}{1 - x - 6x^2} = \frac{A_1}{1 + 2x} + \frac{A_2}{1 - 3x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\frac{A_1}{1 + 2x} + \frac{A_2}{1 - 3x} = \frac{(1 - 3x)A_1 + (1 + 2x)A_2}{(1 + 2x)(1 - 3x)} = \frac{(A_1 + A_2) + (-3A_1 + 2A_2)x}{1 - x - 6x^2}.$$

Világos, hogy

$$\frac{3+3x}{1-x-6x^2} = \frac{(A_1+A_2)+(-3A_1+2A_2)x}{1-x-6x^2}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 3, \\ -3A_1 + 2A_2 &= 3. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3/5, \\ A_2 &= 12/5. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{1-x-6x^2} = \frac{3/5}{1+2x} + \frac{12/5}{1-3x}.$$

Most

$$\begin{aligned} (1,-2,2^2,-2^3,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+2x}, \\ (1,3,3^2,3^3,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-3x}. \end{aligned}$$

Innen

$$f_n = \frac{3}{5}\cdot(-2)^n + \frac{12}{5}\cdot 3^n = \frac{3\cdot(-2)^n + 4\cdot 3^{n+1}}{5}$$

adódik.

3. Jelölje $f(x)$ a sorozat generátorfüggvényét:

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots .$$

Próbáljuk meg felírni a

$$(0, 1, f_1 + f_0 + 1, f_2 + f_1 + 1, f_3 + f_2 + 1, \ldots)$$

sorozat generátorfüggvényét. Tekintsük a következő négy generátorfüggvényt:

$$\begin{aligned} (-1,0,0,0,0,\ldots) &\longleftrightarrow -1, \\ (1,1,1,1,1,\ldots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x}, \\ (0,f_0,f_1,f_2,f_3,\ldots) &\longleftrightarrow xf(x), \\ (0,0,f_0,f_1,f_2,\ldots) &\longleftrightarrow x^2f(x). \end{aligned}$$

Összeadva ezeket éppen a kívánt sorozat generátorfüggvényéhez jutunk:

$$(0, f_0+1, f_1+f_0+1, f_2+f_1+1, \ldots) \longleftrightarrow -1+\frac{1}{1-x}+xf(x)+x^2f(x).$$

(A második tagok csak formálisan különböznek, mivel $f_0=0$).

Ebből következik, hogy

$$-1+\frac{1}{1-x}+xf(x)+x^2f(x)=f(x),$$

ahonnan rendezéssel

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-x-x^2)}$$

adódik.

Alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét az $f(x)$ generátorfüggvényre. Először a nevezőt faktorizáljuk:

$$(1-x)(1-x-x^2)=(1-x)(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x),$$

ahol

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{és} \qquad \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A következő lépés olyan A_1, A_2 és A_3 valós számok meghatározása, amelyekkel

$$\frac{x}{(1-x)(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)}=\frac{A_1}{1-x}+\frac{A_2}{1-\alpha_1x}+\frac{A_3}{1-\alpha_2x}.$$

Kicsit bűvészkedünk:

$$\frac{A_1}{1-x}+\frac{A_2}{1-\alpha_1x}+\frac{A_3}{1-\alpha_2x}=$$
$$=\frac{A_1(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)+A_2(1-x)(1-\alpha_2x)+A_3(1-x)(1-\alpha_1x)}{(1-x)(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)}.$$

Mivel $(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)=1-x-x^2$, ezért

$$\frac{A_1(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)+A_2(1-x)(1-\alpha_2x)+A_3(1-x)(1-\alpha_1x)}{(1-x)(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)}=$$
$$=\frac{A_1(1-x-x^2)+A_2(1-x)(1-\alpha_2x)+A_3(1-x)(1-\alpha_1x)}{(1-x)(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)}.$$

Itt a számláló átrendezés után egy olyan másodfokú polinom lesz, ahol x^2 együtthatója

$$-A_1+\alpha_2A_2+\alpha_1A_3,$$

x együtthatója

$$-A_1 - (1+\alpha_2)A_2 - (1+\alpha_1)A_3,$$

a konstans tag pedig

$$A_1 + A_2 + A_3.$$

A kapott racionális függvény világos módon akkor is csak akkor egyezhet meg az

$$\frac{x}{(1-x)(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)}$$

racionális függvénnyel, ha

$$\begin{aligned} -A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_3 &= 0, \\ -A_1 - (1+\alpha_2)A_2 - (1+\alpha_1)A_3 &= 1, \\ A_1 + A_2 + A_3 &= 0. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= -1, \\ A_2 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \\ A_3 &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} &\frac{x}{(1-x)(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)} = \\ &\qquad = -\frac{1}{1-x} + \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\frac{1}{1-\alpha_1 x} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\frac{1}{1-\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

Most

$$\begin{aligned} (1,1,1,1,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x}, \\ (1,\alpha_1,\alpha_1^2,\alpha_1^3,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha_1 x}, \\ (1,\alpha_2,\alpha_2^2,\alpha_2^3,\cdots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

Innen

$$f_n = -1 + \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

adódik.

4. Jelölje az

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sorozat generátorfüggvényét:

$$S(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \cdots .$$

Tekintsük a következő két generátorfüggvényt:

$$(0, 1, 2, 3, 4, \ldots) \longleftrightarrow \frac{x}{(1-x)^2},$$
$$(1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Összeszorozva ezeket éppen az $S(x)$ generátorfüggvényhez jutunk, így

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

A generátorfüggvény együtthatóinak meghatározásához jegyezzük meg, hogy az

$$\frac{1}{(1-x)^3}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\binom{3+n-1}{n} = \binom{n+2}{2},$$

ezért az

$$\frac{x}{(1-x)^3}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\binom{(n-1)+2}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

ha $n \geqslant 1$, és 0, ha $n = 0$. Ennélfogva

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

5. Jelölje a

$$q_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sorozat generátorfüggvényét:

$$Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots .$$

Tekintsük a következő két generátorfüggvényt:

$$(0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots) \longleftrightarrow \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

$$(1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Összeszorozva ezeket éppen a $Q(x)$ generátorfüggvényhez jutunk, így

$$Q(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}.$$

A generátorfüggvény együtthatóinak meghatározásához jegyezzük meg, hogy az

$$\frac{1}{(1-x)^4}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\binom{4+n-1}{n} = \binom{n+3}{3},$$

ezért az

$$\frac{x}{(1-x)^4}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\binom{(n-1)+3}{3} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

ha $n \geqslant 1$, és 0, ha $n = 0$, illetve az

$$\frac{x^2}{(1-x)^4}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\binom{(n-2)+3}{3} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

ha $n \geqslant 2$, és 0, ha $n < 2$, következésképpen az

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$$

generátorfüggvény n-edik tagja

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ha $n \geqslant 2$,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

ha $n = 1$, és 0, ha $n = 0$. Ennélfogva

$$q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

6. Sima fánkból egyféleképpen választhatunk 0 darabot, nullaféleképpen 1 darabot, nullaféleképpen 2 darabot, nullaféleképpen 3 darabot, egyféleképpen 4 darabot, nullaféleképpen 5 darabot, nullaféleképpen 6 darabot, nullaféleképpen 7 darabot, egyféleképpen 8 darabot, és így tovább. Így a sima fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$S(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots = \frac{1}{1-x^4}.$$

Lekváros fánkból egyféleképpen választhatunk 0 darabot, nullaféleképpen 1 darabot, egyféleképpen 2 darabot és nullaféleképpen kettőnél több darabot Így a lekváros fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$L(x) = 1 + x^2.$$

Csokis fánkból nullaféleképpen választhatunk 0 darabot, nullaféleképpen 1 darabot, nullaféleképpen 2 darabot, egyféleképpen 3 darabot, egyféleképpen 4 darabot, egyféleképpen 5 darabot, és így tovább. Így a csokis fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$C(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots = \frac{x^3}{1-x}.$$

Végül vaniliás fánkból egyféleképpen választhatunk 0 darabot, egyféleképpen 1 darabot és nullaféleképpen egynél több darabot. Így a vaníliás fánkok választásához tartozó generátorfüggvény

$$V(x) = 1 + x.$$

Ezek után a fánkok adott feltételeknek megfelelő választásához tartozó generátorfüggvény

$$\begin{aligned} S(x)L(x)C(x)V(x) &= \frac{x^3(1+x^2)(1+x)}{(1-x^4)(1-x)} \\ &= \frac{x^3(1+x^2)(1+x)}{(1+x^2)(1-x^2)(1-x)} \\ &= \frac{x^3(1+x)}{(1-x^2)(1-x)} \\ &= \frac{x^3(1+x)}{(1+x)(1-x)(1-x)} \\ &= \frac{x^3}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Igen ám, de

$$(1, 2, 3, 4, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2},$$

így

$$(0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots) \longleftrightarrow \frac{x^3}{(1-x)^2},$$

következésképpen n fánk a feltételeknek megfelelően $n-2$ különböző módon választható ki, ha $n \geqslant 3$, és nullaféleképpen, ha $n < 3$.

7. Az énekesmadarak választásához tartozó generátorfüggvény

$$E(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Az aligátor választásához tartozó generátorfüggvény

$$F(x) = 1 + x.$$

A macskák választásához tartozó generátorfüggvény

$$M(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{x^2}{1-x}.$$

Végül a chihuahuák és labradorok választásához tartozó generátorfüggvény

$$K(x) = 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + 2^5x^5 + \cdots = \frac{4x^2}{1-2x}.$$

Így az idős hölgyet a délutáni sétájára elkísérő háziállatok választásához tartozó generátorfüggvény

$$\begin{aligned} E(x)F(x)M(x)K(x) &= \frac{x^2}{1-x^2}\,(1+x)\,\frac{x^2}{1-x}\,\frac{4x^2}{1-2x} \\ &= \frac{x^2}{(1-x)(1+x)}\,(1+x)\,\frac{x^2}{1-x}\,\frac{4x^2}{1-2x} \\ &= \frac{4x^6}{(1-x)^2(1-2x)}. \end{aligned}$$

A generátorfüggvény együtthatóinak meghatározásához először alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét az

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$$

formális hatványsorra. Olyan A_1, A_2 és A_3 valós számokat keresünk tehát, amelyekkel

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{A_3}{1-2x}.$$

Kicsit bűvészkedünk a jobb oldallal:

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{1-x}+\frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{A_3}{1-2x} = \\ &\qquad = \frac{A_1(1-x)(1-2x) + A_2(1-2x) + A_3(1-x)^2}{(1-x)^2(1-2x)} \\ &\qquad = \frac{(A_1+A_2+A_3) + (-3A_1-2A_2-2A_3)x + (2A_1+A_3)x^2}{(1-x)^2(1-2x)}. \end{aligned}$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)} = \\ &\qquad = \frac{(A_1+A_2+A_3) + (-3A_1-2A_2-2A_3)x + (2A_1+A_3)x^2}{(1-x)^2(1-2x)} \end{aligned}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 1, \\ -3A_1 - 2A_2 - 2A_3 &= 0, \\ 2A_1 + A_3 &= 0. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$A_1 = -2,$$
$$A_2 = -1,$$
$$A_3 = 4.$$

Így

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)} = -\frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-2x}.$$

Most

$$(1,1,1,1,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x},$$
$$(1,2,3,4,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2},$$
$$(1,2,2^2,2^3,\cdots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x}.$$

Ennélfogva az

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$$

formális hatványsor n-edik tagja

$$-2-(n+1)+4\cdot 2^n = 2^{n+2}-n-3.$$

Következésképpen a

$$\frac{4x^6}{(1-x)^2(1-2x)}$$

generátorfüggvény n-edik tagja, vagyis azon lehetőségek száma, ahányféleképpen az idős hölgy a délutáni sétára magával vihet n állatot a feltételeknek megfelelő módon

$$4(2^{(n+2)-6}-(n-6)-3) = 4(2^{n-4}-n+3) = 2^{n-2}-4n+12$$

ha $n \geqslant 6$, és 0 ha $n < 6$.

Irodalomjegyzék

[1] Andrásfai B.: *Ismerkedés a gráfelmélettel.* Tankönyvkiadó, 1973.

[2] Andreescu, T., Feng, Z.: *A path to combinatorics for undergraduates.* Bikhäuser, 2004.

[3] Bóna, M.: *A walk through combinatorics.* Fourth edition. World Scientific, 2017.

[4] Csákány B.: *Diszkrét matematikai játékok.* Második kiadás. Polygon, 2005.

[5] Freud R., Gyarmati E.: *Számelmélet.* Második kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

[6] Friedl K., Recski A., Simonyi G.: *Gráfelméleti feladatok.* Typotex, 2006.

[7] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O.: *Konkrét matematika.* Műszaki Könyvkiadó, 1998.

[8] Hajnal P.: *Elemi kombinatorikai feladatok.* Második kiadás. Polygon, 2005.

[9] Katona Gy., Recski A., Szabó Cs.: *A számítástudomány alapjai.* Ötödik kiadás. Typotex, 2006.

[10] Lehman, E., Leighton, F. T., Meyer, A. R.: *Mathematics for computer science.* Notes for class MIT 6.042, 2017.

[11] Lovász L.: *Kombinatorikai problémák és feladatok.* Typotex, 1999.

[12] Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K.: *Diszkrét matematika.* Második kiadás. Typotex, 2010.

[13] Rosen, K. H.: *Discrete mathematics and its applications.* Seventh edition. McGraw-Hill, 2012.

[14] Tasnádi A.: *Számítástudomány gazdaságinformatikusoknak.* Aula Kiadó, 2006.

[15] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika.* Műszaki Könyvkiadó, 1971